台灣二００五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：蜘蛛數

得獎獎項：大會獎佳作

學　　校：國立屏東高級中學

作　　者：王士豪、楊喻文

評語與建議事項：

本研究將特殊的二維問題轉換爲兩個一維問題來解決。對於二維問題的完整解答尙有一段距離。本研究值得進一步修整以提升其有數學品味。

Spider Number

Abstract

We understood the definition and meaning of spider number by reading 〝Wonders of Numbers〞. It interested us so much. So,we took further step to study the situation of extreme value when the gap sometimes lie on the line and sometimes on the circle or even on both. That is to say,we explored the relation between spider number and the gap when the spider number is maximum or minimum.

New research for the application of spider number involves several directions.

First,we design a new game called 〝Stepping Land Mine〞 with the rule of spider number. Give you a net with several hidden gaps,trying to find the right positions of gaps.

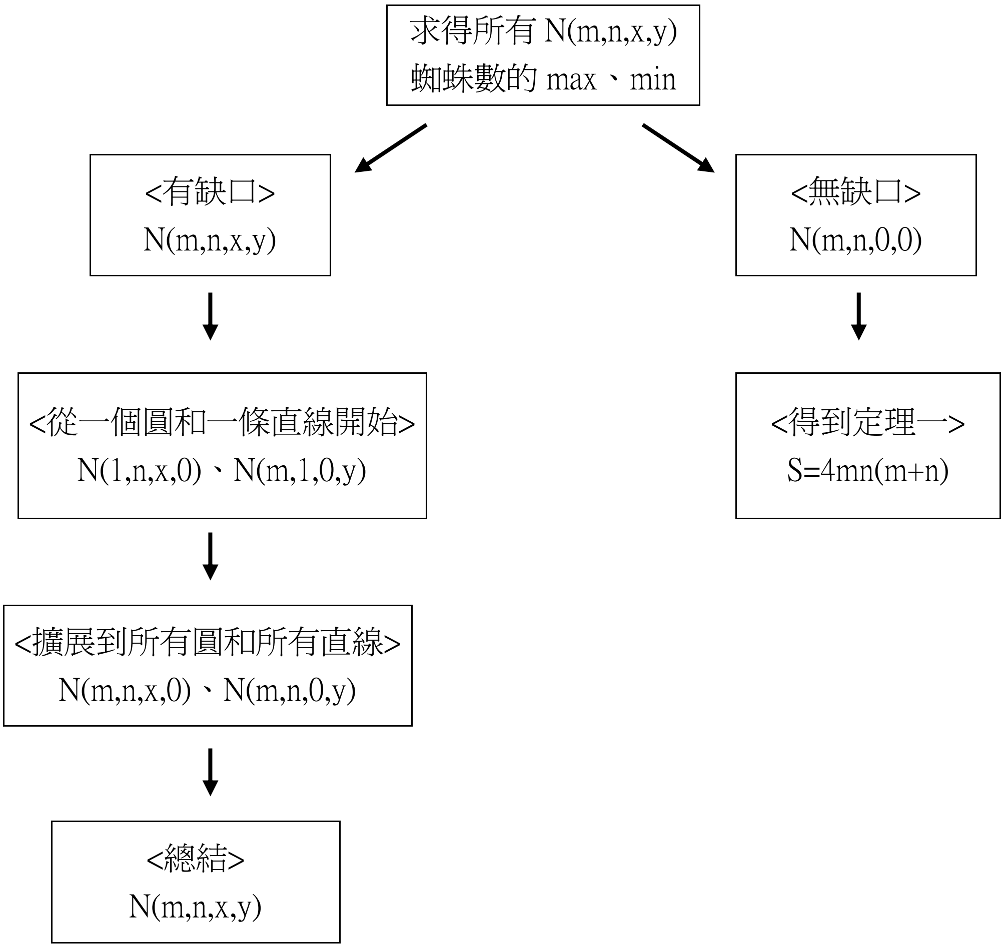
Second is the further result for a different type of net about regular n-polygon.

Third is a tactic for a net with destroying of the strategy points.
In this situation,the gaps amount on the circle and on the line are fixed. At the same time,consider the situation of circles and lines designing the tactic of placing the gaps to attain the maximum of the destructive effect.

目錄

壹、摘要

在本文中我們定義一個蜘蛛網上的蜘蛛數，若在蜘蛛網中加入缺口後，會影響蜘蛛數的大小。我們探討蜘蛛網上的缺口，該如何分配才能夠得到蜘蛛數的極值(最大值及最小值)。先觀察一直線和圓上缺口如何放置蜘蛛數有極值，再探討許多條直線及圓上的情況，進而推展至許多同心圓及通過圓心的許多條放射線的缺口，該如何放置，蜘蛛數才會有極值發生。



貳、研究動機

在一次偶然的機會中，從數學老師那兒獲得數學的異想世界一書，其中「蜘蛛網的數學」引起我們的注意。書中提到古戈爾博士對蜘蛛網很感興趣，他不斷地在全球各地尋找漂亮的標本。有一天，他走進了樹林，碰到一個巨大的蜘蛛網。蜘蛛網映射陽光，閃閃發亮。這時他構思出一個傷腦筋的難題：

假設有一個蜘蛛受到某藥物的影響，產生幻覺。織網時，該蜘蛛會在網上留下幾道缺口。蜘蛛在網上的每個結點(交點)都織了一個數字(稱爲蒼蠅數)，用來表示從此結點所在的位置分別沿著圓計算可到達的結點數，以及沿著直線可到達的結點數兩者之和，而將這些蒼蠅數字的總和稱爲蜘蛛數。

由於蜘蛛網上蜘蛛數的最小值與最大值，還是個謎，因此引起我們對此問題研究的興趣，以下爲結果。

參、研究目的

∀N(m,n,x,y)，找出 f_{max}、f_{min}的通式及缺口分佈的規則。

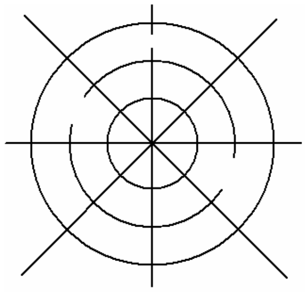
肆、研究設備及器材

Visual Basic 軟體、電腦、紙、幾枝筆、人腦。

伍、研究過程及方法

一、符號及說明

1.N(m,n,x,y)：表示一個蜘蛛網。m：爲同心圓的個數。n：爲直線數。
x：所有圓上的缺口總數。y：所有直線上的缺口總數。限定最小蜘蛛網爲 N(1,1,0,0)。規定圓心爲一個結點。釋例 :N(3,4,2,1) <如圖一> 代表蜘蛛網上有三個同心圓；四條放射線；而圓上共有兩個缺口；直線上有一個缺口。

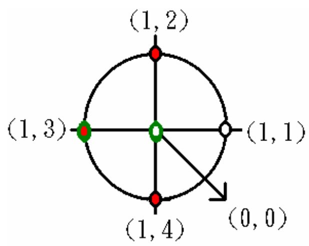


〈圖一〉

2.(i，j)：表示結點在 N(m,n,x,y)中的位置。i：表示由內往外第 i 個圓；j：以 x 軸正向爲基準，沿逆時鐘方向由 1 數來的第 j 個結點；定義(0，0)爲圓心。 <如圖二>

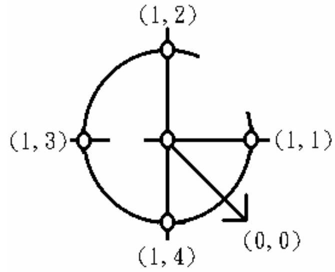
3.F(i，j)：結點(i，j)的蒼蠅數，其值爲以結點(i，j)所在的位置分別計算沿著圓可到達的結點數，以及沿著直線可到達的結點數兩者之和，值得注意的是，本身(i，j)該點並不算在內。

4.S＝S(m,n,x,y)：表示蜘蛛網 N(m,n,x,y)上的蜘蛛數=$\sum F(i，j)$，以〈圖二〉爲例：S(1,2,0,0)=24， F(1，1)=(沿圓可到的結點)+(沿直線可到的結點)=(紅色結點 3 個)+(綠色結點數 2 個)=5
同理 F(1，2)=F(1，3)=F(1，4)=5 ， F(0，0)=4



〈圖二〉

5.f(m,n,x,y)(減少量函數)：受到圓上x個缺口和直線上y個缺口的影響，F(i，j)和S會減少；分別以f_x表示圓上x個缺口所造成的減少量函數，f_y表示直線上y個缺口所造成的減少量函數，因爲f_x和f_y不會互相影響，爲兩個獨立的函數，所以f(m,n,x,y) = f_x+f_y， 即m、n給定後，由圓上x個缺口及直線上y個缺口在不同分佈時，產生的減少量，並以f_{max}、f_{min}分別代表f(m,n,x,y)的最大值和最小值。釋例：〈如圖三〉，f(1,2,1,1)= f_x+f_y=4。
因爲圓上的點仍可互相到達，所以f_x=0；又因爲(0，0)和(1，1)不能到(1，3)且(1，3)不能到(0，0)和(1，1)，所以f_y=4 。



〈圖三〉

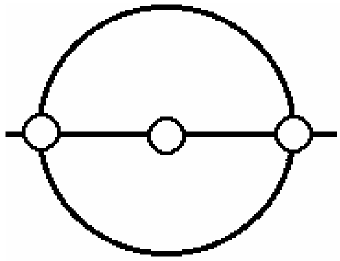
6.g(利益函數)：定義g(m,1,0,y) = f(m,1,0,y) - f(m,1,0,y-1)，表示在直線上放入y個缺口和放入y-1 個缺口時，所造成減少量的差值；g(1,n,x,0) = f(1,n,x,0) - f(1,n,x-1,0)，表示在圓上放入x個缺口和放入x-1 個缺口時，所造成減少量的差值。
並定義g_{max}(m,1,0,y) = f_{max}(m,1,0,y) - f_{max}(m,1,0,y-1)，

$g_{min}(m,1,0,y) = f_{min}(m,1,0,y) - f_{min}(m,1,0,y-1)$，此時$g_{max}$和$g_{min}$並非代表g的最大或最小值，
而是代表在直線上y個缺口和y-1 個缺口各自造成的f_{max}的差值，與f_{min}的差值。
同樣，在圓上的情形，$g_{max}(1,n,x,0) = f_{max}(1,n,x,0) - f_{max}(1,n,x-1,0)$，
$g_{min}(1,n,x,0) = f_{min}(1,n,x,0) - f_{min}(1,n,x-1,0)$亦同。

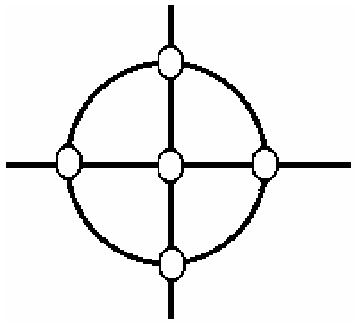
二、研究過程

1.確定 N(m,n,0,0)中，S(m,n,0,0)的通式

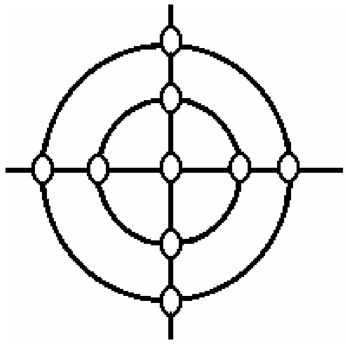
先看幾個例子。


〈圖四〉

例 1：N(1,1,0,0) <如圖四>
F(1，1)=F(1，2)=3，F(0，0)=2，
S(1，1，0，0)=8。


〈圖五〉

例 2：N(1,2,0,0) <如圖五>
F(1，1)= F(1，2)= F(1，3)= F(1，4)=5
F(0，0)= 4 ， S(1，2，0，0)=24。


〈圖六〉

例 3：N(2,2,0,0) <如圖六>
F(1，1)=F(1，2)=F(1，3)=F(1，4)
=F(2，1)=F(2，2)=F(2，3)=F(2，4)=7
F(0，0)=8 ， S(2，2，0，0)=64。

我們可以推知以下幾個性質：

【性質 1】
所有直線都有 2m+1 個結點；所有圓都有 2n 個結點。
共 2nm+1 個結點。

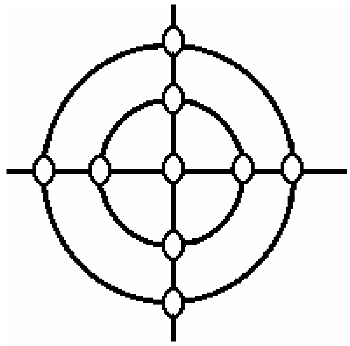
【性質 2】
對於所有 N(m,n,0,0)，F(0，0)=2mn。
p f：∵(0，0)走任一直線可到 2m 個點，且共有 n 條直線。
∴F(0，0)=2mn #

【性質 3】
對於所有(i，j)≠(0,0)，F(i，j)=2m+2n-1。
pf：∵對於所有(i，j)≠(0，0)，走直線可到 2m 個點；走圓可到 2n-1 個點。
∴F(i，j)=2m+2n-1 #

則根據【性質 2】、【性質 3】知：F(0，0)=2mn，且若(i，j)≠(0，0)，則 F(i，j)=2m+2n-1；
又根據【性質 1】知：不含圓心，總結點數為 2mn 。
可得 S(m,n,0,0)= 2mn(2m+2n-1)+2mn = 4mn(m+n)。

【定理一】S(m,n,0,0)=4mn(m+n)

驗證：N(2,2,0,0) <如圖七> 代入公式可得：
F(0，0)=8；若(i,j)≠(0,0)，F(i，j)=7，
S(2,2,0,0)=64，與例 3 所計算的數值皆相符。


〈圖七〉

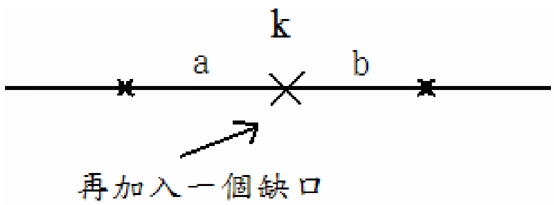
2.確定 N(1,n,x,0)和 N(m,1,0,y)中，蜘蛛數 S 的通式

【性質 4】
∀N(m,n,x,y)，S(m,n,x,y) = S(m,n,0,0) - f(m,n,x,y)

因為已有S(m,n,0,0)的公式，則根據【性質 4】，只要求得f(m,n,x,y)，便可知S(m,n,x,y)，以下的研究內容都把目標放在f_{max}和f_{min}上面。

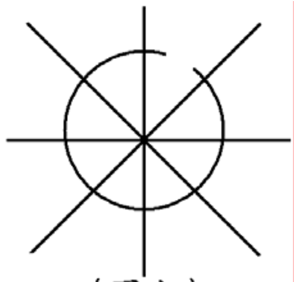
【引理 1】
在兩個缺口間且具有 k 個結點的線段上，再放置新的缺口於線段時，不會影響此線段以外之結點的 F(i，j)，此稱為缺口的獨立性。

pf：在原有 k 個結點的線段上再加入 1 個新的缺口，<如圖八>
∵這 k 點以外的點，本就不能到達這 k 個點，
∴這一個新的缺口對此段以外的結點並沒有影響。
即設被新缺口分開的兩段各有 a、b 個點(a+b=k)，a、b 的值不會影響此段以外之結點的 F(i，j) #

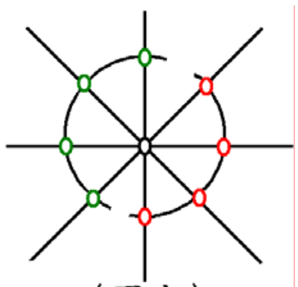


〈圖八〉

我們試著從 N(1,n,1,0)、N(1,n,2,0)、N(m,1,0,1)、N(m,1,0,2)的f_{max}、f_{min}下手，先看幾個例子，觀察是否有一定的規則。


〈圖九〉

例 1：N(1,n,1,0) <如圖九>
∵在圓上放一個缺口，只像是把圓切成曲線，每一個結點仍可到達其他的結點。
∴對 F(i，j)和 S 都沒有任何影響。
∴f(1,n,1,0)=0

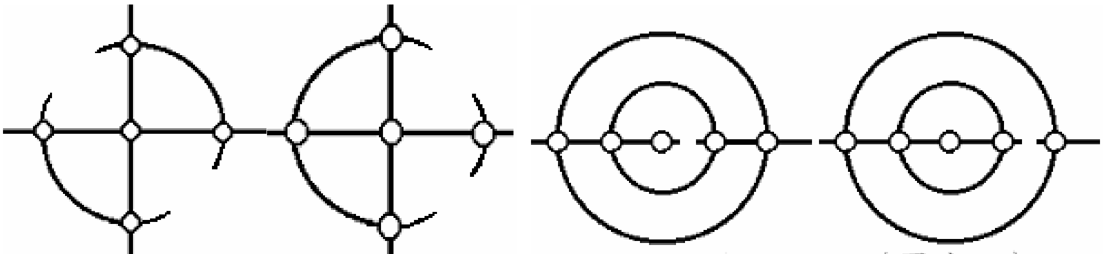

〈圖十〉

例 2：N(1,n,2,0) <如圖十>
∵兩個缺口可將圓切成兩段，紅點和綠點為不同的兩段。
且根據【性質 1】，圓上有 2n 個點。
∴我們假設一段有 k 個點，另一段有 2n-k 個點，其中 k∈〔1,2n-1〕，則分佈 k 個點的這一段其蒼蠅數減少的總數= k(2n- k)。(∵每一點都少了 2n- k 個點可以到達)

分佈 2n-k個結點的這一段，蒼蠅數減少的總數=(2n- k)k。(∵每一點都少k個點可到達)
∴$f(1,n,2,0) = k(2n-k) + (2n-k)k = -2k^2+4nk$ ……………………………(1)式
∴$f(1,n,2,0)$函數圖形為開口向下拋物線，且一階導數$f'(1,n,2,0) = -4k+4n$，
∴$f(1,n,2,0)$的最大值(max)發生在$f'(1,n,2,0) = 0$ 的時候。

max：令 $-4k+4n=0$，得 $k=n$，即這兩段的結點數相同。將 n 代回(1)式，
得 $f(1,n,2,0)=2n^2$，即 $f(1,n,2,0)$在 $k=n$ 時，有最大值$=2n^2$。
其缺口相對位置舉例如下：<如圖十一>：使 $f(1,2,2,0)$有最大值的缺口放置方法是讓圓上的兩段，有最平均的結點數。

min：分別將 $k=1$ 和 $k=2n-1$ 代回(1)式，
均得 $f(1,n,2,0)=4n-2$，即這兩段的點數相差最多時，均有最小值 $=4n-2$。
其缺口放置的位置舉例如下：<如圖十二>：使 $f(1,2,2,0)$有最小值的缺口放置方法是讓圓上的兩段結點數分配最極端化。



〈圖十一〉 〈圖十二〉 〈圖十三〉 〈圖十四〉

小結：$f(1,n,2,0)=-2k^2+4nk$，且 $4n-2 \le f(1,n,2,0) \le 2n^2$，要使 $f(1,n,2,0)$有最大值，是讓被缺口隔開的兩段結點數相等；最小值則是讓兩段的結點數相差最多。

例 3： $N(m,1,0,1)$
∵一個缺口將直線分成兩段　∴同(例 2)的方法，得$f(m,1,0,1) = -2k^2+4km+2k$，
其中 $k\in〔1, 2m〕$。 $f(m,1,0,1)$在 $k=m$ 或 $k=m+1$ 時，均有最大值$=2m^2+2m$，
$f(m,1,0,1)$在 $k=1$ 和 $k=2m$ 時均有最小值$=4m$，即兩段結點數最接近時，$f(m,1,0,1)$有最大值，相差最多時有最小值。其缺口放置的相對位置舉例如下：
<如圖十三>：使 $f(2,1,0,1)$有最大值的缺口放置方法，是讓直線上的兩段有最平均的結點數。
<如圖十四>：使 $f(2,1,0,1)$有最小值的缺口放置方法，是讓直線上的兩段有最極端的結點數。

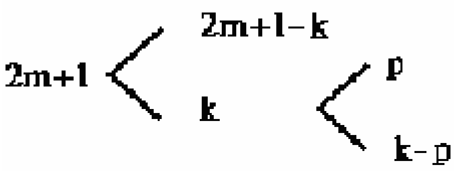
小結：$f(m,1,0,1) = -2k^2+4km+2k$，且 $4m \le f(m,1,0,1) \le 2m^2+2m$。
在要使 $f(m,1,0,1)$有最大值時，是讓被缺口隔開的兩段結點數最平均；要有最小值，則是讓兩段的結點數分配最極端。

例 4：N(m,1,0,2)

∵兩缺口將直線分成三段，且直線上共有 2m+1 個點，

我們假設這三段分別有 2m+1-k、p、k-p 個點，<如圖十五>

其中 p、k∈N，且 p∈〔1,k-1〕，k∈〔2,2m〕。



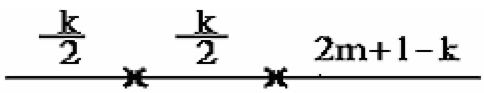
〈圖十五〉

而 2m+1≡1(mod 2)，知 k 和(2m+1-k)一奇一偶，不失一般性，我們設 2｜k，

max：根據【引理 1】，把這 k 個結點視爲一個缺口在一條直線上，

則根據(例 3)的結果，爲了要有 f(m,1,0,1)的最大值，所以 p=$\frac{k}{2}$，

則現在這三段的分配爲 2m+1-k、$\frac{k}{2}$、$\frac{k}{2}$。<如圖十六>



〈圖十六〉

∴f(m,1,0,2) = k(2m+1-k) + 2($\frac{k}{2}$)($2m+1-k+\frac{k}{2}$)

$=\frac{-3k^2}{2}$ + 4mk + 2k ……………………………(2)式

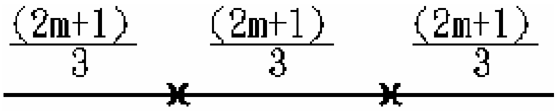
∴f´(k) = -3k+4m+2，得 k = $\frac{4m+2}{3}$ 時 f 有最大值。

但爲了滿足 k∈N 且 2｜k，k 的值不一定都是$\frac{4m+2}{3}$，

即 m 除以 3 的餘數會影響 k 值。

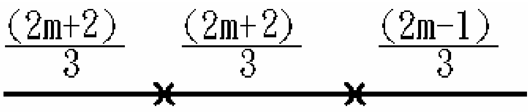
<1>若 m≡1(mod 3)，則 4m+2≡0(mod 6)，k=$\frac{4m+2}{3}$，

代回(2)式得 f(m,1,0,2)=$\frac{8m^2+8m+2}{3}$。此時結點的分配爲下圖：



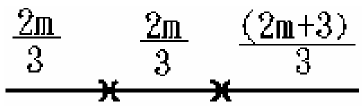
<2>若 m≡2(mod 3)，則 4m+2≡4 (mod 6)，爲使 k 最接近$\frac{4m+2}{3}$，得 k=$\frac{4m+4}{3}$，

代回(2)式得 f(m,1,0,2)=$\frac{8m^2+8m}{3}$。此時結點的分配爲下圖：



<3>若 m≡0(mod 3)，得 4m+2≡2(mod 6)，則 $k=\frac{4m}{3}$ ，

代回(2)式得 $f(m,1,0,2)=\frac{8m^2+8m}{3}$ ，此時結點的分配爲下圖：



∴當蜘蛛網 N(m,1,0,2)時，

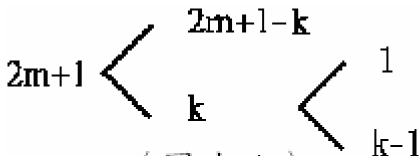
<1>m≡1(mod 3)時，在 $k=\frac{4m+2}{3}$ 時，有最大值 $\frac{8m^2+8m+2}{3}$ ，

<2>m≡2(mod 3)時，在 $k=\frac{4m+4}{3}$ 時，有最大值 $\frac{8m^2+8m}{3}$ ，

<3>m≡0(mod 3)時，在 $k=\frac{4m}{3}$ 時，有最大值 $\frac{8m^2+8m}{3}$ ，

從這三種情形的結點數分佈，我們都發現在三段中，結點數最多相差 1，即在此三段的結點數分配最平均時，f(m,1,0,2)有最大值。

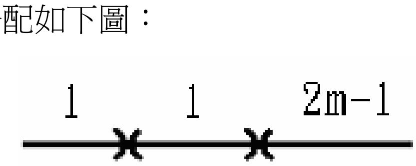
min：根據【引理 1】和(例 3)的結果，爲了要有 f(m,1,0,2)的最小值，
知 p=1 或 k-p=1，不失一般性，我們設爲 p=1，
則現在這三段的分配爲 2m+1-k、1、k-1。<如圖十七>



〈圖十七〉

∴f(m,1,0,2) = k(2m+1-k) + 2m + (k-1)(2m+2-k)
$= -2k^2+4k+4mk-2$ ………………………………(3)式

將 k=2 和 k=2m 代回(3)式均得 f(m,1,0,2)=8m-2，
即 f(m,1,0,2)在 k=2 或 k=2m 時，均有最小值=8m-2。
此時的結點數分配如下圖：



從這個結點數分佈，我們發現在此三段的結點數分配最極端時，f(m,1,0,2)有最小值。

小結：爲滿足 k∈N 且 2｜k，f(m,1,0,2)最大值隨 m 除以 3 的餘數變動，
但 f(m,1,0,2)的最小值卻是唯一的（8m-2）：

$$8m-2 \le f(m,1,0,2) \le \begin{cases} \frac{8m^2}{3}+\frac{8m}{3}+\frac{2}{3} & \text{if } m\equiv 1 \pmod 3 \\ \frac{8m^2}{3}+\frac{8m}{3} & \text{if } m\equiv 0 \pmod 3 \\ \frac{8m^2}{3}+\frac{8m}{3} & \text{if } m\equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

f(m,1,0,2)的最大值發生在三段結點數分配最平均的時候，
f(m,1,0,2)的最小值則發生在三段的結點數分配最極端的時候。

從上面幾個例子，初步瞭解到在圓和直線上放置缺口的差異，及在一條直線或一個圓上，當給定被缺口隔開的各段結點數時，可分別計算出f_x和f_y的結果。

【性質 5】
在圓上放一個缺口時沒有影響，只把圓切出一個缺口；故在圓上
放兩個缺口，意義等同於在線上放一個缺口。
【引理 2】

(1)對於所有N(1,n,x,0)，$f_x = 4n^2-\sum_{k=1}^{x} a_k^2$ ；

(2)對於所有N(m,1,0,y)，$f_y=(2m+1)^2-\sum_{k=1}^{y+1} b_k^2$ ，a_k 、b_k 爲圓和直線上各段的結點數。

pf：(1)因爲x個缺口將圓分爲x段，設各段分有$a_1,a_2,\cdots,a_x$個結點，

則根據【性質 1】，知$\sum_{k=1}^{x} a_k=2n$， ∵a_x這一段到不了其它(2n-a_x)個點，

∴對a_x這一段的總影響量爲a_x(2n-a_x)， ∴$f_x=\sum_{k=1}^{x} a_k(2n-a_k)=4n^2-\sum_{k=1}^{x} a_k^2$ 。

(2)同理y個缺口將直線分爲y+1 段，設各分有$b_1,\cdots,b_{y+1}$個結點，

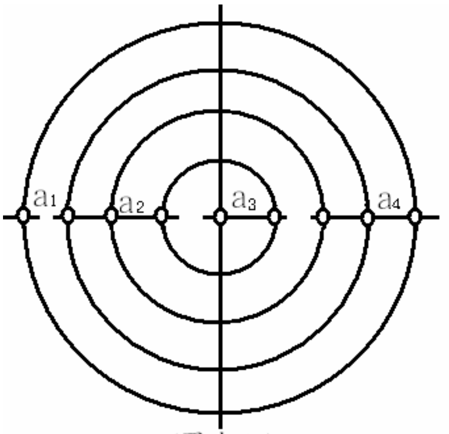
∴ $f_y=\sum_{k=1}^{y+1} b_k(2m+1-b_k)=(2m+1)^2-\sum_{k=1}^{y+1} b_k^2$ #

則根據【引理 2】，對於所有N(1,n,x,0)，$f_x=4n^2-\sum_{k=1}^{x} a_k^2$ ，

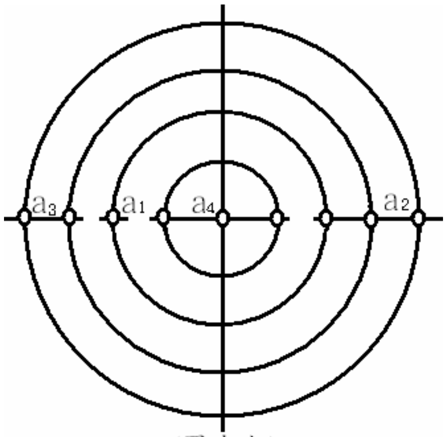
對於所有N(m,1,0,y)，$f_y=(2m+1)^2-\sum_{k=1}^{y+1} b_k^2$ ，即只要a_1、a_2、⋯、a_x和$b_1,b_2,\cdots,b_{y+1}$
各段的結點數都不變，f_x和f_y爲定值。

【引理 3】
在同一圓或直線上，若各段的結點數不增減，則變動各段排列的順序並不會影響 f 的大小。

驗證：N(4,2,0,3)，<圖十八>、<圖十九>爲兩不同排列的網：



〈圖十八〉



〈圖十九〉

因爲三個缺口在同一直線上，分成 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 四段，結點數各爲 1,3,2,3，

f_y=1×8 + 3×6 + 2×7 + 3×6= 58，雖然兩個圖的缺口位置不一樣，但兩者的 f_y 值相同。

從上面的例子及【引理 2】，我們猜測放置缺口於同一圓或直線時，f_{max} 發生在各段的結點數分配最「平均化」時。而 f_{min} 則發生在各段的結點數分配最「極端化」的情況。

【定理二】均化與極化
對於所有 N(1,n,x,0)或 N(m,1,0,y)，欲使 f 有最大值，要讓各段有『平均化』的結點數。而要使 f 有最小值，則讓各段有『極端化』的結點數。

pf：(1)平均化：以 N(1,n,x,0)圓上的情況分析，

根據【引理 2】，$f_x=4n^2-\sum_{k=1}^{x} a_k^2$ ；現在我們想求 f_x 的最大值，

即求 $\sum_{k=1}^{x} a_k^2$ 的最小值。又根據【性質 1】，知圓上總結點數爲 2n，

即 $\sum_{k=1}^{x} a_k$ =2n，而柯西不等式：$(\sum_{k=1}^{x} a_k^2)(\sum_{k=1}^{x} 1^2) \geq (\sum_{k=1}^{x} a_k)^2$，

所以 $\sum_{k=1}^{x} a_k^2 \geq \frac{4n^2}{x}$ ，可得 $f_x \leq 4n^2-\frac{4n^2}{x}$ 。

則當 $a_1=a_2=a_3=....=a_x$ 時等式成立，$f_{max}=4n^2-\frac{4n^2}{x}$ 。

$\boxed{\text{但以上討論僅限定於 } 2n \equiv 0 \pmod{x}\text{。}}$

當 2n≡k (mod x)時，其中 $0<k<x$ ，

若存在 i≠j 使$|a_i - a_j| \geq 2$，(即有兩段結點數相差 2 以上)

根據【引理 3】，更換缺口順序使a_i和a_j相鄰，f_x並不會改變。

再依【引理 1】，a_i和a_j之間的缺口不會影響a_i和a_j以外的結點，

所以只要a_i、a_j間的缺口所造成的減少量有最大值，便可得到f_x的最大值。

因爲a_i和a_j兩段間的缺口會造成的減少量爲 $2a_i a_j$，

我們假設a_i+a_j=定值，在a_i和a_j最接近時，即｜a_i-a_j｜≦1，

$2a_i a_j$會有最大值。於是調整a_i和a_j的結點數，使達成｜a_i-a_j｜≦1 的

目標。重複這個步驟，直到對於所有 i≠j，｜a_i-a_j｜≦1，

此時$a_1, a_2, a_3, ..., a_x$的分佈爲最平均，

即任意兩段的結點數最多相差 1 時，f_x有最大值。

此時，在圓上會有 k 段具有$\left[\frac{2n}{x}\right]$+1 個結點，有 x-k 段有$\left[\frac{2n}{x}\right]$個結點。

(圓上共有 x 段)

同理可證 N(m,1,0,y)的情形。

(2)極端化：以 N(m,1,0,y)直線上的情況分析，

同樣根據【性質 1】知：直線上總結點數爲 2m+1，即$\sum_{k=1}^{y+1} b_k$ =2m+1，

又根據【引理 2】，知f_y=$(2m+1)^2$-$\sum_{k=1}^{y+1} b_k^2$ ；

則求f_y的最小值，即求出$\sum_{k=1}^{y+1} b_k^2$ 的最大值。

依【引理 1】，對於所有i≠j，更換缺口順序使b_i和b_j相鄰，f_y不變。

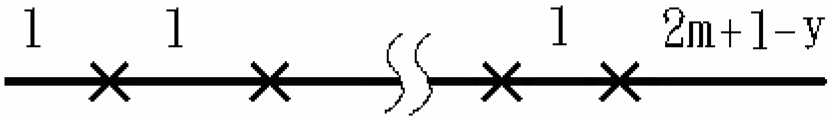
所以只要讓b_i、b_j間的缺口造成的減少量有最小值，便可得到總減少量的

最小值，即f_y的最小值。而b_i和b_j兩段間的缺口會造成的減少量爲 $2b_i b_j$，

則 b_i 和 b_j 之間的結點分配在一端為 1，一端為 b_i+b_j-1 時，f_y會有最小值。

於是調整 b_i 和 b_j 的結點數，使得一端為 1，一端為 b_i+b_j-1，重複這個步驟，

直到y段都只有 1 個結點，1 段有 2m+1-y個結點，此時f_y為最小。如下圖：



〈圖二十〉

這樣的結點分佈情形即稱為「極端化」。同理可證 N(1,n,x,0)。 #

根據【定理二】分配缺口均化和極化的原則，我們可以得出N(1,n,x,0)及N(m,1,0,y)兩者f_{max}和f_{min}的公式。

$\boxed{\text{針對圓上的缺口而言}}$：

【定理三】∀ N(1,n,x,0)，

(1)$f_{max}=2n(2n-\left[\frac{2n}{x}\right])-(2n-\left[\frac{2n}{x}\right]x)(\left[\frac{2n}{x}\right]+1)$，

(2)$f_{min}=(x-1)(4n-x)$

pf：(1)根據【定理二】的「平均化」原則，

f_{max}發生在，r段有$\left[\frac{2n}{x}\right]$+1 個結點，x-r段有$\left[\frac{2n}{x}\right]$個結點時，

其中$r=2n-\left[\frac{2n}{x}\right]x$， (所以 $2n=\left[\frac{2n}{x}\right]x+r$)

所以 $f_{max}=(x-2n+\left[\frac{2n}{x}\right]x)(\left[\frac{2n}{x}\right])(2n-\left[\frac{2n}{x}\right])+(2n-\left[\frac{2n}{x}\right]x)(\left[\frac{2n}{x}\right]+1)(2n-\left[\frac{2n}{x}\right]-1)$

$=2n(2n-\left[\frac{2n}{x}\right])-(2n-\left[\frac{2n}{x}\right]x)(\left[\frac{2n}{x}\right]+1)$。

(2)再根據【定理二】「極端化」原則，

f_{min}發生在圓上x-1 段有 1 個點，1 段有 2n- x+1 個點時，

所以$f_{min}=(x-1)(2n-1)+(2n-x+1)(x-1)=(x-1)(4n-x)$ #

$\boxed{\text{針對直線上的缺口而言}}$：

【定理四】∀ N(m,1,0,y)，

(1)$f_{max}=(2m+1)(2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right])-〔2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](y+1)〕(\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]+1)$，

(2)$f_{min}=(4m+1-y)y$

pf：(1)根據【定理二】的「平均化」原則，f_{max}發生在，r段有$\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]+1$個結點，

y+1-r段有$\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]$個結點的時候，

其中$r=2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](y+1)$，(因為 $2m+1=\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](y+1)+r$)，

所以$f_{max}=\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right])〔y-2m+\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](y+1)〕$

$+(\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]+1)(2m-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right])〔2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](y+1)〕$

$=(2m+1)(2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right])-〔2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](y+1)〕(\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]+1)$ 。

(2)再根據【定理二】的「極端化」原則，f_{min}發生在直線上y段有 1 個點，

1 段有 2m+1-y個點時，所以$f_{min}=2my+(2m+1-y)y=(4m+1-y)y$ #

到此，對於所有的N(1,n,x,0)和N(m,1,0,y)之f_{max}及f_{min}的問題，可由【定理三】、【定理四】解決。由【性質 4】知，S(m,n,x,y) = S(m,n,0,0)-f(m,n,x,y)，若給定一組N(m,1,0,y)或N(1,n,x,0)，只要先根據【定理一】計算出S(m,n,0,0)，再依【定理三】、【定理四】分別計算出f(1,n,x,0)或f(m,1,0,y)的最大值和最小值，即可得S(1,n,x,0)或S(m,1,0,y)之最大值和最小值。

接下來我們以前面所舉的四個例子來驗證【定理三】及【定理四】:

例 1：N(1,n,1,0)，(見 p.4)

m=1、x=1，代入【定理三】之(1)：

$f_{max}=2n(2n-\left[\frac{2n}{x}\right])-(2n-\left[\frac{2n}{x}\right]x)(\left[\frac{2n}{x}\right]+1)=2n(2n-2n)-(2n-2n)(2n+1)=0$

代入【定理三】之(2)：$f_{min}=(x-1)(4n-x)=(1-1)(4n-1)=0$

例 2：N(1,n,2,0)，(見 p.4~5)

m=1、x=2，代入【定理三】之(1)：

$f_{max}=2n(2n-\left[\frac{2n}{x}\right])-(2n-\left[\frac{2n}{x}\right]x)(\left[\frac{2n}{x}\right]+1)=2n(2n-n)-(2n-2n)(n+1)=2n^2$

代入【定理三】之(2)：$f_{min}=(x-1)(4n-x)=(2-1)(4n-2)=4n-2$

例 3：N(m,1,0,1)，(見 p.5)

n=1、y=1，代入【定理四】之(1)：

$f_{max}=(2m+1)(2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right])-〔2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](y+1)〕(\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]+1)$

$=(2m+1)(2m+1-m)-(2m+1-m\times2)(m+1)=(2m+1)(m+1)-(m+1)=2m^2+2m$

代入【定理四】之(2)：$f_{min}=(4m+1-y)y=(4m+1-1)\times1=4m$

$\boxed{例 4}$：N(m,1,0,2)，(見 p.6~8)

n=1、y=2，代入【定理四】之(1)：

<1>若m≡1(mod 3)：

$$f_{max}=(2m+1)(2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right])-〔2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](y+1)〕(\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]+1)$$

$$=(2m+1)(2m+1-\left[\frac{2m+1}{3}\right])-(2m+1-\left[\frac{2m+1}{3}\right]\times 3)(m+1)=\frac{8m^2+8m+2}{3}$$

<2>若m≡2(mod 3)

$$f_{max}=(2m+1)(2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right])-〔2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](y+1)〕(\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]+1)$$

$$=(2m+1)(2m+1-\left[\frac{2m+1}{3}\right])-(2m+1-\left[\frac{2m+1}{3}\right]\times 3)(m+1)=\frac{8m^2+8m}{3}$$

<3>若m≡0(mod 3)

$$f_{max}=(2m+1)(2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right])-〔2m+1-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](y+1)〕(\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]+1)$$

$$=(2m+1)(2m+1-\left[\frac{2m+1}{3}\right])-(2m+1-\left[\frac{2m+1}{3}\right]\times 3)(m+1)=\frac{8m^2+8m}{3}$$

代入【定理四】之(2)：$f_{min}=(4m+1-y)y=(4m+1-2)\times 2=8m-2$

對照從 p.4 到 p.8 所舉四個例子的結果，證實【定理三】和【定理四】的計算方法是正確的。接下來在第三節當中我們擴展到討論將缺口放在 m 個圓上，或 n 條直線上的情形。

3.確定 N(m,n,x,0)和 N(m,n,0,y)中，蜘蛛數 S 的通式

根據【定理三】的結果，若知道每個圓上的缺口數x_k(即由內到外每個圓上的缺口數)，則我們可以導出【定理五】，求得N(m,n,x,0)的f_{max}與f_{min}。

【定理五】∀N(m,n,x,0)

(1)$f_{max}=2n(2an-a-2\sum_{k=1}^{a}\left[\frac{2n}{x_k}\right])+\sum_{k=1}^{a}\left\{x_k\left[\frac{2n}{x_k}\right](\left[\frac{2n}{x_k}\right]+1)\right\}$

(2)$f_{min}=4n(x-a)+x-\sum_{k=1}^{a}x_k^2$ ， x_k爲a個圓中(具有非零的缺口數)，第k個圓的缺口數，

a≤n，且$\sum_{k=1}^{a}x_k=x$ 。

pf：(1)因為各圓彼此獨立，故每個圓的減少量都為最大值，才有 N(m,n,x,0)全體減少量的最大值。所以我們用【定理三】之(1)來計算每一個圓的減少量。假設m個圓上的缺口數各為x_1、$x_2 \cdots x_m$，其中若有a個圓的缺口數不為 0，

a ≤ m，令$\sum_{k=1}^{a} x_k$ =x。

$$\text{則}f_{max}=\sum_{k=1}^{a} f_k=\sum_{k=1}^{a}\left\{(2n)(2n-\left[\frac{2n}{x_k}\right])-(2n-\left[\frac{2n}{x_k}\right]x_k)(\left[\frac{2n}{x_k}\right]+1)\right\}$$

$$= 2n(2an- a- 2\sum_{k=1}^{a}\left[\frac{2n}{x_k}\right]\ ) +\sum_{k=1}^{a}\left\{x_k\left[\frac{2n}{x_k}\right](\left[\frac{2n}{x_k}\right]+1)\right\}$$

(2)同理，根據【定理三】之(2)，

$$\text{則}f_{min}=\sum_{k=1}^{a}(x_k-1)(4n-x_k)= 4n(x- a)+ x -\sum_{k=1}^{a} x_k^2$$ #

若知道每條直線上的缺口數y_k(即每條直線上的缺口數)，則根據【定理四】的結果，我們推導出【定理六】，求得N(m,n,0,y)的f_{max}與f_{min}。

【定理六】∀N(m,n,0,y)

$$(1)f_{max}=(4m+2)(mb-\sum_{k=1}^{b}\left[\frac{2m+1}{y_k+1}\right])+\ \sum_{k=1}^{b}\left\{(y_k+1)\left[\frac{2m+1}{y_k+1}\right](\left[\frac{2m+1}{y_k+1}\right]+1)\right\}$$

(2)$f_{min}=(4m+1)y-\sum_{k=1}^{b} y_k^2$，$y_k$為b條具有非零缺口數的直線中，第k條直線的缺口數，

b ≤ n，且$\sum_{k=1}^{b} y_k=y$。

但在【定理五】及【定理六】之中，並不能看出缺口「應該」如何分配在圓及直線上，使N(m,n,x,0)和N(m,n,0,y)有f_{max}或f_{min}的情況發生，故【定理五】和【定理六】只能算是求f的必要條件。

我們猜測 N(m,n,x,0)和 N(m,n,0,y)的缺口分配，應該是類推 N(1,n,x,0)和 N(m,1,0,y)的結果。

即在N(m,n,x,0)或N(m,n,0,y)時，分別將缺口平均分配到各m個圓或n條直線上，而各圓及直線上的結點又平均分佈時，會有f_{max}；極端分佈時會有f_{min}。

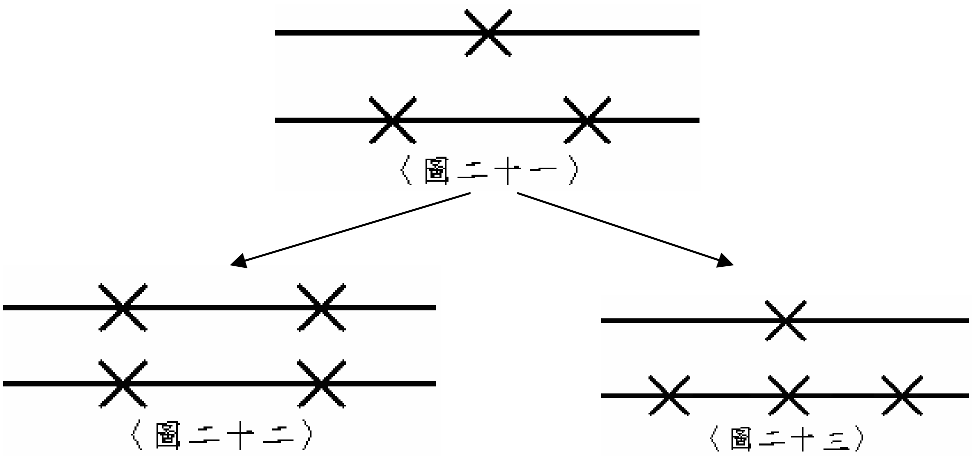
我們以直線的圖形狀況來分析：

「若在分配缺口給不同的直線時，平均化可得f_{max}」等價於「當存在兩條缺口數

不同的直線時，將下一個缺口分配給缺口數較少的直線可得f_{max}」。

釋例：若<圖二十一>的情況，要再加入一個新缺口，則可以有兩種方式。

即<圖二十二>和<圖二十三>兩種情形：



〈圖二十一〉

〈圖二十二〉 〈圖二十三〉

原先在<圖二十一>中的減少量= $f_{max}(m,1,0,1) + f_{max}(m,1,0,2)$--------(1)式

若爲<圖二十二>，則減少量= $f_{max}(m,1,0,2) + f_{max}(m,1,0,2)$ --------(2)式

若爲<圖二十三>，則減少量= $f_{max}(m,1,0,1) + f_{max}(m,1,0,3)$ --------(3)式

<1>從<圖二十一>變成<圖二十二>的過程，

減少量的變化量= $f_{max}(m,1,0,2) - f_{max}(m,1,0,1) = g_{max}(m,1,0,2)$ --------(2)- (1)式。

<2>從<圖二十一>變成<圖二十三>的過程，

減少量的變化量= $f_{max}(m,1,0,3) - f_{max}(m,1,0,2) = g_{max}(m,1,0,3)$ --------(3)- (1)式。

這裡我們引進 g(利益函數)。(符號說明及定義 6.)

在直線上時要證明「分配缺口給不同的直線時，平均化可得f_{max}」， 即等價於證明「$g_{max}(m,1,0,y) \geq g_{max}(m,1,0,y+1)$」
同理，證明「分配缺口給不同的直線時，極端化可得f_{min}」， 即等價於證明「$g_{min}(m,1,0,y) \geq g_{min}(m,1,0,y+1)$」

圓上的情況也是同樣的道理。

根據【定理三】，我們推導出$g_{max}(1,n,x,0)$和$g_{min}(1,n,x,0)$的公式。

【引理 4】

(1)$g_{max}(1,n,x,0)= 4n(\left[\frac{2n}{x-1}\right]-\left[\frac{2n}{x}\right]) + x\left[\frac{2n}{x}\right](\left[\frac{2n}{x}\right]+1) - (x-1)\left[\frac{2n}{x-1}\right](\left[\frac{2n}{x-1}\right]+1)$

(2)$g_{min}(1,n,x,0)= 4n+2- 2x$

pf：(1)因爲$g_{max}(1,n,x,0) = f_{max}(1,n,x,0) - f_{max}(1,n,x-1,0)$

根據【定理三】之(1)，知道$f_{max}(1,n,x,0)$和$f_{max}(1,n,x-1,0)$，

所以$g_{max}(1,n,x,0) = f_{max}(1,n,x,0) - f_{max}(1,n,x-1,0)$

$= 2n(2n-\left[\frac{2n}{x}\right]) - (2n-\left[\frac{2n}{x}\right]x)(\left[\frac{2n}{x}\right]+1) - 2n(2n-\left[\frac{2n}{x-1}\right])+ (2n-\left[\frac{2n}{x-1}\right](x-1))(\left[\frac{2n}{x-1}\right]+1)$

$= 4n(\left[\frac{2n}{x-1}\right]-\left[\frac{2n}{x}\right]) + x\left[\frac{2n}{x}\right](\left[\frac{2n}{x}\right]+1) - (x-1)\left[\frac{2n}{x-1}\right](\left[\frac{2n}{x-1}\right]+1)$

(2)同理，根據【定理三】之(2)，

$g_{min}(1,n,x,0) = f_{min}(1,n,x,0)- f_{min}(1,n,x-1,0)= (x-1)(4n-x) - (x-2)(4n-x+1) = 4n+2- 2x$ #

同理，根據【定理四】推導出$g_{max}(m,1,0,y)$和$g_{min}(m,1,0,y)$的公式。

【引理 5】

(1)$g_{max}(m,1,0,y)=(4m+2)(\left[\frac{2m+1}{y}\right]-\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]) + (y+1)\left[\frac{2m+1}{y+1}\right](\left[\frac{2m+1}{y+1}\right]+1)-$

$y\left[\frac{2m+1}{y}\right](\left[\frac{2m+1}{y}\right]+1)$

(2)$g_{min}(m,1,0,y)= 4m+2- 2y$

現在只要證明【引理 4】和【引理 5】的四個公式皆爲遞減函數，
即可得知分配缺口給不同的直線或圓時，平均化分配可得f_{max}，極端化分配可得f_{min}。
但因牽涉到「高斯記號」的運算，使得證明的工作十分複雜，所以我們轉而藉助電腦，
針對【引理 4】之(1)和【引理 5】之(1)，分別代入不同的m、n觀察。見附錄之程式碼。

<表一>

g(1, 40 , 1 ,0)= 0	g(1, 40 , 41 ,0)= 2
g(1, 40 , 2 ,0)= 3200	g(1, 40 , 42 ,0)= 2
g(1, 40 , 3 ,0)= 1066	g(1, 40 , 43 ,0)= 2
g(1, 40 , 4 ,0)= 534	g(1, 40 , 44 ,0)= 2
g(1, 40 , 5 ,0)= 320	g(1, 40 , 45 ,0)= 2
g(1, 40 , 6 ,0)= 212	g(1, 40 , 46 ,0)= 2
g(1, 40 , 7 ,0)= 152	g(1, 40 , 47 ,0)= 2
g(1, 40 , 8 ,0)= 116	g(1, 40 , 48 ,0)= 2
g(1, 40 , 9 ,0)= 88	g(1, 40 , 49 ,0)= 2
g(1, 40 , 10 ,0)= 72	g(1, 40 , 50 ,0)= 2
g(1, 40 , 11 ,0)= 56	g(1, 40 , 51 ,0)= 2
g(1, 40 , 12 ,0)= 48	g(1, 40 , 52 ,0)= 2
g(1, 40 , 13 ,0)= 42	g(1, 40 , 53 ,0)= 2
g(1, 40 , 14 ,0)= 34	g(1, 40 , 54 ,0)= 2
g(1, 40 , 15 ,0)= 30	g(1, 40 , 55 ,0)= 2
g(1, 40 , 16 ,0)= 30	g(1, 40 , 56 ,0)= 2
g(1, 40 , 17 ,0)= 20	g(1, 40 , 57 ,0)= 2
g(1, 40 , 18 ,0)= 20	g(1, 40 , 58 ,0)= 2
g(1, 40 , 19 ,0)= 20	g(1, 40 , 59 ,0)= 2
g(1, 40 , 20 ,0)= 20	g(1, 40 , 60 ,0)= 2
g(1, 40 , 21 ,0)= 12	g(1, 40 , 61 ,0)= 2
g(1, 40 , 22 ,0)= 12	g(1, 40 , 62 ,0)= 2
g(1, 40 , 23 ,0)= 12	g(1, 40 , 63 ,0)= 2
g(1, 40 , 24 ,0)= 12	g(1, 40 , 64 ,0)= 2
g(1, 40 , 25 ,0)= 12	g(1, 40 , 65 ,0)= 2
g(1, 40 , 26 ,0)= 12	g(1, 40 , 66 ,0)= 2
g(1, 40 , 27 ,0)= 10	g(1, 40 , 67 ,0)= 2
g(1, 40 , 28 ,0)= 6	g(1, 40 , 68 ,0)= 2
g(1, 40 , 29 ,0)= 6	g(1, 40 , 69 ,0)= 2
g(1, 40 , 30 ,0)= 6	g(1, 40 , 70 ,0)= 2
g(1, 40 , 31 ,0)= 6	g(1, 40 , 71 ,0)= 2
g(1, 40 , 32 ,0)= 6	g(1, 40 , 72 ,0)= 2
g(1, 40 , 33 ,0)= 6	g(1, 40 , 73 ,0)= 2
g(1, 40 , 34 ,0)= 6	g(1, 40 , 74 ,0)= 2
g(1, 40 , 35 ,0)= 6	g(1, 40 , 75 ,0)= 2
g(1, 40 , 36 ,0)= 6	g(1, 40 , 76 ,0)= 2
g(1, 40 , 37 ,0)= 6	g(1, 40 , 77 ,0)= 2
g(1, 40 , 38 ,0)= 6	g(1, 40 , 78 ,0)= 2
g(1, 40 , 39 ,0)= 6	g(1, 40 , 79 ,0)= 2
g(1, 40 , 40 ,0)= 6	g(1, 40 , 80 ,0)= 2

<表二>

g(30 ,1,0, 1)= 1860	g(30 ,1,0, 31)= 2
g(30 ,1,0, 2)= 620	g(30 ,1,0, 32)= 2
g(30 ,1,0, 3)= 310	g(30 ,1,0, 33)= 2
g(30 ,1,0, 4)= 186	g(30 ,1,0, 34)= 2
g(30 ,1,0, 5)= 124	g(30 ,1,0, 35)= 2
g(30 ,1,0, 6)= 88	g(30 ,1,0, 36)= 2
g(30 ,1,0, 7)= 66	g(30 ,1,0, 37)= 2
g(30 ,1,0, 8)= 52	g(30 ,1,0, 38)= 2
g(30 ,1,0, 9)= 42	g(30 ,1,0, 39)= 2
g(30 ,1,0, 10)= 32	g(30 ,1,0, 40)= 2
g(30 ,1,0, 11)= 30	g(30 ,1,0, 41)= 2
g(30 ,1,0, 12)= 22	g(30 ,1,0, 42)= 2
g(30 ,1,0, 13)= 20	g(30 ,1,0, 43)= 2
g(30 ,1,0, 14)= 20	g(30 ,1,0, 44)= 2
g(30 ,1,0, 15)= 14	g(30 ,1,0, 45)= 2
g(30 ,1,0, 16)= 12	g(30 ,1,0, 46)= 2
g(30 ,1,0, 17)= 12	g(30 ,1,0, 47)= 2
g(30 ,1,0, 18)= 12	g(30 ,1,0, 48)= 2
g(30 ,1,0, 19)= 12	g(30 ,1,0, 49)= 2
g(30 ,1,0, 20)= 8	g(30 ,1,0, 50)= 2
g(30 ,1,0, 21)= 6	g(30 ,1,0, 51)= 2
g(30 ,1,0, 22)= 6	g(30 ,1,0, 52)= 2
g(30 ,1,0, 23)= 6	g(30 ,1,0, 53)= 2
g(30 ,1,0, 24)= 6	g(30 ,1,0, 54)= 2
g(30 ,1,0, 25)= 6	g(30 ,1,0, 55)= 2
g(30 ,1,0, 26)= 6	g(30 ,1,0, 56)= 2
g(30 ,1,0, 27)= 6	g(30 ,1,0, 57)= 2
g(30 ,1,0, 28)= 6	g(30 ,1,0, 58)= 2
g(30 ,1,0, 29)= 6	g(30 ,1,0, 59)= 2
g(30 ,1,0, 30)= 4	g(30 ,1,0, 60)= 2

根據表一、表二的數據，除了在圓上放置一個缺口對蜘蛛數沒有影響，導致$g_{max}(1,n,1,0)=0$以外，我們確定這個方向是正確的。爲了解決高斯符號的問題，我們考慮高斯函數的圖形，發現高斯函數只有在整數點時不可微分，在其他的地方皆可微且等於 0。於是，要證明「g_{max}爲遞減」，即等價於「g_{max}的一階導數≦0」。

【引理 6】

$g_{max}(1,n,x,0)=4n(\left[\frac{2n}{x-1}\right]-\left[\frac{2n}{x}\right])+x\left[\frac{2n}{x}\right](\left[\frac{2n}{x}\right]+1)-(x-1)\left[\frac{2n}{x-1}\right](\left[\frac{2n}{x-1}\right]+1)$爲遞減函數。

pf：主要是打開$\left[\frac{2n}{x-1}\right]$與$\left[\frac{2n}{x}\right]$兩個高斯記號，所以分四個情況討論：

<1>若$\frac{2n}{x}\in N$，且$\frac{2n}{x-1}\in N$，則$g_{max}(1,n,x,0) = 4n(\frac{2n}{x-1}-\frac{2n}{x}) + 2n(\frac{2n}{x}+1) - 2n(\frac{2n}{x-1}+1)$

$= 4n^2(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}) \geq 0$，故$g'_{max}(1,n,x,0) = 4n^2(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}) \leq 0$

<2>若$\frac{2n}{x}\notin N$，且$\frac{2n}{x-1}\notin N$，則$g'_{max}(1,n,x,0)=(\left[\frac{2n}{x}\right]-\left[\frac{2n}{x-1}\right])(\left[\frac{2n}{x}\right]+\left[\frac{2n}{x-1}\right]+1)$

因爲$\left[\frac{2n}{x-1}\right] \geq \left[\frac{2n}{x}\right]$，所以$g'_{max}(1,n,x,0) \leq 0$

<3>若$\frac{2n}{x}\notin N$，且$\frac{2n}{x-1}\in N$，$g'_{max}(1,n,x,0)= -(\frac{2n}{x-1}+\left[\frac{2n}{x}\right])(\frac{2n}{x-1}-\left[\frac{2n}{x}\right]) + \left[\frac{2n}{x}\right]$

則因爲$\frac{2n}{x-1} > \frac{2n}{x} \geq \left[\frac{2n}{x}\right]$，且$\frac{2n}{x-1}$和$\left[\frac{2n}{x}\right]$皆爲正整數，

所以$\frac{2n}{x-1}-\left[\frac{2n}{x}\right] \geq 1$，所以$g'_{max}(1,n,x,0) \leq -\frac{2n}{x-1} \leq 0$

<4>若$\frac{2n}{x}\in N$，且$\frac{2n}{x-1}\notin N$，$g'_{max}(1,n,x,0) = (\frac{2n}{x}+\left[\frac{2n}{x-1}\right])(\frac{2n}{x}-\left[\frac{2n}{x-1}\right]) - \left[\frac{2n}{x-1}\right]$

其中$\frac{2n}{x-1} \geq \left[\frac{2n}{x-1}\right]$，$\frac{2n}{x-1} \geq \frac{2n}{x}$，且$\left[\frac{2n}{x-1}\right]$和$\frac{2n}{x}$皆爲正整數，

則因爲$\left[\frac{2n}{x-1}\right]$爲最接近$\frac{2n}{x-1}$的自然數，所以$\left[\frac{2n}{x-1}\right] \geq \frac{2n}{x}$，

故所以$g'_{max}(1,n,x,0) \leq -\left[\frac{2n}{x-1}\right] \leq 0$ #

同理，$g_{min}(1,n,x,0)$、$g_{max}(m,1,0,y)$及$g_{min}(m,1,0,y)$皆爲遞減函數。

而 g 所代表的意義爲「減少量的變化量」，【引理 6】證明 g 爲遞減，即可推知「分配缺口給不同的圓或直線時，平均化分配可得f_{max}，極端化分配可得f_{min}。」

此爲對於m個圓或n條直線擺放缺口時的均化與極化原則。

【定理七】N(m,n,x,0)和 N(m,n,0,y)均化與極化

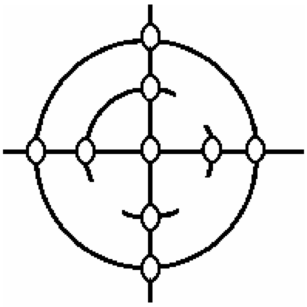
對於所有 N(m,n,x,0)和 N(m,n,0,y)，欲使 f 有最大值，則將缺口平均分配給每一圓或每一

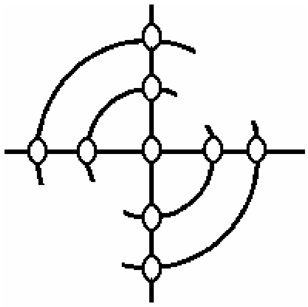
直線，並且各圓或直線上結點的分配亦須平均化。而要使 f 有最小值，則將缺口極端地分配給圓或直線，並且在各個圓或直線上的結點分配也須極端化。

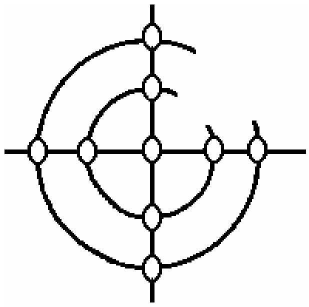
我們注意到，在圓上放置一個缺口對蜘蛛數是沒有影響的，所以 m 個圓和 n 條直線的均化與極化原則會有一些不同。

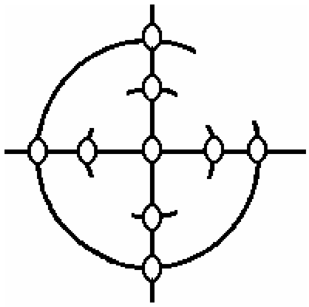
【性質 6】
m 個圓的均化一開始以兩個缺口爲一個單位來分配，在每個圓都有兩個缺口之後，再以一個缺口爲一個單位來分配；極化則要先在所有圓上放置一個缺口後，剩下的 x-m 個缺口再對此 m 個圓做極端化地分配。
n 條直線的均化和極化均以一個缺口爲單位來分配。

釋例：對圓上的缺口來說，要有f_{max}，必須避免讓圓上只有一個缺口，
所以若有 3 個缺口，還是要全部放在同一圓上。<如圖二十四>
但若共有 4 個缺口，則每 2 個缺口分配給一個圓。<如圖二十五>
同理若要有f_{min}，則先在所有的圓上放一個缺口，<如圖二十六>
再把剩下的x-m個缺口極端化分配給圓。<如圖二十七>
對直線上的缺口來說，只要將缺口平均化或極端化分配即可。


〈圖二十四〉


〈圖二十五〉


〈圖二十六〉


〈圖二十七〉

則根據【定理七】和【性質 6】，我們可以將【定理五】和【定理六】的結果做修正，得到求 f(m,n,0,y)和 f(m,n,x,0)的公式。

針對圓上的情況而言
【定理八】∀N(m,n,x,0)，
Max：(1)若$\left[\frac{x}{m}\right] \geqq 2$：

則f_{max}＝ $$2n\left(2mn-m-2\left(\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]}\right](m-x+\left[\frac{x}{m}\right]m)+\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]+1}\right](x-\left[\frac{x}{m}\right]m)\right)\right)$$

$$+\left[\frac{x}{m}\right]\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]}\right](\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]}\right]+1)(m-x+\left[\frac{x}{m}\right]m)$$

$$+(\left[\frac{x}{m}\right]+1)\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]+1}\right](\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]+1}\right]+1)(x-\left[\frac{x}{m}\right]m)$$

(2)若 $0\leqq\left[\frac{x}{m}\right]\leqq 1$，

(Ⅰ)在 $x\leqq 3$ 時，$a=1$，$f_{max}=2n\left(2n-1-2\left[\frac{2n}{x}\right]\right)+x\left[\frac{2n}{x}\right](\left[\frac{2n}{x}\right]+1)$。

(Ⅱ)在 $x>3$ 時，若x爲偶數，則 $a=\frac{x}{2}$，$f_{max}=2an^2$。

若 x 爲奇數，則 $a=\frac{x-1}{2}$，

$$f_{max}=2n\left(2an-a-2\left(n(a-1)+\left[\frac{2n}{3}\right]\right)\right)+2n(n+1)(a-1)+3\left[\frac{2n}{3}\right](\left[\frac{2n}{3}\right]+1)\text{。}$$

Min：(3)若 $\frac{x}{m}>1$，

則 $f_{min}=(4n+1)(x-m)-(4n^2-1)\left[\frac{x-m}{2n-1}\right]-(r+1)^2+1$，其中 $r=x-m-(2n-1)\left[\frac{x-m}{2n-1}\right]$

(4)若 $0\leq\frac{x}{m}\leq 1$，則 $f_{min}=0$

pf of Max：(1)若 $\left[\frac{x}{m}\right]\geqq 2$，則根據【定理七】均化的概念，每個圓至少有兩個缺口，

缺口之放置如下時有 f_{max}：m-r個具有 $\left[\frac{x}{m}\right]$ 個缺口的圓，

r個具有($\left[\frac{x}{m}\right]+1$)個缺口的圓，其中 $r=x-\left[\frac{x}{m}\right]m$。根據【定理五】之(1)：

$$f_{max}=2n(2an-a-2\sum_{k=1}^{a}\left[\frac{2n}{x_k}\right])+\sum_{k=1}^{a}\left\{x_k\left[\frac{2n}{x_k}\right](\left[\frac{2n}{x_k}\right]+1)\right\}$$

此時的a=m，所以均化後，

$$f_{max}=2n\left(2mn-m-2\left(\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]}\right](m-x+\left[\frac{x}{m}\right]m)+\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]+1}\right](x-\left[\frac{x}{m}\right]m)\right)\right)$$

$$+\left[\frac{x}{m}\right]\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]}\right](\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]}\right]+1)(m-x+\left[\frac{x}{m}\right]m)$$

$$+(\left[\frac{x}{m}\right]+1)\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]+1}\right](\left[\frac{2n}{\left[\frac{x}{m}\right]+1}\right]+1)(x-\left[\frac{x}{m}\right]m)$$

(2)若 $0\leqq\left[\frac{x}{m}\right]\leqq 1$ 則根據【定理七】均化概念及【性質 6】,

(Ⅰ)在 $x\leqq 3$ 時,只有一個具有 x 個缺口的圓,即 a=1,

所以 $f_{max}=2n\left(2n-1-2\left[\frac{2n}{x}\right]\right)+x\left[\frac{2n}{x}\right](\left[\frac{2n}{x}\right]+1)$。

(Ⅱ)在 $x>3$ 時,若x爲偶數,則 $a=\frac{x}{2}$,缺口之放置如下時有 f_{max}:

$\frac{x}{2}$ 個具有 2 個缺口的圓

,則 $f_{max}=2an^2$

若x爲奇數,則 $a=\frac{x-1}{2}$,缺口之放置如下時有 f_{max}:

$\frac{x-3}{2}$ 個具有 2 個缺口的圓,1 個具有 3 個缺口的圓

$f_{max}=2n\left(2an-a-2\left(n(a-1)+\left[\frac{2n}{3}\right]\right)\right)+2n(n+1)(a-1)+3\left[\frac{2n}{3}\right](\left[\frac{2n}{3}\right]+1)$

pf of Min:(3)若 $\frac{x}{m}>1$,根據【性質 6】和【定理七】極化之概念,

先在m個圓上各放一個缺口,再將剩餘的x-m個缺口極端化分配,

缺口放置如下時有 f_{min}:$\left[\frac{x-m}{2n-1}\right]$ 個具有 2n個缺口的圓,

$m-1-\left[\frac{x-m}{2n-1}\right]$ 個具有 1 個缺口的圓,1 個具有r+1 個缺口的圓,

其中 $r=x-m-(2n-1)\left[\frac{x-m}{2n-1}\right]$。

再根據【定理五】之(2)知:$f_{min}=4n(x-a)+x-\sum_{k=1}^{a}x_k^2$,此時a=m,

故 $f_{min}=(4n+1)(x-a)-(4n^2-1)\left[\frac{x-m}{2n-1}\right]-(r+1)^2+1$。

(4)若 $0\leq\frac{x}{m}\leq 1$,則根據【性質 6】,爲使 f 有最小值,故最多只能分配給

所有圓一個缺口，所以f_{min}會發生在有x個具有 1 個缺口的圓時，但因為在圓上放置一個缺口，並不會對蜘蛛數造成影響，所以$f_{min}=0$ #

針對直線上的情況而言

【定理九】∀N(m,n,0,y)

(1)$f_{max}=(4m+2)\left(mb-\left[\dfrac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+1}\right](b-y+\left[\dfrac{y}{b}\right]b)-\left[\dfrac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+2}\right](y-\left[\dfrac{y}{b}\right]b)\right)$

$+(\left[\dfrac{y}{b}\right]+1)\left[\dfrac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+1}\right](\left[\dfrac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+1}\right]+1)(b-y+\left[\dfrac{y}{b}\right]b)+(\left[\dfrac{y}{b}\right]+2)\left[\dfrac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+2}\right](\left[\dfrac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+2}\right]+1)(y-\left[\dfrac{y}{b}\right]b)$

其中若$\left[\dfrac{y}{n}\right]\geqq 1$，b=n；若$\left[\dfrac{y}{n}\right]=0$，則 b=y。

(2)$f_{min}=y(4m+1-y)+4m\left[\dfrac{y}{2m}\right](y-m-m\left[\dfrac{y}{2m}\right])$，

其中若 $y<2mn$，則 $b=\left[\dfrac{y}{2m}\right]+1$；若 y=2mn，則 b=n 。

pf：(1)根據【定理七】均化的概念，缺口之放置如下時有f_{max}：

r 條有$(\left[\dfrac{y}{b}\right]+1)$個缺口之直線，b-r 條有$\left[\dfrac{y}{b}\right]$個缺口之直線，其中 $r=y-\left[\dfrac{y}{b}\right]b$ 。

又根據【定理六】之(1)知：

$f_{max}=(4m+2)(mb-\sum_{k=1}^{b}\left[\dfrac{2m+1}{y_k+1}\right])+\sum_{k=1}^{b}\left\{(y_k+1)\left[\dfrac{2m+1}{y_k+1}\right](\left[\dfrac{2m+1}{y_k+1}\right]+1)\right\}$

均化後$f_{max}=(4m+2)\left(mb-\left[\dfrac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+1}\right](b-y+\left[\dfrac{y}{b}\right]b)-\left[\dfrac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+2}\right](y-\left[\dfrac{y}{b}\right]b)\right)$

$+(\left[\dfrac{y}{b}\right]+1)\left[\dfrac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+1}\right](\left[\dfrac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+1}\right]+1)(b-y+\left[\dfrac{y}{b}\right]b)$

$$+\left(\left[\frac{y}{b}\right]+2\right)\left[\frac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+2}\right]\left(\left[\frac{2m+1}{\left[\frac{y}{b}\right]+2}\right]+1\right)\left(y-\left[\frac{y}{b}\right]b\right)$$

其中若$\left[\frac{y}{n}\right]\geqq 1$，b=n；若$\left[\frac{y}{n}\right]=0$，則 b=y。

(2)根據【定理七】極化的概念，缺口的放置如下時有f_{min}：

$\left[\frac{y}{2m}\right]$條 2m 個缺口的直線，1 條 y-2m$\left[\frac{y}{2m}\right]$個缺口的直線。

又根據【定理六】之(2)知： $f_{min}=(4m+1)y-\sum_{k=1}^{b}y_k^2$

所以$f_{min}=(4m+1)y-\left(4m^2\left[\frac{y}{2m}\right]+y^2-4ym\left[\frac{y}{2m}\right]+4m^2\left[\frac{y}{2m}\right]^2\right)$

$=y(4m+1-y)+4m\left[\frac{y}{2m}\right]\left(y-m-m\left[\frac{y}{2m}\right]\right)$ #

至此，【定理八】和【定理九】，我們得到所有N(m,n,x,0)和N(m,n,0,y)，缺口對蜘蛛數所造成影響的f_{max}和f_{min}。

故給定一組N(m,n,x,0) 或N(m,n,0,y)，先根據【定理一】計算出S(m,n,0,0)值，

再依【定理八】、【定理九】分別計算出f(m,n,x,0)或f(m,n,0,y)的最大值和最小值。

即可得到S(m,n,x,0)或S(m,n,0,y)的最大值和最小值。

因爲圓和直線是兩個獨立的系統，所以N(m,n,x,y)中蜘蛛數S(m,n,x,y)的通式，只要將圓和直線的情況相加即可。

4. 確定 N(m,n,x,y)中，蜘蛛數 S(m,n,x,y)的通式，並舉例驗證

根據【定理八】和【定理九】，可以求得計算 f(m,n,x,y)的最大值和最小值的通式。

【定理十】：∀N(m,n,x,y)

Max：若$\left[\frac{x}{m}\right]\geqq 2$，則$f_{max}$=【定理八】之(1)+【定理九】之(1)

若 $0\leqq\left[\frac{x}{m}\right]\leqq 1$，則$f_{max}$=【定理八】之(2)+【定理九】之(1)

Min：若$\frac{x}{m}>1$，則f_{min}=【定理八】之(3)+【定理九】之(2)

若 $0\leqq\frac{x}{m}\leqq 1$，則f_{min}=【定理八】之(4)+【定理九】之(2)

驗證：N(5,4,5,4)

一開始先不放入缺口，<如圖二十八>

則根據【定理一】:

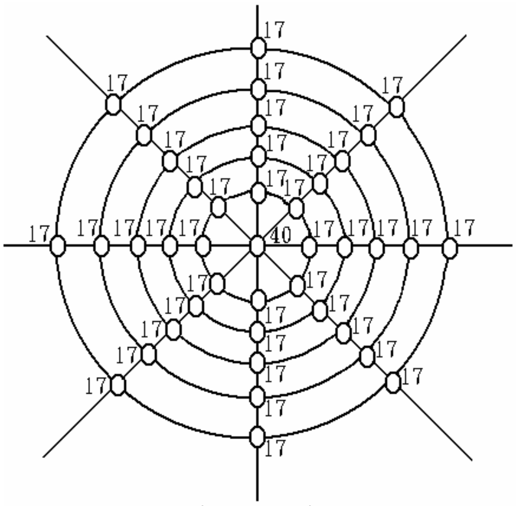
(1)S(5,4,0,0)

S(5,4,0,0) = 4mn(m+n) = 4×5×4×(5+ 4) = 720

然後用最原始的方法計算：

在<圖二十八>中，我們標出各點的蒼蠅數，

所以 S(5,4,0,0) = 17×40+ 40 = 720，結果相符。



〈圖二十八〉

(2)S(5,4,5,0)的 min

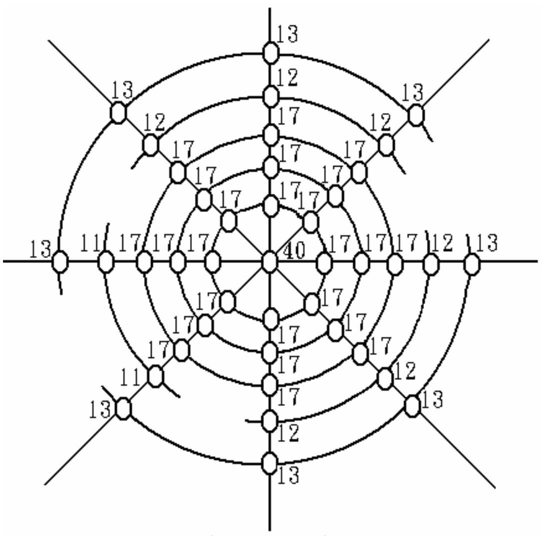
考慮圓上的缺口：

則根據【定理二】和【定理七】及【性質 6】:

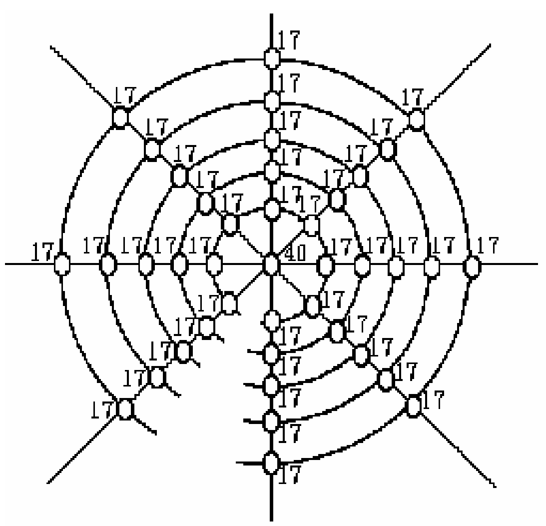
5 個缺口分給 5 個圓，當其中 1 圓有 2 個缺口，1 圓有 3 個缺口，且這兩個圓上的結點數分配也平均化時有f_{max}。<如圖二十九> 則根據【定理三】之(1)：

$$f_{max}(5,4,5,0) = f_{max}(1,4,2,0) + f_{max}(1,4,3,0) = 2\times4(2\times4-\left[\frac{2\times4}{2}\right]) - (2\times4-\left[\frac{2\times4}{2}\right]\times2)(\left[\frac{2\times4}{2}\right]+1)$$

$$+ 2\times4(2\times4-\left[\frac{2\times4}{3}\right]) - (2\times4-\left[\frac{2\times4}{3}\right]\times3)(\left[\frac{2\times4}{3}\right]+1) = 74$$



〈圖二十九〉



〈圖三十〉

及根據【定理八】之(2)： 因為 $0\leqq\left[\frac{5}{5}\right]\leqq1$，並且x>3，又x為奇數，所以$a=\frac{x-1}{2}$

$$f_{max}(5,4,5,0)=2\times4\left(2\times2\times4-2-2\left(4(\frac{5-1}{2}-1)+\left[\frac{2\times4}{3}\right]\right)\right)$$

$$+ 2\times4(4+1)(\frac{5-1}{2}-1) + 3\left[\frac{2\times4}{3}\right](\left[\frac{2\times4}{3}\right]+1) = 74$$，兩公式結果相符。

則$S_{min}(5,4,5,0) = S(5,4,0,0) - f_{max}(5,4,5,0) = 646$，

然後在<圖二十九>中標出各點的蒼蠅數來計算：

$S_{min}(5,4,5,0) = 17\times24 + 13\times8 + 12\times6 + 11\times2 + 40 = 646$，結果相符。

(3)S(5,4,5,0)的 max：

而當 5 個圓都各有 1 個缺口時有f_{min}。<如圖三十> 根據【定理三】之(2)：

$f_{min}(5,4,5,0)= 5\times f_{min}(1,4,1,0) = 5\times(1- 1)(4\times4- 1) = 0$ 及根據【定理八】之(4)：

因為 $0\leqq \frac{5}{5} \leqq 1$，所以$f_{min}(5,4,5,0)= 0$，$S_{max}(5,4,5,0) = 720$，

然後在<圖三十>中標出各點的蒼蠅數，發現和<圖二十八>一樣，

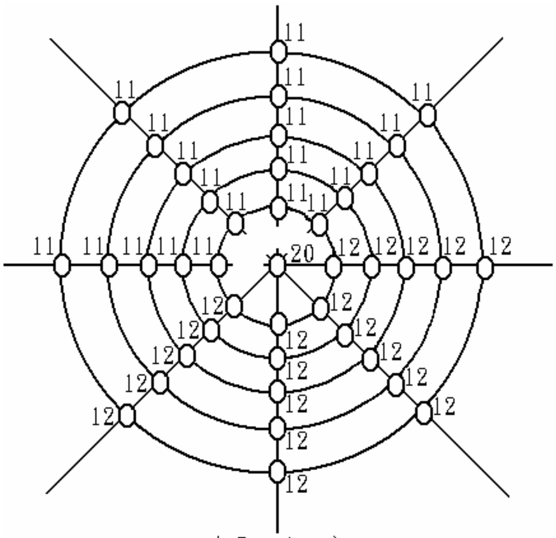
所以$S_{max}(5,4,5,0) = 720$ ，結果相符。

(4)S(5,4,0,4)的 min：

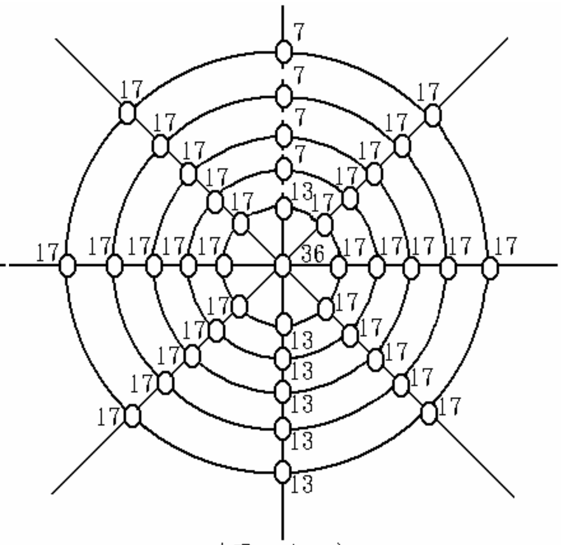
考慮直線上的缺口，根據【定理二】和【定理七】及【性質 6】：

4 個缺口分給 4 條直線，當 4 條直線各有一個缺口，且這 4 條直線上的結點數分配也平均化，此時有f_{max}。<如圖三十一>則根據【定理四】之(1)：

$f_{max}(5,4,0,4) = 4\times f_{max}(5,1,0,1) = 4\times11\times(11-5) - 4\times(11-5\times2)(5+1) = 240$



〈圖三十一〉



〈圖三十二〉

及根據【定理九】之(1)：

$$f_{max}(5,4,0,4) = 22\times\left(5\times4-\left[\frac{11}{1+1}\right](4-4+4)-\left[\frac{11}{1+2}\right](4-4)\right)$$

$$+2\times5\times6\times4 + 3\times3\times4(4-4) = 240$$ ， 兩公式結果相符。

則$S_{min}(5,4,0,4) = S(5,4,0,0)-f_{max}(5,4,0,4) = 480$，

然後在<圖三十一>中標出各點的蒼蠅數來計算：

$S_{min}(5,4,0,4) = 12\times20 + 11\times20 + 20 = 480$，結果相符。

(5)S(5,4,0,4)的 max：

而當 1 條直線有 4 個缺口時有f_{min}。<如圖三十二>

則根據【定理四】之(2)： $f_{min}(5,4,0,4) = f_{min}(5,1,0,4) = (4\times5+1- 4)\times4 = 68$

及根據【定理九】之(2)： $f_{min}(5,4,0,4) = 4\times(4\times5+1- 4) + 4\times5\times0\times(4- 5- 5\times0) = 68$

兩公式結果相符。則$S_{max}(5,4,0,4) = S(5,4,0,0) - f_{min}(5,4,0,4) = 652$，

然後在<圖三十二>中標出各點的蒼蠅數來計算：

$S_{min}(5,4,0,4) = 17\times30 + 13\times6 + 7\times4 + 36 = 652$，結果相符。

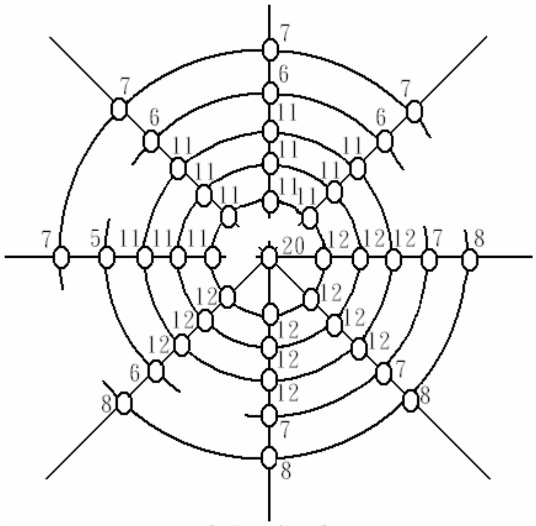
(6)S(5,4,5,4)的min：

最後將圓和直線一起討論：

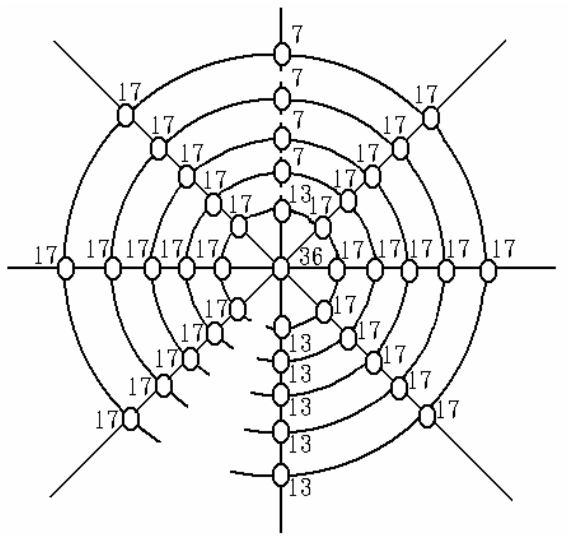
根據【定理十】，因為 $0 \leqq \left[\frac{x}{m}\right] \leqq 1$，所以$f_{max}$=【定理八】之(2)+【定理九】之(1)

所以$f_{max}(5,4,5,4) = f_{max}(5,4,5,0) + f_{max}(5,4,0,4) = 74 + 240 = 314$，

$S_{min}(5,4,5,4) = S(5,4,0,0) - f_{max}(5,4,5,4) = 406$。



〈圖三十三〉



〈圖三十四〉

然後在<圖三十三>中標出各點的蒼蠅數來計算：

$S_{min}(5,4,5,4) = 11\times12+12\times12+7\times7+6\times4+8\times4+5+20=406$，結果相符。

(7)S(5,4,5,4)的max：

根據【定理十】，因為 $0 \leqq \frac{x}{m} \leqq 1$，所以$f_{min}$ =【定理九】之(2)

所以$f_{min}(5,4,5,4) = f_{min}(5,4,5,0) + f_{min}(5,4,0,4) = 0 + f_{min}(5,1,0,4) = (4\times5+1-4)\times4 = 68$

$S_{max}(5,4,5,4) = S(5,4,0,0) - f_{min}(5,4,5,4) = 652$

然後在<圖三十四>中標出各點的蒼蠅數來計算：

$S_{max}(5,4,5,4) = 17\times30 + 13\times6 + 7\times4 + 36 = 652$，結果相符。

陸、研究結果

一、在研究過程中，我們得到許多定理和性質，分別針對各種不同的情形求出蜘蛛數 S 的最小值和最大值。而我們採取的策略是先求減少量函數 f，再推得蜘蛛數 S。

二、我們將研究的結果整理如下：

定理一　S(m,n,0,0)　無缺口的蜘蛛數

定理二　均化與極化－N(1,n,x,0)和 N(m,1,0,y)

定理三　f(1,n,x,0)之 Max、Min
定理四　f(m,1,0,y)之 Max、Min
定理五　求 f(m,n,x,0)Max、Min 的必要條件
定理六　求 f(m,n,0,y)Max、Min 的必要條件
定理七　均化與極化－N(m,n,x,0)和 N(m,n,0,y)
定理八　f(m,n,x,0)之 Max、Min
定理九　f(m,n,0,y)之 Max、Min
定理十　f(m,n,x,y)之 Max、Min

三、我們用了大量的高斯符號，在不熟悉其運算的規則之下，剛開始無法證明：$\forall k \in N$，$g(k) \geq g(k+1)$，先用電腦跑數據來說明這個猜想。後來用導函數的方式討論，解決了這個困難，推導出後面定理八、九、十的結果，使我們想到高斯的一句話：數學中的一些美麗定理具有這樣的特性：它們極易從事實中歸納出來，但證明卻隱藏得極深。

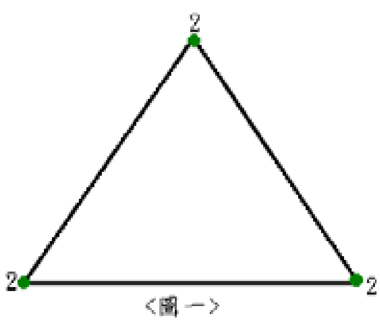
四、在我們的研究當中，其核心問題即為「均化和極化」。而在一個圓或一條直線中的「均化和極化」所代表的意義，即等同於將一個數字分成許多個較小的數字，要使所有較小的數字兩兩相乘的和，有最大值或最小值的分配方法。

柒、討論與應用

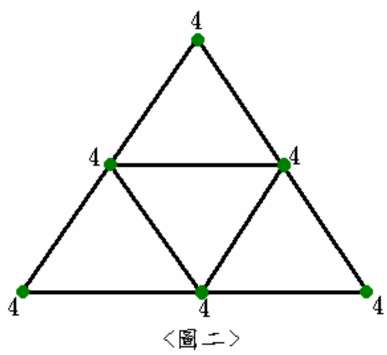
一、我們將蜘蛛網上的同心圓和放射直線所扮演的角色，改換成正 n 邊形及星形的邊，針對各個網定義出新的蜘蛛數。以下即為對正 n 邊形及星形的蜘蛛數，在缺口如何擺放分配時，出現極值(最大值和最小值)的探討。

$\boxed{\text{定義}}$：n、m 表示由外向內作出 n 個正 m 邊形；k 為缺口數；
$S_m(n)$表示所有n個正m邊形網上的蜘蛛數；並規定最外層的正m邊形為第一層

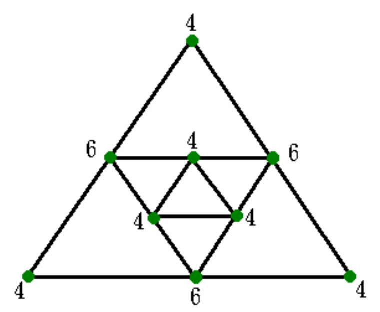
1.正三邊形的 S(蜘蛛數)



<圖一>



<圖二>



<圖三>

當n=1 時，$S_3(1)= 2\times3= 6$　　　<如圖一>
當n=2 時，$S_3(2)= 4\times6= 24$　　　<如圖二>
當n=3 時，$S_3(3)= 4\times6 + 6\times3= 42$　　<如圖三>
$\because$ $S_3(2)- S_3(1) = S_3(3)- S_3(2) =18$　$\therefore$可推得$S_3(n)= 6+ (n-1)\times18= 18n-12$
由(圖一)~(圖三)可推得 n 個正三邊形的總邊數。

類型 / 層數	具有 2 個結點的邊數	具有 3 個結點的邊數	總邊數
n=1<圖一>	3	0	3
n=2<圖二>	3	3	6
n=3<圖三>	3	6	9
n 個正三角形	3	3(n-1)	3n

<表一>

接下來就缺口的範圍，討論擺放的方法及其極值。

(1)Max：由<表一>知，邊上具有 2 個結點的邊數有 3 個，而邊上具有 3 個節點的邊數有 3(n-1)個。而因為最內層三角形有 3 個邊，且其他 n-1 個三角形都各有 6 段(將兩個相鄰節點視為一段)，所以缺口數最多有 6(n-1)+3 個。

(i) $k\le 3(n-1)$：

為造成f_{max}，放置缺口須從具有 3 個結點的邊開始，且每邊只擺放一個缺口(均化)，所以此時每個缺口造成的影響值皆為 4，故$f_{max}=4k$，如<表二>(a)式。

(ii) $k>3(n-1)$：

同樣地，為得到f_{max}須先將 3(n-1)個缺口放置在具有 3 個結點的邊上，且每邊只分配一個缺口(平均化)；而剩餘的 k-3(n-1)個缺口由於無論放置在何處造成的影響值皆為 2，所以可以任意放置，故$f_{max}=6n+2k-6$ 如<表二>(b)式。

當 $k\le 3n-3$ 時	$f_{max}=4k$ …………………………(a)式
當 $3n-3<k\le 6n-3$ 時	$f_{max}=4(3n-3)+2(k-(3n-3))$ $=6n+2k-6$ …………………(b)式

<表二>

(2) Min：要得到f_{min}，缺口須從具有 2 個結點的邊先放。並將此類具 2 結點的邊放滿後(極端化)，再開始放置具 3 個結點的邊。

(i) $k\le 3$：

因為此時每一個缺口所造成的影響值皆為 2，所以$f_{min}=2k$，如<表三>(c)式。

(ii) $k>3$：

為了得到f_{min}，須先將 3 個缺口放置在具有 2 個結點的邊上；剩餘的k-3 個缺口再逐一分配給各個邊：將一個邊放滿缺口後，再換另一個邊(極端化)，

若$\frac{k-3}{2}\in N$，則有$\frac{k-3}{2}$個缺口影響值為 4，有$\frac{k-3}{2}$個缺口影響值為 2，

所以$f_{min}=3k-3$，如<表三>(d)式；

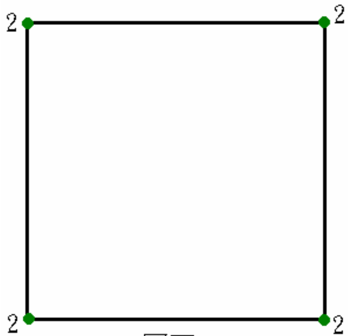
若$\frac{k-3}{2}\notin N$，則有$\left[\frac{k-3}{2}\right]+1$ 個缺口影響值為 4，有$\left[\frac{k-3}{2}\right]$個缺口影響值為 2，

所以$f_{min}=2k+2\left[\frac{k-3}{2}\right]+2$，如<表三>(e)式。

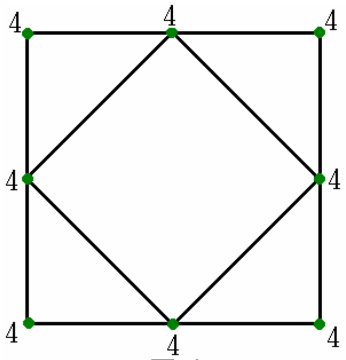
當 $k \le 3$ 時	$f_{min} = 2k$ ……………………………………(c)式
當 $k > 3$ 時 且 $\frac{k-3}{2} \in N$	$f_{min} = 2\times3 + 4(\frac{k-3}{2}) + 2(k-3-\frac{k-3}{2}) = 2k+2\frac{k-3}{2}$ $= 3k-3$ ……………………………………(d)式
當 $k > 3$ 時 且 $\frac{k-3}{2} \notin N$	$f_{min} = 2\times3 + 4(\left[\frac{k-3}{2}\right]+1) + 2(k-3-\left[\frac{k-3}{2}\right]-1)$ $= 2k+2\left[\frac{k-3}{2}\right]+2$ ……………………………(e)式

<表三>

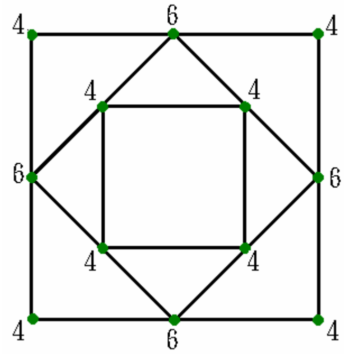
2.正四邊形的 S(蜘蛛數)



<圖四>



<圖五>



<圖六>

當n=1 時，$S_4(1)= 2\times4= 8$ <如圖四>

當n=2 時，$S_4(2)= 4\times8= 32$ <如圖五>

當n=3 時，$S_4(3)= 4\times8+ 6\times4= 56$ <如圖六>

∵ $S_4(2) - S_4(1) = S_4(3)- S_4(2) = 24$ ∴可推得$S_4(n)= 8+(n-1)\times24= 24n-16$

由(圖四)~(圖六)可推得 n 個正方形的總邊數。

類型 / 層數	具有 2 個結點的邊數	具有 3 個結點的邊數	總邊數
n=1<圖四>	4	0	4
n=2<圖五>	4	4	8
n=3<圖六>	4	8	12
N 個正方形	4	4(n-1)	4n

<表四>

接下來就缺口的範圍，討論擺放的方法及其極值。

(1)Max：由<表四>，具有 2 個結點的邊數有 4 個，而具有 3 個結點的邊數有 4(n-1)個。若爲得到f_{max}，放置缺口時，須從具有 3 個結點的邊先放。

(i) $k \le 4(n-1)$：

因爲此時每個缺口造成的影響值皆爲 4，故$f_{max}= 4k$，如<表五>(a)式；

(ii) $k > 4(n-1)$：

爲得到f_{max}，須先將 4(n-1)個缺口放置在具有 3 個結點的邊上，並且每一個邊上都只有一個缺口(平均化)，剩餘的k- 4(n-1)個缺口無論放置在

何處其影響值皆爲 2，故可任意放置，所以$f_{max}= 8n+2k-8$，如<表五>(b)式；
又缺口的總值最多 8n- 4 個，因爲最內層正方形有 4 個邊，其他 n-1 個正方形都具有 8 段，故總數爲 4+ 8(n- 1)段。(將兩個相鄰節點視爲一段)

當 $k \le (4n-4)$時	$f_{max}= 4k$ ……………………(a)式
當$(4n-4) < k \le (8n-4)$時	$f_{max}= 4(4n-4)+2(k-(4n-4))$ $= 8n+2k-8$ ……………(b)式

<表五>

(2)Min：爲得到f_{min}，缺口必須從具有 2 結點的邊先放。並將此類具 2 結點的邊放滿後(極端化)，再開始放置具 3 個結點的邊。

(i) $k \le 4$：

此時每個缺口所造成的影響值皆爲 2，所以$f_{min}= 2k$，如<表六>(c)式。

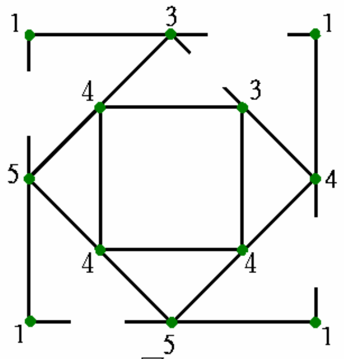
(ii)$k > 4$：

爲了造成f_{min}，先將 4 個缺口放置在具有 2 個結點的邊上，剩餘的k- 4 個缺口再逐一分配給各個邊：將一個邊放滿缺口後，再換另一個邊(極端化)，若$\frac{k-4}{2} \in N$，則有$\frac{k-4}{2}$個缺口所造成的影響值爲 4，有$\frac{k-4}{2}$個缺口所造成的影響值爲 2，故$f_{min}=2k+2\left[\frac{k-4}{2}\right]$；若$\frac{k-4}{2} \notin N$，則有$\left[\frac{k-4}{2}\right]+1$ 個缺口造成的影響值爲 4，有$\left[\frac{k-4}{2}\right]$個缺口所造成的影響值爲 2，故$f_{min}= 2k+2\left[\frac{k-4}{2}\right]+2$。

當 $k \le 4$ 時	$f_{min}= 2k$ ………………………………………(c)式
當 $k > 4$ 時 且$\frac{k-4}{2} \in N$	$f_{min} = 2\times4+ 4(\frac{k-4}{2})+ 2(k-4-\frac{k-4}{2})$ $= 2k+2\frac{k-4}{2}$ $= 3k-4$ …………………………………(d)式
當 $k > 4$ 時 且$\frac{k-4}{2} \notin N$	$f_{min}= 2\times4+ 4(\left[\frac{k-4}{2}\right]+1)+2(k-4-\left[\frac{k-4}{2}\right]-1)$ $=2k+2\left[\frac{k-4}{2}\right]+2$ ……………………………(e)式

<表六>

以<圖七>爲例：共五個缺口，將此五個缺口〝平均〞分配給五條具有三個結點的邊，則缺口影響值爲最大值，蜘蛛數總和有最小值。



<圖七>

3.正 m 邊形的 S(蜘蛛數)

∵ $S_m(2)-S_m(1) = S_m(3)-S_m(2) = 6n$　　　∴$S_m(n)=2m+6m(n-1)=6mn-4m$

由上述正三角形及正方形的討論類推，所有 n 個正 m 邊形的總邊數如<表七>。

類型 / 層數	具有 2 個結點的邊數	具有 3 個結點的邊數	總邊數
n 個正 m 邊形	M	m(n-1)	mn

<表七>

就缺口的範圍，來討論擺放的方法及其極值。

(1)Max：由<表七>知，具有 2 個節點的邊有 m 個，而具有 3 個節點的邊有 m(n-1)個。

爲造成f_{max}，放置缺口時，須從具有 3 個結點的邊先放。缺口的總數爲 2mn- m，因最內層的正m邊形有m段，其他n- 1 個正m邊形各有 2m段，共 2mn- m段。

(i)$k\le m(n-1)$：

則此時放置在每一個缺口造成的影響值皆爲 4，所以$f_{max}= 4k$，如<表八>(a)式。

(ii)$k > m(n-1)$：

爲了造成f_{max}須先將m(n-1)個缺口放置在有 3 個結點的邊上，並且每一個邊上都只有一個缺口(平均化)，剩餘的k-m(n-1)個缺口由於無論放置在何處，造成的影響值皆爲 2，故可任意放置，所以$f_{max}= 2k+2mn-2m$，如<表八>(b)式。

當 $k\le(mn-m)$時	$f_{max}= 4k$ ……………………………………(a)式
當$(mn-m)<k\le(2mn-m)$時	$f_{max}= 4(mn-m)+2\,(\,k-(mn-m)\,)$ $= 2k+2mn-2m$ ………………………(b)式

<表八>

(2)Min：爲得到f_{min}，缺口須從具 2 個結點的邊開始放置，並將具 2 結點的邊放滿後(極端化)，再開始放置具 3 個結點的邊。

(i)$k\le m$：

每一個缺口所造成的影響值皆爲 2，故$f_{min}= 2k$，如<表九>(c)式。

(ii)$k > m$，爲了造成f_{min}，先將m個缺口放置在具有 2 個結點的邊上，而剩餘的 k-m 個缺口再分配給各個邊：將一個邊放滿缺口後，再換另一個邊(極端化)，若$\dfrac{k-m}{2}\in N$，則有$\dfrac{k-m}{2}$個缺口所造成的影響值爲 4，有$\dfrac{k-m}{2}$個缺口所造成的影響值爲 2，所以$f_{min}=3k-m$，如<表九>(d)式；若$\dfrac{k-m}{2}\notin N$，則有$\left[\dfrac{k-m}{2}\right]+1$個缺口所造成的影響值爲 4，有$\left[\dfrac{k-m}{2}\right]$個缺口所造成的影響值爲 2，所以

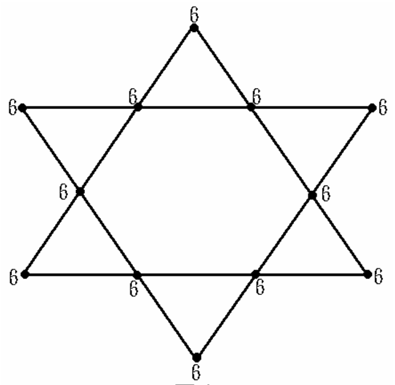
$f_{min}=2k+2\left[\dfrac{k-m}{2}\right]+2$，如<表九>(e)式。

當 $k \le m$ 時	$f_{min} = 2k$⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(c)式
當 $k > m$ 時 且 $\frac{k-m}{2} \in N$	$f_{min} = 2m + 4(\frac{k-m}{2}) + 2(k-m-\frac{k-m}{2})$ $= 2k + 2\frac{k-m}{2}$ $= 3k - m$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(d)式
當 $k > m$ 時 且 $\frac{k-m}{2} \notin N$	$f_{min} = 2 \times m + 4(\left[\frac{k-m}{2}\right] + 1) + 2(k-m-\left[\frac{k-m}{2}\right] - 1)$ $= 2k + 2\left[\frac{k-m}{2}\right] + 2$⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(e)式

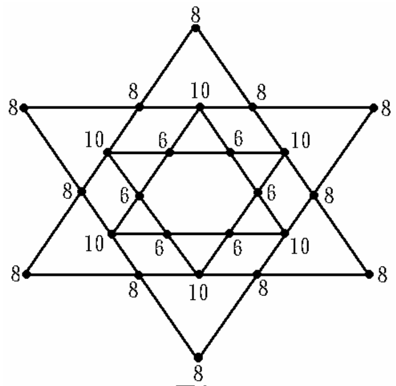
<表九>

4.星形網上的 S 蜘蛛數

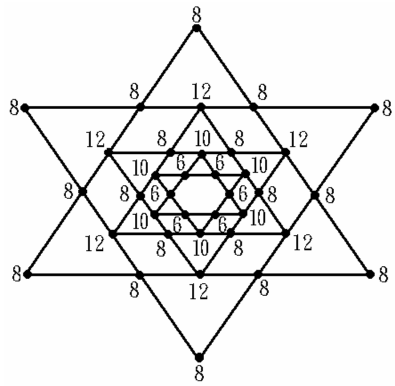
定義：$S_{星}(n)$表星形網上的蜘蛛數。



<圖八>



<圖九>



<圖十>

當n=1 時，$S_{星}(1)=6\times12=72$ <如圖八>

當n=2 時，$S_{星}(2)=8\times12+10\times6+6\times6=192$ <如圖九>

當n=3 時，$S_{星}(3)=8\times18+12\times6+10\times6+6\times6=312$ <如圖十>

$\because$ $S_{星}(2)-S_{星}(1)=S_{星}(3)-S_{星}(2)=120$ $\therefore S_{星}(n)=72+120(n-1)=120n-48$

由上述正 n 邊形的討論類推，所有 n 個星形的總邊數如<表十>。

項目 / 情形	邊上具 4 個結點的邊數	邊上具 5 個結點的邊數	總邊數
n=1<圖一>	6	0	6
n=2<圖二>	6	6	12
n=3<圖三>	6	12	18
n 層	6	6(n-1)	6n

<表十>

就缺口的範圍，來討論其擺放的方法及極值的情形：

(1)Max：step 1：爲使缺口所造成的影響最大，先將前(6n-6)個缺口依序擺放於具 5 個結點的邊上且各個邊只能擺放一個(f=12)。

step 2：若尚有剩餘缺口，則此時面臨了到底是要將接下來的缺口擺放於具 4 個結點的邊上成爲此邊上的第一個缺口呢？抑或是繼續擺放在具 5 個結點的邊上使其成爲此邊上的第二個缺口？在經過比較之後，得知將接下來的缺口擺放於具 4 個結點的邊上放第一個缺口所造成的影響值(f=8)會比擺放在具 5 個結點的邊上第二個缺口所造成的影響值(f=4,若於直線上擺放第二個缺口時,則 f 會由 12 變爲 16)來得大。

step 3：等到具 4 個結點的邊都各自放置一個缺口後，若還有剩餘的缺口，則將之拿來擺放在具 5 個結點的邊上使其成爲此邊上第二個缺口，

step 4：每條具 5 個結點的邊上都各自放置二個缺口後，剩下的缺口無論放置何處所造成的影響值皆爲 2，故此時的缺口可任意擺放。如<表十一>

當 $k\le(6n-6)$時	$f_{max}=12k$
當$(6n-6)<k\le 6n$ 時	$f_{max}=12(6n-6)+8[k-(6n-6)]=8k+24n-24$
當 $6n<k\le(12n-6)$時	$f_{max}=12(6n-6)+6\times8+4(k-6n)=48n+4k-24$
當$(12n-6)<k\le(24n-6)$時	$f_{max}=12(6n-6)+6\times8+4(6n-6)+2[k-(12n-6)]=72n+2k-36$

<表十一>

(2)Min：step 1：爲了使缺口所造成的影響最小，缺口擺放的位置選擇具結點數少的邊，故先將缺口擺放於一條具 4 個結點的邊上並將之放滿。

step2：若尚有剩餘的缺口，則先把剩餘的缺口擺放於一條具 5 個結點的邊上並將之擺滿，使每條具 5 個結點的邊上擺滿缺口。如<表十二>

當 $k\le18$，$k=3p+q$ 且 p、$q\in N\cup\{0\}$，$0\le q<p$ 時	(i) 若 $q=0$，$f_{min}=6p+4p+2p=12p=4k$
	(ii) 若$q=1$，$f_{min}=6p+4p+2p+6=12\times\left[\frac{k}{3}\right]+6$
	(iii) 若$q=2$，$f_{min}=6p+4p+2p+6+4=12\times\left[\frac{k}{3}\right]+10$
當 $18<k\le(24n-6)$，$(k-18)=4p+q$ 且 p、$q\in N\cup\{0\}$，$0\le q<p$ 時	(i) 若$q=0$， $f_{min}=20p+72=5k-18$
	(ii) 若$q=1$， $f_{min}=20p+80=20\times\left[\frac{k-18}{4}\right]+80$
	(iii) 若$q=2$， $f_{min}=20p+86=20\times\left[\frac{k-18}{4}\right]+86$
	(iv) 若$q=3$， $f_{min}=20p+90=20\times\left[\frac{k-18}{4}\right]+90$

<表十二>

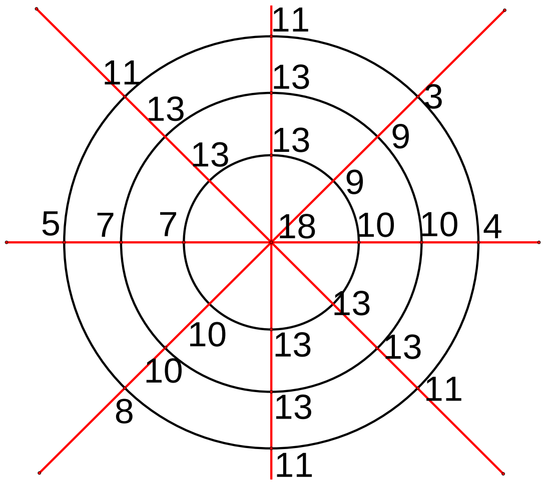
二、設計出【新踩地雷遊戲】(蜘蛛篇)，即給定一蜘蛛網 N(m,n)與結點上的蒼蠅數，嘗試在短時間內，找出隱藏在圖形背後的缺口之正確位置，此爲逆向思考之路徑。以下爲遊戲之策略：

考慮一個蘊含缺口的蜘蛛網，當只給定圖形和各點的蒼蠅數，不標示缺口位置，是否可以找出相對應的缺口位置？我們將此稱爲「新踩地雷遊戲」。

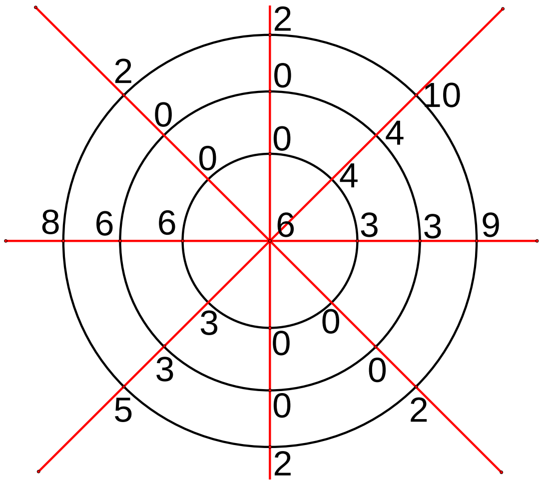
由於若圓上只有一個缺口，不會對蒼蠅數產生影響，所以無法確定缺口的位置。

因此規定任意圓上不能只有一個缺口。

例一：如〈圖十一〉



〈圖十一〉



〈圖十二〉

嘗試從蜘蛛網上各點的蒼蠅數推測出缺口位置。

Step 1：與完全沒有缺口的同型蜘蛛網做比較，畫出另一個圖代表各結點蒼蠅數受到缺口影響的減少量。稱之爲〝差值圖〞。(圖十二)

Step 2：考慮影響值爲 0 的結點，代表通過該結點的圓和直線都沒有缺口。結點(1,1)、(1,2)、(1,5)、(1,6)、(2,1)、(2,2)、(2,5)、(2,6)所受的影響值都來自於直線上的缺口。

Step 3：考慮一個結點在直線中所受的最大影響值爲 6，因此在(1,5)、(2,5)的兩邊必都爲缺口。在決定這三個缺口位置後，觀察(1,1)、(2,1)所受的影響值已由此三個缺口提供，所以在通過(1,1)、(2,1)的直線上沒有其他缺口。

Step 4：根據目前已知的缺口，可以改寫〈圖十二〉中部分結點的影響數，如(1,1)、(2,1)所需的影響數已經滿足，所以將其影響數改寫爲 0，同理將(0,0)改寫爲 3，3 這個剩餘的影響數爲來自其他尚未確定的缺口所提供。(3,1)改寫爲 6，(1,5)、(2,5)改爲 0，(3,5)改爲 2。

Step 5：觀察通過(0,0)、(1,2)、(2,2)、(3,2)、(1,6)、(2,6)、(3,6)的直線，線上含有(1,2)、(2,2)兩個影響數爲 4，(0,0)、(1,6)、(2,6)三個影響數爲 3 的結點，考慮在(0,0)、(1,2)間放置一個缺口，恰使此五個結點所需的影響數滿足，且在該條直線上無其他的缺口放置方法滿足所需影響數。

Step 6：決定(0,0)、(1,2)間的缺口後，將(3,2)改寫爲 6，(3,6)改寫爲 2。然後考慮最外層的圓，(3,1)、(3,2)兩結點影響數爲 6，其他六結點影響爲 2，放置兩個缺口在(3,2)

和(3,3)之間，(3,8)和(3,1)之間，恰使八個結點滿足。

從一步一步的推導，我們決定了 6 個缺口的位置，使〈圖十二〉中所有結點所需的影響數滿足，並且滿足此圖形的缺口放置方法只有一種。

歸納對此種新踩地雷遊戲的策略如下：

(1)比較未放缺口時各結點的蒼蠅數，畫出差值圖。

(2)從最大或最小的影響值下手，0 代表通過此結點的圓和直線都不含缺口；最大影響值代表該結點被缺口包圍，無法到達任何結點。

(3)每決定一些缺口就可以改寫影響值，新的值爲原來的影響值扣除已確定的缺口所造成的影響值，以表示其他未知缺口所造成的影響。

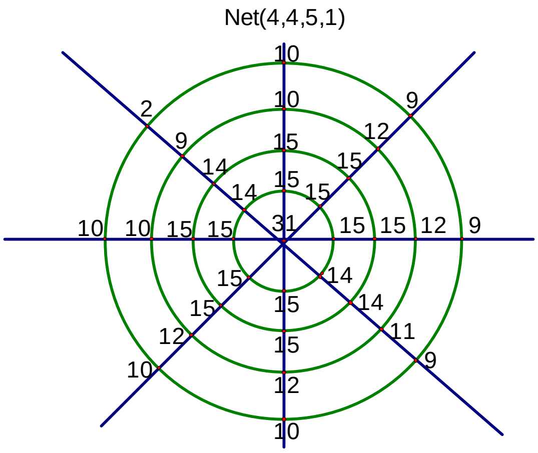
(4)從差值圖中數字小的結點，可決定何處〝必不爲缺口〞；數字較大的結點，可決定何處〝必爲缺口〞。

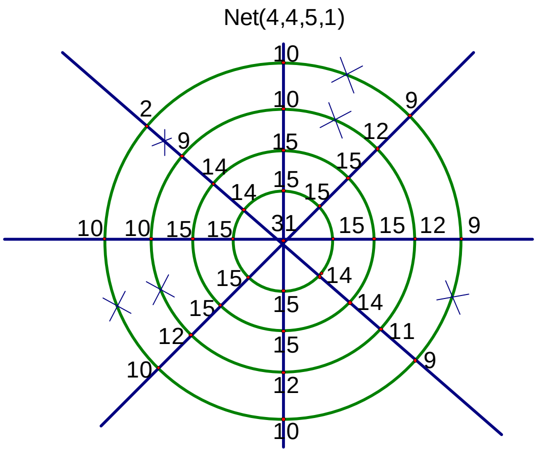
重複使用這些策略，可以循著一定的步驟求出所有蜘蛛網上的缺口位置。

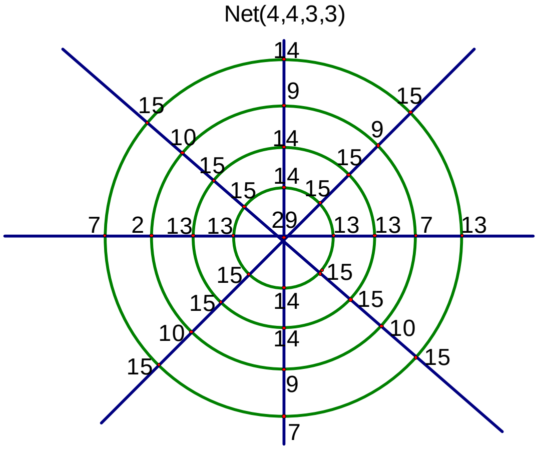
求缺口的過程讓我們聯想到電腦中的「踩地雷」，所以將此稱爲〝新踩地雷遊戲〞。

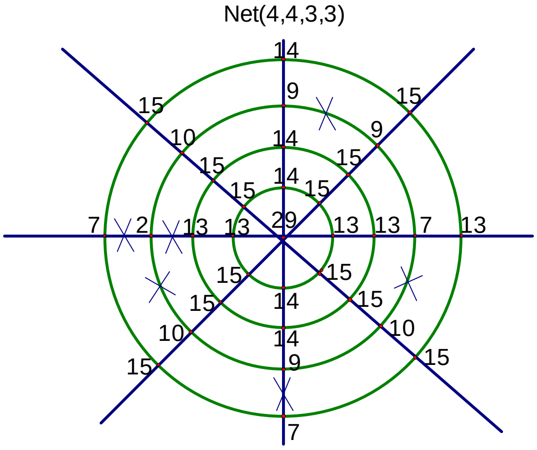
以下列出幾組題目和答案：

題目： 答案：

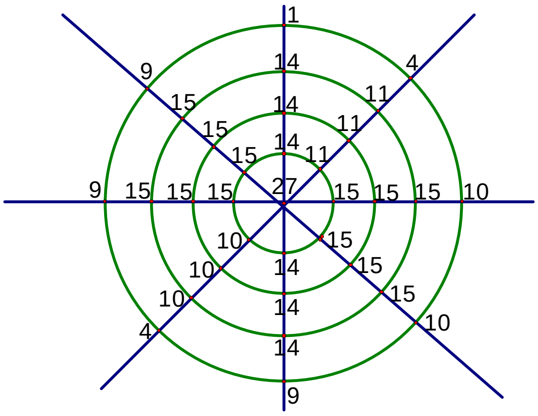




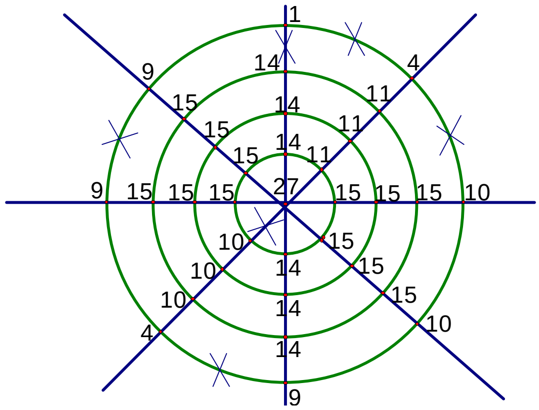




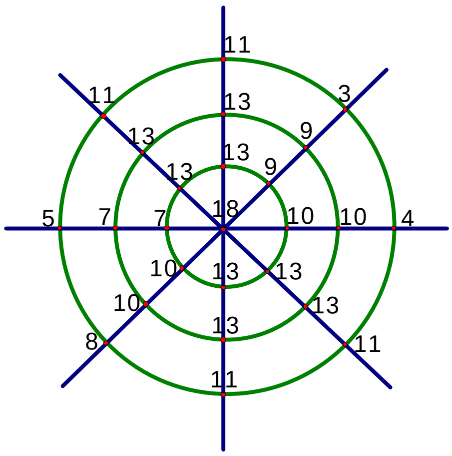
Net(4,4,4,2)



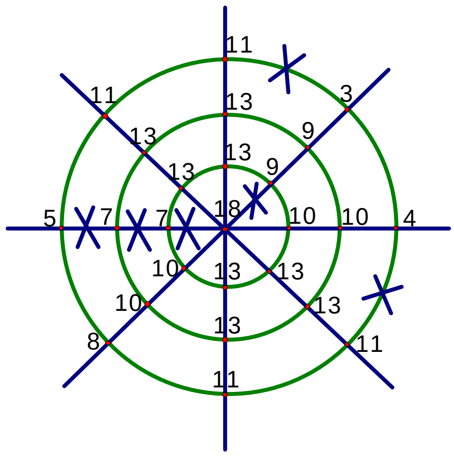
Net(4,4,4,2)



Net(3,4,2,4)



Net(3,4,2,4)



三、討論若只給定缺口數和爲定值時(即 x+y=k)，於圓上和直線上如何分配缺口，蜘蛛數會有最大值和最小值的發生，作爲研究圓和直線彼此聯結之橋樑。

設想 2005 年戰爭的情境，有一排爆破兵攜帶有限的炸藥來炸毀敵軍最多的聯絡用道。冒生命危險潛入敵軍的陣仗(敵人的聯絡網是由直線和圓所形成的蜘蛛網)，

此時他們思考著炸彈應擺放於何處會造成最大的破壞。

上述的炸彈猶如我們所探討的缺口，缺口爲定值(x+y=k)我們分三種情形來討論：

1.m = n ； 2.m＞n ； 3.m＜n

1.m = n

在觀察一些實驗數據後，我們歸納出以下結果：

令m=n=t，策略是比較直線和圓上的g(利益函數)，放置缺口於g較大者；

符號定義：$g_{Lmax}(p)$代表g(m,1,0,p)的最大值，爲直線上的g；

同理$g_{Cmax}(p)$爲圓上的情形。

缺口數目 直線和圓的利益函數比較	總缺口數 k	x	y	備註
$g_{Lmax}(1) > g_{Cmax}(1)$， $2g_{Lmax}(1) \geq g_{Cmax}(2)$	0 ↓ t	0 ↓ 0	0 ↓ t	由於$g_{Lmax}(1)$影響值較大，且$g_{Cmax}(1)$影響值為 0，所以y持續增加，直到用完所有$g_{Lmax}(1)$。
$g_{Lmax}(1) + g_{Lmax}(2) \geq g_{Cmax}(2)$	t+1	0	t+1	多出的一個缺口放置於直線上，使其中一條直線上擁有兩個缺口，所造成的影響比放置兩缺口於圓上來得大。
$2g_{Lmax}(2) \leq g_{Cmax}(2)$	t+2 t+3 t+4 t+5 ↓ 3t	2 2 4 4 ↓ 2t	t t+1 t t+1 ↓ t	因為圓上一個缺口沒有影響值，所以若只有一個缺口則擺放至直線上，故圓上以兩個缺口為一個單位增加。 圓上的缺口持續增加直到消耗完影響值較大的$g_{Cmax}(2)$。
$g_{Lmax}(2) \geq g_{Cmax}(3)$	3t+1 3t+2 ↓ 3t+t	2t 2t ↓ 2t	t+1 t+2 ↓ t+t	此時的y持續增加，直到消耗完影響值較大的$g_{Lmax}(2)$。
$g_{Lmax}(3) \leq g_{Cmax}(3)$	4t+1 4t+2 ↓ 4t+t	2t+1 2t+2 ↓ 2t+t	2t 2t ↓ 2t	此時的x持續增加，直到消耗完影響值較大的$g_{Cmax}(3)$。
$g_{Lmax}(3) \geq g_{Cmax}(4)$	5t+1 5t+2 ↓ 5t+t	3t 3t ↓ 3t	2t+1 2t+2 ↓ 2t+t	此時的y持續增加，直到消耗完影響值較大的$g_{Lmax}(3)$。
⋮	⋮	⋮	⋮	

<表十三>

由<表十三>可知在 $p \leq 2$ 時，由於圓上一個缺口無影響值，導致缺口擺放的策略不易歸納，所以我們分開證明各個步驟對所有的 m=n 都成立，確定 $p \leq 2$ 時的擺放策略：

(1) $g_{Lmax}(1) > g_{Cmax}(1)$

(2) $2g_{Lmax}(1) \geq g_{Cmax}(2)$

(3) $g_{Lmax}(1) + g_{Lmax}(2) \geq g_{Cmax}(2)$

(4) $2g_{Lmax}(2) \leq g_{Cmax}(2)$

pf：(1) $g_{Lmax}(1) \geq g_{Cmax}(1)$

因爲在圓上只放置一個缺口時，影響值= 0，所以$g_{Cmax}(1) = 0 \leq g_{Lmax}(1)$ 。

(2) $2g_{Lmax}(1) \geq g_{Cmax}(2)$

$$\because g_{Lmax}(1) = (4t+2)\left(\left[\frac{2t+1}{1}\right]-\left[\frac{2t+1}{2}\right]\right) + 2\times\left[\frac{2t+1}{2}\right]\left(\left[\frac{2t+1}{2}\right]+1\right) - \left[\frac{2t+1}{1}\right]\left(\left[\frac{2t+1}{1}\right]+1\right)$$

$$= 2t+2t^2$$

$$g_{Cmax}(2) = 4t\times\left(\left[\frac{2t}{2-1}\right]-\left[\frac{2t}{2}\right]\right) + 2\times\left[\frac{2t}{2}\right]\left(\left[\frac{2t}{2}\right]+1\right) - (2-1)\times\left[\frac{2t}{2-1}\right]\left(\left[\frac{2t}{2-1}\right]+1\right) = 2t^2$$

$\therefore 2g_{Lmax}(1) \geq g_{Cmax}(2)$ 。

(3) $g_{Lmax}(1) + g_{Lmax}(2) \geq g_{Cmax}(2)$

$$\because g_{Lmax}(1)+g_{Lmax}(2)=(4t+2)\left(\left[\frac{2t+1}{1}\right]-\left[\frac{2t+1}{2}\right]\right)+2\times\left[\frac{2t+1}{2}\right]\left(\left[\frac{2t+1}{2}\right]+1\right)-\left[\frac{2t+1}{1}\right]\left(\left[\frac{2t+1}{1}\right]+1\right)$$

$$+(4t+2)\left(\left[\frac{2t+1}{2}\right]-\left[\frac{2t+1}{3}\right]\right)+3\times\left[\frac{2t+1}{3}\right]\times\left(\left[\frac{2t+1}{3}\right]+1\right)-2\times\left[\frac{2t+1}{2}\right]\left(\left[\frac{2t+1}{2}\right]+1\right)$$

$$=4t^2+2t-4t\times\left[\frac{2t+1}{3}\right]+3\left[\frac{2t+1}{3}\right]^2+\left[\frac{2t+1}{3}\right] \quad \text{--}\langle 1\rangle$$

針對高斯函數的不同情形加以討論：

(i)當 $t\equiv 0 \pmod 3$時，$\left[\frac{2t+1}{3}\right] = \frac{2t}{3}$，<1>式$=\frac{8t^2+8t}{3}$ ------------------------------<2>

(ii)當 $t\equiv 1 \pmod 3$時，$\left[\frac{2t+1}{3}\right] = \frac{2t+1}{3}$，<1>式$=\frac{8t^2+8t+2}{3}$ -----------------<3>

(iii)當 $t\equiv 2 \pmod 3$時，$\left[\frac{2t+1}{3}\right] = \frac{2t-1}{3}$，<1>式$=\frac{8t^2+8t}{3}$ -----------------------<4>

由<2>、<3>、<4>式可知，對於所有情形， $g_{Lmax}(1)+ g_{Lmax}(2) \geq g_{Cmax}(2)$ 均成立。

(4) $2g_{Lmax}(2) \leq g_{Cmax}(2)$

(i)當$t\equiv 0 \pmod 3$時，$\left[\frac{2t+1}{3}\right]=\frac{2t}{3}$，$2g_{Lmax}(2) = \frac{4t^2+4t}{3}$ -------------------------<5>

(ii)當$t\equiv 1 \pmod 3$時，$\left[\frac{2t+1}{3}\right]=\frac{2t+1}{3}$，$2g_{Lmax}(2) = \frac{4t^2+4t+4}{3}$ -----------------<6>

(iii)當$t\equiv 2 \pmod 3$時，$\left[\frac{2t+1}{3}\right]=\frac{2t-1}{3}$，$2g_{Lmax}(2) = \frac{4t^2+4t}{3}$ --------------------<7>

又$g_{Cmax}(2)= 2t^2$ ---<8>

由<5>、<6>、<7>、<8>可知，對於所有情形，$2g_{Lmax}(2) \leq g_{Cmax}(2)$ 均成立。 #

然後從<表十三>中，觀察到總缺口數在 3t 之後，擺放缺口的策略會在圓和直線間交替，且交替的週期為 t 個缺口，我們稱此為**擺放缺口的交替性**。

並且從實驗數據中，我們歸納出只要證明在 $p \geq 2$ 時，

(1) $g_{Lmax}(p) \geq g_{Cmax}(p+1)$

(2) $g_{Cmax}(p) \geq g_{Lmax}(p)$

此二式成立，即可證明缺口的交替性在所有 m=n 的情形中皆存在。

Pf of (1)：$g_{Lmax}(p) \geq g_{Cmax}(p+1)$

只要證明 $g_{Lmax}(p) - g_{Cmax}(p+1) \geq 0$ 即可。

$$g_{Lmax}(p) = (4t+2)\left(\left[\frac{2t+1}{p}\right]-\left[\frac{2t+1}{p+1}\right]\right) + (p+1)\left[\frac{2t+1}{p+1}\right]\left(\left[\frac{2t+1}{p+1}\right]+1\right) - p\left[\frac{2t+1}{p}\right]\left(\left[\frac{2t+1}{p}\right]+1\right)$$

$$g_{Cmax}(p+1) = 4t\left(\left[\frac{2t}{p}\right]-\left[\frac{2t}{p+1}\right]\right) + (p+1)\left[\frac{2t}{p+1}\right]\left(\left[\frac{2t}{p+1}\right]+1\right) - p\left[\frac{2t}{p}\right]\left(\left[\frac{2t}{p}\right]+1\right)$$

$$\because \text{一階導函數}\left(g_{Lmax}(p) - g_{Cmax}(p+1) \right)' = \left[\frac{2t+1}{p+1}\right]^2 + \left[\frac{2t+1}{p+1}\right] - \left[\frac{2t+1}{p}\right]^2 - \left[\frac{2t+1}{p}\right]$$

$$- \left[\frac{2t}{p+1}\right]^2 - \left[\frac{2t}{p+1}\right] + \left[\frac{2t}{p}\right]^2 + \left[\frac{2t}{p}\right]$$

二階導函數 $\left(g_{Lmax}(p) - g_{Cmax}(p+1) \right)'' = 0$

$\therefore g_{Lmax}(p) - g_{Cmax}(p+1)$ 的函數圖形為一條直線，所以要證明 $g_{Lmax}(p) - g_{Cmax}(p+1) \geq 0$，只要證明在將 p 的最大值及最小值代入時皆成立即可。

p 代表的是一個圓或一條直線上的缺口，所以在 m=n=t 時，因為一個圓和一條直線最多都只能放入 2t 個缺口，所以 $2 \leq p \leq 2t-1$，將 p=2 和 p=2t-1 代回原式：

$$g_{Lmax}(2) - g_{Cmax}(3) = (4t+2)\left(t-\left[\frac{2t+1}{3}\right]\right) + 3\left[\frac{2t+1}{3}\right]\left(\left[\frac{2t+1}{3}\right]+1\right) - 2t(t+1)$$

$$- 4t\left(t-\left[\frac{2t}{3}\right]\right) - 3\left[\frac{2t}{3}\right]\left(\left[\frac{2t}{3}\right]+1\right) + 2t(t+1)$$

$$= 3\left[\frac{2t+1}{3}\right]\left(\left[\frac{2t+1}{3}\right]+1\right) - 3\left[\frac{2t}{3}\right]\left(\left[\frac{2t}{3}\right]+1\right) + 2t + 4t\left(\left[\frac{2t}{3}\right]-\left[\frac{2t+1}{3}\right]\right)$$

針對高斯記號討論：

(i)當 $t \equiv 0 \pmod 3$ 時，$\left[\frac{2t+1}{3}\right]=\left[\frac{2t}{3}\right]=\frac{2t}{3}$，並且 t 最小從 3 開始。

$$g_{Lmax}(2) - g_{Cmax}(3) = 2t\left(\frac{2t}{3}+1\right) - 2t\left(\frac{2t}{3}+1\right) + 2t = 2t \geq 6 \geq 0$$

(ii)當 $t \equiv 1 \pmod 3$ 時，$\left[\frac{2t+1}{3}\right]=\frac{2t+1}{3}$，$\left[\frac{2t}{3}\right]=\frac{2t-2}{3}$，並且 t 最小從 1 開始。

$g_{Lmax}(2)$ - $g_{Cmax}(3)$ = $(2t+1)(\frac{2t+1}{3}+1) - (2t-2)(\frac{2t-2}{3}+1) - 2t = 2t+2 \geq 4 \geq 0$

(iii)當 t≡2(mod 3)時，$\left[\frac{2t+1}{3}\right]=\frac{2t-1}{3}$，$\left[\frac{2t}{3}\right]=\frac{2t-1}{3}$，並且 t 最小從 2 開始。

$g_{Lmax}(2)$ - $g_{Cmax}(3)$ = $(2t-1)(\frac{2t-1}{3}+1) - (2t-1)(\frac{2t-1}{3}+1) + 2t = 2t \geq 4 \geq 0$

即在p=2 的情況之下，得$g_{Lmax}(2) - g_{Cmax}(3) \geq 0$ 。

當 p=2t-1 時，

$$g_{Lmax}(2t-1) - g_{Cmax}(2t) = (4t+2)(\left[\frac{2t+1}{2t-1}\right]-1) + 2t(1+1) - (2t-1)\left[\frac{2t+1}{2t-1}\right](\left[\frac{2t+1}{2t-1}\right]+1)$$

$$- 4t(1-1) - 2t(1+1) + (2t-1)(1+1)$$

$$=(4t+2)(\left[\frac{2t+1}{2t-1}\right]-1) + 4t - (2t-1)\left[\frac{2t+1}{2t-1}\right](\left[\frac{2t+1}{2t-1}\right]+1)$$

當t =1 時，$\left[\frac{2t+1}{2t-1}\right]=3$，則$g_{Lmax}(2t-1) - g_{Cmax}(2t) = 4\geq 0$

當t≥2 時，$\left[\frac{2t+1}{2t-1}\right]=1$，則$g_{Lmax}(2t-1) - g_{Cmax}(2t) = 2\geq 0$

即在p=2t-1 的情況之下，得$g_{Lmax}(2t-1) - g_{Cmax}(2t) \geq 0$ 。

所以對於所有的 $2\leq p\leq 2t-1$，$g_{Lmax}(p) - g_{Cmax}(p+1)\geq 0$，即$g_{Lmax}(p) \geq g_{Cmax}(p+1)$。 #

Pf of (2)：$g_{Cmax}(p)\geq g_{Lmax}(p)$

只要證明$g_{Cmax}(p) - g_{Lmax}(p)\geq 0$ 即可。

$$g_{Cmax}(p) = 4t(\left[\frac{2t}{p-1}\right]-\left[\frac{2t}{p}\right]) + p\left[\frac{2t}{p}\right](\left[\frac{2t}{p}\right]+1) - (p-1)\left[\frac{2t}{p-1}\right](\left[\frac{2t}{p-1}\right]+1)$$

$$g_{Lmax}(p) = (4t+2)(\left[\frac{2t+1}{p}\right]-\left[\frac{2t+1}{p+1}\right]) + (p+1)\left[\frac{2t+1}{p+1}\right](\left[\frac{2t+1}{p+1}\right]+1) - p\left[\frac{2t+1}{p}\right](\left[\frac{2t+1}{p}\right]+1)$$

$$\because 一階導函數(g_{Cmax}(p) - g_{Lmax}(p))' = \left[\frac{2t}{p}\right]^2 + \left[\frac{2t}{p}\right] - \left[\frac{2t}{p-1}\right]^2 - \left[\frac{2t}{p-1}\right]$$

$$- \left[\frac{2t+1}{p+1}\right]^2 - \left[\frac{2t+1}{p+1}\right] + \left[\frac{2t+1}{p}\right]^2 + \left[\frac{2t+1}{p}\right]$$

二階導函數$(g_{Cmax}(p) - g_{Lmax}(p))'' = 0$

∴$g_{Cmax}(p) - g_{Lmax}(1)$的函數圖形為一條直線，所以要證明$g_{Cmax}(p) - g_{Lmax}(p)\geq 0$，

只要證明在將 p 的最大值及最小值代入時皆成立即可。

p 代表是一個圓或一條直線上的缺口，所以在 m=n=t 時，因為一個圓和一條直線最多都只能放入 2t 個缺口，所以 $2\leq p\leq 2t$，將 p=2 和 p=2t 代回原式：

$$g_{Cmax}(2) - g_{Lmax}(2) = 4t(2t-t) + 2t(t+1) - 2t(2t+1)$$

$$-(4t+2)(t-\left[\frac{2t+1}{3}\right]) - 3\left[\frac{2t+1}{3}\right](\left[\frac{2t+1}{3}\right]+1) + 2t(t+1)$$

$$= 4t\left[\frac{2t+1}{3}\right] - \left[\frac{2t+1}{3}\right] - 3\left[\frac{2t+1}{3}\right]^2$$

針對高斯記號討論：

(i)當 $t\equiv 0 \pmod 3$時，$\left[\frac{2t+1}{3}\right]=\frac{2t}{3}$，並且 t 最小從 3 開始。

$$g_{Cmax}(2) - g_{Lmax}(2) = 4t\left(\frac{2t}{3}\right) - \frac{2t}{3} - 3\left(\frac{2t}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}t^2 - \frac{2t}{3} \geq 10 \geq 0$$

(ii)當$t\equiv 1 \pmod 3$時，$\left[\frac{2t+1}{3}\right]=\frac{2t+1}{3}$，並且t最小從 1 開始。

$$g_{Cmax}(2) - g_{Lmax}(2) = 4t\left(\frac{2t+1}{3}\right) - \frac{2t+1}{3} - 3\left(\frac{2t+1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}t^2 - \frac{2t}{3} - \frac{2}{3} \geq 0$$

(iii)當 $t\equiv 2 \pmod 3$時，$\left[\frac{2t+1}{3}\right]=\frac{2t-1}{3}$，並且 t 最小從 2 開始。

$$g_{Cmax}(2) - g_{Lmax}(2) = 4t\left(\frac{2t-1}{3}\right) - \frac{2t-1}{3} - 3\left(\frac{2t-1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}t^2 - \frac{2t}{3} \geq 4 \geq 0$$

在p=2 的情況之下，均得$g_{Cmax}(2) - g_{Lmax}(2) \geq 0$ 。

當 p=2t 時，

$$\begin{aligned} g_{Cmax}(2t) - g_{Lmax}(2t) &= 4t(1-1)+ 2t(1+1) - (2t-1)(1+1) - (4t+2)(1-1) - (2t+1)(1+1) + 2t(1+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以對於所有的 $2\leq p\leq 2t$，$g_{Cmax}(p) - g_{Lmax}(p)\geq 0$，即$g_{Cmax}(p) \geq g_{Lmax}(p)$ 。 #

根據 $g_{Lmax}(p)\geq g_{Cmax}(p+1)$ 和 $g_{Cmax}(p)\geq g_{Lmax}(p)$，可將$g_{Cmax}$和$g_{Lmax}$的值由大到小排列：$\boxed{g_{Lmax}(2) \geq g_{Cmax}(3) \geq g_{Lmax}(3) \geq g_{Cmax}(4) \geq g_{Lmax}(4) \geq \ldots \geq g_{Cmax}(2t) \geq g_{Lmax}(2t)}$。

在 m = n = t 時，要使缺口影響有最大值，擺放缺口的交替性原則，即來自以上的排序。根據此一交替性，可得在給定m = n = t和總缺口數k時，f_{max}的值及策略爲以下分析：

(1)因爲交替性從k＞3t開始，所以若k＞3t，令 $k-3t=\left[\frac{k-3t}{t}\right]t+r$，

則$\left[\frac{k-3t}{t}\right]$代表在交替性開始後，歷經了多少個完整的週期：

(i)若$\left[\frac{k-3t}{t}\right]\equiv 0 \pmod 2$，則代表最後被〝完全〞消耗掉的一個週期是$g_{Cmax}\left(2+\frac{\left[\frac{k-3t}{t}\right]}{2}\right)$，

最後被消耗的是r個$g_{Lmax}\left(2+\frac{\left[\frac{k-3t}{t}\right]}{2}\right)$，所以$f_{max}$爲所有已被消耗掉的g值的總和。

$$f_{max}= t\times\sum_{i=1}^{1+\frac{\left[\frac{k-3t}{t}\right]}{2}} g_{Lmax}(i) + t\times\sum_{i=1}^{2+\frac{\left[\frac{k-3t}{t}\right]}{2}} g_{Cmax}(i) + r\times g_{Lmax}\left(2+\frac{\left[\frac{k-3t}{t}\right]}{2}\right)$$

(ii)若$\left[\frac{k-3t}{t}\right]\equiv 1 \pmod 2$，則代表最後被消耗〝完〞的是$g_{Lmax}\left(2+\frac{\left[\frac{k-3t}{t}\right]-1}{2}\right)$，

最後被消耗的是r個$g_{Cmax}\left(3+\frac{\left[\frac{k-3t}{t}\right]-1}{2}\right)$，所以$f_{max}$為所有已被消耗掉的g值的總和。

$$f_{max}= t\times\sum_{i=1}^{2+\frac{\left[\frac{k-3t}{t}\right]-1}{2}} g_{Lmax}(i) + t\times\sum_{i=1}^{2+\frac{\left[\frac{k-3t}{t}\right]-1}{2}} g_{Cmax}(i) + r\times g_{Cmax}\left(3+\frac{\left[\frac{k-3t}{t}\right]-1}{2}\right)$$

$$= t\times\sum_{i=1}^{2+\frac{\left[\frac{k-3t}{t}\right]-1}{2}}\left(g_{Lmax}(i)+g_{Cmax}(i)\right) + r\times g_{Cmax}\left(3+\frac{\left[\frac{k-3t}{t}\right]-1}{2}\right)$$

(2)若$k\le 3t$，則再分為 $k\le t$ ， $k=t+1$ ， $t+2\le k\le 3t$分開討論：

(i)若$k\le t$，則$x=0$，$y=k$，即所有的缺口都在直線上，所以 $f_{max}=t\times g_{Lmax}(1)$

(ii)若$k=t+1$，則$x=0$，$y=t+1$，所以 $f_{max}=t\times g_{Lmax}(1) + g_{Lmax}(2)$ 。

(iii)若 $t+2\le k\le 3t$ ，令$k-t-1=\left[\frac{k-t-1}{2}\right]\times 2+r$，則若$r=0$，$x=2+2\left[\frac{k-t-1}{2}\right]$，$y=t$，

所以$f_{max}=t\times g_{Lmax}(1) + \left(2+2\left[\frac{k-t-1}{2}\right]\right)\times g_{Cmax}(2)$。若$r=1$，$x=2+2\left[\frac{k-t-1}{2}\right]$，$y=t+1$，

所以$f_{max}=t\times g_{Lmax}(1) + \left(2+2\left[\frac{k-t-1}{2}\right]\right)\times g_{Cmax}(2) + g_{Lmax}(2)$ 。

2.m＞n

從m=n中缺口擺放有交替性的想法，嘗試在m＞n和m＜n中找到類似的規則，讓缺口的擺放策略能對所有的m、n適用，即一般化的策略。

從證明m=n中缺口的交替性時，可看出只要滿足$g_{Lmax}(p)\ge g_{Cmax}(p+1)$和$g_{Cmax}(p)\ge g_{Lmax}(p)$，即有交替性，所以我們從這兩個關係式下手。

(1) $g_{Lmax}(p)\ge g_{Cmax}(p+1)$

$$g_{Lmax}(p)=(4m+2)\left(\left[\frac{2m+1}{p}\right]-\left[\frac{2m+1}{p+1}\right]\right)+(p+1)\left[\frac{2m+1}{p+1}\right]\left(\left[\frac{2m+1}{p+1}\right]+1\right)-p\left[\frac{2m+1}{p}\right]\left(\left[\frac{2m+1}{p}\right]+1\right)$$

$$g_{Cmax}(p+1)=4n\left(\left[\frac{2n}{p}\right]-\left[\frac{2n}{p+1}\right]\right)+(p+1)\left[\frac{2n}{p+1}\right]\left(\left[\frac{2n}{p+1}\right]+1\right)-p\left[\frac{2n}{p}\right]\left(\left[\frac{2n}{p}\right]+1\right)$$

由於p的最小值代表交替性開始的起始點，但因無法確定m＞n何時開始有交替性，

先不限制p的範圍，即令 1≤p≤2n-1，將p=1 和p=2n-1 代進$g_{Lmax}(p) - g_{Cmax}(p+1)$中：

$$g_{Lmax}(1) - g_{Cmax}(2) = (4m+2)(m+1) + 2m(m+1) - (2m+1)(2m+2) - 4n(n) - 2n(n+1) + 2n(2n+1)$$
$$= 2m^2 - 2n^2 + 2m$$

因爲m＞n，所以$g_{Lmax}(1) - g_{Cmax}(2) = 2m^2 - 2n^2 + 2m > 0$

$$g_{Lmax}(2n-1) - g_{Cmax}(2n) = (4m+2)\left(\left[\frac{2m+1}{2n-1}\right]-\left[\frac{2m+1}{2n}\right]\right) + 2n\left[\frac{2m+1}{2n}\right]\left(\left[\frac{2m+1}{2n}\right]+1\right)$$
$$- (2n-1)\left[\frac{2m+1}{2n-1}\right]\left(\left[\frac{2m+1}{2n-1}\right]+1\right)$$

高斯記號使得$g_{Lmax}(2n-1) - g_{Cmax}(2n)$的正負不易判斷。

再看看另一個條件。

(2) $g_{Cmax}(p) \geq g_{Lmax}(p)$

1≤p≤2n，將p=1 和p= 2n代進$g_{Lmax}(p) - g_{Cmax}(p+1)$中：

$$g_{Lmax}(1) - g_{Cmax}(1) = (4m+2)(m+1) + 2m(m+1) - (2m+1)(2m+2)$$
$$= 2m^2 + 2m > 0$$

$$g_{Lmax}(2n) - g_{Cmax}(2n) = (4m+2)\left(\left[\frac{2m+1}{2n}\right]-\left[\frac{2m+1}{2n+1}\right]\right) + (2n+1)\left[\frac{2m+1}{2n+1}\right]\left(\left[\frac{2m+1}{2n+1}\right]+1\right)$$
$$- 2n\left[\frac{2m+1}{2n}\right]\left(\left[\frac{2m+1}{2n}\right]+1\right) - (2n-1)\left[\frac{2m+1}{2n-1}\right]\left(\left[\frac{2m+1}{2n-1}\right]+1\right)$$

同樣因爲高斯記號使得$g_{Lmax}(2n) - g_{Cmax}(2n)$的正負不易判斷。

因此，我們利用電腦代進一些數值觀察，發現其缺口擺放的策略並不依照交替性的規則，並且不同的(m,n)所出現的規則也不太一樣，因此在m＞n中的策略未能明確化。

3.m＜n

類似 m＞n 的作法，在兩個關係式中，我們也得到許多高斯記號，使得交替性難以證明存在；並且，我們利用電腦代進一些數值觀察，發現在 m＜n 中其缺口擺放的策略也不完全依照交替性的規則，且不同的(m,n)所出現的規則也不太一樣，因此 m＜n 的策略同樣未能明確化。

四、嘗試連結圖論和網路、電路領域是否有相關性的研究，是未來努力的目標之一。

五、階段性的工作已經完成，而圖像的製作藉由 GSP 及小畫家繪圖有所提昇。

六、將蜘蛛網推廣至正 n 邊形的所有對角線，產生新的結點，嘗試尋找、發現是否有新的性質和定理。

七、從【定理一】知道：給一個網 N(m,n,0,0)，則 S(m,n,0,0)=4mn(m+n)。

若給定 S’ ＜S，則是否存在缺口數(x，y)，使得 S(m,n,x,y)= S’ ，並討論有幾組(x,y)非負整數解，這是日後研究的未來展望。

捌、參考文獻

柯利弗德．皮寇弗，數學的異想世界，商周出版社，p21~23，2003 年

玖、附錄

在研究過程中我們寫了許多程式輔助觀察，以 g(m,1,0,y)爲例說明。

程式碼：

```
Private Sub Command1_Click()
'N(m,1,0,y)上，當要有 gmax 時的情形
m = Val(Text2.Text)

For k = 1 To 2 * m
c = Int((2 * m + 1) / k)
b = Int((2 * m + 1) / (k + 1))
G(k) = (4 * m + 2) * (c - b) + (k + 1) * b * (b + 1) - k * c * (c + 1)      '引理 5 之(1)
'G(k) = f(k) - f(k - 1)  ，爲 f(m,1,0,y)max 的變化量
Next k

For i = 1 To 45
Print "g("; m; ",1,0,"; i; ")="; G(i), "g("; m; ",1,0,"; i + 45; ")="; G(i + 45), "g("; m; ",1,0,"; i + 90;
")="; G(i + 90), "g("; m; ",1,0,"; i + 135; ")="; G(i + 135)
Next i

End Sub
Private Sub Command3_Click()
'N(1,n,x,0)上，當要有 gmax 時的情形
n = Val(Text1.Text)
'因爲圓的第一缺口無影響
G(1) = 0

For k = 2 To 2 * n
c = Int((2 * n) / k)
b = Int((2 * n) / (k - 1))
G(k) = 4 * n * (b - c) + k * c * (c + 1) - (k - 1) * b * (b + 1) '引理 4 之(1)
'G(k) = f(k) - f(k - 1)  ，爲 f(1,n,x,0)max 的變化量
Next k

For i = 1 To 45
Print "g(1,"; n; ","; i; ",0)="; G(i), "g(1,"; n; ","; i + 45; ",0)="; G(i + 45), "g(1,"; n; ","; i + 90;
```

```
",0)="; G(i + 90), "g(1,"; n; ","; i + 135; ",0)="; G(i + 135)
Next i

End Sub
```