台灣二ＯＯ五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：長方體中切割正立方體之研究

學　　校：嘉義市立民生國民中學

作　　者：吳培綸、林正倫

作者簡介

我是吳培綸，現在是嘉義市立民生國中三年級的學生。興趣是：算數學和打球，平常沒事就喜歡找問題、解決問題。會研究這個題目是因爲自己喜歡沒事就找數學題目來做，而在歷屆的學測中發現這個題目。後來在學校老師的指導之下，參與了這次的科展比賽，希望自己全力以赴，能夠有所表現。

我是林正倫，現在是嘉義市立民生國中三年級的學生，興趣是看電視、算數學，家中有爸爸、媽媽和妹妹。媽媽是個全職的家庭主婦，而爸爸是個大理石代工師傅——以勞力換取金錢，是一份十分辛苦的工作，對子女的表現自然也就寄予厚望。

小學五年級的時候，在一次的偶然機會下，我參加了數學競試，而結果當然是慘不人賭，但這也為我的數學之路開啓了一扇大門，我積極的向媽媽要求去參加校外的數學加強課程，加上自己求真、不認輸的個性，幾年下來，數學對我來說越益得心應手，挑戰各類難題、尋求解答的快感已成了我最大的樂趣。

科展—這個名詞，國小時離我很遠，上了國中以後，在張仁澤老師的引導之下接觸數學科展，我對它有了不一樣的定義。

在一次數學考試中，我碰到一個以長方形內切正方形的題目——這個問題激起了大家的好奇心，於是我們幾個同學決定深入研究，其中最困難的地方是維度的改變，我們逐一克服，造就了今天的這份報告。過程中最讓我感動的是受到許多人的幫忙，例如：一直跟我們研究、討論，但在報名參展時礙於報名人數而被迫退出的同學——周榮峰、以及教了矇懂的我們許多事情的中正大學王慶安教授，還有——長久以來，隨時陪伴我們，引領我們、教導我們的——張仁澤老師。

長方體中切割正立方體之研究

摘要：

我們這個作品是先由在長方形中切割出正方形的研究著手，先研究出在平面中，在一個邊長爲任意正整數的長方形中，如何找到在其中切割出正方形，但正方形的邊長爲最大，而且正方形的個數爲最少的方法和規則。

緊接著，我們更進一步想研究這個問題在長方體中的研究：在長方體三邊長 a 、 b 、 c （ a 、 b 、 c 均爲正整數）中，如何在其中切割出正立方體，每次切割出邊長爲最大的正立方體，而且正方體的個數爲最少的方法和規則。

Abstract:

This study began with investigation of how to segment squares from a rectangle. We studied from a rectangle, with random positive integer sides, trying to figure out the methods and regulations to segments squares with the longest side length but the fewest number of squares within.

Moreover, we took further step to examine a cuboid. We found out the methods and regulations to segment cubes with longest side length but fewest number of cubes from a cuboid with sides a, b, and c(a ,b ,c are positive integers).

長方體中切割正立方體之研究

壹、研究動機：

在九十一年第一次學力測驗的題目中，有一道題目如下：

『小方拿了一張長 80 公分、寬 50 公分的紙張，剛好剪出n個正方形（其面積大小可以不相同）。請問n的最小值是多少？(A) 3 (B) 5(C) 10(D) 40。』

當初老師將這個題目交給我們時，覺得非常有趣，認為可以深入研究。這個題目的內容在於尋找平面圖形中，如何每次切割出邊長為最大的正方形，且正方形個數是最少的方法。於是我們找了幾個同學，想共同討論出這個問題的解法。除此之外，我們覺得這個題目很有發展性，能否更深入研究呢？我們當場想到幾個方向，例如：

（一）對於邊長為任意整數的矩形，能否找出切割正方形個數最少的方法，但每次切割的正方形都是最大的？

（二）對於二維空間這些切割後的結果，是否能用數學的方法說明？

（三）對於邊長為任意正整數的長方體，能否找出切割正方體個數最少的方法？

（四）對於長方體切割後的結果，能否用數學的方法說明之？

（五）對於二維空間和三維空間中圖形之間，是否有相關的性質可以加以討論?

想到這幾點，難度似乎頗高，但更激發出我們的鬥志和挑戰心，在老師的大力支持下，我們決定用『**長方體中切割正立方體之研究**』來做為我們的研究主題。

貳、研究目的：

（一）在二維空間裡，對於邊長是任意整數的長方形，能否尋找出：每次切割出邊長為最大的正方形，且正方形個數最少的方法和規則。

（二）在三維空間裡，對於邊長是任意整數的長方體，能否尋找出：每次切割出邊長為最大的正方體，且正方體個數最少的方法和規則。

（三）在二維空間和三維空間中，能否尋找出長方形和長方體之間的連結性或相關性。

參、研究設備及器材：紙、筆、電腦。

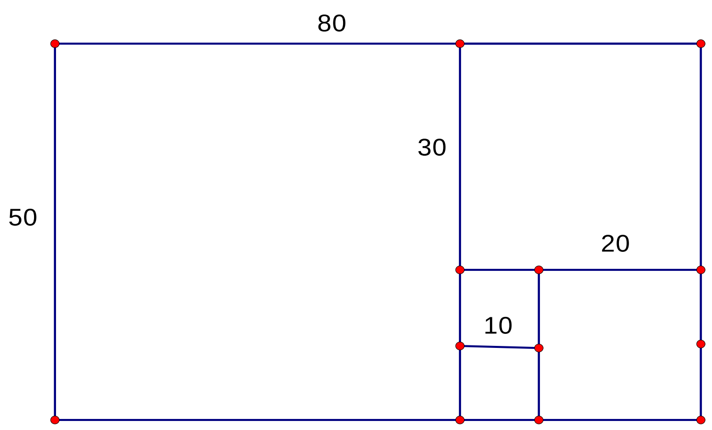
肆、研究過程或方法：

（一）首先，我們先從學力測驗的題目著手：

『<u>小方</u>拿了一張長 80 公分、寬 50 公分的紙張，剛好剪出n個正方形（其面積大小可以不相同）。請問n的<u>最小值</u>是多少？(A) 3(B) 5(C) 10(D) 40。』

在這個題目中，我們如果只要求切割出正方形，那切法有很多種。其中，比較簡單的方法是把它切成 4000 個 1x1 的正方形，但是這樣不符合這個題目中，所要求 n 的最小值。於是，我們討論出想要切出最少正方形數目，那正方形越大，切出來的數目就會越少。因此，我們若要在邊長 80x50 的矩形切出第一個最大的正方形，那就是先切出 50x50 的這種正方形，利用這種想法，我們會以 50（較短邊）爲邊長，在 80（較長邊）這一邊取出一個邊長 50，取完後還剩下 30，這樣我們已經先切出一個最大的正方形。

切完後，還剩下一個邊長爲 30x50 的矩形要繼續切。我們仍然要切出最大的正方形才會使正方形數較少，依照前面的方法先切出一個邊長 30x30 的正方形，剩下邊長爲 30x20 的矩形，再把這個 30x20 的矩形，切成一個 20x20 的正方形，剩下 10x20 的矩形，最後再把這個 10x20 的矩形切成 2 個 10x10 的正方形，就成功的解決這道問題了，因此答案是 5 塊。因爲我們每次切割的時候都是切出最大的正方形，來達到正方形數目較少，所以這樣的正方形切割就是我們所要的。（如下圖）



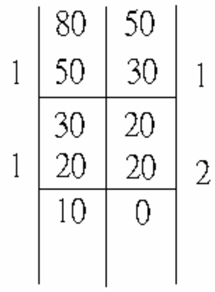
經過我們討論後，我們發現：這個切割的過程和輾轉相除法是有關聯的，

80÷50=1……30

50÷30=1……20

30÷20=1…….10

20÷10=2…… 0



而正方形的個數就是每次相除所得到的商，分別相加所得，如上例中，將每次相除所得的商分別相加可得 1+1+1+2=5。我們還發現：滿足正方形切割的最小正方形邊長爲（80，50）=10。

所以，經過上面的討論，我們可以知道：

（1）在這個題目中，正方形的個數，可以利用輾轉相除法計算出，其結果是將每次相除所得的商，分別相加。

（2）原矩形的長和寬與滿足正方形切割的最小正方形邊長之間有一個普遍存在的關係。如果原矩形的長爲 a，寬爲 b，滿足正方形切割的最小正方形邊長爲 k，則 $k = (a, b)$。

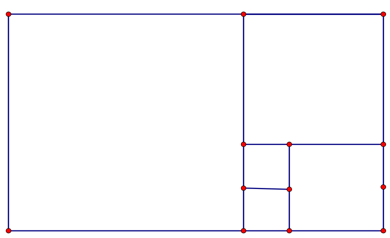
（二）將給定一個邊長爲**<u>正整數</u>** a 及 b 之矩形，分割成邊長亦爲**<u>正整數</u>**之正方形，這種分法有很多，譬如成將長 a 等分及將寬 b 等分，可得 $a \times b$ 個單位正方形的分割，如果考慮每次分割都要分割出最大正方形，每次裁剪都取邊長較短的一邊爲正方形的邊長，利用轉輾相除法的原理來分割所得出之正方形個數，記爲函數 $f(a,b)$。

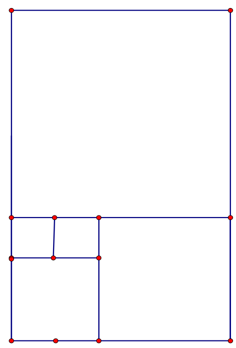
我們發現有這個函數有下列幾個性質：

（1） $f(a,b) = f(b,a)$

【說明】：在二維空間上，邊長爲整數 a、b 之矩形和邊長爲整數 b，a 之矩形，其實是相同形狀的矩形，只是放置的方法不同而已，而且，我們都必須以較短邊來當作正方形的邊長，切割出正方形，來達到正方形的個數最少的目的，所以，最後的正方形個數是相同的。如同上個題目中，

$$f(80,50) = f(50,80) = 5$$

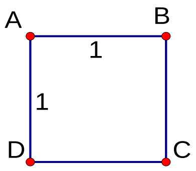




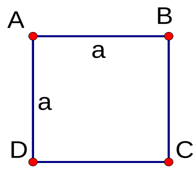
（**2**） $f(1,1)=1$ ； $f(a,a)=1$

【說明】: 如左下圖，若矩形 ABCD 中， $\overline{AD}=1$ 、 $\overline{AB}=1$ ，則矩形 ABCD 本身即是個正方形，所以可得： $f(1,1)=1$ 。

同理，如右下圖，若矩形 ABCD 中， $\overline{AD}=a$ 、 $\overline{AB}=a$ ，則矩形 ABCD 本身即是個正方形，所以可得： $f(a,a)=1$ 。



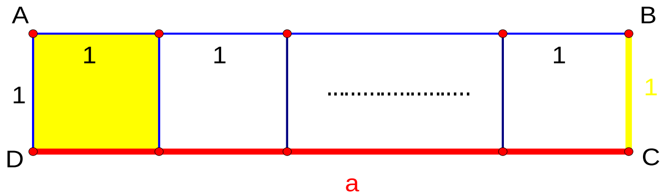
$f(1,1)=1$



$f(a,a)=1$

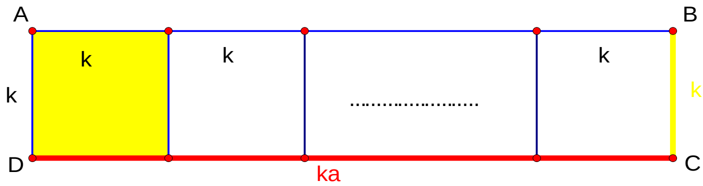
（**3**） $f(a,1)=a$ ； $f(ka,k)=a$

【說明】: 如下圖，若矩形 ABCD 中， $\overline{AB}=a$ 、 $\overline{AD}=1$ ，則我們以較短邊 $\overline{AD}$ 來做爲正方形的邊長，故 $\overline{AB}$ 可以分成 a 等分，因此共可得到 a 個正方形。



$f(a,1)=a$

如下圖，若矩形 ABCD 中， $\overline{AB}=ka$ 、 $\overline{AD}=k$ ，則我們以較短邊 $\overline{AD}$ 來做爲正方形的邊長，故 $\overline{AB}$ 可以分成 a 等分，因此共可得到 a 個正方形。



$f(ka,k)=a$

（**4**） $f(ka,kb)=f(a,b)$

【說明】：利用輾轉相除法求兩個正整數a和b的計算過程可列式如下：

$$a = bq_0 + r_0$$

$$b = r_0 q_1 + r_1$$

$$r_0 = r_1 q_2 + r_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$$

故 $f(a,b) = q_0 + q_1 + q_2 + \ldots.. + q_n + q_{n+1}$ ……………………【1】

將上面各式，利用等量公理，同乘k倍（$k \neq 0$），我們可以得到：

$$ka = kbq_0 + kr_0$$

$$kb = kr_0 q_1 + kr_1$$

$$kr_0 = kr_1 q_2 + kr_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$kr_{n-2} = kr_{n-1} q_n + kr_n$$

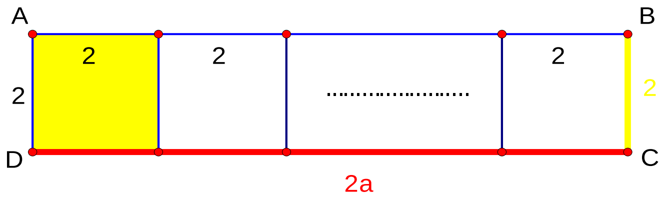
$$kr_{n-1} = kr_n q_{n+1}$$

故 $f(ka,kb) = q_0 + q_1 + q_2 + \ldots.. + q_n + q_{n+1}$ ……. …………【2】

由【1】、【2】我們可得：$f(ka,kb) = f(a,b)$

（5） $f(2a,2)=a$

【說明】：如下圖，若矩形 ABCD 中，$\overline{AB}=2a$ 、$\overline{AD}=2$ ，則我們以較短邊 $\overline{AD}$ 來做爲正方形的邊長，故 $\overline{AB}$ 可以分成 a 等分，因此共可得到 a 個正方形。

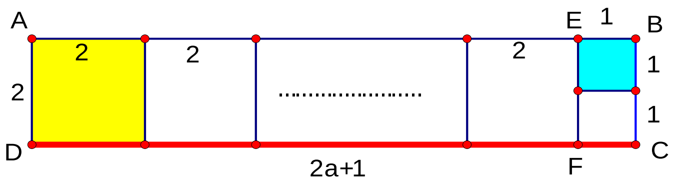


$$f(2a,2)=a$$

或者，也可利用（4）的性質： $f(2a,2)=f(a,1)=a$ ，亦可證明之。

（6） $f(2a+1,2)=a+2$

【說明】：如下圖，若矩形 ABCD 中， $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}=2a+1$ 、$\overline{AD}=2$ ，則我們以較短邊 $\overline{AD}$ 來做爲正方形的邊長，故 $\overline{AE}$ 可分成 a 等分，矩形 AEFD 可形成 a 個邊長爲 2 的正方形，另外矩形 EBCF，可用較短邊 $\overline{BE}$ =1 爲邊長，形成 2 個小正方形，因此，矩形 ABCD 共可得到 a+2 個正方形。

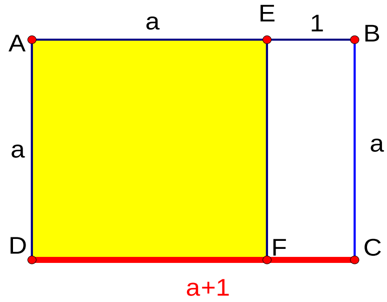


$$f(2a+1,2)=a+2$$

（7） $f(a+1,a)=a+1$

【說明】：如下圖，若矩形 ABCD 中， $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}=a+1$ 、$\overline{AD}=a$ ，則我們以較短

邊$\overline{AD}$來做爲正方形的邊長，矩形 AEFD 可形成 1 個邊長爲a的正方形，另外，還剩下矩形 EBCF，邊長分別爲 1 和a，可分成爲a個邊長爲 1 的小正方形，因此，$f(a+1,a)=f(a,a)+f(1,a)=1+a$。

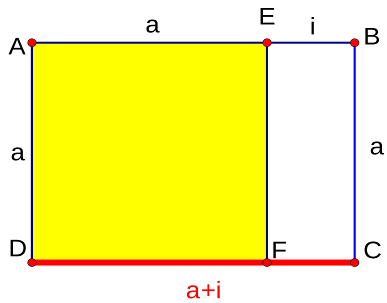


$$f(a+1,a)=a+1$$

或者，我們可以利用（3）的性質得到：$f(a+1,a)=f(a,a)+f(1,a)=1+a$亦可證明之。

（8） $f(a+i,a)=f(a,a)+f(i,a)=1+f(i,a)$ （$a\geq i$）

【說明】：如下圖，若矩形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}=a+i$、$\overline{AD}=a$，則我們以較短邊$\overline{AD}$來做爲正方形的邊長，矩形 AEFD 可形成 1 個邊長爲a的正方形，另外，還剩下矩形 EBCF，邊長分別爲i和a，因此保持其原本的函數性質，所以$f(a+i,a)=f(a,a)+f(i,a)=1+f(i,a)$。

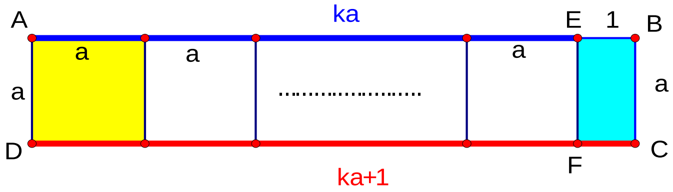


$$f(a+i,a)=f(a,a)+f(i,a)=1+f(i,a)$$

（9） $f(ka+1,a)=f(ka,a)+f(1,a)=k+a$

【說明】：如下圖，若矩形 ABCD 中，$\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}=ka+1$、$\overline{AD}=a$，則我們以較短邊$\overline{AD}$來做爲正方形的邊長，故$\overline{AE}$可分成$k$等分，矩形 AEFD 可形成 k

個邊長為a的正方形，另外，還剩下矩形 EBCF，邊長分別為 1 和a，因此，矩形 ABCD=矩形 AEFD+矩形 EBCF，可得 $f(ka+1,a)=f(ka,a)+f(1,a)=k+a$。

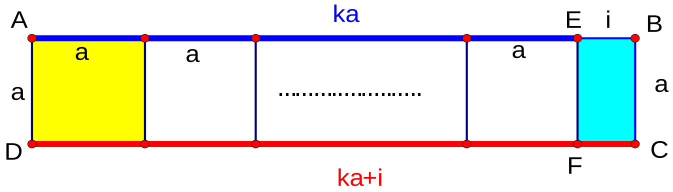


$$f(ka+1,a)=f(ka,a)+f(1,a)=k+a$$

（10） $f(ka+i,a)=f(ka,a)+f(i,a)=k+f(i,a)$　　　　（ $a\ge i$ ）

【說明】：如下圖，若矩形 ABCD 中， $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}=ka+i$ 、 $\overline{AD}=a$ ，則我們以較短邊 $\overline{AD}$ 來做為正方形的邊長，故 $\overline{AE}$ 可分成k等分，矩形 AEFD 可形成k個邊長為a的正方形，另外，還剩下矩形 EBCF，邊長分別為i和a ，因此，矩形 ABCD=矩形 AEFD+矩形 EBCF，可得到：

$f(ka+i,a)=f(ka,a)+f(i,a)=k+f(i,a)$



$$f(ka+i,a)=f(ka,a)+f(i,a)=k+f(i,a)$$

（11） $f(n,a)=f(n,n-a)$　　（ $n>a$ ）

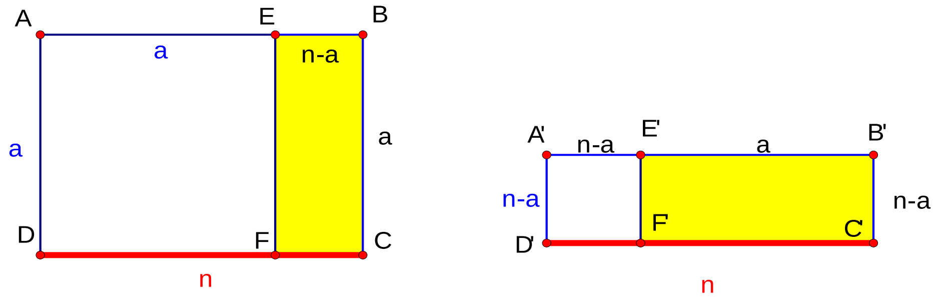
【說明】：如左下圖，若矩形 ABCD 中， $\overline{AB}=n$ ， $\overline{AD}=a$ ，所以我們可以利用較短邊 $\overline{AD}=a$ 來切割出一個正方形，還剩下一個矩形 EFCB，長分別為$n-a$和a ，因矩形 ABCD=矩形 AEFD+矩形 EBCF，所以我們可以得到：

$$f(n,a)=f(a,a)+f(n-a,a)=1+f(n-a,a)\text{..........................}【3】$$

同理：如右下圖，若矩形 $A'B'CD'$ 中，$\overline{A'B'}=n$，$\overline{A'D'}=n-a$，所以我們可以利用較短邊 $\overline{A'D'}=n-a$ 來切割出一個正方形，還剩下一個矩形 EFCB，長分別爲 a 和 $n-a$，因矩形 $A'B'CD'$=矩形 $A'E'F'D'$+矩形 $E'B'C'F'$，所以我們可以得到：

$$f(n,n-a)=f(n-a,n-a)+f(a,n-a)=1+f(a,n-a)\text{ .... }【4】$$

由【3】、【4】我們可以知道：$f(n,a)=1+f(n-a,a)=f(n,n-a)$



$$f(n,a)=f(n,n-a)$$

（12） $f(a,b)\leq ab$

【說明】: 在一個邊長爲正整數 a 及 b 之矩形，最容易的分割方法是將長 a 等分及將寬 b 等分，可得 ab 個單位正方形的分割，但這個報告中，所研究的函數 $f(a,b)$ 是考慮每次分割，都要分割出邊長爲最大正方形，而且正方形的個數要最少的方法和規則。所以，我們可知：$f(a,b)\leq ab$。

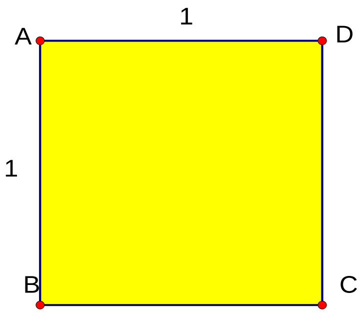
（四）從二維空間推向三維空間：當我們研究完二維空間內的情形之後，我們想推廣至三維空間內，是否也存在著類似的性質。首先，我們先從最簡單的性質驗證起，因爲三維空間是除了二維空間的長和寬之外，再多加了一個維度：高，所構成的，因此我們先固定第三維度：高，讓它的長度和二維空間中最短的邊長相同，來觀察一些簡易的性質。再藉由這些性質，來當作工具，進而探討三維空間內更複雜的性質。

首先，我們和二維空間的想法相同，在一個邊長爲正整數 a、b、c 之長方

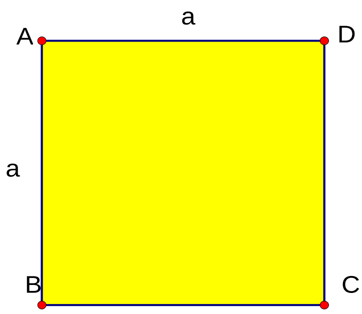
體，分割成邊長亦為正整數之正方體，這種分法有很多，譬如成將長 a 等分，將寬 b 等分，將高 c 等分，可得 abc 個單位正方體的分割，如果考慮每次分割都要分割出最大正方體，若依照此種分割出之正方形個數，記為函數 $f(a,b,c)$。

我們發現，從二維空間推向三維空間，有幾個性質可當作工具來使用：

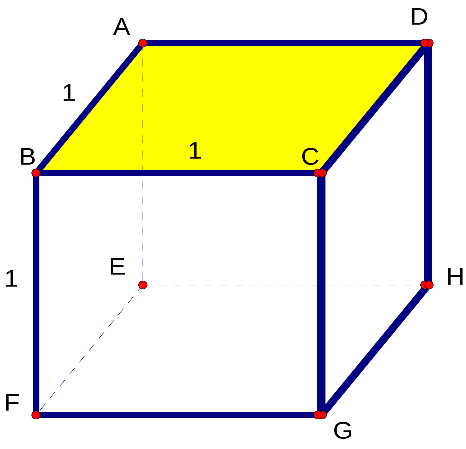
（1） $f(1,1)=f(1,1,1)=1$ ； $f(a,a)=f(a,a,a)=1$



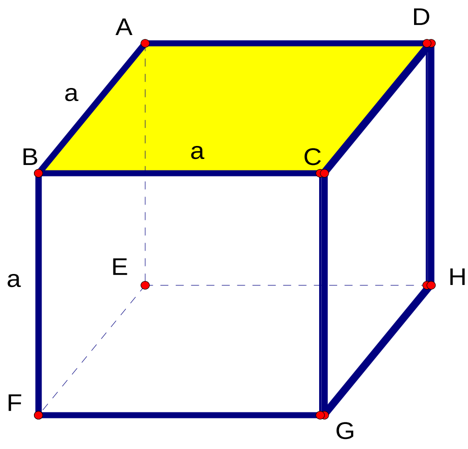
$f(1,1)=1$



$f(a,a)=1$



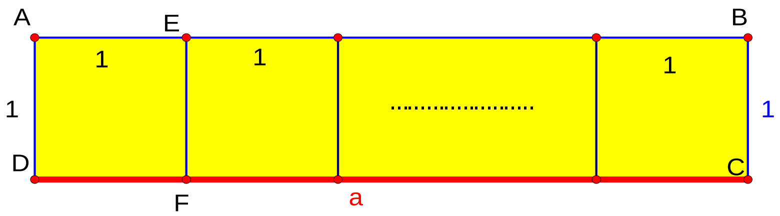
$f(1,1,1)=1$



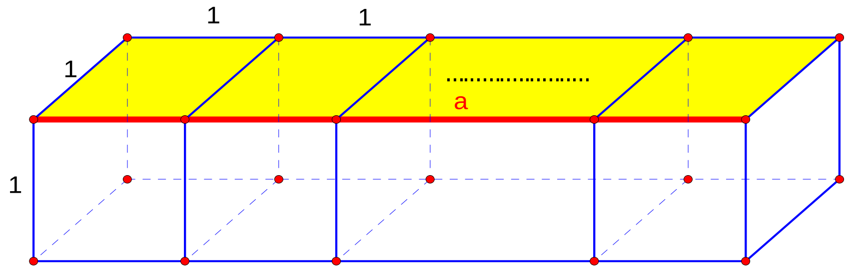
$f(a,a,a)=1$

（2） $f(a,1)=f(a,1,1)$ ； $f(ka,k)=f(ka,k,k)=a$

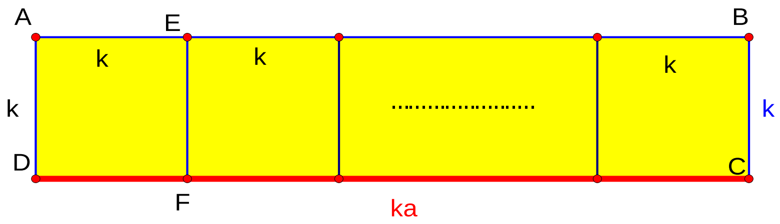
【說明】： $f(a,1)=a; f(a,1,1)=a$



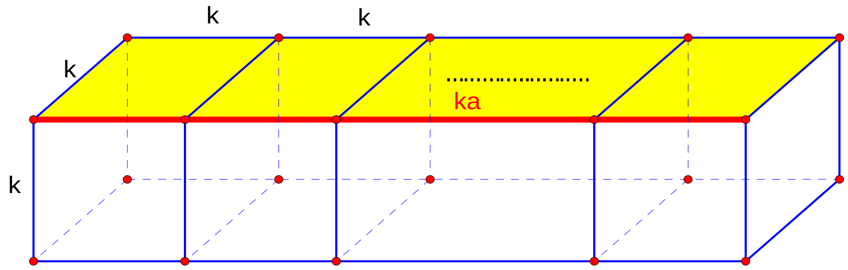
$$f(a,1)=a$$



$$f(a,1,1)=a$$



$$f(ka,k)=a$$



$$f(ka,k,k)=a$$

（四）給定一個邊長爲<u>正整數</u> a、b、c 之長方體，分割成邊長亦爲<u>正整數</u>之正方體，這種分法有很多，譬如成將長 a 等分，將寬 b 等分，將高 c 等分，可得 abc 個單

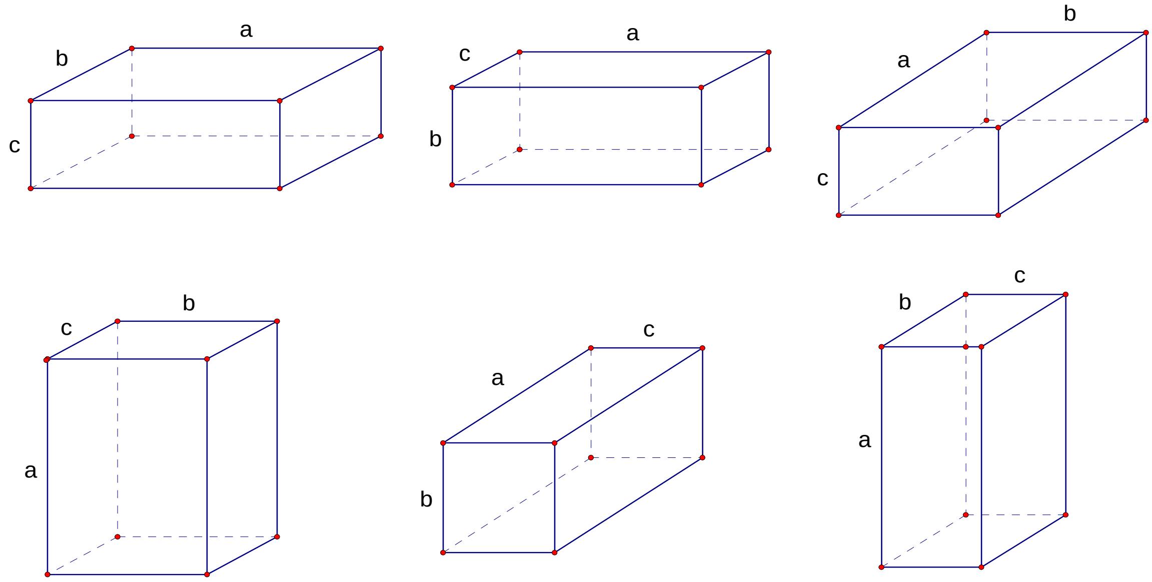
位正方體的分割，如果考慮每次分割都要分割出最大正方體，若依照此種分割出之正方形個數，記爲函數 $f(a,b,c)$。

我們發現有這個函數有下列幾個性質：

（**1**） $f(a,b,c)=f(a,c,b)=f(b,c,a)=f(b,a,c)=f(c,a,b)=f(c,a,b)$

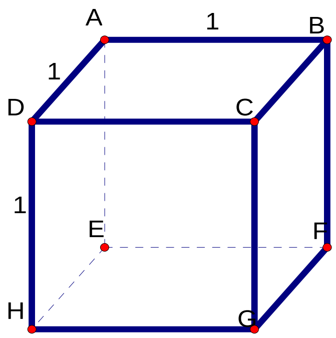
【說明】: 在邊長均爲正整數 $(\dot{a},b,c)(a,c,b)$、(b,a,c)、(b,c,a)、(c,a,b)、(c,b,a) 的六組長方體中，因爲此六個長方體，它們的邊長只是<u>排列順序</u>上的差異，無論是如何排列，我們要分割最大的正方體，都是要以三個邊長中的最短邊來做切割，所以，我們可以把這六個長方體視成同一組數據，來進行研究。因此，我們可得：

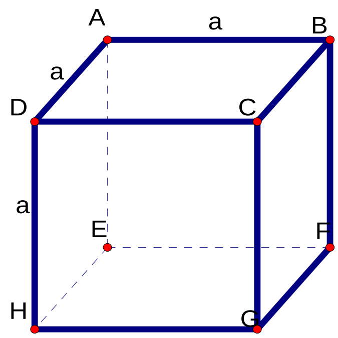
$$f(a,b,c)=f(a,c,b)=f(b,c,a)=f(b,a,c)=f(c,a,b)=f(c,a,b)$$



（**2**） $f(1,1,1)=1$ ； $f(a,a,a)=1$

【說明】: 在邊長三邊都是相同正整數 $(1,1,1)$ 的長方體中，本身即是一個正方體，所以 $f(1,1,1)=1$ ；同理，邊長是 (a,a,a) 的長方體，也是同樣的結果，故 $f(a,a,a)=1$。

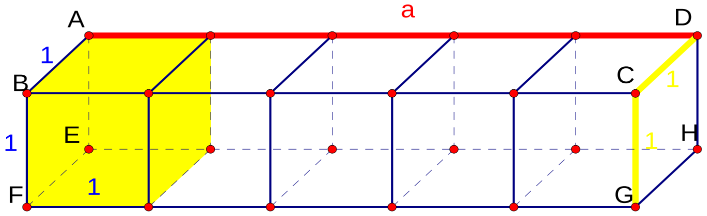




$f(1,1,1)=1$ $\qquad$ $f(a,a,a)=1$

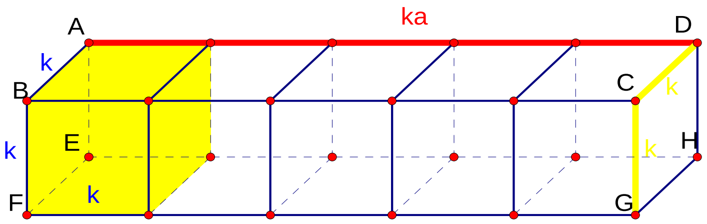
（**3**） $f(a,1,1)=a$ ； $f(ka,k,k)=a$

【說明】：如下圖，長方體 ABCDEFGH 中，若 $\overline{AD}=a$、$\overline{AB}=1$、$\overline{BF}=1$，則我們會以最短邊 $\overline{AB}=\overline{BF}=1$ 來當作正方體的邊長，則 $\overline{AD}$ 可分成 a 等分，所以我們可以得到最少的正方體個數= $a\times1\times1$（個），因此 $f(a,1,1)=a$。



$$f(a,1,1)=a$$

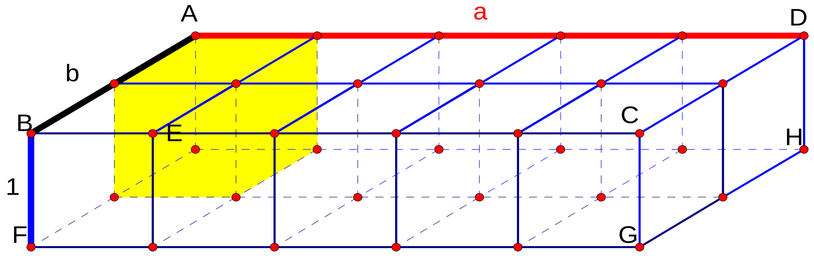
如下圖，長方體 ABCDEFGH 中，若 $\overline{AD}=ka$、$\overline{AB}=k$、$\overline{BF}=k$，則我們會以最短邊 $\overline{AB}=\overline{BF}=k$ 來當作正方體的邊長，則 $\overline{AD}$ 可分成 a 等分，所以我們可以得到最少的正方體個數= $a\times1\times1$（個），因此，$f(ka,k,k)=a$。



$$f(ka,k,k)=a$$

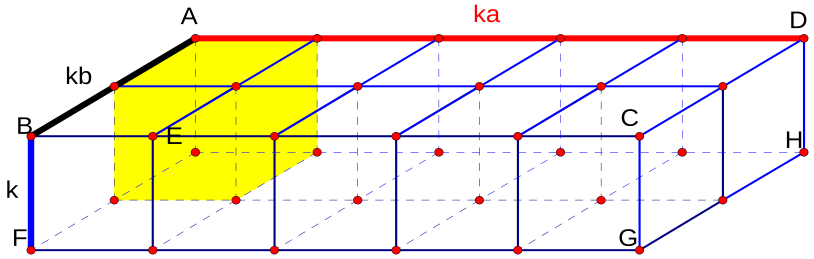
（**4**）$f(a,b,1)=ab$；$f(ka,kb,k)=ab$

【說明】: 如下圖，長方體 ABCDEFGH 中，若 $\overline{AD}=a$ 、 $\overline{AB}=b$ 、 $\overline{BF}=1$ ，則我們會以最短邊 $\overline{BF}=1$ 來當作正方體的邊長，則 $\overline{AD}$ 可分成 a 等分， $\overline{AB}$ 可分成 b 等分，所以我們可以得到最少的正方體個數= $a\times b\times 1$ （個），因此 $f(a,b,1)=ab$ 。



$f(a,b,1)=ab$

如下圖，長方體 ABCDEFGH 中，若 $\overline{AD}=ka$ 、 $\overline{AB}=kb$ 、 $\overline{BF}=k$ ，則我們會以最短邊 $\overline{BF}=k$ 來當作正方體的邊長，則 $\overline{AD}$ 可分成 a 等分， $\overline{AB}$ 可分成 b 等分，所以我們可以得到最少的正方體個數= $a\times b\times 1$ （個），因此 $f(ka,kb,k)=ab$ 。



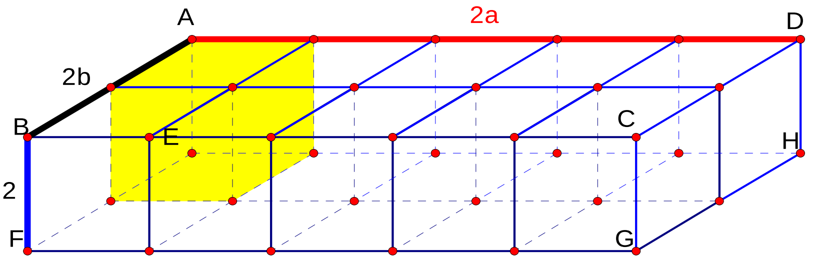
$f(ka,kb,k)=ab$

（**5**） $f(ka,kb,kc)=f(a,b,c)$

【說明】: 在這個題目中，經過平面以及前面幾個的討論，我們可以知道長方體的總個數與每個商的總和有關。所以當邊長皆放大 k 倍的時候，經由等量公理，我們可以知道其商的總和不變。

（**6**） $f(2a,2b,2)=f(a,b,1)=ab$

【說明】：如下圖，長方體 ABCDEFGH 中，若 $\overline{AD}=2a$ 、 $\overline{AB}=2b$ 、 $\overline{BF}=2$ ，則我們會以最短邊 $\overline{BF}=2$ 來當作正方體的邊長，則 $\overline{AD}$ 可分成 a 等分， $\overline{AB}$ 可分成 b 等分，所以我們可以得到最少的正方體個數 $=a\times b\times 1$ （個），因此 $f(2a,2b,2)=f(a,b,1)=ab$ 。



$$f(2a,2b,2)=f(a,b,1)=ab$$

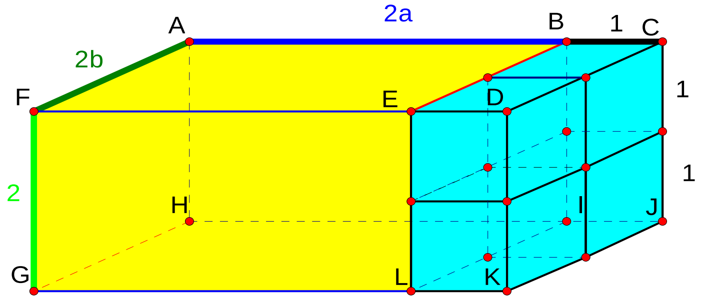
（**7**） $f(2a+1,2b,2)=ab+4b$

【說明】：如下圖，長方體 AFDCHGKL 中，若 $\overline{AC}=2a+1$ ， $\overline{AF}=2b$ ， $\overline{FG}=2$ ，

我們會以最短邊 $\overline{FG}=2$ ，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分爲兩個小長方體而得到：

整個長方體 AFDCHGKL=黃色長方體+藍色長方體

即 $f(2a+1,2b,2)=f(2a,2b,2)+f(1,2b,2)=f(a,b,1)+f(1,2b,2)=ab+4b$



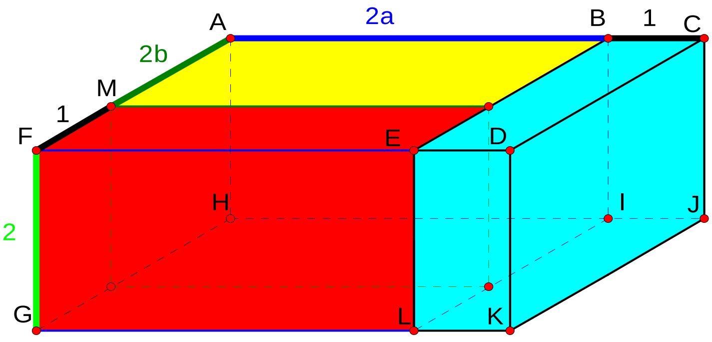
$$f(2a+1,2b,2)=f(2a,2b,2)+f(1,2b,2)=f(a,b,1)+f(1,2b,2)=ab+4b$$

（**8**） $f(2a+1,2b+1,2)=ab+4a+4b+2$

【說明】: 如下圖，長方體 ACDFHGKJ 中，若 $\overline{AC}=2a+1$，$\overline{AF}=2b+1$，$\overline{FG}=2$，

我們會以最短邊 $\overline{FG}=2$，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分爲三個小的長方體，即長方體 ACDFHGKJ=黃色長方體+藍色長方體+紅色長方體，其中 $\overline{AB}=2a$、$\overline{AM}=2b$、$\overline{BC}=1$、$\overline{FM}=1$，因此即：

$$f(2a+1,2b+1,2)=f(2a,2b,2)+f(1,2b+1,2)+f(2a,1,2)=ab+4a+4b+2$$



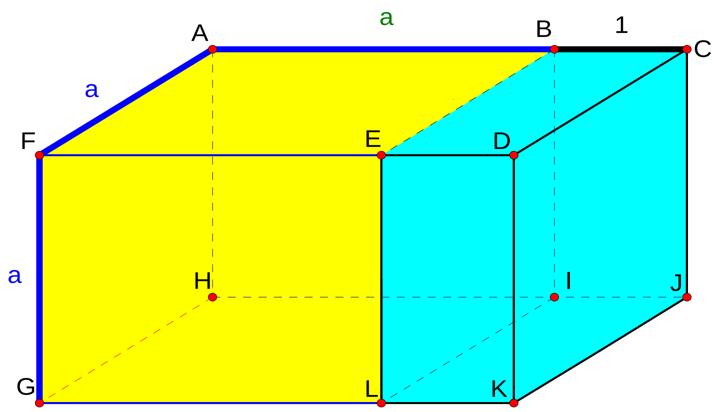
$$f(2a+1,2b+1,2)=f(2a,2b,2)+f(1,2b+1,2)+f(2a,1,2)=ab+4a+4b+2$$

（**9**） $f(a+1,a,a)=f(a,a,a)+f(1,a,a)=1+a^2$

【說明】: 如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=a+1$，$\overline{AF}=a$，$\overline{FG}=a$，

我們會以最短邊 $\overline{FG}=a$，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分爲兩個小的長方體而得到：長方體 AFDCHGKJ=黃色長方體+藍色長方體，

即 $f(a+1,a,a)=f(a,a,a)+f(1,a,a)=1+a^2$



$$f(a+1,a,a)=f(a,a,a)+f(1,a,a)=1+a^2$$

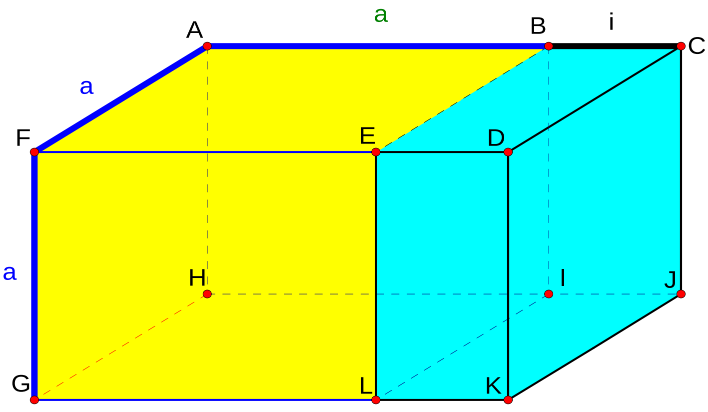
（**10**） $f(a+i,a,a)=f(a,a,a)+f(i,a,a)=1+f(i,a,a)$ （ $a\geq i$ ）

【說明】：如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=a+i$ ，$\overline{AF}=a$ ，$\overline{FG}=a$ ，

我們會以最短邊 $\overline{FG}=a$ ，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分為兩個

小的長方體而得到：長方體 AFDCHGKJ=黃色長方體+藍色長方體，

即 $f(a+i,a,a)=f(a,a,a)+f(i,a,a)=1+f(i,a,a)$



$$f(a+i,a,a)=1+f(i,a,a)$$

（**11**） $f(ka+1,a,a)=f(ka,a,a)+f(1,a,a)=k+a^2$

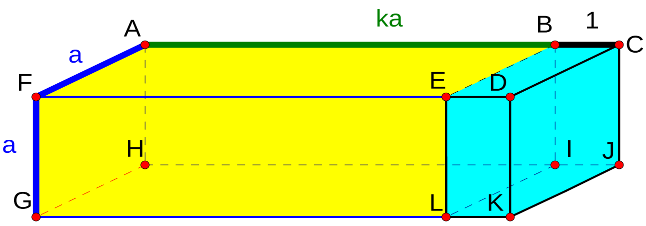
【說明】：如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=ka+1$ ，$\overline{AF}=a$ ，$\overline{FG}=a$ ，

我們會以最短邊 $\overline{FG}=a$ ，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分為兩個

小的長方體而得到：

長方體 AFDCHGKJ=黃色長方體+藍色長方體，

即 $f(ka+1,a,a)=f(ka,a,a)+f(1,a,a)=k+a^2$



$$f(ka+1,a,a)=k+a^2$$

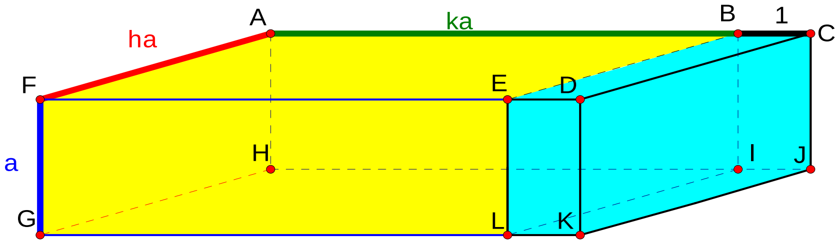
（**1２**） $f(ka+1,ha,a)=f(ka,ha,a)+f(1,ha,a)=kh+ha^2$

【說明】：如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=ka+1$，$\overline{AF}=ha$，$\overline{FG}=a$，

我們會以最短邊 $\overline{FG}=a$，當作正方體的邊長，則我們可以得到：

長方體 AFDCHGKJ=黃色長方體+藍色長方體，

即 $f(ka+1,ha,a)=f(ka,ha,a)+f(1,ha,a)=f(k,h,1)+f(1,ha,a)=kh+ha^2$



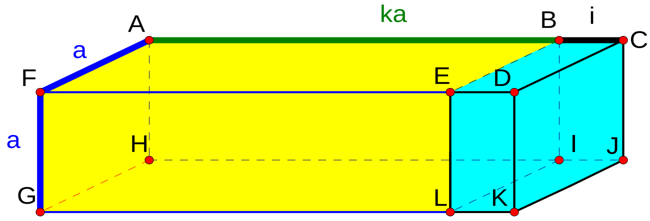
$$f(ka+1,ha,a)=kh+ha^2$$

（13） $f(ka+i,a,a)=f(ka,a,a)+f(i,a,a)=k+f(i,a,a)$ （$a\geq i$）

【說明】：如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=ka+i$，$\overline{AF}=a$，$\overline{FG}=a$，

我們會以最短邊 $\overline{FG}=a$，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分爲兩個小的長方體而得到：長方體 AFDCHGKJ=黃色長方體+藍色長方體，

即 $f(ka+i,a,a)=f(ka,a,a)+f(i,a,a)=k+f(i,a,a)$



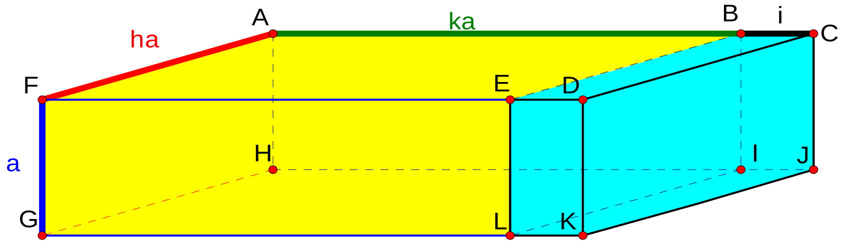
$$f(ka+i,a,a)=f(ka,a,a)+f(i,a,a)=k+f(i,a,a)$$

（14） $f(ka+i,ha,a)=f(ka,ha,a)+f(i,ha,a)=hk+f(i,ha,a)$

【說明】：如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=ka+i$ ，$\overline{AF}=ha$ ，$\overline{FG}=a$ ，

我們會以最短邊 $\overline{FG}=a$ ，當作正方體的邊長，則我們可以得到：

長方體 AFDCHGKJ=黃色長方體+藍色長方體，
即 $f(ka+i,ha,a)=f(ka,ha,a)+f(i,ha,a)=hk+f(i,ha,a)$

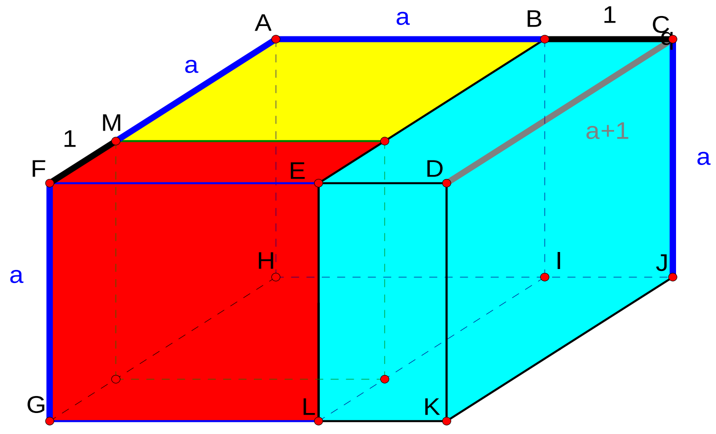


$$f(ka+i,ha,a)=hk+f(i,ha,a)$$

（１５） $f(a+1,a+1,a)=f(a,a,a)+f(1,a+1,a)+f(a,1,a)=1+a+2a^2$

【說明】：如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=a+1$ ，$\overline{AF}=a+1$，$\overline{FG}=a$ ，

我們會以最短邊 $\overline{FG}=a$，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分爲三個小的長方體，即：長方體 AFDCHGKJ=黃色正立方體+藍色長方體+紅色長方形，即 $f(a+1,a+1,a)=f(a,a,a)+f(1,a+1,a)+f(a,1,a)=1+a+2a^2$



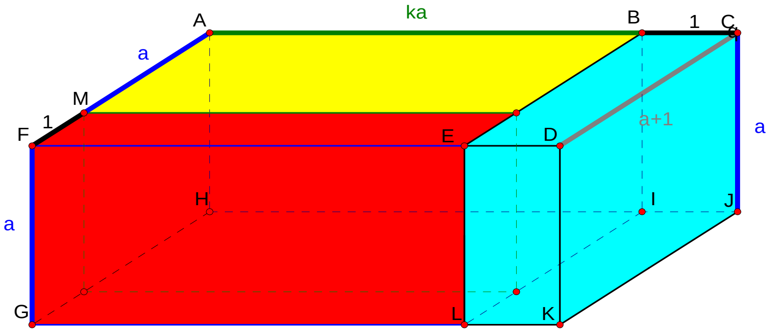
$$f(a+1,a+1,a)=1+a+2a^2$$

（１６） $f(ka+1,a+1,a)=f(ka,a,a)+f(1,a+1,a)+f(ka,1,a)=k+a+a^2+ka^2$

【說明】：如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=a+1$，$\overline{AF}=a+1$，$\overline{FG}=a$，

以最短邊 $\overline{FG}=a$，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分爲三個小的長方體，即：長方體 AFDCHGKJ=黃色長方體+藍色長方體+紅色長方形，即：

$$f(ka+1,a+1,a)=f(ka,a,a)+f(1,a+1,a)+f(ka,1,a)=k+a+a^2+ka^2$$



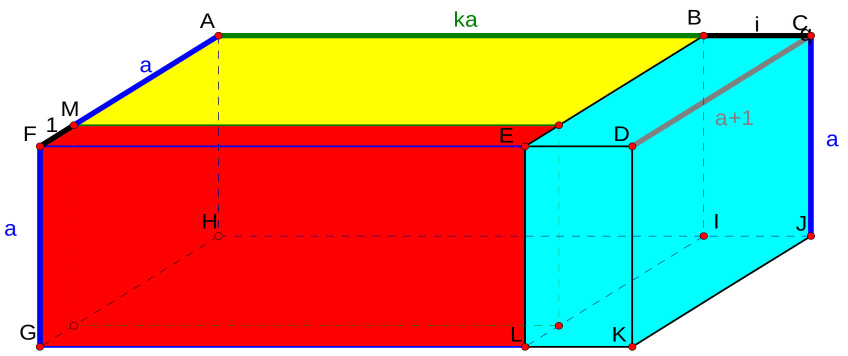
$$f(ka+1,a+1,a)=k+a+a^2+ka^2$$

（１７）$f(ka+i,a+1,a)=f(ka,a,a)+f(i,a+1,a)+f(ka,1,a)=k+f(i,a+1,a)+ka^2$

【說明】：如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=a+i$，$\overline{AF}=a+1$，$\overline{FG}=a$，

以最短邊 $\overline{FG}=a$，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分爲三個小的長方體，即：長方體 AFDCHGKJ=黃色長方體+藍色長方體+紅色長方形，即：

$$f(ka+i,a+1,a)=f(ka,a,a)+f(i,a+1,a)+f(ka,1,a)=k+f(i,a+1,a)+ka^2$$



$$f(ka+i,a+1,a)=k+f(i,a+1,a)+ka^2$$

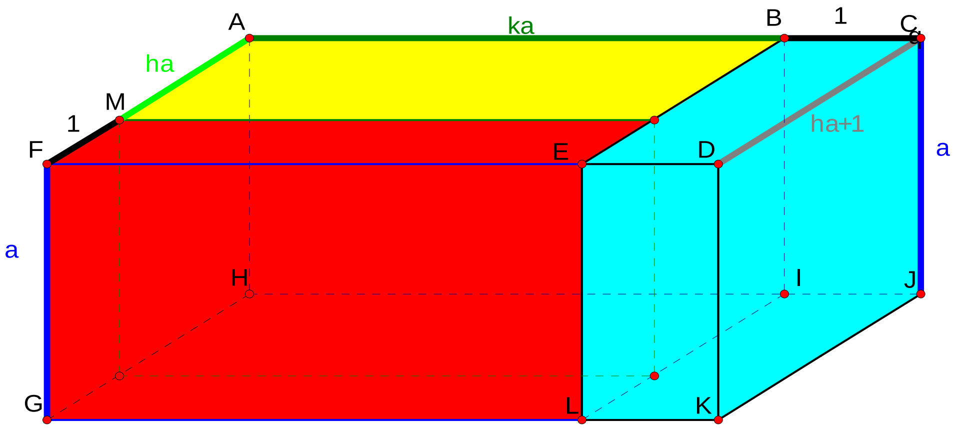
（１８）$f(ka+1,ha+1,a)=f(ka,ha,a)+f(1,ha+1,a)+f(ka,1,a)=hk+a+ha^2+ka^2$

【說明】: 如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=ka+1$，$\overline{AF}=ha+1$，$\overline{FG}=a$，

以最短邊 $\overline{FG}=a$，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分為三個小的長

方體，即：長方體 AFDCHGKJ=黃色長方體+藍色長方體+紅色長方形，即：

$$f(ka+1,ha+1,a)=f(ka,ha,a)+f(1,ha+1,a)+f(ka,1,a)=hk+a+ha^2+ka^2$$



$$f(ka+1,ha+1,a)=hk+a+ha^2+ka^2$$

（１９）

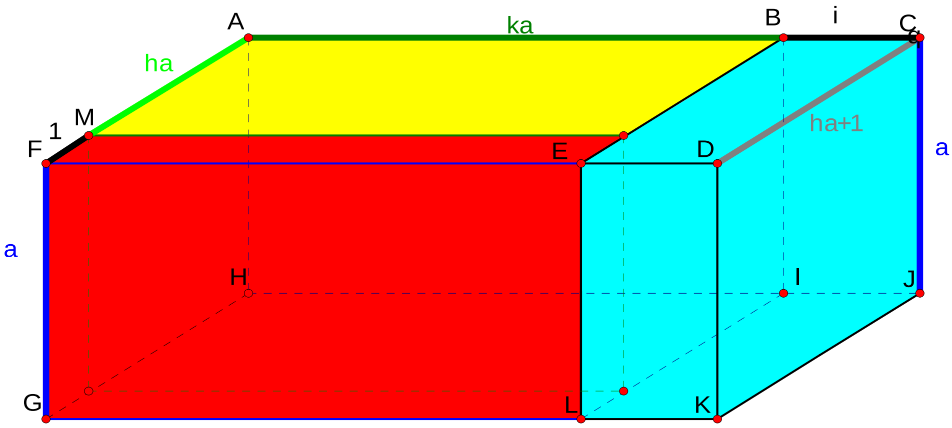
$$f(ka+i,ha+1,a)=f(ka,ha,a)+f(i,ha+1,a)+f(ka,1,a)=hk+f(i,ha+1,a)+ka^2$$

【說明】: 如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=ka+i$，$\overline{AF}=ha+1$，$\overline{FG}=a$，

以最短邊 $\overline{FG}=a$，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分為三個小的長

方體，即：長方體 AFDCHGKJ=黃色長方體+藍色長方體+紅色長方形，即：

$$f(ka+i,ha+1,a)=f(ka,ha,a)+f(i,ha+1,a)+f(ka,1,a)$$



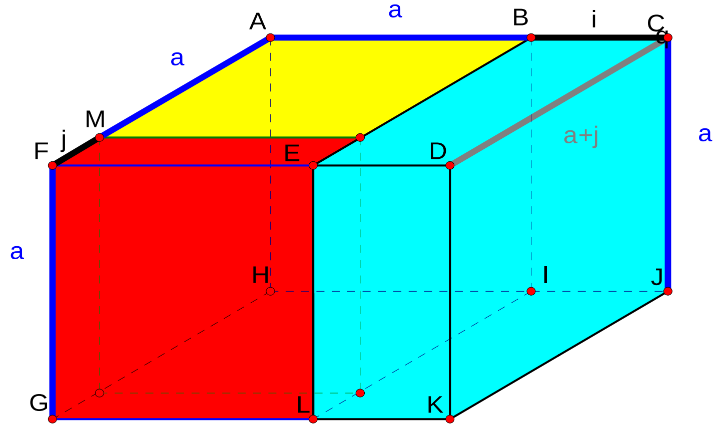
$$f(ka+i,ha+1,a)=f(ka,ha,a)+f(i,ha+1,a)+f(ka,1,a)=hk+f(i,ha+1,a)+ka^2$$

（**20**） $f(a+i,a+j,a)=f(a,a,a)+f(i,a+j,a)+f(a,j,a)$

$=1+f(i,a+j,a)+f(a,j,a)$

【說明】: 如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=a+i$，$\overline{AF}=a+j$，$\overline{FG}=a$，

我們會以最短邊 $\overline{FG}=a$，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分爲三個小的長方體，即：長方體 AFDCHGKJ=黃色正立方體+藍色長方體+紅色長方形，即 $f(a+i,a+j,a)=f(a,a,a)+f(i,a+j,a)+f(a,j,a)$



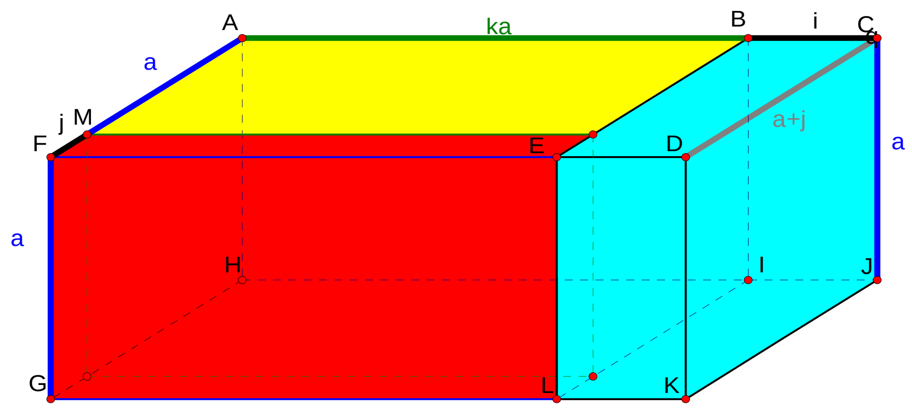
$$f(a+i,a+j,a)=1+f(i,a+j,a)+f(a,j,a)$$

（**21**）

$f(ka+i,a+j,a)=f(ka,a,a)+f(i,a+j,a)+f(ka,j,a)=k+f(i,a+j,a)+f(ka,j,a)$

【說明】: 如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=ka+i$，$\overline{AF}=a+j$，$\overline{FG}=a$，

我們會以最短邊 $\overline{FG}=a$，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分爲三個小的長方體，即：長方體 AFDCHGKJ=黃色正立方體+藍色長方體+紅色長方形，即 $f(ka+i,a+j,a)=f(ka,a,a)+f(i,a+j,a)+f(ka,j,a)$

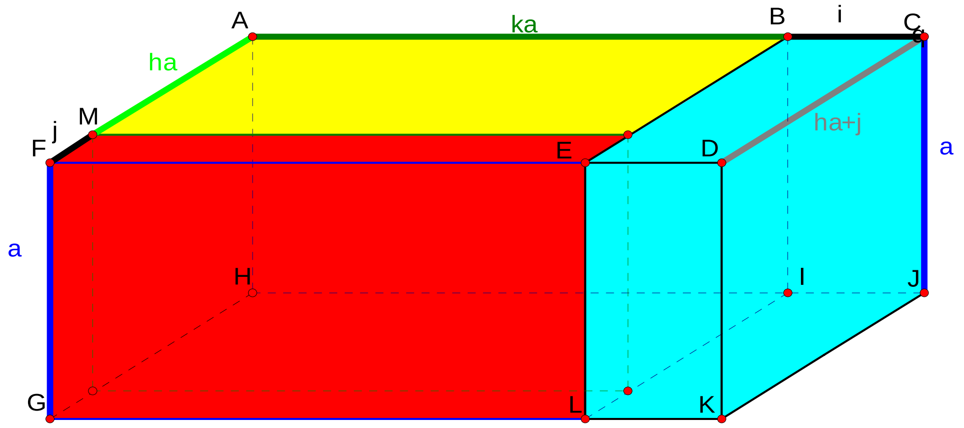


$$f(ka+i,a+j,a)=f(ka,a,a)+f(i,a+j,a)+f(ka,j,a)$$

（**22**） $f(ka+i,ha+j,a)=f(ka,ha,a)+f(i,ha+j,a)+f(ka,j,a)$

【說明】：如下圖，長方體 AFDCHGKJ 中，若 $\overline{AC}=ka+i$，$\overline{AF}=ha+j$，$\overline{FG}=a$，

我們會以最短邊 $\overline{FG}=a$，當作正方體的邊長，可以將這個長方體分爲三個小的長方體，即：長方體 AFDCHGKJ=黃色正立方體+藍色長方體+紅色長方形，即 $f(ka+i,ha+j,a)=f(ka,ha,a)+f(i,ha+j,a)+f(ka,j,a)$



$$f(ka+i,ha+j,a)=f(ka,ha,a)+f(i,ha+j,a)+f(ka,j,a)$$

(23) $f(a,b,c)\le abc$

【說明】：在一個邊長爲正整數 a 、b 、c 之長方體中，最容易的分割方法是將長 a 等分，將寬 b 等分及將高 c 等分，所以可得 abc 個單位正方形的分割，但這個報告中，所研究的函數 $f(a,b,c)$ 是考慮每次分割，都要分割出邊長最大正立方體，而且正立方體的個數要最少的方法和規則。所以，我們可知：$f(a,b,c)\le abc$ 。

（五）爲了簡化上列各式，我們定義：

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=f(a,b)+f(c,d)\ ;\ f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=f(a,b,c)+f(d,e,f)+f(g,h,i)$$

則

（1）$f(a+i,a)=f\begin{pmatrix} a & a \\ i & a \end{pmatrix}$ ； $f(ka+i,a)=f\begin{pmatrix} ka & a \\ i & a \end{pmatrix}$

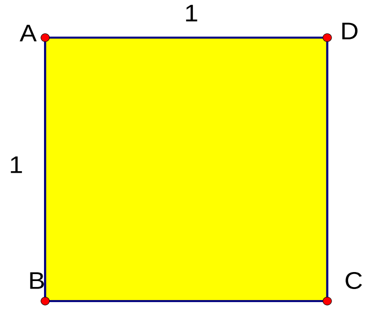
（2）$f(a+i,a+j,a)=f\begin{pmatrix} a & a & a \\ i & a+j & a \\ a & j & a \end{pmatrix}$ ； $f(ka+i,ha+j,a)=f\begin{pmatrix} ka & ha & a \\ i & ha+j & a \\ ka & j & a \end{pmatrix}$

（ $a\ge i\ge j$ ，h 、k ，皆爲正整數）

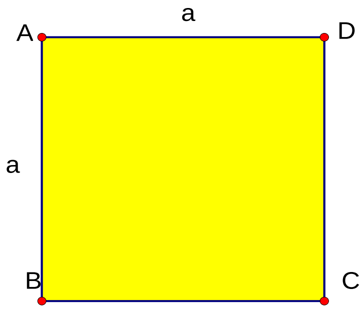
（六）二維空間和三維空間的連結：研究過二維空間和三維空間的規則和性質之後，

我們更進一步，想探討二維空間和三維空間之間的關係，進而推廣至更高維度的空間。

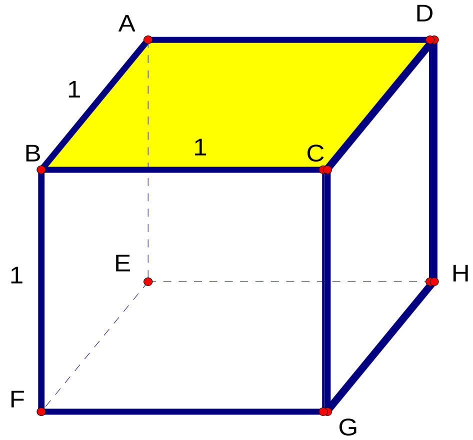
（1） $f(1,1)=f(1,1,1)=1$ ； $f(a,a)=f(a,a,a)=1$



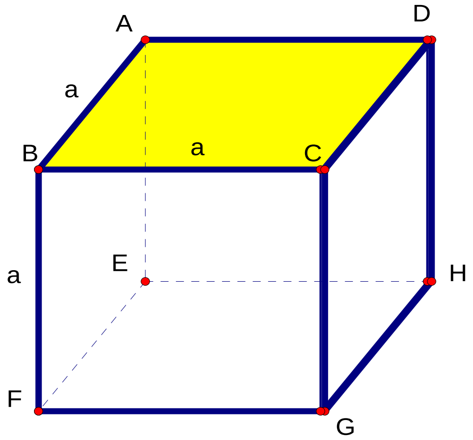
$f(1,1)=1$



$f(a,a)=1$



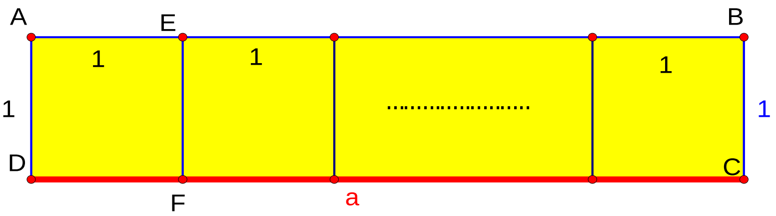
$f(1,1,1)=1$



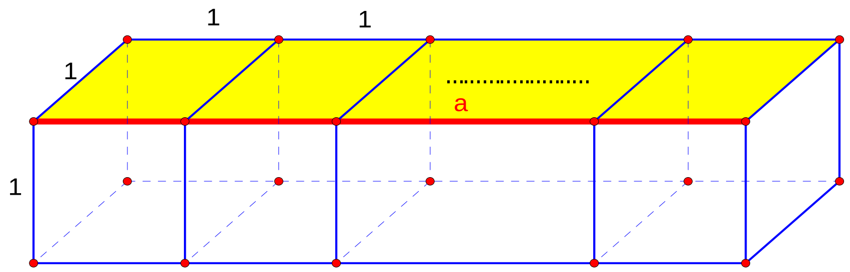
$f(a,a,a)=1$

（2） $f(a,1)=f(a,1,1)$ ； $f(ka,k)=f(ka,k,k)=a$

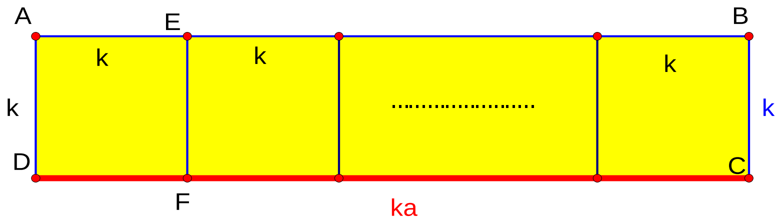
【說明】： $f(a,1)=a;\ f(a,1,1)=a$



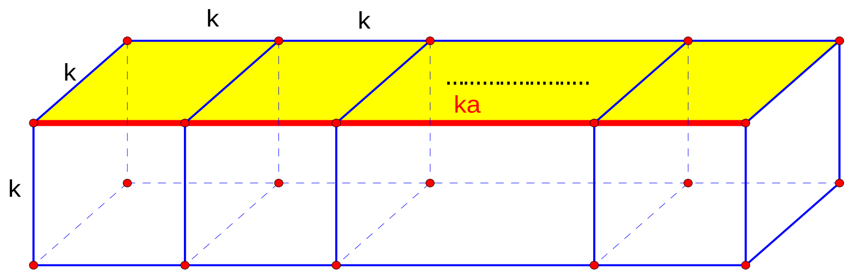
$f(a,1)=a$



$f(a,1,1)=a$



$f(ka,k)=a$

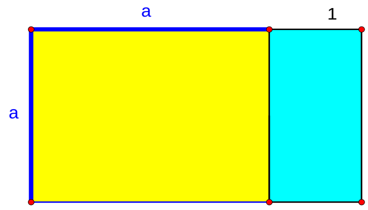


$f(ka,k,k)=a$

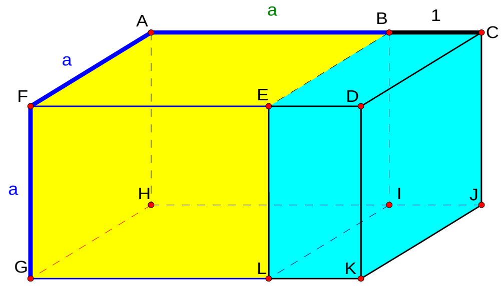
（3） $f(a+1,a)=f(a,a)+f(1,a)$ ； $f(a+1,a,a)=f(a,a,a)+f(1,a,a)$

【說明】：從下圖我們可以觀察到切割痕跡相同，但兩個函數切割出的總個數不同。

因爲： $f(a+1,a)=1+a \neq f(a+1,a,a)=1+a^2$



$$f(a+1,a)=f(a,a)+f(1,a)$$

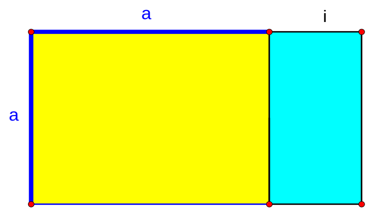


$$f(a+1,a,a)=f(a,a,a)+f(1,a,a)$$

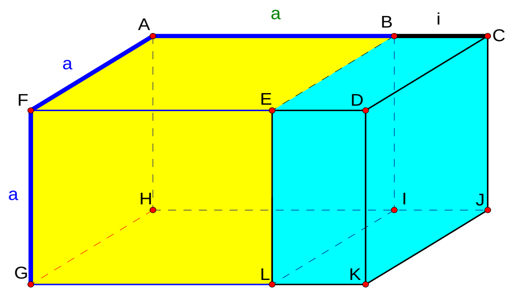
（4） $f(a+i,a)=f(a,a)+f(i,a)$ ； $f(a+i,a,a)=f(a,a,a)+f(i,a,a)$

【說明】：同理，我們可以觀察到切割痕跡相同，但兩個函數切割出的總個數不同。

因爲： $f(a+i,a)=1+f(i,a) \neq f(a+i,a,a)=1+f(i,a,a)$



$$f(a+i,a)=f(a,a)+f(i,a)$$

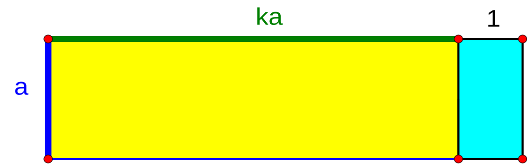


$$f(a+i,a,a)=f(a,a,a)+f(i,a,a)$$

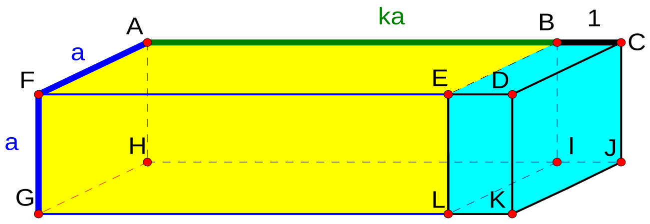
（5） $f(ka+1,a)=f(ka,a)+f(1,a)$ ； $f(ka+1,a,a)=f(ka,a,a)+f(1,a,a)$

【說明】：同理，我們可以觀察到切割痕跡相同，但兩個函數切割出的總個數不同。

因爲： $f(ka+1,a)=k+a\neq f(ka+1,a,a)=k+a^2$



$$f(ka+1,a)=f(ka,a)+f(1,a)$$

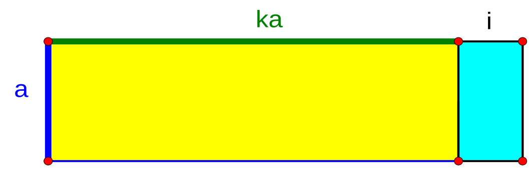


$$f(ka+1,a,a)=f(ka,a,a)+f(1,a,a)$$

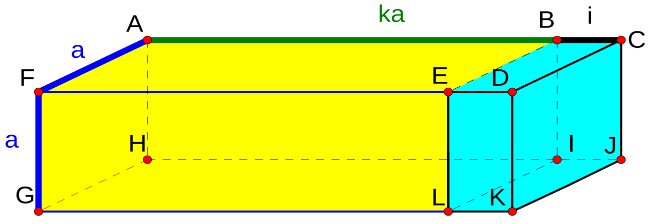
（6） $f(ka+i,a)=f(ka,a)+f(i,a)$ ； $f(ka+i,a,a)=f(ka,a,a)+f(i,a,a)$

【說明】：同理，我們可以觀察到切割痕跡相同，但兩個函數切割出的總個數不同。

因爲： $f(ka+i,a)=k+f(i,a)\neq f(ka+i,a,a)=k+f(i,a,a)$



$$f(ka+i,a)=f(ka,a)+f(i,a)$$



$$f(ka+i,a,a)=f(ka,a,a)+f(i,a,a)$$

（7） $f(a,b)\leq f(a,b,1)$ （設 $a\geq b$ ）

【說明】：從二維空間的討論（12），我們可以知道 $f(a,b)\leq ab$ ；又 $f(a,b,1)=ab$ ，所以可得： $f(a,b)\leq f(a,b,1)$

（8） $f(a,b)\leq f(a,b,b)$ （設 $a\geq b$ ）

【說明】：從以上的討論中：我們可以觀察到在邊長爲 a 、 b 、 b 的長方體中，若在切割正立方體時，若只鳥瞰<u>一個平面</u>”時，我們可以發現：我們可以觀察到切割痕跡相同，但兩個函數切割出的總個數不同。

（六）推廣至高維度空間：從上面的討論結果，我們知道如果要推廣至高維度空間（如四維空間），我們可以利用上述的方法：

固定住四個維度，可得： $f(1,1,1,1)=f(1,1,1)=f(1,1)=1$

固定住三個維度，可得：$f(a,1,1,1)=f(a,1,1)=f(a,1)=a$（相當於二維空間切割）

固定住二個維度，可得：$f(a,b,1,1)=f(a,b,1)=ab$　　（相當於三維空間切割）

伍、研究結論：

（一）在二維空間中，將給定一個邊長為整數 a 及 b 之矩形，分割成邊長亦為整數之正方形，如果考慮每次分割都要分割出最大正方形，利用轉輾相除法的原理所分割出之正方形個數，記為函數： $f(a,b)$ 。

$f(a,b)$ 之性質主要有：（ a 、 b 、 k 、 i 、 n 皆為正整數，且 $a \geq i$ ； $n > a$ ）

（1） $f(a,b)=f(b,a)$

（2） $f(1,1)=1$ ； $f(a,a)=1$

（3） $f(a,1)=a$ ； $f(ka,k)=a$

（4） $f(ka,kb)=f(a,b)$

（5） $f(2a,2)=a$

（6） $f(2a+1,2)=a+2$

（7） $f(a+1,a)=1+f(1,a)=1+a$

（8） $f(a+i,a)=1+f(i,a)$

（9） $f(ka+1,a)=f(ka,a)+f(1,a)=k+a$

（10） $f(ka+i,a)=f(ka,a)+f(i,a)=k+f(i,a)$

（11） $f(n,a)=f(n,n-a)$

（12） $f(a,b)\leq ab$

（二）從二維空間推廣至三維空間：

（1） $f(1,1)=f(1,1,1)=1$ ； $f(a,a)=f(a,a,a)=1$

（2） $f(a,1)=f(a,1,1)=a$ ； $f(ka,k)=f(ka,k,k)=a$

（三）在三維空間中，給定邊長為整數 a 、 b 、 c 的長方體，分割成邊長亦是整數的正方體，如果考慮每次都要分割出最大的正方體，利用這個方法所分出的正方體個數，記作 $f(a,b,c)$ 。

函數 $f(a,b,c)$ 主要的性質有：（ a、b、c、h、k、i、j 皆為正整數，且 $a \geq i \geq j$ ）

（1） $f(a,b,c)=f(a,c,b)=f(b,a,c)=f(b,c,a)=f(c,a,b)=f(c,b,a)$

（2） $f(1,1,1)=1$ ； $f(a,a,a)=1$

（3） $f(a,1,1)=a$ ； $f(ka,k,k)=a$

（4） $f(a,b,1)=ab$ ； $f(ka,kb,k)=ab$

（5） $f(ka,kb,kc)=f(a,b,c)$

（6） $f(2a,2b,2)=ab$

（7） $f(2a+1,2b,2)=ab+4b$

（8） $f(2a+1,2b+1,2)=ab+4a+4b+2$

（9） $f(a+1,a,a)=f(a,a,a)+f(1,a,a)=1+a^2$

（10） $f(a+i,a,a)=f(a,a,a)+f(i,a,a)=1+f(i,a,a)$

（11） $f(ka+1,a,a)=f(ka,a,a)+f(1,a,a)=k+a^2$

（12） $f(ka+1,ha,a)=f(ka,ha,a)+f(1,ha,a)=hk+ha^2$

（13） $f(ka+i,a,a)=f(ka,a,a)+f(i,a,a)=k+f(i,a,a)$

（14） $f(ka+i,ha,a)=f(ka,ha,a)+f(i,ha,a)=hk+f(i,ha,a)$

（15） $f(a+1,a+1,a)=f(a,a,a)+f(1,a+1,a)+f(a,1,a)=1+a+2a^2$

（16） $f(ka+1,a+1,a)=f(ka,a,a)+f(1,a+1,a)+f(ka,1,a)=k+a+a^2+ka^2$

（17） $f(ka+i,a+1,a)=f(ka,a,a)+f(i,a+1,a)+f(ka,1,a)$

$=k+f(i,a+1,a)+ka^2$

（18） $f(ka+1,ha+1,a)=f(ka,ha,a)+f(1,ha+1,a)+f(ka,1,a)$

$=hk+a+ha^2+ka^2$

（19） $f(ka+i,ha+1,a)=f(ka,a,a)+f(i,ha+1,a)+f(ka,1,a)$

$=hk+f(i,ha+1,a)+ka^2$

（20） $f(a+i,a+j,a)=f(a,a,a)+f(i,a+j,a)+f(a,j,a)$

（21） $f(ka+i,a+j,a)=f(ka,a,a)+f(i,a+j,a)+f(ka,j,a)$

（22） $f(ka+i,ha+j,a)=f(ka,ha,a)+f(i,ha+j,a)+f(ka,j,a)$

（23） $f(a,b,c)\le abc$

（四）簡化上述性質：

若定義：$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=f(a,b)+f(c,d)$；$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=f(a,b,c)+f(d,e,f)+f(g,h,i)$

則我們將上述的性質，簡化成下列的結果：（$a\ge i\ge j$，h、k，皆爲正整數）

（1） $f(a+i,a)=f\begin{pmatrix} a & a \\ i & a \end{pmatrix}$ ； $f(ka+i,a)=f\begin{pmatrix} ka & a \\ i & a \end{pmatrix}$

（2） $f(a+i,a+j,a)=f\begin{pmatrix} a & a & a \\ i & a+j & a \\ a & j & a \end{pmatrix}$ ； $f(ka+i,ha+j,a)=f\begin{pmatrix} ka & ha & a \\ i & ha+j & a \\ ka & j & a \end{pmatrix}$

（五）二維空間和三維空間的連結：（a 、k 、i 皆爲正整數，且 $a\ge i$）

	二維空間	三維空間
（1）	$f(1,1)=1$	$f(1,1,1)=1$
（2）	$f(a,a)=1$	$f(a,a,a)=1$
（3）	$f(a,1)=a$	$f(a,1,1)=a$
（4）	$f(ka,k)=a$	$f(ka,k,k)=a$
（5）	$f(a+1,a)=f(a,a)+f(1,a)$	$f(a+1,a,a)=f(a,a,a)+f(1,a,a)$
（6）	$f(a+i,a)=f(a,a)+f(i,a)$	$f(a+i,a,a)=f(a,a,a)+f(i,a,a)$
（7）	$f(ka+1,a)=f(ka,a)+f(1,a)$	$f(ka+1,a,a)=f(ka,a,a)+f(1,a,a)$
（8）	$f(ka+i,a)=f(ka,a)+f(i,a)$	$f(ka+i,a,a)=f(ka,a,a)+f(i,a,a)$

（9） $f(a,b)\le f(a,b,1)$

（10） $f(a,b)\le f(a,b,b)$

（六）推廣至更高維度空間：（如四維空間）

（1） $f(1,1,1,1)=f(1,1,1)=f(1,1)=1$

（2） $f(a,1,1,1)=f(a,1,1)=f(a,1)=a$ （相當於在二維空間切割）

（3） $f(a,b,1,1)=f(a,b,1)=ab$ （相當於在三維空間切割）

陸、參考資料及其他：

（一）輾轉相除法的連結（台灣師範大學數學系 黃文達教授）

（二）正方形切割和輾轉相除法（至善國中 李永貞老師）

$a \ge i \ge j \ge l \ge m$，$k_i$，以上各未知數皆爲正整數，若定義 $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f(a,b) + f(c,d)$；$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = f(a,b,c) + f(d,e,f) + f(g,h,i)$，以下類推。

1. $f(a+i,a) = f\begin{pmatrix} a & a \\ i & a \end{pmatrix}$　　ex： $f(5,3) = f(3+2,3) = f\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 + f(2,3)$

2. $f(ka+i,a) = f\begin{pmatrix} ka & a \\ i & a \end{pmatrix}$　　ex： $f(8,3) = f(6+2,3) = f\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 + f(2,3)$

3. $f(a+i,a+j,a) = f\begin{pmatrix} a & a & a \\ i & a+j & a \\ a & j & a \end{pmatrix}$　　ex： $f(5,4,3) = f(3+2,3+1,3) = f\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4. $f(k_1a+i,k_2a+j,a) = f\begin{pmatrix} k_1a & k_2a & a \\ i & k_2a+j & a \\ k_1a & j & a \end{pmatrix}$　　ex： $f(14,10,3) = f(12+2,9+1,3) = f\begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 \\ 2 & 10 & 3 \\ 12 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

如果當 $j=0$ 時，第 3 點的切法就相當於於第 1 點的切法　　ex： $f(5,3,3) = f(3+2,3+0,3) = f\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$f(5,3) = f(3+2,3) = f\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

5. 如果當 $j=0$ 時，第 4 點的切法就相當於於第 2 點的切法　　ex： $f(8,3,3) = f(6+2,3+0,3) = f\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$f(8,3) = f(6+2,3) = f\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

n 維猜想

$a \ge i \ge j \ge l \ge m$，$k_i$，以上各未知數皆爲正整數，若定義 $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f(a,b) + f(c,d)$；$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = f(a,b,c) + f(d,e,f) + f(g,h,i)$，以下類推。

$$f(a+i,a) = f\begin{pmatrix} a & a \\ i & a \end{pmatrix}$$

$$f(ka+i,a) = f\begin{pmatrix} ka & a \\ i & a \end{pmatrix}$$

$$f(a+i,a+j,a) = f\begin{pmatrix} a & a & a \\ i & a+j & a \\ a & j & a \end{pmatrix}$$

$$f(k_1a+i,k_2a+j,a) = f\begin{pmatrix} k_1a & k_2a & a \\ i & k_2a+j & a \\ k_1a & j & a \end{pmatrix}$$

$$f(a+i,a+j,a+l,a) = f\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ i & a+j & a+l & a \\ a & j & a+l & a \\ a & a & l & a \end{pmatrix}$$

$$f(k_1a+i,k_2a+j,k_3a+l,a) = f\begin{pmatrix} k_1a & k_2a & k_3a & a \\ i & k_2a+j & k_3a+l & a \\ k_1a & j & k_3a+l & a \\ k_1a & k_2a & l & a \end{pmatrix}$$

$$f(a+i,a+j,a+l,a+m,a) = f\begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ i & a+j & a+l & a+m & a \\ a & j & a+l & a+m & a \\ a & a & l & a+m & a \\ a & a & a & m & a \end{pmatrix}$$

$$f(k_1a+i,k_2a+j,k_3a+l,k_4a+m,a) = f\begin{pmatrix} k_1a & k_2a & k_3a & k_4a & a \\ i & k_2a+j & k_3a+l & k_4a+m & a \\ k_1a & j & k_3a+l & k_4a+m & a \\ k_1a & k_2a & l & k_4a+m & a \\ k_1a & k_2a & k_3a & m & a \end{pmatrix}$$

$a \geq i \geq j \geq l \geq m$，$k_i$，以上各未知數皆爲正整數，若定義 $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f(a,b) + f(c,d)$；$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = f(a,b,c) + f(d,e,f) + f(g,h,i)$，以下類推。

1. $f(a+i, a+j, a+l, a) = f\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ i & a+j & a+l & a \\ a & j & a+l & a \\ a & a & l & a \end{pmatrix}$

ex：$f(10,9,8,7) = f(7+3, 7+2, 7+1, 7) = f\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 7 \\ 7 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

2. $f(k_1 a+i, k_2 a+j, k_3 a+l, a) = f\begin{pmatrix} k_1 a & k_2 a & k_3 a & a \\ i & k_2 a+j & k_3 a+l & a \\ k_1 a & j & k_3 a+l & a \\ k_1 a & k_2 a & l & a \end{pmatrix}$

ex：$f(38,37,36,7) = f(5\times 7+3, 5\times 7+2, 5\times 7+1, 7) = f\begin{pmatrix} 35 & 35 & 35 & 7 \\ 3 & 37 & 36 & 7 \\ 35 & 2 & 36 & 7 \\ 35 & 35 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

3. $f(a+i, a+j, a+l, a+m, a) = f\begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ i & a+j & a+l & a+m & a \\ a & j & a+l & a+m & a \\ a & a & l & a+m & a \\ a & a & a & m & a \end{pmatrix}$

ex：$f(11,10,9,8,7) = f(7+4, 7+3, 7+2, 7+1, 7) = f\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 10 & 9 & 8 & 7 \\ 7 & 3 & 9 & 8 & 7 \\ 7 & 7 & 2 & 8 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

4. $f(k_1 a+i, k_2 a+j, k_3 a+l, k_4 a+m, a) = f\begin{pmatrix} k_1 a & k_2 a & k_3 a & k_4 a & a \\ i & k_2 a+j & k_3 a+l & k_4 a+m & a \\ k_1 a & j & k_3 a+l & k_4 a+m & a \\ k_1 a & k_2 a & l & k_4 a+m & a \\ k_1 a & k_2 a & k_3 a & m & a \end{pmatrix}$

ex：$f(39,38,37,36,7) = f(5\times 7+4, 5\times 7+3, 5\times 7+2, 5\times 7+1, 7) = f\begin{pmatrix} 35 & 35 & 35 & 35 & 7 \\ 4 & 38 & 37 & 36 & 7 \\ 35 & 3 & 37 & 36 & 7 \\ 35 & 35 & 2 & 36 & 7 \\ 35 & 35 & 35 & 1 & 7 \end{pmatrix}$