台灣二ＯＯ五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：總站該設在哪裡？—另類費馬點的研究

學　　校：國立臺南女子高級中學

作　　者：李兆甯、許瑋婷

作者簡介（許瑋婷）

我今年十七歲，目前就讀於國立台南女中。平常喜歡背詩詞、看小說，特別是金庸和古典小說。除此之外，也對寫作詩詞及各種運動有興趣，諸如：籃球、羽球、桌球等。更喜歡研究物理及數學問題。總覺得理科問題真正的奧義不在象徵性的答案，而是在尋求答案的一系列過程中。有時可能弄錯方向，也有時會遇到瓶頸，但在克服這一切後，得到的成果對我而言就分外甘美。個性隨和而有些散漫，但不失認真。平常較為嚴肅，但也期許自己能具有幽默感。

(李兆甯)

我出生於 1988.6.5，是個樂觀的雙子座，對於許多新的事物，我都樂於去嘗試。我最愛的是唱歌和打羽毛球，它不但紓解我的壓力，也增進了我和家人、朋友的情誼。在課業方面，我都盡我最大的努力，有時會遇到瓶頸，我也會努力去克服。對於數學我真是又愛又怕呢，遇到頗有挑戰性的題目，我是躍躍欲試，卻又苦惱，因為她會佔據我所有的休閒時間！對於這次的科學展覽，我非常的期待，也希望能留下一個美好的回憶。

總站該設在哪裡？——另類的費馬點研究

Abstract

The definition of "Fermat Point" is that a dot, which lies in a triangle, has the minimum distance to the three apexes. In other words, "Fermat Point" has the minimum distance to three dots which are not on the same line. In the broad sense, then, in a N polygon, a dot which has the minimum distance to the N apexes could be named "Fermat Point." But what if we link up the N apexes and find out that they cannot make a convex polygon?

The above is what we wish to fully discuss. Our inspiration comes from a paper on"Fermat Point." It just describes N convex polygon, so we think of putting the case to naturally polygon. The case may be that it is a concave polygon or part of the apexes which lies on the same line. We would not base our study on the conventional methods. Moreover, strictly defined, the repeated line segment will not be taken into account. That is, if the "Fermat Point" drops on the line with more than two dots on it, we just count the line segments except for the shorter line segments which were originally included in other studies.

According to the theorem, our conclusions are as follows:

1. If N points lie on the same line segment, then the "Fermat Point"can be any point on the line segment.

2. If (N-1) points are on the same line segment, then the "Fermat Point" is on the point which two lines join together. One is that the line segment, and the other is the one which passes the remaining point and perpendicular to the first line segment.

3. Now there are (M+N) points. Among them, M points will make a M jog-polygon. The others all drop in the polygon. As the diagram shown beneath, we know that the "Fermat Point" drops on the point which two lines join together. The two lines must pass as many points as possible.

摘要

所謂的「費馬點」是指三角形內到三頂點距離和最小的點。換言之，「費馬點」就是到平面上不共線三點距離和最小的點。因此，我們可定義，廣義的「費馬點」即是 n 多邊形內到各頂點距離和最小的點，亦即到平面上不共線 n 點距離和最小的點，但若平面上 n 點不能恰爲 n 多邊形的頂點呢？

這就是我們所要討論的。由於我們的靈感來自一份關於「費馬點」的科展作品，所以我們想到，當平面上 n 點不能恰爲 n 凸多邊形的頂點，甚或其中有一部分的點共線時，將不能以 n 邊形的方法來探討，但我們可以將之化爲 m 邊形內（n-m）個點來討論。而更重要的是，我們增加了另一個限制，重複的線段將不被我們列入計算。亦即當所求點落在某一多點共線的線段上時，我們只計算該線段的總長，而不計其中重複的較短線段。

根據這個原則，我們試行證明平面上三點、四點、五點及六點的可能情況，期望能從中找出足以推廣至平面上 n 點的一般性。結果雖不完美，但我們總算差強人意的歸納出了下列結論：

1.若 n 點共線段，所求點可爲所共線段上任一點。

2.若（n-1）點共線段，則由該不共線點引一線與共線段垂直，其交點即爲所求。

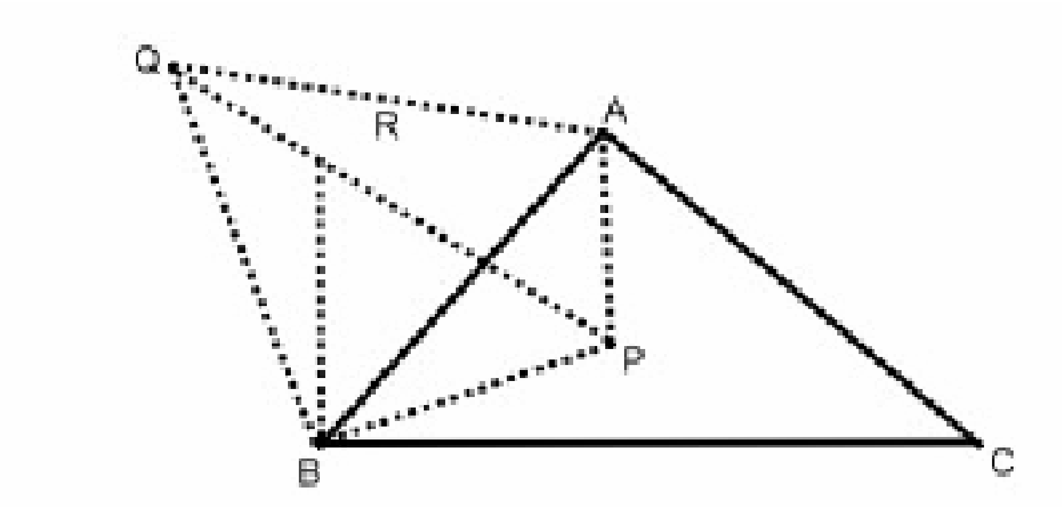
3.若（n+m）個點中有 m 個點爲一 m 多邊形的頂點，另外 n 個點落在該 m 多邊形內，則由兩個外頂點引直線盡可能通過最多點，該兩直線的交點即爲所求。

前言：許久以前有一個小國家，和鄰國勢成水火。國王爲了應付遲早要發生的戰爭，修糧倉，建地下糧道，以確保戰時物資的供應。由於時間緊急，一郡只能建一個糧倉，再挖地下糧道通到各縣城。當時有某郡的太守下令將糧倉建在自己的家鄉──一個偏遠的小縣，使糧道總長極長。結果該郡的糧道尚未竣工，戰爭便已爆發。由於物資無法有效供應至各縣，人心離散。沒多久，該郡就被攻陷，太守也被俘虜，這時他才懊悔起來，但一切都爲時已晚……

研究目的：求出一點，使其到平面上給定點的距離和最小。但與一般多邊形內求到頂點距離和最小的點不同。由於多點共線所造成的重複線段將不被我們列入計算，亦即共線的點越多，所求出的距離和可能越小。

研究過程：

一、我們先引關於費馬點的證明。



如圖，在△ABC 中，P 爲三角形內部一點

以 PB 爲一邊，作正△PBR，以 AB 爲一邊，作正△ABQ

連接 QR，△ABP　△QBR（SAS）→PA+PB+PC＝RQ+PR+PC

則當 Q、R、P、C 四點共線時，RQ+PR+PC 最小

即 PA+PB+PC 最小

且此時 $\angle BPC=180^\circ-\angle RPB=120^\circ$

$\angle APB=\angle QRB=180^\circ-\angle BRP=120^\circ$

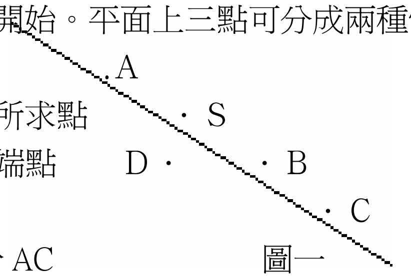
$\rightarrow \angle APC=120^\circ$

∴P 爲到相鄰兩頂點連線夾角 120° 的點

二、接下來我們進入主題，先由平面上三點開始。平面上三點可分成兩種情形：

（1）三點共線

如圖一，A 、B 、C 三點共線，則我們所求點（以下均以 S 代表）必可爲任一落在兩端點所連線段上的點。



圖一

證明：設 D 爲平面上一點，且 D 不屬於 AC

∵SA＋SB＋SC 中 SB 線段重複計算了一次，

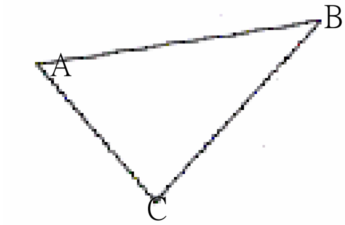
∴我們將它去掉，改爲 SA＋SC

則由三角不等式，得 DA＋DC＞AC＝SA＋SC…………………（1）

又 DB＞0…………（2）　　（1）+（2）DA+DB+DC＞SA+SC　　得證

（2）三點不共線

如圖二，A、B、C 三點不共線，則 S 即落在△ABC 的費馬點上，其證明引述上文中關於費馬點的證明，在此不再贅述。



圖二

三、下一步我們進入平面上四點，可分爲三種情形。

（1）四點共線

如圖三，A、B、C、D 四點共線，則 S 爲 AC 上任一點。其證法同三點共線，需將多算的線段去除

圖三

（2）四點爲一凸四邊形四頂點

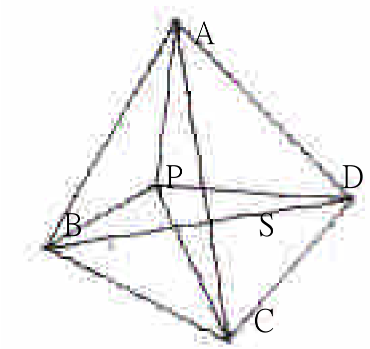
如圖四，A、B、C、D 爲一四邊形的四個頂點，則 S 即爲對角線 AC、BD 的交點。

證明：設 S 爲對角線 AC、BD 的交點，P 爲平面上異於 S 之一點

則由三角不等式，得 PA+PC＞AC………（1）

且 PB+PD＞BD………（2）

（1）+（2）　PA+PB+PC+PD＞AC+BD＝SA+SC+SB+SD　得證



圖四

（3）三點爲一三角形之三頂點，第四點落在三角形的內部或邊上

我們發現，這種情況有兩種可能結果

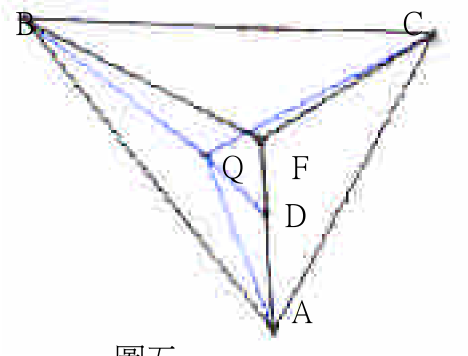
a.如圖五，F 爲△ABC 之費馬點，且 D 落在 FA 上，則 F 即爲所求點 S

證明：設 Q 爲△ABC 內異於 F 之一點

∵FD 屬於 FA　∴FD 不列入計算

由費馬點性質，得 QA+QB+QC＞FA+FB+FC……（1）

又 QD≧0……（2）



圖五

（1）+（2）　QA+QB+QC+QD＞FA+FB+FC　　得證

b.F 爲△ABC 之費馬點，但 D 不落在 FA 或 FB 或 FC 上，則 D 爲所求點 S

證明：若 P 爲□區域內一點，如圖六

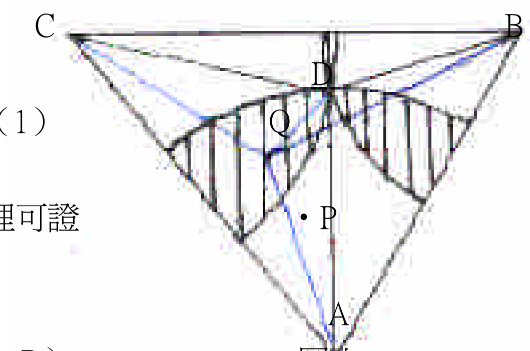
則 PA+PD≧AD（等號成立⇔P 在 AD 上）……（1）

PB+PC＞DB+DC……（2）

（1）+（2）PA+PB+PC+PD＞DA+DB+DC，餘同理可證

若 Q 爲▥區域內異於 D 之一點，如圖六

令 BQ 與 AD 交於 R



圖六

則由 QA+QD≧AD（等號成立 ⇔Q 在 AD 上 ⇔Q=R）

且 QB+QC=（RB+QR）+QC=RB+（QR+QC）≧RB+RC（等號成立 ⇔Q 在 AD 上 ⇔Q=R）

∴QA+QB+QC+QD≧RA+RB+RC+RD………（1）

又 RA+RD=DA 且 RB+RC≧DB+DC（等號成立 ⇔D=R）

∴RA+RB+RC+RD≧DA+DB+DC………（2）

由（1）.（2）得 QA+QB+QC+QD≧DA+DB+DC（等號成立 ⇔Q=D）但 Q≠D

∴QA+QB+QC+QD＞DA+DB+DC　　得證

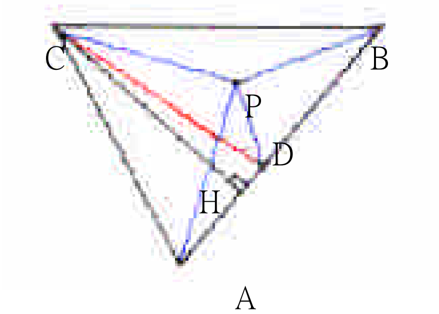
c.D 落在 AB 上，如圖七，則作 CH⊥AB 於 H，H 即爲所求 S；若∠CAB＞90°，則 A 即爲所求 S。

證明：設平面上異於 H 之一點 P，則

PA+PB＞AB………（1）

PC+PD＞CD＞CH………（2）

（1）+（2）　PA+PB+PC+PD＞HA+HB+HC　　得證



圖七

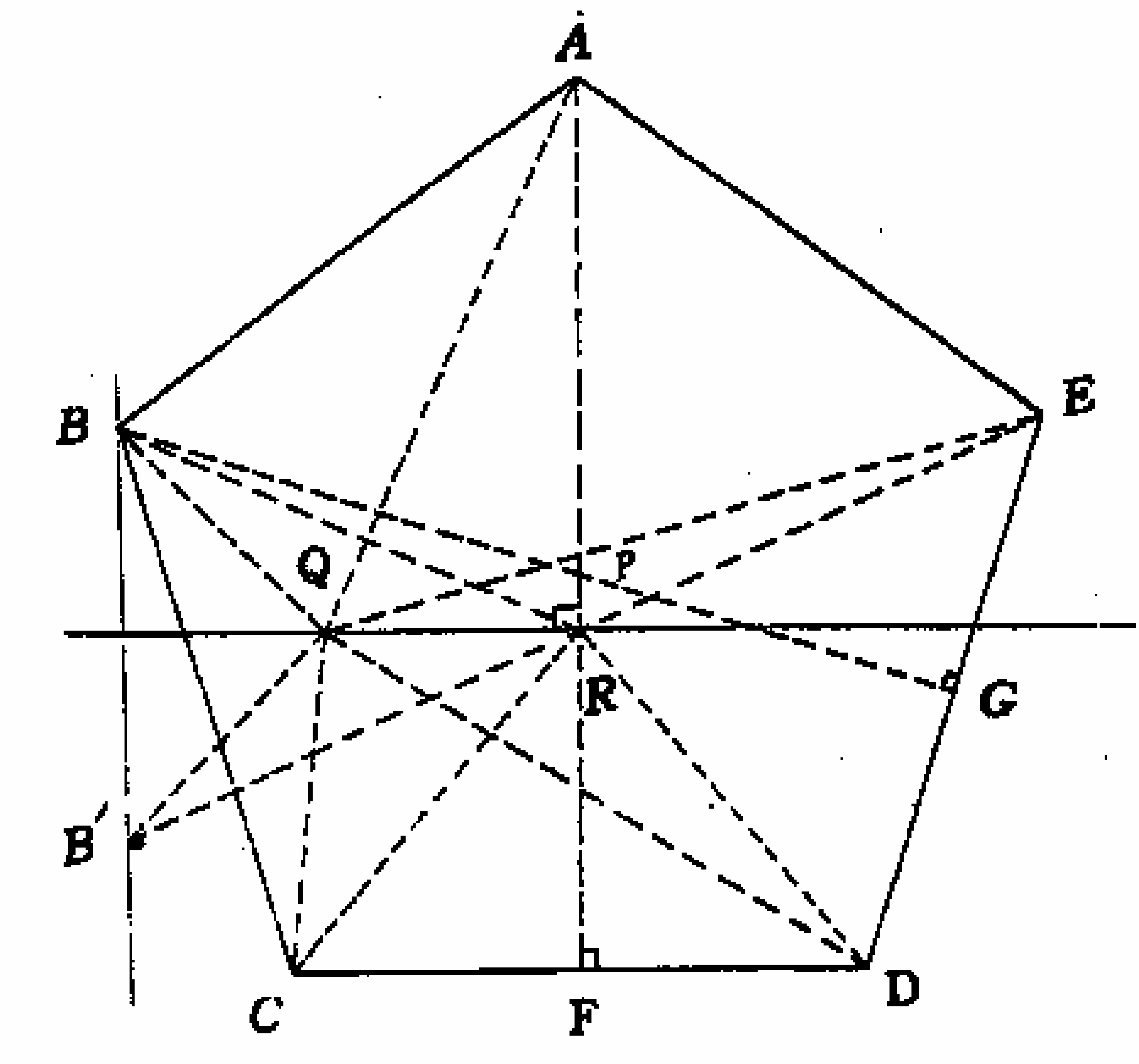
四、由於目前尚不足以看出其一般性。所以接下來，我們探討平面上五點及六點的情形。

（1）五點共線與六點共線，其結果同三點共線

∴我們可推廣至 n 點共線→S 均爲所共線段上之任一點

（2）五點爲一凸五邊形之頂點，則 S 爲到相鄰兩頂點夾角 72°的點

證明：我們引述第三十九屆科展台南區佳作「窮邇極微」中的證明如下



證明：如圖，AF⊥CD，假設 Q 不在 AF 上

過 Q 作 L || CD 交 AF 於 R，連接 BR、CR、DR、ER

作 B 關於 L 的對稱點 B′，連接 B′Q、B′R

∵B、E 關於 AF 對稱　　　∴B′、R、E 三點共線

→B′Q＋QE＞B′E＝B′R＋RE

又 BQ=B′Q，BR=B′R　　　∴BQ+QE＞BR+RE

同理可證 CR+DR＜CQ+DQ 且 AR＜AQ(AR⊥QR)

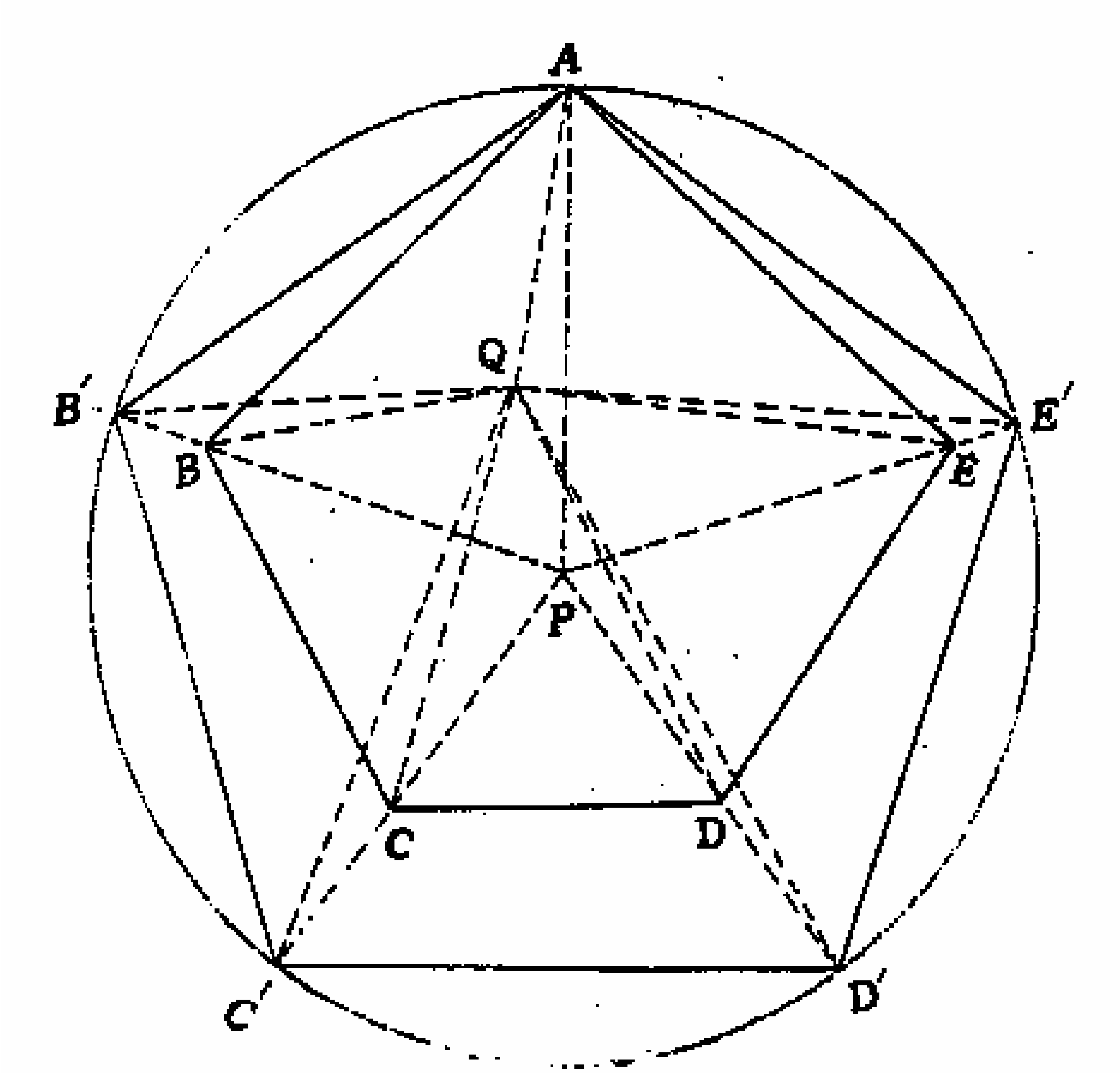
∴QA+QB+QC+QD+QE＞RA+RB+RC+RD+RE

故欲尋找到五個頂點距離和最小的點，則此點必落在 AF 上

又設 BG⊥DE

同理此點必落在 BG 上

此點是 AF、BG 的交點即爲外接圓圓心，故得證。



如圖，五邊形 ABCDE 中，∠APB=∠BPC=∠CPD=∠DPE=∠EPA=72°

，Q 爲五邊形內部異於 P 的任一點

求證：PA+PB+PC+PD+PE＜QA+QB+QC+QD+QE

證明：如圖作五邊形 $AB'C'D'E'$，連接 QB'，QC'，QD'，QE'

則 $PA+PB'+PC'+PD'+PE'$＜$QA+QB'+QC'+QD'+QE'$…………(1)

又 BB'＞$B'Q-BQ$→$-BB'$＜$-B'Q+BQ$…………(2)

同理$-CC' < -C'Q+CQ$……………(3)

$-DD' < -D'Q+DQ$……………(4)

$-EE' < -E'Q+EQ$……………(5)

(1)+(2)+(3)+(4)+(5)

→PA+PB+PC+PD+PE＜QA+QB+QC+QD+QE

故得證

故欲尋找到五個頂點距離和最小的點，則此點必落在 AF 上

又設 BG⊥DE

同理此點必落在 BG 上

∴此點為 AF、BG 的交點

又 AF、BG 的交點即為外接圓圓心，故得證

（3）其中三點為一三角形的三頂點，另兩點則落在該三角形內或邊上，則有下列情形：

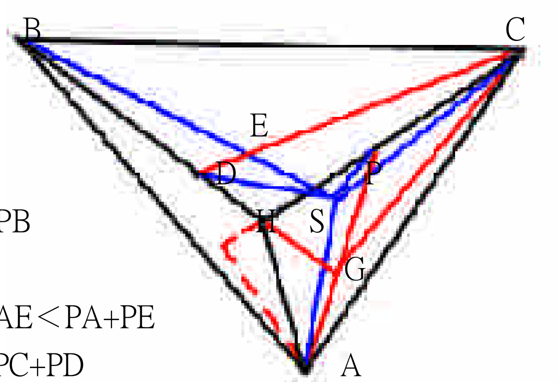
a.如圖八，D、E 落在△ABC 內部，則 BD、CE 交點 S 即為所求

證明：設 P 為△ABC 內異於 S 之一點且 SB＜PB（亦可設 SC＜PC）

過 A 作 AH⊥CE 於 H　∴由 SH＜EH →SA＜AE＜PA+PE

又作 CG⊥BD 於 G　∵GS＜GD →SC＜DC＜PC+PD

由以上三式得 SA+SB+SC＜PA+PB+PC+PD+PE　　得證

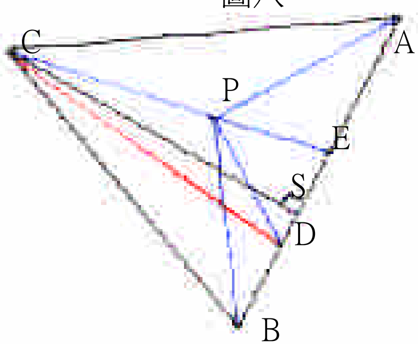


圖八

b.如圖九，若 D、E 均落在 AB 上，則作 CS⊥AB 於 H，H 即為所求 S；又若∠CBA＞90°則 B 即為所求點 S

證明：設 P 為平面上異於 S 之一點，則由三角不等式得 PA+PB＞AB，PC+PD＞CD＞CS 且 PE＞0

→PA+PB+PC+PD+PE＞SA+SB+SC　　得證



圖九

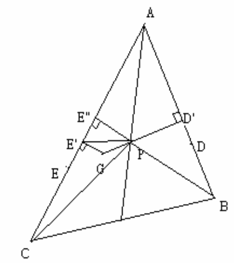
（4）如圖，D 落在 AB 上 E 落在 AC 上則當 $\angle A > 49^\circ$ 時，

點 A 即爲所求 S

證明：a.在△ABC 內隨意取一點 G，作 $GD' \perp AB$，

$GE' \perp AC$，再作∠A 的分角線 L 交 GD' 於 P

則 $PG+GE' > PE' > PE''$



b.設 $\angle A=2\theta$，$1/2\angle A=\theta$

$AD'=AP\cos\theta=AE''$，$PD'=AP\sin\theta=PE''$

$AP+PD''+PE''-AD'-AE''=AP(1+2\sin\theta+2\cos\theta)$

$=AP【1+\sqrt{2}\sin(\theta-45^\circ)】>0$ …1

$PB > D'B$，$PC > E''C$ ------- 2

（1）＋（2） $AB+AC=AD'+D'B+AE''+E''B < PA+PS+PC+PD'+PE'' <$

$< PA+PB+PC+PD+PE < GA+GB+GC+GD+GE$

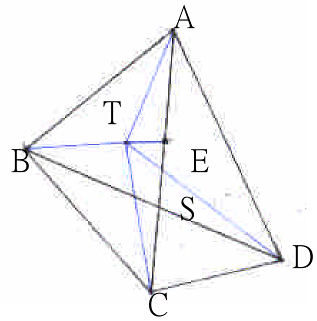
（四）其中四點爲一凸四邊形的四頂點，另一點落在該四邊形內或邊上，則有下列情形：

（1）如圖十，E 落在對角線上，則對角線交點 S 即爲所求

證明：設 T 爲平面上異於 S 之一點，則

$TA+TC > AC$，$TB+TD > BD$ 且 $TE \geqq 0$

$\rightarrow TA+TB+TC+TD+TE > SA+SB+SC+SD$　　得證



圖十

（2）如圖十一，E 不在對角線上，由於能力有限，故我們只給出 ABCD 爲長方形及等腰梯形時的證明

證明：

a.如圖十一之 1，F 爲對角線交點，

S 爲 AE 和 BD 交點，T 爲 BE 和 AC 交點，且 $SF < TF$

$\because d(S,AC) < d(T,BD)$ 且 $AC=BD$

$\therefore SA+SC < TB+TD \Rightarrow SA+SB+SC+SD < TA+TB+TC+TD$

得證

則 S 爲所求

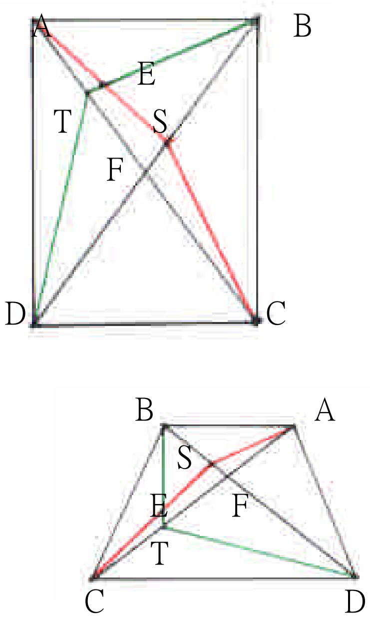
b.如圖十一之 2，F 爲對角線交點，$SF < TF$

S 爲 CE 和 BD 交點，T 爲 BE 和 AC 交點，且 $SF < TF$

$\because d(S,AC) < d(T,BD)$ 且 $AC=BD$

$\therefore SA+SC < TB+TD \Rightarrow SA+SB+SC+SD < TA+TB+TC+TD$

得證



圖十一

（五）六點中五點共線，如圖十二，

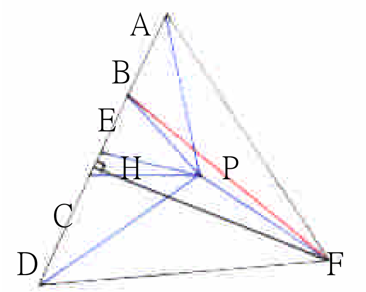
則作 FH⊥AD 於 H，H 即爲所求；

若∠FAD＞90° 則 A 即爲所求。

證明：設 P 爲平面上異於 H 之一點，則

PA+PD＞AD，PB+PF＞FB＞FH 且 PC+PE＞0

∴PA+PB+PC+PD+PE+PF＞HA+HD+HF　　得證



圖十二

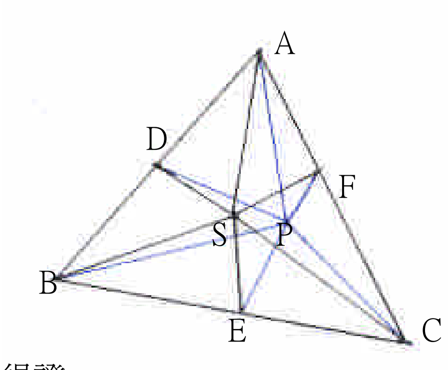
（六）如圖十三，六點中有三點爲一三角形的三頂點，另三點則分別落在三角形的三邊上，形成一個較小的三角形。則若兩三角形的費馬點重合，該點 S 即爲所求

證明：設 P 爲平面上異於 S 之一點，則

∵PA+PB+PC＞SA+SB+SC

且 PD+PE+PF＞SD+SE+SF

∴PA+PB+PC+PD+PE+PF＞SA+SB+SC+SD+SE+SF　　得證



圖十三

（七）如圖十四，六點中有三點爲一三角形的三頂點，另三點中兩點落在外頂點與費馬點的連線上，一點落在三角形內，則外部三角形的費馬點 S 即爲所求

證明：設 P 爲平面上異於 S 之一點

因 S 爲外部三角形的費馬點

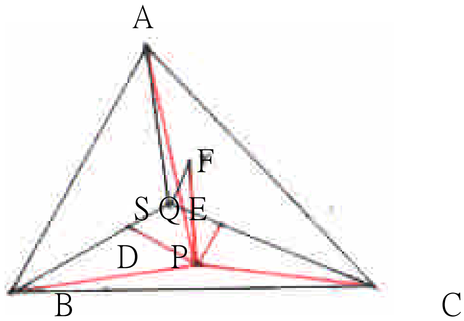
所以 SA+SB+SC<PA+PA+PC……(1)

因∠BSC 爲 120 度 ∴SQ<DQ

則 SF <QF+SQ <QF+DQ <QF+(PD+PQ) <PF+PD……(2)

0＜PE………（3）

(1)+(2)+（3） SA+SB+SC+SF<PA+PB+PC+PD+PE+PF　　得證



圖十四

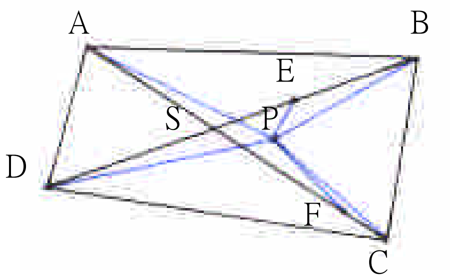
（八）如圖十五，六點中有四點爲一凸四邊形的四頂點，另兩點則落在對角線上，則對角線交點 S 即爲所求

證明：設 P 爲平面上異於 S 之一點，則

PA+PC＞AC 且 PB+PD＞BD

又 PE+PF＞0

∴SA+SB+SC+SD＜PA+PB+PC+PD+PE+PF　　得證



圖十五

（九）如圖十六，六點中有四點爲一凸四邊形的四頂點，另兩點中一點落在對角線上，則CF與BD交點S即爲所求

證明：設P爲平面上異於S之一點，則

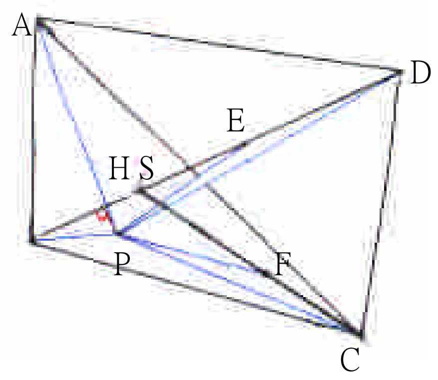
PB+PD＞BD 且 PA＞SA（亦可設 PC＞SC）

作 PS+PF+PC＞SC

又 PE＞PS→PE+PF+PC＞SC

∴∠HSP＞∠HEP ∴cot∠HSP＜cot∠HEP

∴PA+PB+PC+PD+PE+PF＞SA+SB+SC+SD+SF　得證



圖十六

研究結果及應用：

由平面上三至六點的討論，我們可大概得出如下結論：

1.若 n 點共線段，所求點可爲所共線段上任一點。

2.若（n-1）點共線段，則由該不共線點引一線與共線段垂直，其交點即爲所求。

3.若（n+m）個點中有 m 個點爲一 m 多邊形的頂點，另外 n 個點落在該 m 多邊形內，則由兩個外頂點引直線盡可能通過最多點，該兩直線的交點即爲所求。

參考文獻：第三十九屆科學作品彙編。
李毓佩，幾何的寶藏。
左銓如，初等解析幾何研究。
幾何不等式。
趙文敏，幾何學概論。