台灣二ＯＯ五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：Bezier 曲線與蚶線間之關聯性的探討與推廣

得獎獎項：大會獎第二名

學　　校：高雄市立高雄女子高級中學、

　　　　　高雄市立高雄高級中學

作　　者：張惠婷、黃棨歆

評語與建議事項：

Bezier 曲線在近代的幾何設計中扮演重要的角色。本研究仿照 Bezier 曲線的製作過程探討局部蚶線曲線

Bezier 曲線與蚶線間之關聯性的探討與推廣

<u>中文摘要</u>

在這篇報告中，我們以貝斯曲線的做圖原理建立出一種新的曲線－環狀貝斯曲線，進而得到不少有趣的結果。我們發現有名的古典曲線－蚶線，也是屬於二次環狀貝斯曲線。軌跡方程式為：$S=\binom{2}{0}\mathrm{T}^2P_0+\binom{2}{1}\mathrm{T}(\mathrm{I}-\mathrm{T})P_1+\binom{2}{2}(\mathrm{I}-\mathrm{T})^2P_2$，此時 T=$\frac{I-R(\theta)}{2}$，係數恰符合二項式定理。之後我們推廣至 n 次環狀貝斯曲線的軌跡方程式：$S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{T}^{n-k}(\mathrm{I}-\mathrm{T})^kP_k$，也符合二項式定理。

在複數平面上，給定 z_0、z_1、z_2 三點，我們定義出一個二次變換 $\boxed{T_{(z_0,z_1,z_2)}(z)=\left(\frac{z_0+2z_1+z_2}{4}\right)+\left(\frac{z_2-z_0}{2}\right)z+\left(\frac{z_0-2z_1+z_2}{4}\right)z^2}$，若 z=$e^{i\theta}$，$0\le\theta\le2\pi$，可映射成蚶線的圖形；若 $z\in$ 實數，則可映射成拋物線。利用此結果類推我們找到一個複數平面上由 z_0、z_1、$\cdots$、z_n 所決定的 n 次變換 $T_{(z_0,z_1\cdots z_n)}$ 將以原點為圓心的單位圓，映射成 n 次環狀 Bezier 曲線。

The research and application of the interrelation between Bezier Curve and Limacon

Abstract

In this essay, we use the method of forming a Bezier Curve to establish a new curve, circular Bezier Curve, and find a lot of interesting results. We discover the famous classical curve "limacon", which belongs to the Quadratic Circular Bezier Curve. The locus of Quadratic Circular Bezier Curve is

$$S=\binom{2}{0}\mathrm{T}^2P_0+\binom{2}{1}\mathrm{T}(\mathrm{I}-\mathrm{T})P_1+\binom{2}{2}(\mathrm{I}-\mathrm{T})^2P_2, \text{ where } \mathrm{T}=\frac{I-R(\theta)}{2}.$$

Its coefficients match the binomial theorem. Then we apply it to the locus of nth-circular Bezier Curve:

$$S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{T}^{n-k}(\mathrm{I}-\mathrm{T})^kP_k,$$ and it also matches the binomial theorem.

On the complex plane, we define a quadratic transformation corresponding to three points— z_0, z_1 and z_2 as $\boxed{T_{(z_0,z_1,z_2)}(z)=\left(\frac{z_0+2z_1+z_2}{4}\right)+\left(\frac{z_2-z_0}{2}\right)z+\left(\frac{z_0-2z_1+z_2}{4}\right)z^2}$. If z=$e^{i\theta}$, where $0\le\theta\le 2\pi$, a limacon is mapped. If z is a real number, a parabola is mapped. With this result, we will find a nth transformation $T_{(z_0,z_1\cdots z_n)}$ defined by z_0 、z_1 、⋯ 、z_n on the complex plane. It will form a nth-circular Bezier Curve with unit circle centering on the origin.

壹、前言

Bezier 曲線在電腦繪圖的應用上佔有著相當重要的地位。而 Bezier 曲線的幾何建構方法也相當的簡單，但其卻有非常漂亮而簡潔的數學式子。因此，我們想要秉持 Bezier 曲線構圖的原始想法，但嘗試著改變其構圖的過程；令人驚訝地我們描繪出了類似於有名的古典平面曲線－蚶線的圖形。

本文中，我們首先證明利用我們的繪圖方法的確建構出了三種不同的蚶線；接著經由我們的繪圖方法推得蚶線的數學參數式，並進一步推廣出一般化的公式。最後，我們探討 Bezier 曲線與蚶線間的關聯性及其所對應的複數方程式，並以幾何變換的觀點來對它們作區分。

貳、研究動機

Bezier曲線主要是以描點、方向線及控制點描述曲線的方式。可藉由改變上述點、線的位置方向或角度來改變曲線的形狀。先由二次Bezier曲線圖形的建構方法開始討論。

<u>二次Bezier曲線</u>：

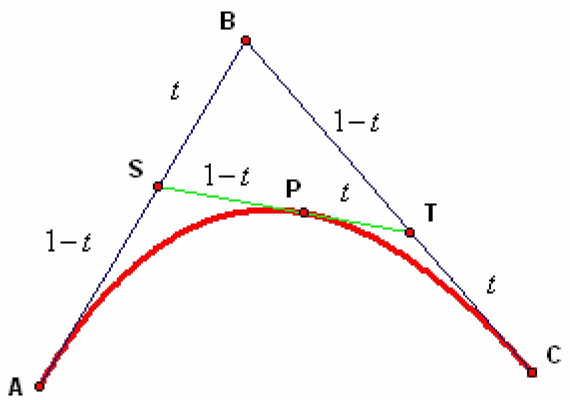
已知給定平面上相異不共線三點 A、B、C；今在 $\overline{AB}$ 上有一動點 S 滿足 $\overline{AS}:\overline{SB}=1-t:t$，$0\le t\le 1$，而在 $\overline{BC}$ 上可找到一點 T 滿足 $\overline{BT}:\overline{TC}=1-t:t$，然後在 $\overline{ST}$ 上也可找到一點 P 滿足 $\overline{SP}:\overline{PT}=1-t:t$。每當 S 點一固定之後，便可依序決定 T 點與 P 點的位置。故只要在 $\overline{AB}$ 上移動 S 點，便可動態的描繪出 P 點的軌跡，亦即為Bezier曲線。如圖一所示。且可推得

$\mathrm{S}=t\mathrm{A}+(1-t)\mathrm{B}$，$\mathrm{T}=t\mathrm{B}+(1-t)\mathrm{C}$ 以及 $\mathrm{P}=t\mathrm{S}+(1-t)\mathrm{T}$。

故我們可推得

$$\begin{aligned}\mathrm{P}&=t\big(t\mathrm{A}+(1-t)B\big)+(1-t)\big(t\mathrm{B}+(1-t)\mathrm{C}\big)\\&=t^2\mathrm{A}+2t(1-t)\mathrm{B}+(1-t)^2\mathrm{C}\\&=\binom{2}{0}t^2\mathrm{A}+\binom{2}{1}t(1-t)\mathrm{B}+\binom{2}{2}(1-t)^2\mathrm{C}\end{aligned}$$

且 $0\le t\le 1$。



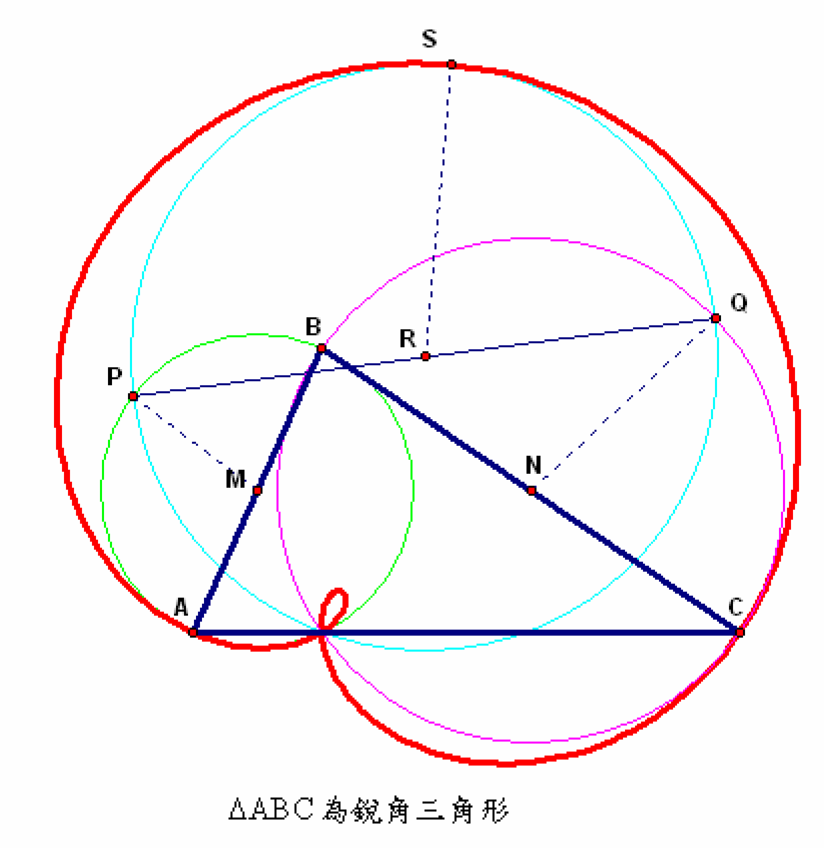
圖一

n次Bezier曲線：

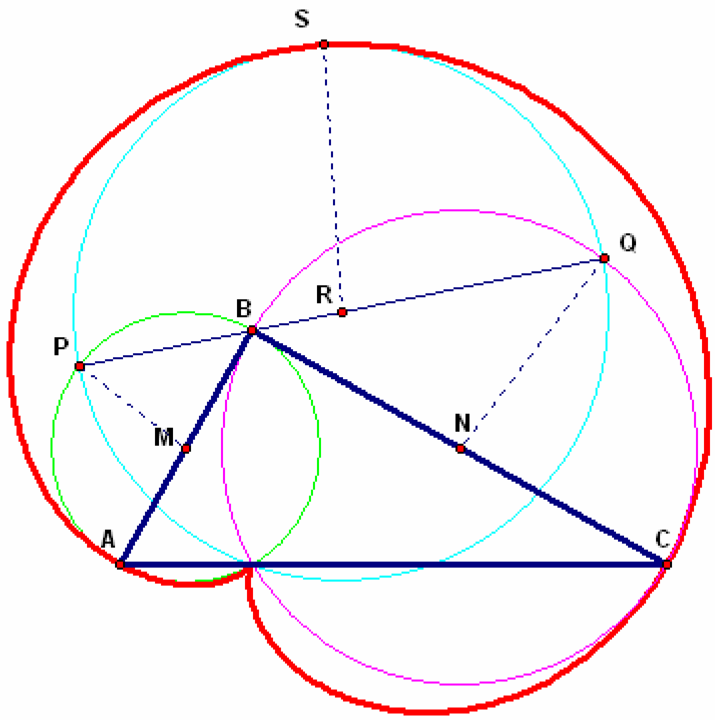
平面上依逆時針的順序有 n+1 個相異點 P_0 、 $P_1 \cdots$ 、 P_n 時，利用同樣的遞迴方法所描繪出的 n 次 Bezier 曲線其軌跡點 S 的通式爲

$$S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^{n-k}(1-t)^{k} P_k \text{ , } 0\le t\le 1 \text{ 。}$$

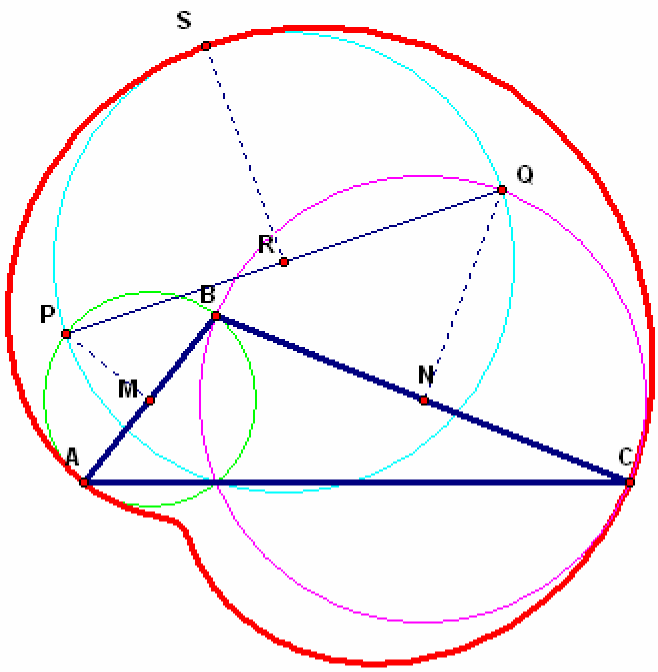
因此，我們模仿上述 Bezier 二次曲線的繪圖方法，給定平面相異不共線三點 A、B、C，分別以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的中點 M 及 N 爲圓心，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 爲直徑作圓 C_1 與 C_2；接著在圓 C_1 上取一動點 P，另在圓 C_2 弧 BC 上取一對應點 Q 滿足 $\angle PMB=\angle QNC$，再以 $\overline{PQ}$ 的中點 R 爲圓心，$\overline{PQ}$ 爲直徑，$\overline{PQ}$ 的中點 R 爲圓心作另一圓 C_3，並在圓 C_3 上取對應點 S 滿足 $\angle SRQ=\angle PMB=\angle QNC$ 。每當 P 點一固定之後，便可依序決定 Q 點與 S 點的位置。接著，我們讓動點跑動，竟然發現 S 點所描繪出的軌跡，隨著三角形 ABC 的形狀成銳角三角形、直角三角形及鈍角三角形三種不同的類型變化時，也對應呈現近似於有內圈的蚶線、心臟線及無內圈的蚶線的圖形。如圖二所示。這也引起了我們的好奇心，進而著手進行研究。



ΔABC 為銳角三角形



ΔABC 為直角三角形



ΔABC 為鈍角三角形

圖二

參、研究過程

【定義一】:我們將上述的作圖方法所做出來的圖形稱之爲由 A、B、C 所決定的二次環狀 Bezier 曲線。

首先，我們試著找出我們所做的曲線的方程式。因爲 P 點是：以 $\overline{AB}$ 爲直徑的圓的圓心（M）爲原點，$\overrightarrow{MB}$ 旋轉 θ 角所形成，令 $\angle SRQ = \angle PMB = \angle QNC = \theta$ 且 $0 \le \theta \le 2\pi$，並且以 $R(\theta)$ 代表平面上的旋轉矩陣，所以我們得知 $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$。故

P= $(\frac{A+B}{2}) + R(\theta)(\frac{B-A}{2})$ ，同理，因爲 Q 點是：以 $\overline{BC}$ 爲直徑的圓的圓心爲原點，$\overrightarrow{NC}$ 旋轉 θ 角所形成，因此 Q=$(\frac{B+C}{2}) + R(\theta)(\frac{C-B}{2})$，又因爲 S 點是：以 $\overline{PQ}$ 爲直徑的圓的圓心爲原點，$\overrightarrow{RQ}$ 旋轉 θ 角所形成，因此 S=$(\frac{Q+P}{2}) + R(\theta)(\frac{Q-P}{2})$，接著再把 P=$(\frac{A+B}{2}) + R(\theta)(\frac{B-A}{2})$及

Q=$(\frac{B+C}{2}) + R(\theta)(\frac{C-B}{2})$代入 S=$(\frac{Q+P}{2}) + R(\theta)(\frac{Q-P}{2})$可推得

$$S=(\frac{Q+P}{2}) + R(\theta)(\frac{Q-P}{2})$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{A+B}{2}\right) + R(\theta)\left(\frac{B-A}{2}\right)\right) + \left(\left(\frac{B+C}{2}\right) + R(\theta)\left(\frac{C-B}{2}\right)\right)}{2} +$$

$$R(\theta)\,\frac{\left(\left(\frac{B+C}{2}\right) + R(\theta)\left(\frac{C-B}{2}\right)\right) - \left(\left(\frac{A+B}{2}\right) + R(\theta)\left(\frac{B-A}{2}\right)\right)}{2}$$

$$= \left(\frac{A+2B+C}{4}\right) + R(\theta)\left(\frac{C-A}{4}\right) + R(\theta)\left[\left(\frac{C-A}{4}\right) + R(\theta)\left(\frac{A-2B+C}{4}\right)\right]$$

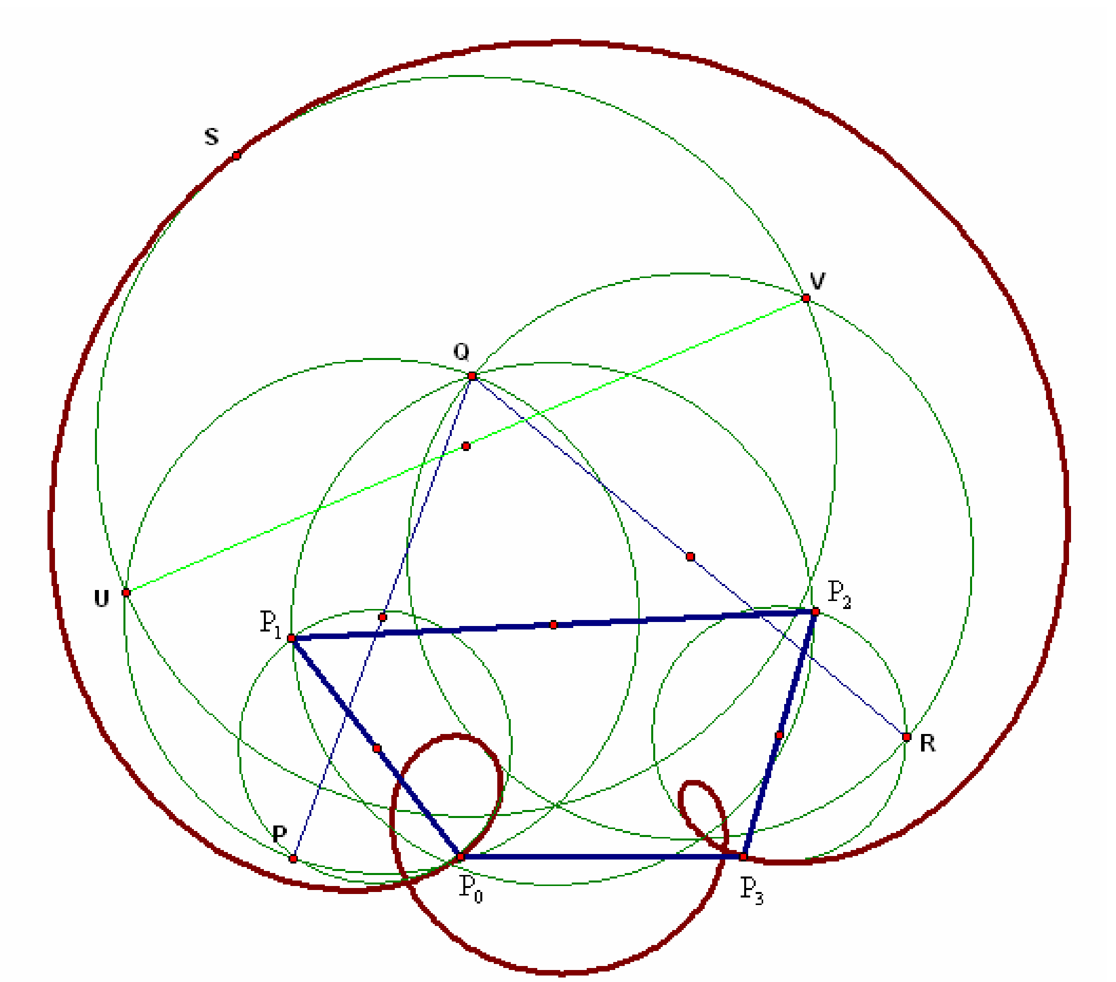
$$= \left(\frac{A}{4} - R(\theta)\frac{A}{4} - R(\theta)\frac{A}{4} + R(\theta)^2\frac{A}{4}\right) + \left(\frac{2B}{4} - R(\theta)^2\frac{2B}{4}\right) + \left(\frac{C}{4} + R(\theta)\frac{C}{4} + R(\theta)\frac{C}{4} + R^2(\theta)\frac{C}{4}\right)$$

$$= \left[I - R(\theta)\right]^2\frac{A}{4} + 2\left(I - R(\theta)^2\right)\frac{B}{4} + \left[I + R(\theta)\right]^2\frac{C}{4}$$

$$= \left[\frac{I - R(\theta)}{2}\right]^2 A + 2\left(\frac{I - R(\theta)}{2}\right)\left(\frac{I + R(\theta)}{2}\right)B + \left[\frac{I + R(\theta)}{2}\right]^2 C$$

$=\binom{2}{0} T^2A+\binom{2}{1} T(I-T)B+\binom{2}{0} (I-T)^2C$（此處的 $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 即為單位矩陣，而 $\boxed{T=\frac{I-R(\theta)}{2}}$ $\boxed{故\ I-T=\frac{I+R(\theta)}{2}}$。）發現上述方程式的係數部分相似於二次 Bezier 曲線的係數滿足著二項式定理。我們嘗試著把它推展到 n+1 個點的式子。由前述 3 個點的情形，假設在平面上依逆時針的順序相異四個點 P_0 、 P_1 ， P_2 及 P_3 四點，利用同樣的方法先利用 $\overline{P_0P_1}$ 、 $\overline{P_1P_2}$ 與 $\overline{P_2P_3}$ 為直徑作圓 C_1、C_2 與 C_3 並於其上分別取相對應的動點 P、Q 與 R；再利用 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{QR}$ 為直徑作圓 C_4 與 C_5 並於其上分別取相對應的動點 U 與 V。最後再以 $\overline{UV}$ 為直徑作圓 C_6 並於其上取相對應的動點 S。當我們讓動點跑動時便描繪出了較為複雜的圖形如圖三。且我們像三個點的情形時一樣的去找出 S 的座標，最後得到

$$S=\binom{3}{0}T^3P_0+\binom{3}{1}T^2(I-T)P_1+\binom{3}{2}T(I-T)^2P_2+\binom{3}{3}(I-T)^3P_3\text{。}$$



圖三

【定義二】：平面上依逆時針的順序有 n+1 個相異點 P_0 、 $P_1 \cdots$ 、 P_n ，利用同樣的遞迴方法所描繪的圖形我們稱之爲由 P_0 、 $P_1 \cdots$ 、 P_n 所決定的 n 次環狀 Bezier 曲線。

所以我們推論環狀 n 次 Bezier 曲線的軌跡點 S，其通式爲

【定理一】：$\boxed{S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} T^{n-k}(I-T)^k P_k \text{ 此時 } T=\frac{I-R(\theta)}{2} \text{ 及 } I-T=\frac{I+R(\theta)}{2}}$ 。

我們試著利用數學歸納法證明之：

【證明】：(1)當 n=0 時，亦即只有一個點時

$S=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k} T^{0-k}(I-T)^k P_k=\binom{0}{0} T^0(I-T)^0 P_0=P_0$ 圖形當然還是 P_0 。符合我們所設的通式，故成立。

當 n=1 時，亦即有兩個點時

$$S=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k} T^{1-k}(I-T)^k P_k=\binom{1}{0} T^1(I-T)^0 P_0+\binom{1}{1} T^0(I-T)^1 P_1$$

$$=\boxed{TP_0+(I-T)P_1}=\left(\frac{I-R(\theta)}{2}\right)P_0+\left(\frac{I+R(\theta)}{2}\right)P_1=\boxed{\left(\frac{P_1+P_0}{2}\right)+R(\theta)\left(\frac{P_1-P_0}{2}\right)}$$

S 落在以 $\overline{P_0P_1}$ 的中點 $\frac{P_0+P_1}{2}$ 爲圓心 $\overline{P_0P_1}$ 爲直徑的圓上；當然還是成立。

(2)假設當 n=h 時成立；亦即 $S=\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k} T^{h-k}(I-T)^k P_k$ 。

(3)當 n=h+1 時，我們分兩個步驟來證明

第一步先利用 $\overline{P_0P_1}$ 、 $\overline{P_1P_2}$ $\cdots$ 、 $\overline{P_hP_{h+1}}$ 分別作出對應的點

P_0^* 、 P_0^* 、$\cdots$ 、 P_h^* 滿足 $P_0^*=TP_0+(I-T)P_1$ 、 $P_1^*=TP_1+(I-T)P_2$ 、$\cdots$ 、

$P_k^*=TP_k+(I-T)P_{k+1}$ 、$\cdots$ 、 $P_h^*=TP_h+(I-T)P_{h+1}$ 。

第二步再利用此 h+1 個點進而描繪出 S 點。故利用數學歸納法在 n=h 時假設成立，我們可推得

$$S=\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k} T^{h-k}(I-T)^k P_k^*=\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k} T^{h-k}(I-T)^k\left(TP_k+(I-T)P_{k+1}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}\left[T^{(h+1)-k}(I-T)^{k}P_{k}+T^{h-k}(I-T)^{k+1}P_{k+1}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}T^{(h+1)-k}(I-T)^{k}P_{k}+\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}T^{h-k}(I-T)^{k+1}P_{k+1}$$

$$=\left(T^{h+1}P_{0}\right)+\sum_{k=1}^{h}\binom{h}{k}T^{(h+1)-k}(I-T)^{k}P_{k}+\sum_{k=1}^{h+1}\binom{h}{k-1}T^{h-(k-1)}(I-T)^{(k-1)+1}P_{(k-1)+1}$$

$$=\left(T^{(h+1)-0}(I-T)^{0}P_{0}\right)+\sum_{k=1}^{h}\binom{h}{k}T^{(h+1)-k}(I-T)^{k}P_{k}+\sum_{k=1}^{h+1}\binom{h}{k-1}T^{(h+1)-k}(I-T)^{k}P_{k}$$

$$=T^{(h+1)}P_{0}+\sum_{k=1}^{h}\left[\binom{h}{k}+\binom{h}{k-1}\right]T^{(h+1)-k}(I-T)^{k}P_{k}+\binom{h}{h}(I-T)^{h+1}P_{h+1}$$

$$=T^{(h+1)}(I-T)^{0}P_{0}+\sum_{k=1}^{h}\binom{h+1}{k}T^{(h+1)-k}(I-T)^{k}P_{k}+\binom{h+1}{h+1}T^{0}(I-T)^{h+1}P_{h+1}$$

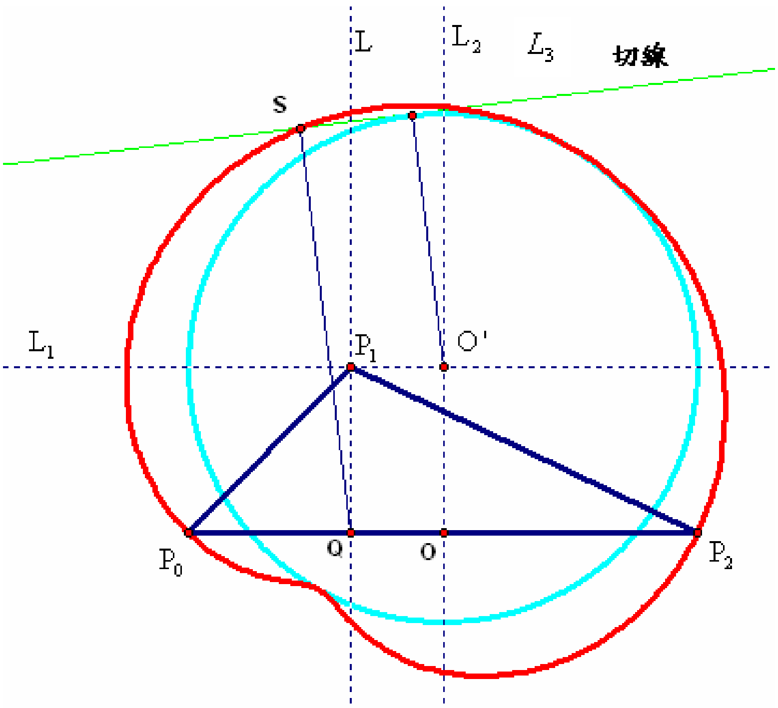
$=\sum_{k=0}^{h+1}\binom{h+1}{k}T^{(h+1)-k}(I-T)^{k}P_{k}$ 符合通式，故成立。 **【得證】**

由數學歸納法的原理得知： $S=\sum_{0}^{1}C_{k}^{1}T^{1-k}(I-T)^{k}P_{k}$ 成立，它的係數確符合二項式定理，而其通式的確如預期般的類似於 n 次 Bezier 曲線的一般式。接下來我們想要證明在圖二中的三種圖形依序分別是有內圈的蚶線、心臟線及無內圈的蚶線。

今在平面上任取不共線的三點 P_0 、 P_1 、 P_2 ，不失其一般性我們可以假設 $\overline{P_0P_2}$ 的中點為 O（0，0）， P_1 的座標為 (α,β) 且 P_0 與 P_2 的座標分別為（-a，0）及（a，0）。首先我們先作一些輔助的圖形如圖四。

我們先以 $\overleftrightarrow{P_0P_2}$ 為水平軸，過 P_1 作一條垂直 $\overleftrightarrow{P_0P_2}$ 的直線 L 交 $\overleftrightarrow{P_0P_2}$ 於 $Q(\alpha,0)$ 點，連 $\overline{P_1Q}$ ，通過 P_1 作一條垂直 $\overline{P_1Q}$ 的直線 L_1 ，過 O 作一條垂直 $\overleftrightarrow{P_0P_2}$ 的直線 L_2 ，令直線 L_1 交直線 L_2 於 $O'(0,\beta)$ 點。過 S 點再作一條直線 L 使得 L 垂直 $\overline{QS}$ ；最後再以 O' 為圓心，a 為半徑作一圓 C。

接下來我們想要證明 $d(O',L)=$ a，也就是說直線 L 就是圓 C 的一條切線。如此一來我們便可推得 S 點根本就是垂足曲線的軌跡點（Q 就是基點），眾所皆知蚶線即為圓的垂足曲線，因此便可以完成證明。



圖四

【證明】：由公式

$$S=\left[\frac{I-R(\theta)}{2}\right]^2\begin{bmatrix}-a\\0\end{bmatrix}+\left[\frac{I-R(\theta)}{2}\right]\left[\frac{I+R(\theta)}{2}\right]\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}+\left[\frac{I+R(\theta)}{2}\right]^2\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}$$

可知 S 點座標為$(a\cos\theta+\alpha-\alpha\cos^2\theta+\beta\sin\theta\cos\theta,\ a\sin\theta-\alpha\sin\theta\cos\theta+\beta-\beta\cos^2\theta)$。

$\overrightarrow{QS}$ =S－Q

$=(a\cos\theta+\alpha-\alpha\cos^2\theta+\beta\sin\theta\cos\theta,\ a\sin\theta-\alpha\sin\theta\cos\theta+\beta-\beta\cos^2\theta)-(\alpha\ ,0)$

$=(a\cos\theta-\alpha\cos^2\theta+\beta\sin\theta\cos\theta,\ a\sin\theta-\alpha\sin\theta\cos\theta+\beta-\beta\cos^2\theta)$

$\overline{QS}$ 即為直線 L 的法向量。故可求得 L 的方程式為

$(a\cos\theta+\alpha-\alpha\cos^2\theta+\beta\sin\theta\cos\theta)x+(a\sin\theta-\alpha\sin\theta\cos\theta+\beta-\beta\cos^2\theta)y=k$

因為 L 過 S 點，所以把 S 帶入 L 可求 k 值如下：

$k=(a\cos\theta+\alpha-\alpha\cos^2\theta+\beta\sin\theta\cos\theta)^2+(a\sin\theta-\alpha\sin\theta\cos\theta+\beta-\beta\cos^2\theta)^2$

$=a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+a\alpha(\cos\theta-\cos^3\theta-\cos^3\theta-2\sin^2\theta\cos\theta)+a\beta(\sin\theta\cos^2\theta+$

$\sin\theta\cos^2\theta+2\sin\theta-2\sin\theta\cos^2\theta)+\alpha^2(-\cos^2\theta+\cos^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta)+\alpha\beta(-$

$\sin\theta\cos^3\theta+\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos^3\theta-2\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta\cos^4\theta)+\beta^2(\sin^2\theta\cos^2\theta+1+$

$\cos^4\theta-2\cos^2\theta)$

$=a^2-a\alpha\cos\theta+2a\beta\sin\theta-\alpha\beta\sin\theta\cos\theta+\beta^2\sin^2\theta$

因爲O'點座標爲$(0,\beta)$，所以

d（O'，L）=

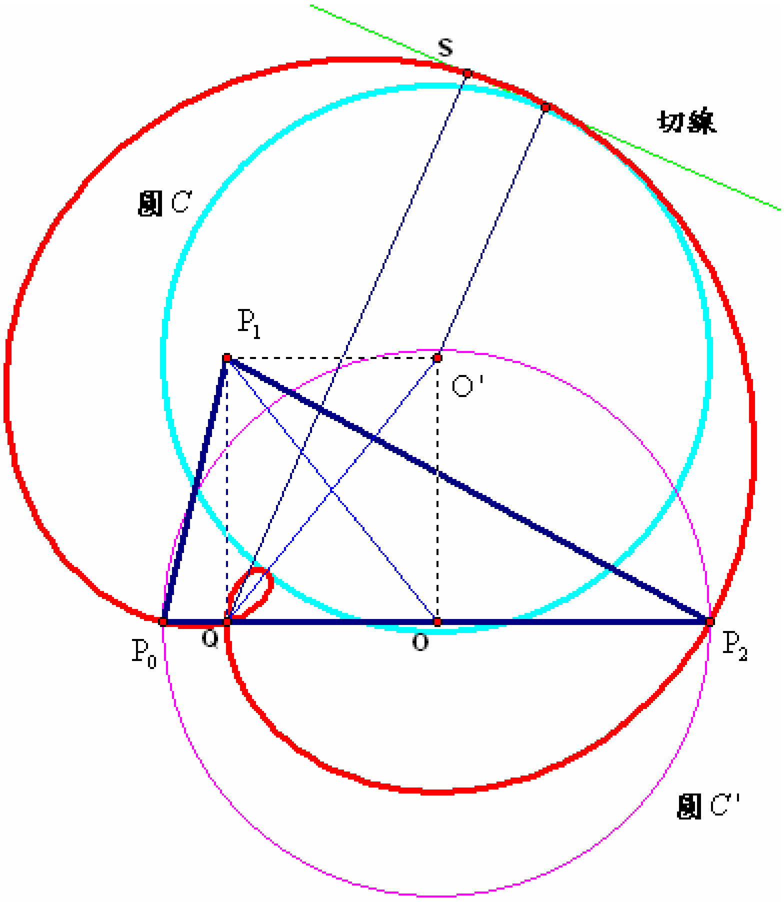
$$\frac{\left|\beta(a\sin\theta-\alpha\sin\theta\cos\theta+\beta-\beta\cos\theta)-(a^2-a\alpha\cos\theta+2a\beta\sin\theta-\alpha\beta\sin\theta\cos\theta+\beta^2\sin^2\theta)\right|}{\sqrt{(a\cos\theta-\alpha\cos^2\theta+\beta\sin\theta\cos\theta)^2+(a\sin-\alpha\sin\theta\cos\theta+\beta\sin^2\theta)^2}}$$

$$\frac{\left|(a^2-a\alpha\cos\theta+a\beta\sin\theta)\right|}{\sqrt{(a-\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)^2}}=a。$$

故直線L即爲圓 C 的一條切線且 S 點即爲由 Q 點相對於圓 C 的一條切線 L 的垂足；所以，S 點實爲垂足曲線的軌跡點。我們都知道隨著 Q 點的位置落在圓 C 外部、圓 C 上及圓 C 內部，其所對應的垂足曲線依序爲有內圈的蚶線、心臟線及無內圈的蚶線的圖形。所以接下來我們要證明：

依照$\Delta P_0P_1P_2$的形狀成銳角三角形、直角三角形及鈍角三角形三種不同的類型變化時，S 點的軌跡圖形也正好分別對應呈現內圈的蚶線、心臟線及無內圈的蚶線的圖形。

今於圖四中以 O 點爲圓心 a 爲半徑作圓C'，可推得：當點P_1落在圓C'外面、圓C'上面及圓C'內部時，$\Delta P_0P_1P_2$依序爲銳角、直角及銳角三角形。如圖四(a)、圖四(b)及圖四(c)所示。

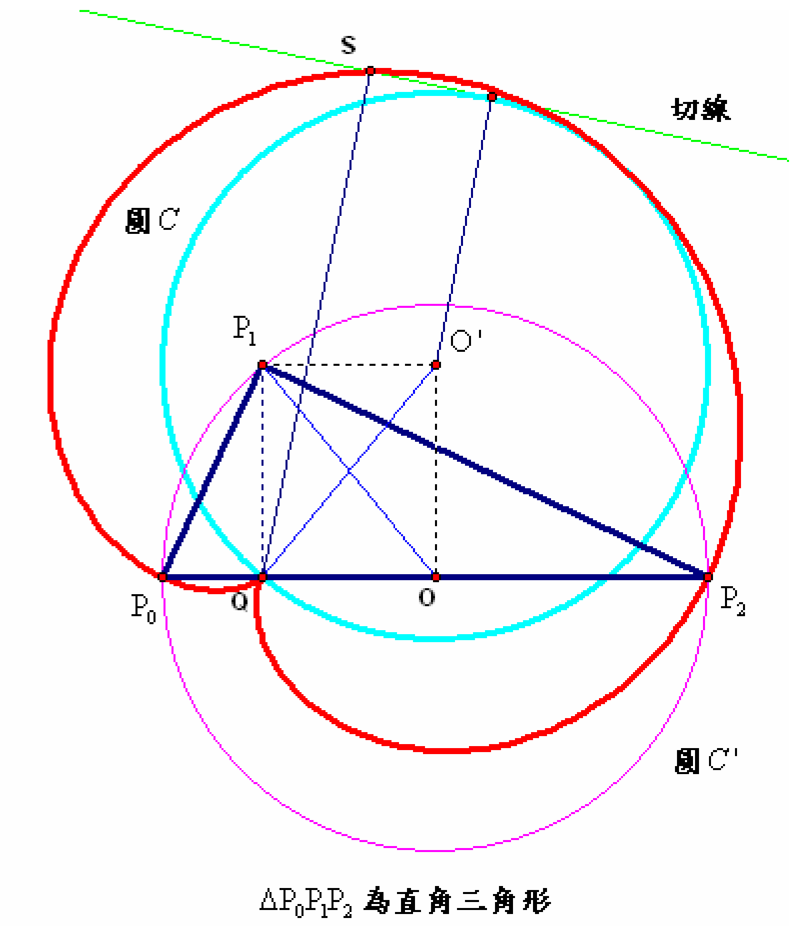


$\Delta P_0P_1P_2$ 為銳角三角形

圖四(a)

當點 P_1 落在圓 C' 外面時，此時 $\Delta P_0P_1P_2$ 爲銳角三角形。因爲四邊形 OQP_1O' 爲一個矩形，所以兩條對角線 $\overline{QO'}$ 與 $\overline{P_1O}$ 等長，亦即 $\overline{QO'}=\overline{P_1O}$。所以當 P_1 落在圓 C' 外面時相當於 $\overline{P_1O}>a$，故 $\overline{QO'}>a$，也就是說 Q 落在圓 C 外面。所以此時圖形爲由 Q 點對以 O' 爲圓心 $\overline{P_0P_2}$ 爲直徑所作之垂足曲線，即爲有內圈的蚶線。

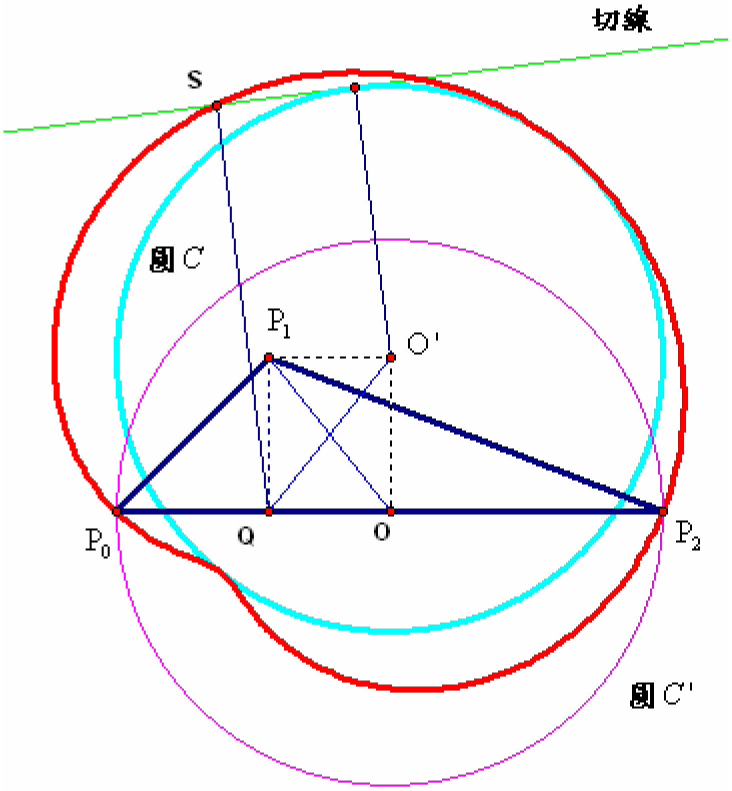
我們可以很容易的看出：此有內圈的蚶線乃是以 $\overleftrightarrow{QO'}$ 爲貫軸，而圖形也以 $\overleftrightarrow{QO'}$ 爲對稱軸左右對稱。



圖四(b)

當點 P_1 落在圓 C' 上面時，此時 $\Delta P_0P_1P_2$ 爲直角三角形。因爲四邊形 OQP_1O' 爲一個矩形，所以兩條對角線 $\overline{QO'}$ 與 $\overline{P_1O}$ 等長，亦即 $\overline{QO'}=\overline{P_1O}$ 。所以當 P_1 落在圓 C' 外面時相當於 $\overline{P_1O}=a$，故 $\overline{QO'}=a$ ，也就是說 Q 落在圓 C 上面。所以此時圖形爲由 Q 點對以 O' 爲圓心 $\overline{P_0P_2}$ 爲直徑所作之垂足曲線，即爲心臟線。

我們可以很容易的看出：此心臟線乃是以 $\overleftrightarrow{QO'}$ 爲貫軸，而圖形也以 $\overleftrightarrow{QO'}$ 爲對稱軸左右對稱。

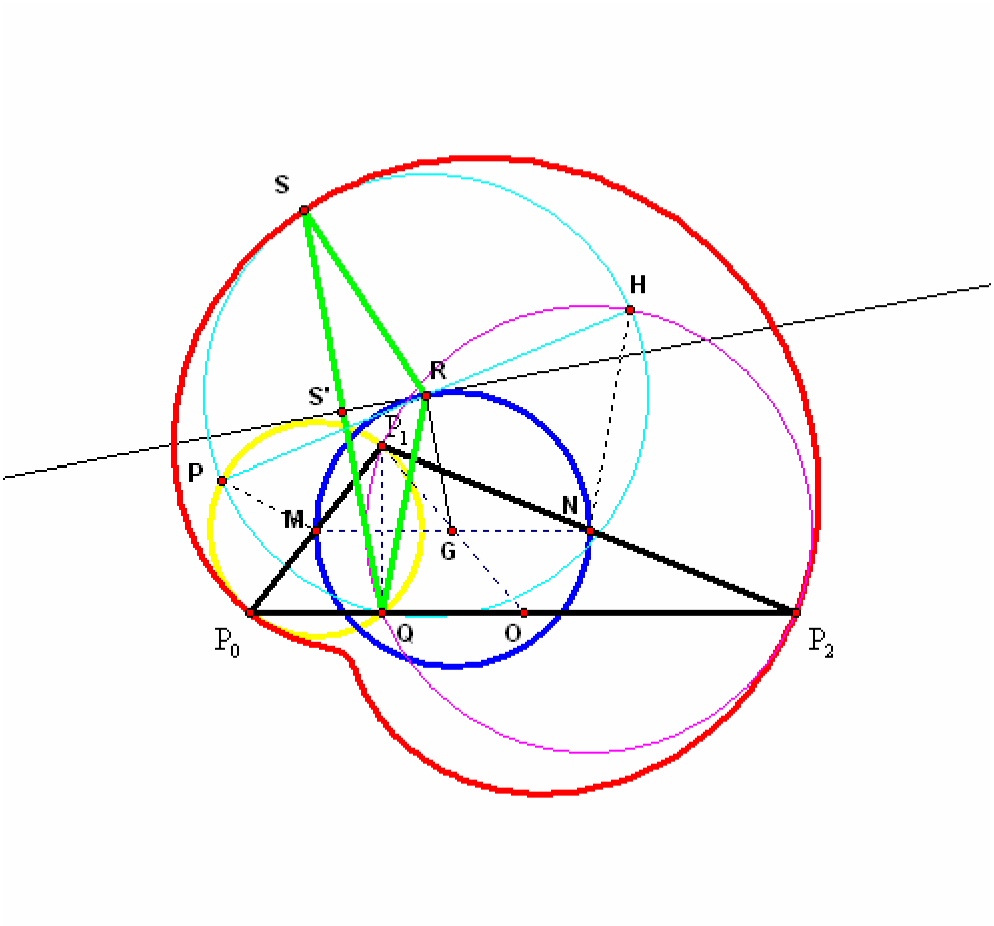


$\Delta P_0P_1P_2$ 為鈍角三角形

圖四(c)

當點 P_1 落在圓 C' 裡面時，此時 $\Delta P_0P_1P_2$ 爲鈍角三角形。因爲四邊形 OQP_1O' 爲一個矩形，所以兩條對角線 $\overline{QO'}$ 與 $\overline{P_1O}$ 等長，亦即 $\overline{QO'}=\overline{P_1O}$。所以當 P_1 落在圓 C' 裡面時相當於 $\overline{P_1O}<a$，故 $\overline{QO'}<a$，也就是說 Q 落在圓 C 裡面。所以此時圖形爲由 Q 點對以 O' 爲圓心 $\overline{P_0P_2}$ 爲直徑所作之垂足曲線，即爲無內圈的蚶線。

我們可以很容易的看出：此無內圈的蚶線乃是以 $\overrightarrow{QO'}$ 爲貫軸，而圖形也以 $\overleftrightarrow{QO'}$ 爲對稱軸左右對稱。 【得證】



圖四(d)

由四(d)以及定理一可得知$\angle\theta=\angle PMP_1=\angle HNP_2=\angle SRH=\angle RGN$ 。

$$\text{且 } S=\binom{2}{0}T^2(I-T)^0P_0+\binom{2}{1}T^1(I-T)^1P_1+\binom{2}{2}T^0(I-T)^2P_2$$

$$=T^2P_0+2\,T^1(I-T)^1P_1+(I-T)^2P_2$$

$$=\left(\frac{I-R(\theta)}{2}\right)^2P_0+2\left(\frac{I-R(\theta)}{2}\right)\left(\frac{I+R(\theta)}{2}\right)P_1+\left(\frac{I+R(\theta)}{2}\right)^2P_2$$

$$=\left[\left(\frac{P_0+2P_1+P_2}{4}\right)+R(\theta)\left(\frac{P_2-P_0}{2}\right)\right]+\left(R(\theta)\right)^2\left(\frac{P_0-2P_1+P_2}{4}\right)$$

$$=\left[\left(\frac{P_0+2P_1+P_2}{4}\right)+R(\theta)\left(\frac{P_2-P_0}{4}\right)\right]+R(\theta)\left[\left(\frac{P_2-P_0}{4}\right)+R(\theta)\left(\frac{P_0-2P_1+P_2}{4}\right)\right]$$

$$=\left[\left(\frac{P_0+2P_1+P_2}{4}\right)+R(\theta)\left(\frac{P_2-P_0}{4}\right)\right]+\left[R(\theta)\left(\frac{P_2-P_0}{4}\right)+R(2\theta)\left(\frac{P_0-2P_1+P_2}{4}\right)\right].$$

因此，我們可由圖形中看出$G=\frac{P_0+2P_1+P_2}{4}$ ，$R=\left(\frac{P_0+2P_1+P_2}{4}\right)+R(\theta)\left(\frac{P_2-P_0}{4}\right)$，

$\overrightarrow{RH}=\left(\frac{P_2-P_0}{4}\right)+R(\theta)\left(\frac{P_0-2P_1+P_2}{4}\right)$以及$\overrightarrow{RS}=R(\theta)\left(\frac{P_2-P_0}{4}\right)+R(2\theta)\left(\frac{P_0-2P_1+P_2}{4}\right)$ 。

假設$\overline{P_0P_2}$的中點為 O（0，0），P_1的座標為(α,β)且 A 與P_2的座標分別為（-a，0）及（a，0）。

所以 G=$\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$、Q=$(\alpha,0)$、 $\overline{P_0O}=\overline{OP_2}=a>0$及

$$\overrightarrow{RS}=\left(\left(\frac{a}{2}\right)\cos\theta,\left(\frac{a}{2}\right)\sin\theta\right)+\left(\left(\frac{-\alpha}{2}\right)\cos 2\theta+\frac{\beta}{2}\sin 2\theta,\left(\frac{-\alpha}{2}\right)\sin 2\theta-\frac{\beta}{2}\cos 2\theta\right)$$ 。

$$=\left(\left(\frac{a}{2}\right)\cos\theta-\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos 2\theta+\frac{\beta}{2}\sin 2\theta,\left(\frac{a}{2}\right)\sin\theta-\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin 2\theta-\frac{\beta}{2}\cos 2\theta\right)$$

則我們可得到以下的幾個結果：

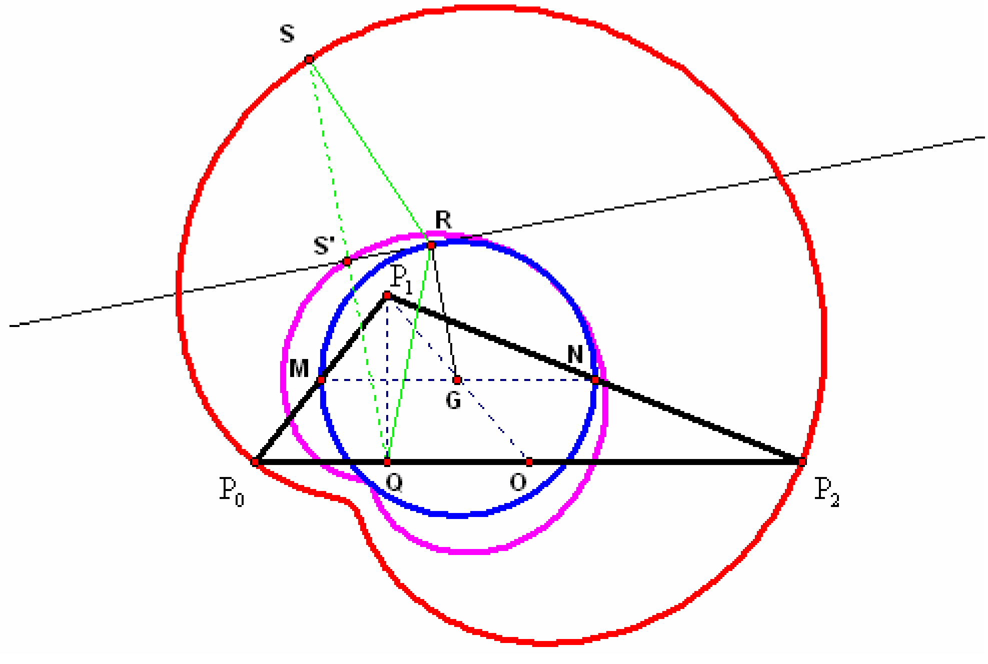
(i) $\overline{QR}=\overline{RS}$ 。

(ii) $\overleftrightarrow{QS}\,//\,\overleftrightarrow{GR}$ 。

(iii) 令 R 是以 G 為圓心，$\frac{\overline{P_0P_2}}{4}$為半徑之圓 C 上的動點；則$\overleftrightarrow{RS}$是過 R 點的切線且$\overline{QS}=2\overline{QS'}$ 。

收集所有S以 Q 點為中心縮小$\frac{1}{2}$所形成的軌跡，就是S'的軌跡，即$\frac{1}{2}\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{QS'}$ 。

(iv) S’ 的軌跡即為由 Q 點對圓 C 所做的垂足曲線。



圖四(e)

【**證明**】：首先我們證明$\overline{QR}=\overline{RS}$。

$$\because \mathrm{R}=\left(\frac{\mathrm{P}_0+2\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2}{4}\right)+\mathrm{R}(\theta)\left(\frac{\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_0}{4}\right)=\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)+\left(\frac{a\cos\theta}{2},\frac{a\sin\theta}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{a\cos\theta}{2},\frac{\beta}{2}+\frac{a\sin\theta}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{a\cos\theta}{2},\frac{\beta}{2}+\frac{a\sin\theta}{2}\right)-(\alpha,0)=\left(\left(\frac{-\alpha}{2}\right)+\frac{a\cos\theta}{2},\frac{\beta}{2}+\frac{a\sin\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \overline{\mathrm{QR}}^2=\left[\left(\frac{-\alpha}{2}\right)+\frac{a\cos\theta}{2}\right]^2+\left[\frac{\beta}{2}+\frac{a\sin\theta}{2}\right]^2=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)+\left(\frac{a\left(\beta\sin\theta-\alpha\cos\theta\right)}{2}\right)+\left(\frac{a^2}{4}\right).$$

$$\overline{\mathrm{RS}}^2=\left[\left(\frac{a}{2}\right)\cos\theta-\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos 2\theta+\frac{\beta}{2}\sin 2\theta\right]^2+\left[\left(\frac{a}{2}\right)\sin\theta-\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin 2\theta-\frac{\beta}{2}\cos 2\theta\right]^2$$

$$=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)-\left(\frac{2a\alpha\left(\cos\theta\cos 2\theta+\sin\theta\sin 2\theta\right)}{4}\right)+\left(\frac{2a\beta\left(\cos\theta\sin 2\theta-\sin\theta\cos 2\theta\right)}{4}\right)$$

$$-\left(\frac{2\alpha\beta\left(\cos 2\theta\sin 2\theta-\sin 2\theta\cos 2\theta\right)}{4}\right)+\left(\frac{a^2}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)-\left(\frac{a\alpha\cos\left(2\theta-\theta\right)}{2}\right)+\left(\frac{a\beta\sin\left(2\theta-\theta\right)}{2}\right)+\left(\frac{a^2}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\right)+\left(\frac{a\left(\beta\sin\theta-\alpha\cos\theta\right)}{2}\right)+\left(\frac{a^2}{4}\right)=\overline{\mathrm{QR}}^2.$$

故$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{RS}}$。

接著證明$\overleftrightarrow{\mathrm{QS}}//\overleftrightarrow{\mathrm{GR}}$

令 O 爲原點

$$\mathrm{S}=\left[\left(\frac{\mathrm{P}_0+2\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2}{4}\right)+\mathrm{R}(\theta)\left(\frac{\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_0}{4}\right)\right]+\left[\mathrm{R}(\theta)\left(\frac{\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_0}{4}\right)+\mathrm{R}(2\theta)\left(\frac{\mathrm{P}_0-2\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(I-R(2\theta))\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}+R(\theta)\begin{bmatrix}a\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha(1-\cos 2\theta)+\beta\sin 2\theta+2a\cos\theta\\ \beta(1-\cos 2\theta)-\alpha\sin 2\theta+2a\sin\theta\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{R}=\left[\left(\frac{\mathrm{P}_0+2\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2}{4}\right)+\mathrm{R}(\theta)\left(\frac{\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_0}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}+\frac{1}{2}R(\theta)\begin{bmatrix}a\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha+a\cos\theta\\ \beta+a\sin\theta\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{QS}=\left(-\frac{1}{2}\alpha(1+\cos 2\theta)+\frac{1}{2}\beta\sin 2\theta+a\cos\theta,\frac{1}{2}\beta(1-\cos 2\theta)-\frac{1}{2}\alpha\sin 2\theta+a\sin\theta\right)$$

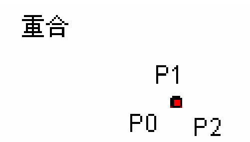
$\overrightarrow{RG}=\left(-\frac{1}{2}a\cos\theta,-\frac{1}{2}a\sin\theta\right)$所以$\overrightarrow{N_{RG}}=\left(\frac{1}{2}a\sin\theta,-\frac{1}{2}a\cos\theta\right)$

$$\overrightarrow{N_{RS}}\cdot\overrightarrow{QS}=\left(\frac{1}{2}a\sin\theta\right)\left(-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\alpha\cos 2\theta+\frac{1}{2}\beta\sin 2\theta+a\cos\theta\right)+$$
$$\left(-\frac{1}{2}a\cos\theta\right)\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\beta\cos 2\theta-\frac{1}{2}\alpha\sin 2\theta+a\sin\theta\right)$$
$$=\frac{1}{4}a\beta\cos\theta+\frac{1}{4}a\alpha\sin\theta-\frac{1}{4}a\alpha\sin\theta-\frac{1}{4}a\beta\cos\theta=0$$

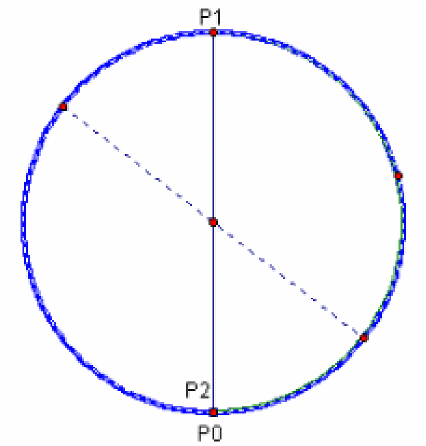
因爲$\overrightarrow{N_{\overline{GR}}}\perp\overrightarrow{GR}$且$\overrightarrow{N_{\overline{GR}}}\perp\overrightarrow{QS}$故$\overleftrightarrow{QS}//\overleftrightarrow{GR}$ **【得證】**

經由上述三種情形的證明中，我們進一步的觀察到事實上前述的三點P_0、P_1與P_2並不需**要依逆時針的順序**成爲相異的三個點。因此除了我們前述證明的三種情形外，我們利用 S 點的一般式可輕易的將其他退化的情形歸納如下列 6 種情形：

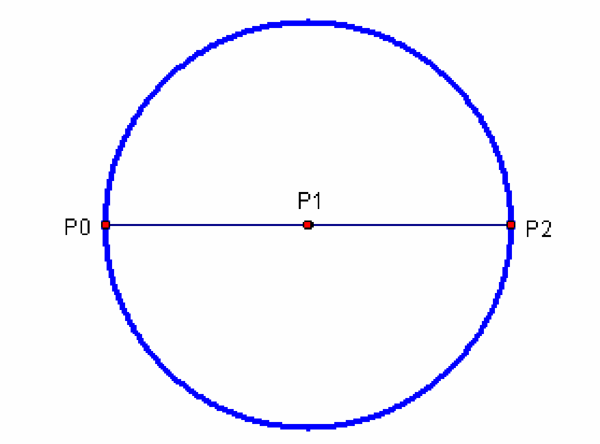
1. 當 $P_0=P_1=P_2$ 時,圖形爲一點。



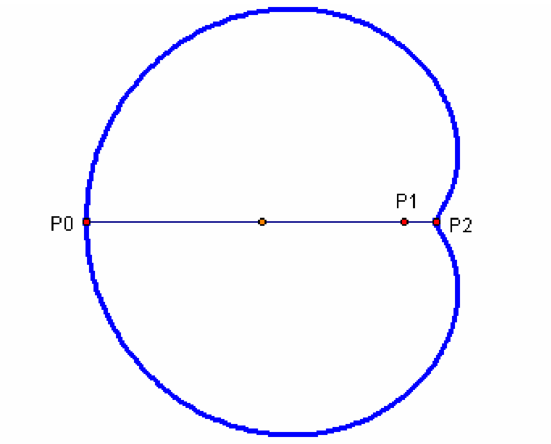
2. 當 $P_1\neq P_0=P_2$ 時,圖形爲一圓。



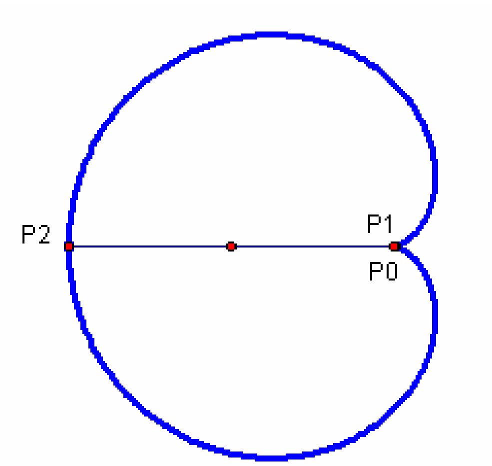
3. 當 P_0 、 P_1 與 P_2 爲三相異點且 P_1 在 $\overline{P_0P_2}$ 中點時，圖形爲一個以 P_1 爲圓心 $\overline{P_0P_2}$ 爲直徑的圓。



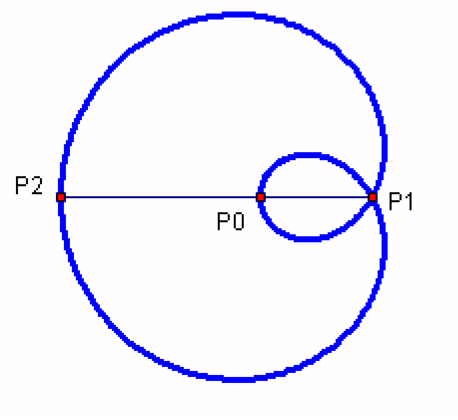
4. 當 P_0 、 P_1 與 P_2 爲共線的三相異點且 P_1 落在 $\overline{P_0P_2}$ 內部但 P_1 不爲 $\overline{P_0P_2}$ 中點時，圖形爲無內圈的蚶線。此時等同於 $\Delta P_0P_1P_2$ 爲鈍角三角形的情形。



5. 當 P_0 與 P_2 爲兩相異點且 $P_1=P_0$ 或 $P_1=P_2$ 時，圖形爲心臟線。此時等同於 $\Delta P_0P_1P_2$ 爲直角三角形的情形。



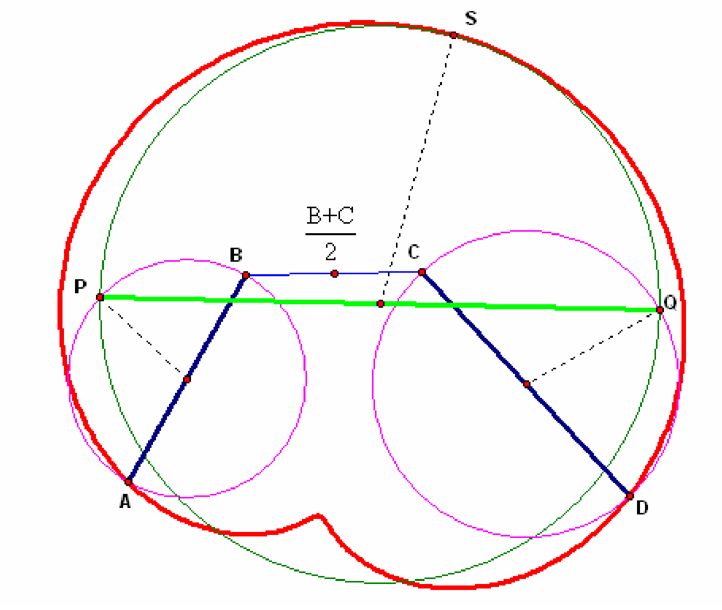
6.　當 P_0、P_1 與 P_2 為共線的三相異點且 P_1 落在 $\overline{P_0P_2}$ 外部時，圖形為有內圈的蚶線。此時等同於 $\Delta P_0P_1P_2$ 為銳角三角形的情形。



因此，在綜合上述的情形之後，我們可推得以下的結論：

【定理二】：由平面上 P_0、P_1 與 P_2 三點所決定的二次環狀 Bezier 曲線必為蚶線(包含圓)或是一點。

藉由前述的結論，我們可進一步的將二次環狀 Bezier 曲線的繪圖方法應用到平面上逆時針相異四點 A、B、C 及 D。先分別利用 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 為直徑作圓 C_1 與 C_2，並於其上分別取對應的動點 P 與 Q；然後再以 $\overline{PQ}$ 為直徑作圓 C 並於其上取同樣的對應軌跡點 S。如圖五所示。



圖五

因此我們可以很快的推得 $P=TA+(I-T)B$ 、$Q=TC+(I-T)D$ 及 $S=TP+(I-T)Q$。故

$$S=T\left(TA+(I-T)B\right)+(I-T)\left(TC+(I-T)D\right)$$

$$=T^2A+2T(I-T)\left(\frac{(B+C)}{2}\right)+(I-T)^2D$$

令 $A=P_0$、$\frac{B+C}{2}=P_1$ 及 $D=P_2$；故圖五中的圖形可看成由 A、$\frac{B+C}{2}$ 及 D 三點所決定的**蚶線**(包含**圓**)。我們知道 S 的參數式仍然可看成是一個以 T 爲參數的二次式。我們稱其爲由 A、B、C 及 D 四點所決定之二次環狀 Bezier 曲線。

由前述的定理二，我們可得知圖形爲垂足曲線而不是一個單點時的條件爲 $A\neq D$。因此，我們可推得

【定理三】：由平面上 A、B、C、D 四點所決定之二次環狀 Bezier 曲線仍爲爲蚶線(包含圓)或一個點。

- **複數平面上的刻劃**

從定理一的公式中當 n=2 時來觀察 $S=\binom{2}{0}T^2A+\binom{2}{1}T(I-T)B+\binom{2}{0}(I-T)^2C$ 且

$T=\frac{I-R(\theta)}{2}$ 及 $I-T=\frac{I+R(\theta)}{2}$，因爲 $TA=\left(\frac{I-R(\theta)}{2}\right)A=\frac{1}{2}(IA)-\frac{1}{2}\left(R(\theta)A\right)=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}R(\theta)A$；

如果我們將 $R(\theta)$ 用複數 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 表示並令 $\bar{t}=\frac{1-e^{i\theta}}{2}$，且令 $z_0=A$、$z_1=B$、$z_2=C$ 及 $w=S$ 且滿足 $\boxed{z_0 \text{、} z_1 \text{與} z_2 \text{爲不共線的相異三點}}$，則上述在 X-Y 平面上的公式在複數平面上可改成

$$\boxed{\begin{aligned} w&=\binom{2}{0}(\bar{t})^2z_0+\binom{2}{1}(\bar{t})(1-\bar{t})z_1+\binom{2}{2}(1-\bar{t})^2z_2\\ &=\binom{2}{0}\left(\frac{1-e^{i\theta}}{2}\right)^2z_0+\binom{2}{1}\left(\frac{1-e^{i\theta}}{2}\right)\left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right)z_1+\binom{2}{2}\left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right)^2z_2,\ 0\le\theta\le2\pi\\ &=\left(\frac{z_0+2z_1+z_2}{4}\right)+\left(\frac{z_2-z_0}{2}\right)e^{i\theta}+\left(\frac{z_0-2z_1+z_2}{4}\right)e^{i2\theta},\ 0\le\theta\le2\pi \end{aligned}}$$

如果在複數平面上收集上述的 w 所成的集合 Γ 可表爲

$\Gamma=\left\{\left(\frac{z_0+2z_1+z_2}{4}\right)+\left(\frac{z_2-z_0}{2}\right)z+\left(\frac{z_0-2z_1+z_2}{4}\right)z^2\ :\ |z|=1\right\}$。且 Γ 的圖形應該是**蚶線**(不包含**圓**)。如果我們令 $z=e^{i\theta}$ 的話，事實上 z 是落在以原點爲圓心的單位圓上。因此如果在複數平

面上給定三點 z_0、z_1 及 z_2 且滿足 $\boxed{z_0、z_1 \text{與} z_2 \text{爲不共線的相異三點}}$，我們可以定義一個二次變換 $T_{(z_0,z_1,z_2)}:\mathrm{C}\to\mathrm{C}$ 使得

$$\begin{aligned}T_{(z_0,z_1,z_2)}(z)&=\binom{2}{0}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 z_0+\binom{2}{1}\left(\frac{1-z}{2}\right)\left(\frac{1+z}{2}\right)z_1+\binom{2}{2}\left(\frac{1+z}{2}\right)^2 z_2\\&=\left(\frac{z_0+2z_1+z_2}{4}\right)+\left(\frac{z_2-z_0}{2}\right)z+\left(\frac{z_0-2z_1+z_2}{4}\right)z^2\end{aligned}$$

。由之前所得到的結果我們可推得：

【定理四】：二次變換 $T_{(z_0,z_1,z_2)}$ 將以原點爲圓心的單位圓，映射成二次環狀 Bezier 曲線。

因爲二次 Bezier 曲線的軌跡點公式爲 $\mathrm{P}=\binom{2}{0}t^2\mathrm{A}+\binom{2}{1}t(1-t)\mathrm{B}+\binom{2}{2}(1-t)^2\mathrm{C}$，且 $0\le t\le 1$。因此我們想要利用變換的觀點來觀察二次 Bezier 曲線。同樣的令

$z_0=\mathrm{A}$、$z_1=B$、$z_2=\mathrm{C}$ 及 $w=\mathrm{P}$，在利用變數變換，令

$$\boxed{t=\frac{1-r}{2},\ 0\le t\le 1 \Leftrightarrow r=2t-1,\ -1\le r\le 1}$$

則上述二次 Bezier 曲線在 X-Y 平面上的公式相對於複數平面上可改成

$$\boxed{\begin{aligned}w&=\binom{2}{0}t^2 z_0+\binom{2}{1}t(1-t)z_1+\binom{2}{2}(1-t)^2 z_2\\&=\binom{2}{0}\left(\frac{1-r}{2}\right)^2 z_0+\binom{2}{1}\left(\frac{1-r}{2}\right)\left(\frac{1+r}{2}\right)z_1+\binom{2}{2}\left(\frac{1+r}{2}\right)^2 z_2\\&=\left(\frac{z_0+2z_1+z_2}{4}\right)+\left(\frac{z_2-z_0}{2}\right)r+\left(\frac{z_0-2z_1+z_2}{4}\right)r^2,\ -1\le \mathrm{r}\le 1\end{aligned}}$$

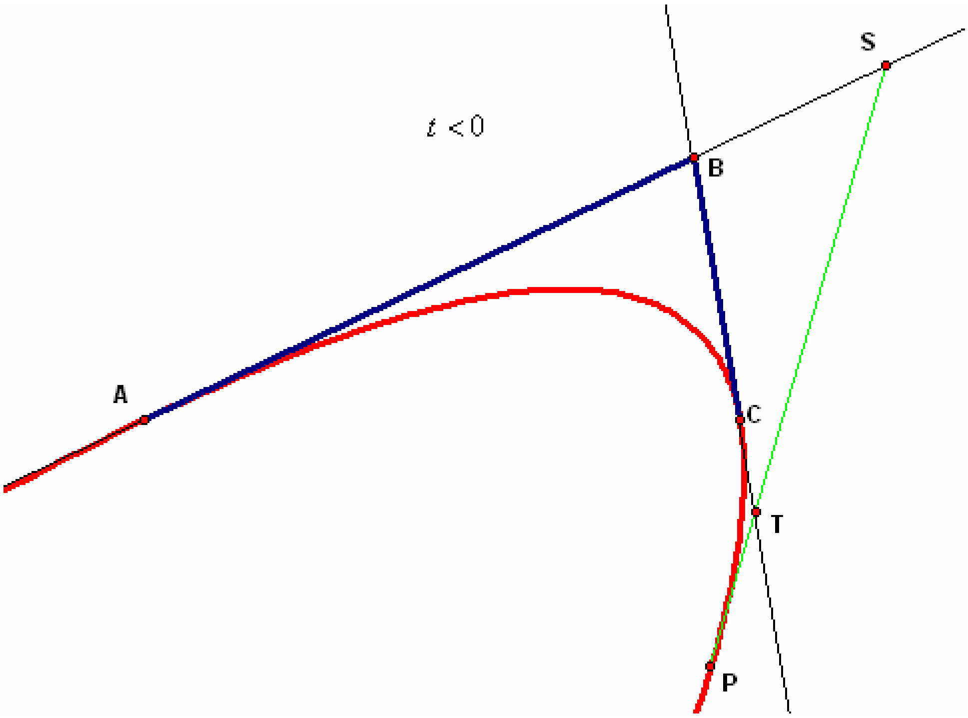
因爲 r 也可視爲複數平面上的點，因此我們可推得：

二次變換 $T_{(z_0,z_1,z_2)}$ 將實軸上以原點爲中點，-1 與+1 爲兩端點的線段，映射成二次 Bezier 曲線(其實是拋物線的一部分)。

當我們放寬 r 的限制範圍令 r 爲任意實數時，則相對的 t 亦爲任意實數；則此時相當於重新描繪二次 Bezier 曲線且比值 t 爲任意實數。結果我們描繪出了整條拋物線，如圖六所示，P 點的位置，乃發生在比值 $t<0$ 的情形。

收集所有的實數 r 相當於就是整條實軸。因此我們也推得：

【定理五】：二次變換 $T_{(z_0,z_1,z_2)}$ 將整條實軸，映射成一條拋物線。



圖六

同理令 z_0 、 z_1 、⋯ 、 z_n 為複數平面上 n+1 個點，所以我們可以定義一個 n 次變換

$T_{(z_0,\cdots,z_n)}:\mathrm{C}\to\mathrm{C}$ 使得 $T_{(z_0,\cdots,z_n)}(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k\left(\frac{1+z}{2}\right)^{n-k} z_k$ 且得到

【定理六】：n 次變換 $T_{(z_0,\cdots,z_n)}$ 將以原點為圓心的單位圓，映射成由 z_0 、 z_1 、⋯ 、 z_n 所決定的 n 次環狀 Bezier 曲線。

接下來我們討論此 n+1 個點的特例情形：取 z_0 、 z_1 、⋯ 、 z_n 為複數平面上以原點為圓心之單位圓上的 n+1 個等分點且令 $z_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)$ ，其中 k=0、1、2、⋯ 、n。

代入公式 $w=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\bar{t}\right)^k\left(1-\bar{t}\right)^{n-k} z_k$ ，$\boxed{\text{其中 } \bar{t}=\frac{1-e^{i\theta}}{2}\ ,1-\bar{t}=\frac{1+e^{i\theta}}{2}}$

由棣美弗定理知： $z_k=\left(z_1\right)^k=\cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\times k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\times k\right)$ ，k=0、1、2、⋯ 、n。所以

$$w=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\bar{t}\right)^{k}\left(1-\bar{t}\right)^{n-k}z_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\bar{t}\right)^{k}\left(1-\bar{t}\right)^{n-k}\left(z_1\right)^{k}\left(z_0\right)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\bar{t}z_1\right)^{k}\left[\left(1-\bar{t}\right)z_0\right]^{n-k}=\left[\left(1-\bar{t}\right)z_0+\bar{t}z_1\right]^{n}$$

$$=\left[\left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right)z_0+\left(\frac{1-e^{i\theta}}{2}\right)z_1\right]^{n}=\left[\left(\frac{z_0+z_1}{2}\right)+\left(\frac{z_0-z_1}{2}\right)e^{i\theta}\right]^{n}$$

其中$\left(\frac{z_0+z_1}{2}\right)+\left(\frac{z_0-z_1}{2}\right)e^{i\theta}$其實是落在複數平面上以$\frac{z_0+z_1}{2}$爲圓心並以$\left|\frac{z_0-z_1}{2}\right|$爲半徑的圓上的點。故我們接著對照上面的式子取任意四點z_0、z_1、z_3、z_4，

則可推得

$$w=\left(\left(\bar{t}\right)z_0+\left(1-\bar{t}\right)z_1\right)\left(\left(\bar{t}\right)z_3+\left(1-\bar{t}\right)z_4\right)=\left(\bar{t}\right)^{2}z_0z_3+\left(\bar{t}\right)\left(1-\bar{t}\right)\left(z_1z_3+z_0z_4\right)+\left(1-\bar{t}\right)^{2}z_1z_4$$

$$=\binom{2}{0}\left(\bar{t}\right)^{2}\left(z_0z_3\right)+\binom{2}{1}\left(\bar{t}\right)\left(1-\bar{t}\right)\left(\frac{z_1z_3+z_0z_4}{2}\right)+\binom{2}{2}\left(1-\bar{t}\right)^{2}\left(z_1z_4\right)$$

由之前的結果我們可得知w的軌跡圖形仍然還是一個二次環狀 Bezier 曲線。因此我們可以類推：

假設α_0、α_1、…、α_n、β_0、β_1、…、β_n爲複數平面上 2n+2 個點，令$w=\prod_{k=0}^{n}\left[\left(1-\bar{t}\right)\alpha_k+\bar{t}\beta_k\right]$，則$w$的軌跡圖形必定爲一個 n 次環狀 Bezier 曲線。

將其成開整理係數後，就會變成$T_{(z_0,\cdots,z_n)}(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{n-k}z_k$展開後的樣子。

所以我們可以利用上面的結果定義另外一個 n 次變換$T_{(\alpha_0,\cdots,\alpha_n,\beta_0,\cdots,\beta_n)}:\mathrm{C}\to\mathrm{C}$使得

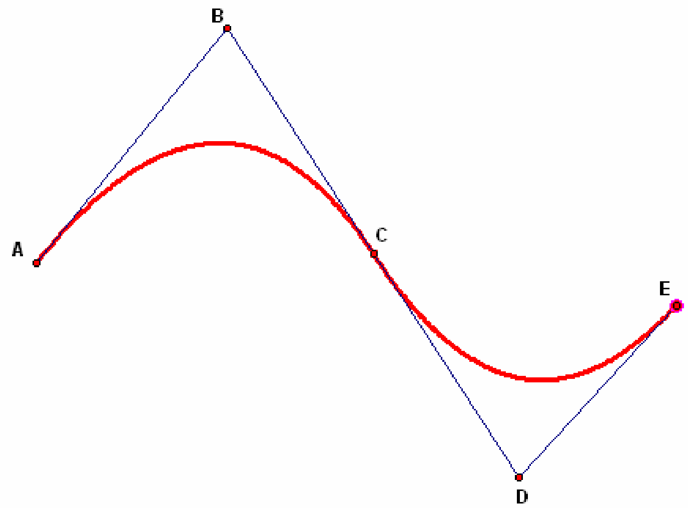
$T_{(\alpha_0,\cdots,\alpha_n,\beta_0,\cdots,\beta_n)}(z)=\prod_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{1-z}{2}\right)\alpha_k+\left(\frac{1+z}{2}\right)\beta_k\right]$且得到

【定理七】：n 次變換$T_{(\alpha_0,\cdots,\alpha_n,\beta_0,\cdots,\beta_n)}$將以原點爲圓心的單位圓，映射成一個 n 次環狀 Bezier 曲線。

由定理六及定理七我們利用兩個 n 次幾何變換來刻劃 n 次環狀 Bezier 曲線，但當$n\geq 3$時圖形其實已經相當複雜，我們也不打算在本文中進一步探討；但我們的確深信：應該還有其他有名的平面曲線也是歸類於 n 次環狀 Bezier 曲線之中。

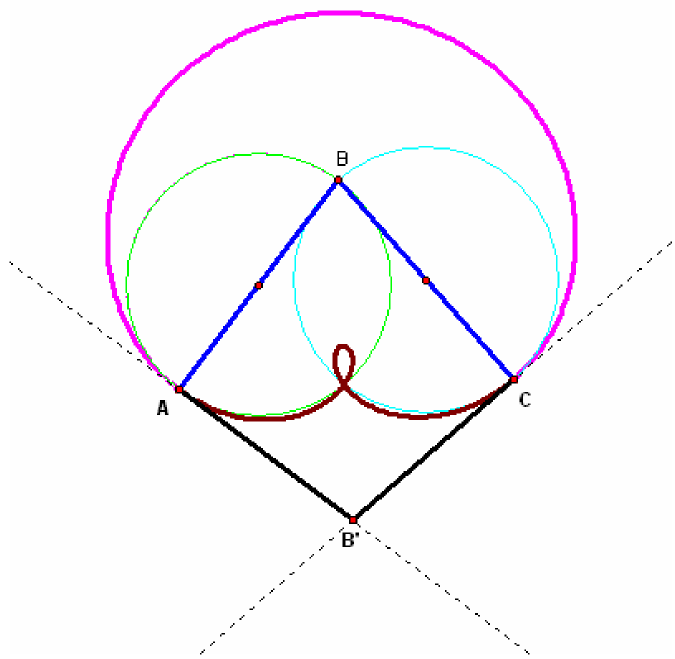
肆、討論與應用

我們都知道 Bezier 曲線在電腦繪圖上有許多的應用。例如，我們可以將兩段分別由 A-B-C 與 E-D-C 所決定的 2 次 Bezier 曲線銜接使得 B、C、D 三點共線而建構出一條平滑曲線，如圖七



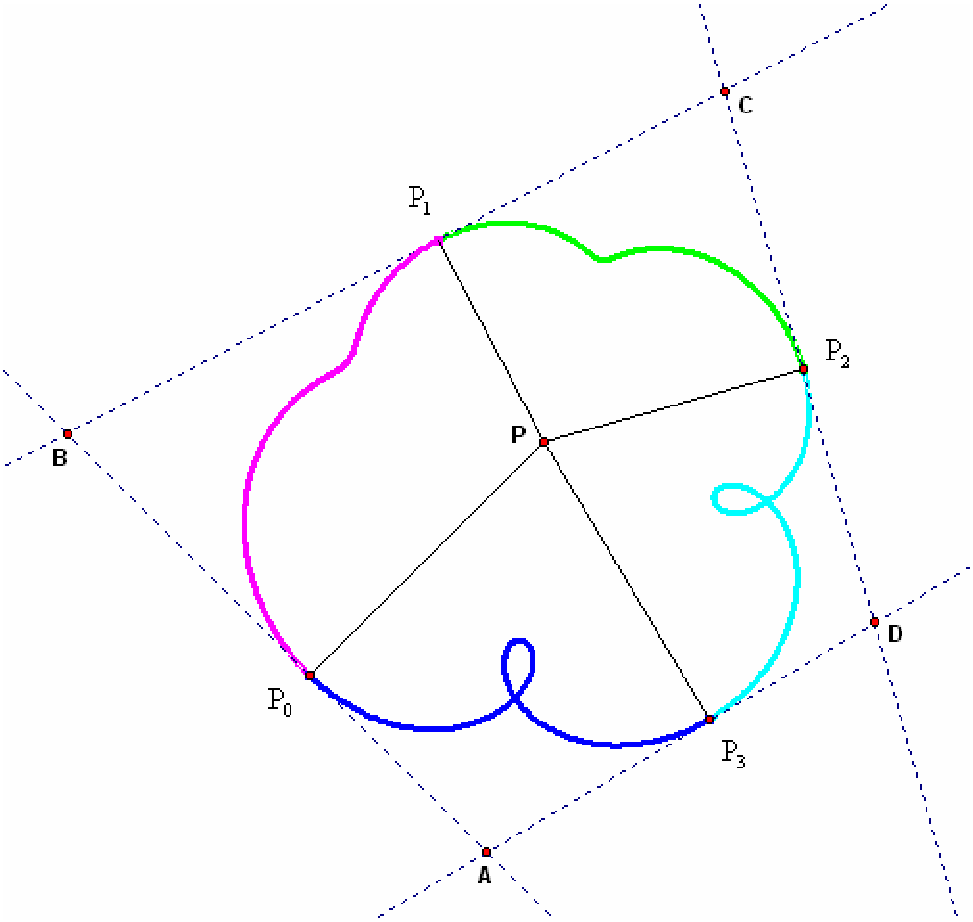
圖七

很自然地我們會想要知道：是否也可以將此類似的結果運用到 2 次環狀 Bezier 曲線呢？我們知道 $\overleftrightarrow{B'A}$ 與 $\overleftrightarrow{B'C}$ 均為 2 次環狀 Bezier 曲線的切線。於是我們截取 2 次環狀 Bezier 曲線在 $\pi \le \theta \le 2\pi$ 的範圍，如圖八。然後將其予以推廣：



圖八

【推廣】: 今有四條相異直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CD}$ 及 $\overleftrightarrow{DA}$ ，如圖九。令有一點 P 分別對此四條直線作垂足 P_0 、 P_1 、 P_2 及 P_3 ；再分別利用 P_0-P-P_3 、 P_1-P-P_0 、 P_2-P-P_1 及 P_3-P-P_2 作四段 2 次環狀 Bezier 曲線。於是我們得到了一條分別與 $\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CD}$ 及 $\overleftrightarrow{DA}$ 相切的曲線。且其上的每一個點的座標參數式均可由我們的公式求得。以此方法我們也找到了一種由 2 次環狀 Bezier 曲線所建構出來的封閉曲線。目前我們尚未近一步探求，其是否有類似於 Beizer 曲線現在電腦繪圖及資料處理上的應用，不過這也是後續可研究的方向之一。

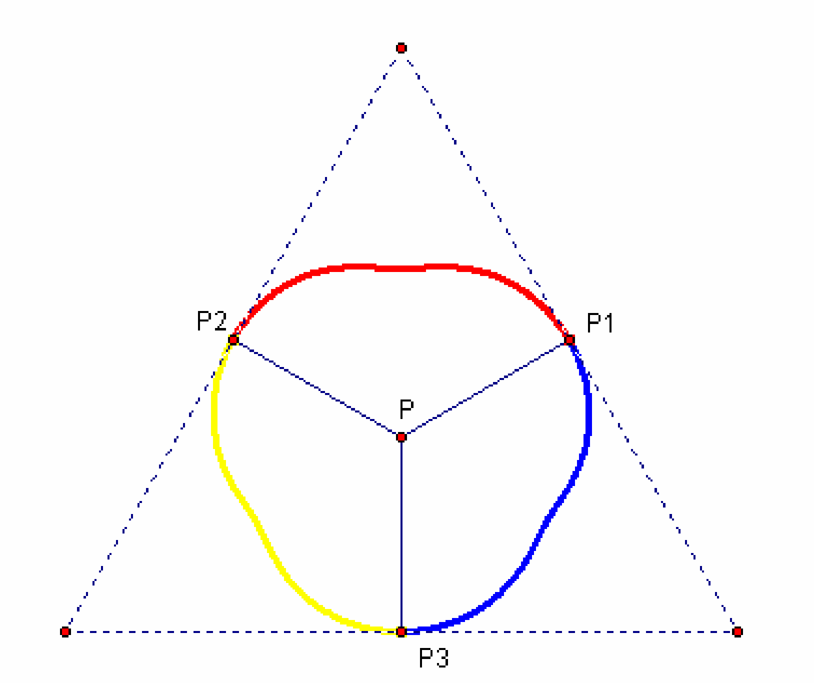


圖九

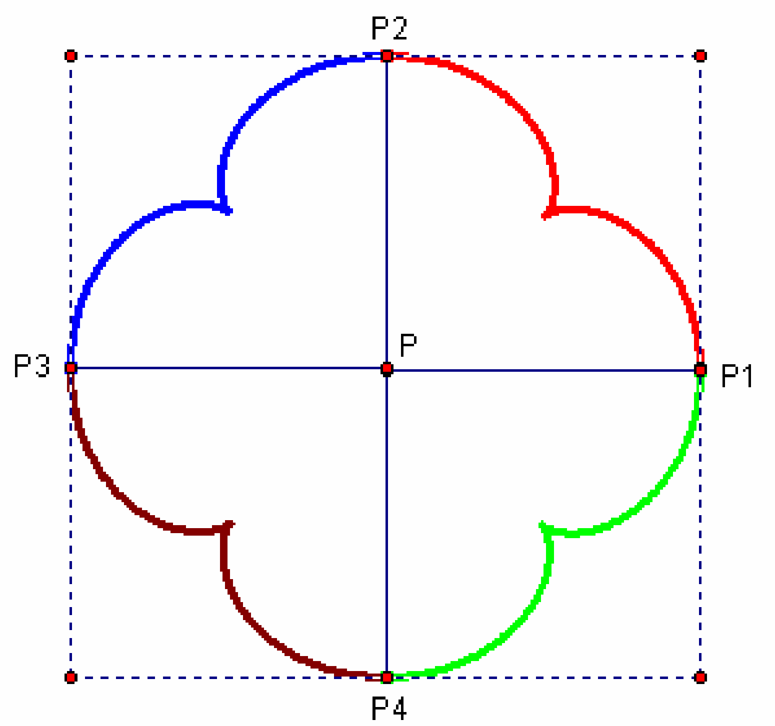
同樣的做法，我們也可應用至正三角形、正四邊形和正五邊形，利用他們的特性畫出很漂亮的圖形，而且圖形上的每一點的座標都可以由公式得知。

1. <u>正三角形</u>所做出的圖形，是由三段<u>無內圈蚶線</u>的部分圖形所構成。
2. <u>正四邊形</u>所做出的圖形，是由四段<u>心臟線</u>的部分圖形所構成。

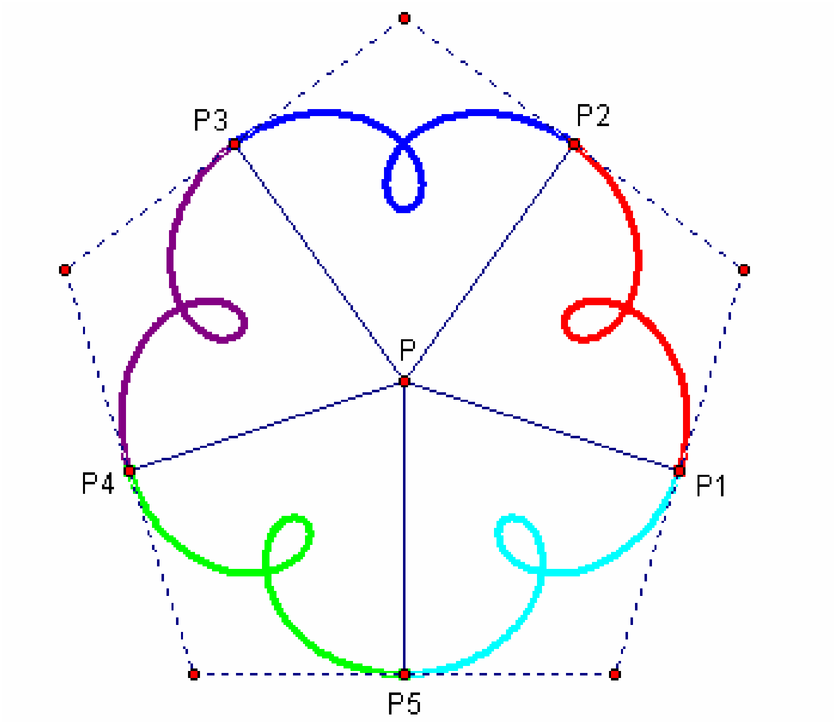
3. 正五邊形所做出的圖形，是由五段有內圈蚶線的部分圖形所構成。



正三角形



正四邊形



正五邊形

伍、結論

一、我們得到由 n+1 個相異點 P_0、P_1 ⋯、 P_n 所建構出來的 n 次環狀 Bezier 曲線之軌跡點一般式：

$$S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^{n-k}(I-T)^{k}P_k \text{ 此時 } T=\frac{I-R(\theta)}{2} \text{ 及 } I-T=\frac{I+R(\theta)}{2}\text{。}$$

二、由 A、B、C 所決定的二次環狀 Bezier 曲線共有：有內圈的蚶線、心臟線、無內圈的蚶線、圓或一點五種。

三、由 A、B、C、D 四點所決定的二次環狀 Bezier 曲線共有：有內圈的蚶線、心臟線、無內圈的蚶線、圓或一點五種。

四、一個複數平面上由 z_0、z_1 與 z_2 所決定的二次變換 $T_{(z_0,z_1,z_2)}$ 將整條實軸，映射成一條拋物線。同時 $T_{(z_0,z_1,z_2)}$ 將以原點爲圓心的單位圓，映射成二次環狀 Bezier 曲線。

五、利用第四點的結果類推之下，我們找到了一個複數平面上由 z_0 、 z_1 、⋯ 、 z_n 所決定的 n 次變換 $T_{(z_0,z_1\cdots z_n)}$ 將以原點爲圓心的單位圓，映射成由 z_0 、 z_1 、⋯ 、 z_n 所決定的 n 次環狀 Bezier 曲線。

六、我們也找出了另一個複數平面上由α_0、α_1、⋯、α_n、β_0、β_1、⋯、β_n 2n+2 個點所決定的 n 次變換$T_{(\alpha_0,\cdots,\alpha_n,\beta_0,\cdots,\beta_n)}$將以原點為圓心的單位圓，映射成一個 n 次環狀 Bezier 曲線。

七、我們可利用環狀 Bezier 曲線來建構出一些新的曲線；我們也知道 Bezier 曲線在三維空間有更一般化的推廣：Bezier 曲面。因此，在本篇文章的延續下去可供研究的部分，我們想要嘗試著把環狀 Bezier 曲線的概念推廣到曲面上

陸、參考資料

一、 E. H. Lockwood (1961), A Book of Curves. Cambridge University Press..

二、 E.V. Shikin and A.I. Plis (1995), Handbook on Splines. CRC Press..

三、 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_21_05_1/index.html

四、 http://episte.math.ntu.edu.tw/cgi/mathfield.pl?fld=geo

七、使用設備

電腦、GSP 繪圖軟體