台灣二ＯＯ五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：大富翁中的密秘—機率

得獎獎項：大會獎佳作

學　　校：國立臺南第一高級中學

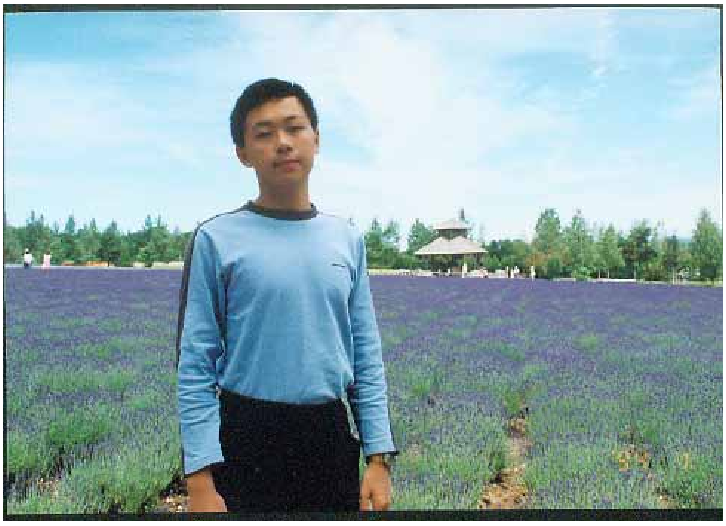
作　　者：范宜安、周子翔

評語與建議事項：

本研究所探討的遞迴關係並不尋常。徹底的解決該問題似乎超過中學生的能力。

作者介紹

我是范宜安，目前就讀台南一中二年級，從小便對數學充滿興趣，尤其是在空間幾何、代數以及機率方面。常常獨自抱著幾題數學題目思考，享受解出困難題目的喜悅，對於數學題目也抱有極大的興趣，曾經花上數小時解九連環，花數日摸索魔術方塊，也會自己製作遊戲，自己分析，以及與身邊的人分享。只要遇到有關數學的競賽都盡量參加，我國三時曾參加南區科展。



我的名字叫周子翔，目前就讀台南一中一年級，興趣是上網、看書，在學校雖然我是自然組的。但是我對史地還是很有興趣，而自然科中我最喜歡的是生物。這次會參加數學科科展，實在是一個偶然的機會，當初原本只是想應付一下專題研究的成績，以免被當掉但是投入後發覺還滿好玩的，不過有一點辛苦就是了，剛一開始甚至每個星期都要去找教授一次，有時候和同學一討論就是數個小時，不過我們的努力現在總算是有一點小小的成果了。

研究動機：

記得小時候常玩大富翁，在走步數之前常要由擲骰子來決定。又在上國中之後學到了有關機率的問題，所以讓我想起此事，想藉由此次的科展對大富翁內的機率做一番徹底的研究與了解。

目的：

壹、研究棋子踩到棋盤上某一點的或然率(不限次數)，內容包括遞迴以及非遞迴表示法。

貳、研究在遊戲中一次投擲不只一個骰子時的狀況。(僅討論遞迴表示法)

研究方法：在求機率中，若只由一個一個來計算的話，不容易求得，所以我們要利用前幾個簡單的機率來推導以後的機率。

研究內容：

壹、 預備定義：

一、x 爲要向前走的格數，$x \in N$

二、$g_q^p(x)$是 q 個 p 面的骰子一次擲出，點數和爲 x 的機率

三、$f_q^p(x)$是 q 個 p 面的骰子不限次數擲出，點數和爲 x 的機率

貳、討論使用一顆六面的骰子及沒有終點(類似數線不循環)的棋盤，踩到第 x 格的機率(不限擲骰子次數)，遞迴表示部分：

例：以下 5 行的 $g(x)$ 代表 $g_1^6(x)$表示第一次擲骰子要擲出點數爲 x 的機率，$f(x)$ 代表 $f_1^6(x)$表示不限擲骰子次數要擲出點數和爲 x 的機率

$f(1)=g(1)f(0)$

$f(2)=g(1)f(1)+g(2)f(0)$

$f(3)=g(1)f(2)+g(2)f(1)+g(3)f(0)$

$f(4)=g(1)f(3)+g(2)f(2)+g(3)f(1)+g(4)f(0)$

$f(5)=g(1)f(4)+g(2)f(3)+g(3)f(2)+g(4)f(1)+g(5)f(0)$

……

說明：

以上圖爲的 $f(4)$ 爲例：第一步若擲出 1，而後不限次數擲出點數和得 3 的機率由乘法原理得知爲 $g(1)\times f(3)$ ，同理，若第一次擲出 2,3 或 4，但最後點數和都爲 4 時分別得到機率爲 $g(2)\times f(2)$, $g(3)\times f(1)$, $g(4)\times f(0)$。又以上 4 種狀況互爲獨立事件(像是算出第一步若擲出 1 所得的機率後，不會影響第一步若擲出 2 所得的機率)，而且要擲出點

數和爲 4 的狀況中，第一次擲出的點數必在 1,2,3,4 此 4 數之中，因此由加法原理得知 $f(4)=g(1)f(3)+g(2)f(2)+g(3)f(1)+g(4)f(0)$ 。

我們可以知道格數在 6 以下的數可以分成一次走到及二次以上走到,可以寫成 $f_1^6(x)=\sum_{n=1}^{x} g(n)f(x-n)$ （且 $f(0)=1$），而且格數在 7(含)以上格數只要能算出前一個的機率就能由遞迴關係算出，寫成 $f(x)=\sum_{n=1}^{6} g(n)f(x-n)$ ，由於根據定義， $x<0$ 代表回頭走，這是不可能的事，因此定義 $x<0$ 時 $f(x)=0$ ，就可得一通式

$$f_1^6(x)=\sum_{n=1}^{6} g_1^6(n)\, f_1^6(x-n)\ ，\ \forall x\in N\ 。$$

若是 p 面的骰子，只要將式中的 6 改爲 p 即可

參、接著討論使用一顆六面的骰子及沒有終點(類似數線不循環)的棋盤，踩到第x格的機率(不限擲骰子次數)，<u>非</u>遞迴表示部分：

由於 6 面骰子較爲複雜，所以爲了釐清觀念，先作兩面的骰子(可視爲一枚 2 面均質的硬幣，一面爲點數 1，另一面爲點數 2)的討論，在以下 5 行中， $f(x)$ 代表 $f_1^2(x)$，右式中的每一項皆可表爲 m$\times\frac{1}{2^n}$ ，意思是 n 次走到的可能性有 m 種

$f(0)=1\times1$

$f(1)=\quad 1\times\frac{1}{2}$

$f(2)=\quad 1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}$

$f(3)=\quad 2\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{8}$

$f(4)=\quad 1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{16}$

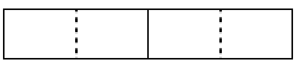
$f(5)=\quad 3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{32}$

……

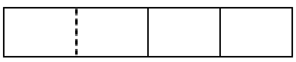
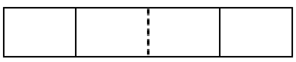
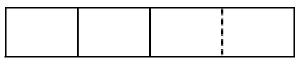
說明：

一、以 $f(4)$ 爲例，4 格最少要花 2 次走到，最多要花 4 次走到

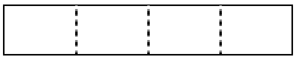
2 次走到即 2+2=4 一種可能，如下



3 次走到即 1+1+2=4，1+2+1=4，2+1+1=4 三種可能，如下

 及  及 

4 次走到即 1+1+1+1=4 一種可能，如下



二、由其中可看出不盡相異物的性質，像以上 3 次走到的部分可看塑一個 4 格的空格用 2 個一格的拼圖和 1 個 2 格的拼圖所拼成，有 $\frac{(2+1)!}{2!\times 1!}=3$ 種可能。不論擲出的點數爲 1 或 2，機率都是 $\frac{1}{2}$，這 3 種可能性都是投擲 3 次而走到的狀況，所以投擲 3 次，點數和爲 4 的機率是 $3\times\frac{1}{2^3}$ 。

其中,第一行表示 0 次走到(必然成立) ,第二行表示 1 次走到,第三行表示 2 次走到……。圖中各項係數(m)還有”不盡相異物排列”的性質，可用 C^{α}_{β} 的形式表示(像是上面的 $\frac{(2+1)!}{2!\times 1!}=3$ 可表爲 C^{3}_{1})，如此一來，上列各式可以表爲：

$f(0)=C^{0}_{0}\times 1$

$f(1)=C^{1}_{0}\times\frac{1}{2}$

$f(2)=C^{1}_{1}\times\frac{1}{2}+C^{2}_{0}\times\frac{1}{4}$

$f(3)=C^{2}_{1}\times\frac{1}{4}+C^{3}_{0}\times\frac{1}{8}$

$f(4)=C^{2}_{2}\times\frac{1}{4}+C^{3}_{1}\times\frac{1}{8}+C^{4}_{0}\times\frac{1}{16}$

$f(5)=C^{3}_{2}\times\frac{1}{8}+C^{4}_{1}\times\frac{1}{16}+C^{5}_{0}\times\frac{1}{32}$

……依此類推，可以得到下列公式：

$$f^{2}_{1}(x)=\sum_{n=0}^{x}\frac{n!}{(x-n)!(2n-x)!}\times(\frac{1}{2})^{n}$$ (若 r＜0 則 r!=0)

接下來，討論多面骰子的狀況(以 6 面的正常骰子爲例)。將上列公式中，n 代表擲骰子總次數，$x-n$ 以及 $2n-x$ 代表擲出點數爲 1 或點數爲 2 的次數。此時，令 a,b,c,d,e,f 分別是擲出點數爲 6,5,4,3,2,1 那一面的次數。由定義可以知道 $x=6a+5b+4c+3d+2e+f$ 使用不盡相異物排列公式，將 a,b,c,d,e,f 視爲不同的物件即可列出以下式子：

$$f^{6}_{1}(x)=\sum_{\substack{a,b,c,d,e,f\in N\cup\{0\}\\ x=6a+5b+4c+3d+2e+f}}\frac{(a+b+c+d+e+f)!}{a!b!c!d!e!f!}(\frac{1}{2})^{(a+b+c+d+e+f)}$$

同理，多面的骰子也可以依照此方法列出公式

肆、研究在遊戲中一次投擲不只一個骰子時的狀況。

一、討論兩個骰子的狀況：

1.先討論 6 面的骰子

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

上圖中，第一行與第一列分別代表第一個及第二個骰子擲出的數字，其它為數字總合，作圖如下：

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g_2^6(x)$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2.再討論 p 面的骰子(一般化)

	1	2	···	p-1	P
1	2	3	···	P	P+1
2	3	4	···	P+1	P+2
···	···	···	···	···	···
p-1	P	P+1	···	2p-2	2p-1
P	P+1	P+2	···	2p-1	2p

觀察上圖，可列出 $g_2^m(x)$ 的表格：

x	1	2	3	······	p	p +1	······	2p-1	2p
$g_2^p(x)$	0	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{2}{p^2}$	······	$\frac{p-1}{p^2}$	$\frac{p}{p^2}$	······	$\frac{2}{p^2}$	$\frac{1}{p^2}$

再觀察以上表格，可列出以下公式：

$$f_2^p(x) = \sum_{n=2}^{2p} g_2^p(n)\, f_2^p(x-n) \text{ 此時 } g_2^p(x) = \frac{1}{p^2}[p - |x-(p+1)|]$$

二、討論 q 個骰子的狀況(一般化)：

若一次擲出 3 個以上的骰子所要算的機率仍用以上的方法來計算會過於複雜，所以，我們使用另一種方法如下：

由於第一個骰子投出與否並不影響其它未投出骰子擲出各面的機率(獨立事

件)，因此，q個骰子一次擲出的機率，等同於第 1 個骰子一次擲出的機率乘上其餘q-1 個骰子一次擲出的機率(乘法原理)，因此列出以下遞迴表示的公式：

$$f_q^p(x)=\sum_{n=0}^{p\times q} g_1^p(n)\, f_{q-1}^p(x-n)$$

結論：

壹、在遊戲中一次投擲一顆六面的骰子及沒有終點(類似數線不循環)的棋盤，踩到第 x 格的機率(不限擲骰子次數)，用遞迴表示的公式： $f_1^6(x)=\sum_{n=1}^{6} g_1^6(n)\, f_1^6(x-n)$ ，$\forall x\in N$ 。

貳、在遊戲中一次投擲一顆六面的骰子及沒有終點(同上)的棋盤，踩到第 x 格的機率(不限擲骰子次數)，非遞迴表示的公式：

$$f_1^6(x)=\sum_{\substack{a,b,c,d,e,f\in N\cup\{0\}\\ x=6a+5b+4c+3d+2e+f}} \frac{(a+b+c+d+e+f)!}{a!b!c!d!e!f!}\left(\frac{1}{2}\right)^{(a+b+c+d+e+f)}$$

參、在遊戲中一次投擲兩個 p 面的骰子時，踩到第 x 格的機率(不限擲骰子次數)爲： $f_2^p(x)=\sum_{n=2}^{2p} g_2^p(n)\, f_2^p(x-n)$ 此時 $g_2^p(x)=\frac{1}{p^2}[p-|x-(p+1)|]$

肆、在遊戲中一次投擲 q 個 p 面的骰子時，踩到第 x 格的機率(不限擲骰子次數)爲： $f_q^p(x)=\sum_{n=0}^{p\times q} g_1^p(n)\, f_{q-1}^p(x-n)$