# 台灣二ＯＯ五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：三角形之相似四分割

學　　校：高雄市立龍華國民中學

作　　者：郭瑾燁、劉映巧

# 作　者　簡　介


我是劉映巧，目前就讀龍華國中三年級資優班。我從小常常接觸一些數學遊戲，每當我有空閒的時間，我就會靜靜的坐在書桌前，思考破解問題的方式。就在一次次與數學接觸之下，我對數學產生了濃厚的興趣。

我很喜歡參加數學競賽，雖然有些題目較艱深，在比賽中沒辦法想出解答，但在比賽過後，我會上網設法找出比賽試題，拿去請教老師，直到找出問題的解答才肯罷手。

在這次的研究過程中，我得到了許多不一樣的學習經驗，希望以後還能有機會再對數學作進一步的研究與探討。

# 作　者　簡　介

我是郭瑾燁，目前就讀於高雄市龍華國中三年級資優班。

在我的學習歷程中，數學這一科，總是有優異的成績，或許就是這份小小的成就感，激起了我對數學的好奇及興趣，促使了這份作品的「誕生」，進而在資優班一屆一度的獨立研究發表會上，獲得數學老師的肯定。

很高興，也很感恩，能有機會參予這樣的比賽，讓我在各方面的學習都有很大的助益。

# 三角形之相似四分割

## 壹、摘要：

任意一個三角形要如何分割成四個彼此相似的組成三角形呢？我們透過嚴謹的數學推理，先對三角形作二、三分割的可能情形進行驗證，並藉由已完成相似二、三分割的三角形，運用「內分」和「外加」的觀念，使相似四分割的討論變得明快，並得以將各式三角形的所有相似四分割的圖示作完整而有系統的呈現。

我們也對「比例四分割」的作圖法與其相關幾何性質，進行猜想與討論，並驗證得出一些結果。尤其對「黃金三角形」經比例四分割後，組成三角形之對應邊長的比值也是「黃金值」，以及使用五條摺痕線的摺紙方式，可以摺出一張黃金三角形紙張的比例四分割，這些研究結果都令我們感到獲益良多。

*Four Similar Divisions from A Triangle*

How to divide a triangle into four similar little triangles？ Possible situations of dividing a triangle into two or three parts could be testified by strict mathematical inferences, and then the concepts of “internal division” and “external addition” could be applied to make our discussion clearly and briefly. With above discussions, figures about four similar divisions of all kinds of triangles could be presented completely and systematically.

Some results were come up after making some conjectures and discussions about the geometric constructions and geometric properties of “four proportional divisions”. We learn a lot by these researches especially on the discoveries that the ratio of those corresponding sides in each four similar triangles which form a golden triangle, is also golden ratio; and that we could divide a golden triangle into four similar triangles by using five folding lines.

## 貳、研究動機與目的：

若將任意三角形的三邊中點連接，就會得到四個全等三角形。那麼是否可將任意一個三角形分成四個彼此相似的組成三角形呢？如果可以的話，怎麼找出各式三角形之「相似四分割」的所有分割方式？以下就是本篇報告的研究目的：

一、使用嚴謹有效率的討論流程，確立各種三角形所有相似四分割的分割方式。

二、找出所有三角形「相似四分割」(包含「比例四分割」)的簡易作圖法。

三、探討並驗證「比例四分割」的相關幾何性質。

四、探討黃金三角形的「比例四分割」性質，並藉由較少摺痕線的摺紙程序，摺出黃金三角形紙張的「比例四分割」。

## 參、詞彙界定及說明：

一、相似 $n$ 分割：將一個三角形分割成 $n$ 個（$n>1$）組成三角形（不含原三角形），且 $n$ 個三角形均彼此相似。

二、點完全分割（線）：分割三角形時，若分割線段的一個端點為原三角形頂點，且另一個端點在此頂點的對邊，此分割線段稱「點完全分割線」，分割方式稱「點完全分割」。

三、點部分分割（線）：分割三角形時，若分割線段的一個端點為原三角形頂點，而分割線段的另一個端點在三角形的內部，此分割線段稱「點部分分割線」，分割方式稱「點部分分割」。

四、邊完全分割（線）：分割三角形時，若分割線段的兩個端點各在原三角形的不同兩個邊上（不含頂點），此分割線段稱「邊完全分割線」，分割方式稱「邊完全分割」。

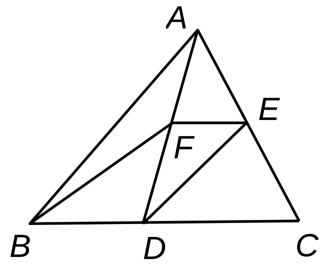
五、邊部分分割（線）：分割三角形時，若分割線段的一個端點在原三角形的一邊上（不含頂點），且另一個端點在此三角形的內部，此分割線段稱「邊部分分割線」，分割方式稱「邊部分分割」。

六、比例四分割：若用三條邊完全分割線可將一個三角形相似四分割(四個組成三角形並未全部全等的情形)，則四個組成三角形的面積會成比例，我們特別稱此種相似四分割為「比例四分割」。

七、外加法：在一個完成相似分割的三角形外部，附加更多三角形，使最大三角形的組成三角形皆彼此相似的思考做法。

八、內分法：在一個完成相似分割的三角形內部，細分出更多三角形，使最大三角形的組成三角形皆彼此相似的思考做法。

九、以上二~五的說明如下圖:




1. $\overline{AD}$ ：點完全分割線。
2. $\overline{BF}$ ：點部分分割線。
3. $\overline{DE}$ ：邊完全分割線。
4. $\overline{EF}$ ：邊部分分割線。

## 肆、研究過程：

一、相似四分割的預備定理證明：

(一)相似二分割：

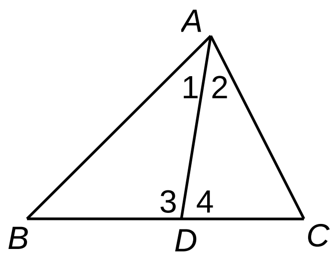
$\boxed{\text{定理 2-1}}$若一個三角形可以二分割成兩個相似三角形，則原三角形必爲等腰或直角三角形，且分割線必垂直原三角形之一邊。

【證明】(1)二分割只能作點完全分割。

(2)設 $\overline{AD}$ 爲點完全分割線，且 $\Delta ABD \sim \Delta ACD$

$\because \angle 3 > \angle 2, \angle 3 > \angle C \therefore \angle 3 = \angle 4$

$\Rightarrow \angle 3 = \angle 4 = 90° \quad \therefore \overline{AD} \perp \overline{BC}$




①若 $\angle B = \angle C \Rightarrow \Delta ABC$ 爲等腰三角形。

②若 $\angle B = \angle 2 \Rightarrow \angle 1 = \angle C \Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 90° \Rightarrow \Delta ABC$ 爲直角三角形。

(3)所以一個三角形可以相似二分割的情況有圖 2-1-2(等腰△)，圖 2-1-2(直角△）兩種：

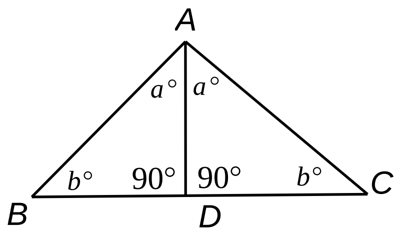



圖 2-1-1

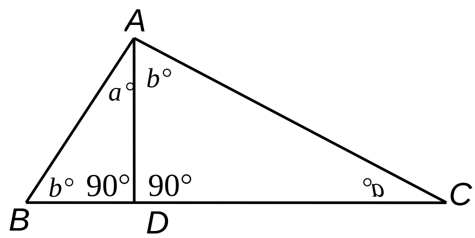



圖 2-1-2

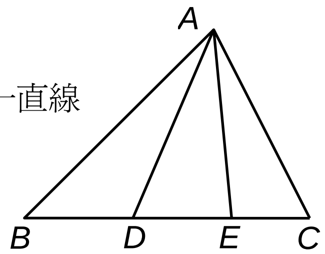
(二)相似三分割：

定理 3-1 任意三角形，不可能由同一頂點作兩次點完全分割而成三個相似三角形。

【證明】設 $\Delta ABD$ ，$\Delta ADE$ ，$\Delta AEC$ 相似，由定理 2-1 推得

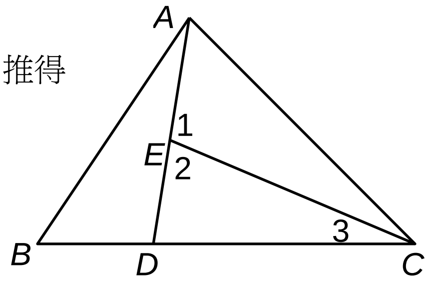
$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，$\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ，但此與過線外一點恰可作唯一直線

垂直已知直線的事實不合，故此定理成立。




定理 3-1 之推廣 任意三角形，不可能由同一頂點作 $n$ 次（$n>1$）點完全分割而成 $(n+1)$ 個相似三角形。

定理 3-2 任意三角形，由其中一個頂點作一次點完全分割，再由另一個頂點作一次的點部分分割，不可能成爲三個相似三角形。




【證明】設 $\Delta ABD$ ，$\Delta CDE$ ，$\Delta AEC$ 相似，由定理 2-1 推得

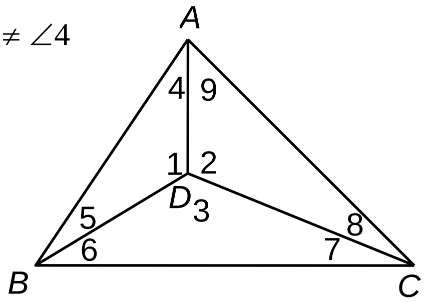
$\angle 1=\angle 2=90^\circ$ ，但 $\angle ADB=\angle 2+\angle 3>90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ADB$ 必與 $\Delta ACE$ 及 $\Delta CDE$ 不相似，

故此定理成立。

定理 3-3 若一個三角形，可由三個頂點各作一次點部分分割而成三個相似三角形，則原三角形必爲正三角形，且分割成之三個相似三角形皆爲三內角度數爲 $30^\circ-30^\circ-120^\circ$ 的全等三角形。

【證明】若 $\Delta ABD$ ，$\Delta BCD$ ，$\Delta ACD$ 相似




$\because \angle 3=\angle 5+\angle 4+\angle 9+\angle 8 \quad \therefore \angle 3\neq\angle 5$ ，$\angle 3\neq\angle 4$

$\angle 3\neq\angle 9$ ，$\angle 3\neq\angle 8 \quad \Rightarrow \angle 3=\angle 1$ 且 $\angle 3=\angle 2$

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3=120^\circ$

(1)假設 $\angle 4\neq\angle 9 \quad \Rightarrow \angle 4=\angle 8$

①若 $\angle 7=\angle 4=\angle 8 \Rightarrow \Delta ACD\cong\Delta BCD$

$\Rightarrow \overline{AD}=\overline{BD} \Rightarrow \angle 4=\angle 5=30^\circ \Rightarrow \angle 8=\angle 9=30^\circ$

$\therefore \angle 4=\angle 9$ (不合)。

②若 $\angle 6=\angle 4=\angle 8 \Rightarrow \angle 5=\angle 7=\angle 9$

由相似形之對應邊成比例 $\Rightarrow \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}}{\overline{BD}+\overline{CD}+\overline{AD}}=1$

$\Rightarrow \overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD} \Rightarrow \angle 4=\angle 5=\angle 6=\angle 7=\angle 8=\angle 9=30^\circ$ (不合)

由①，②推得 $\angle 4 \neq \angle 9$ 不成立。

(2)由(1)$\Rightarrow$若 $\angle 4 = \angle 9 \Rightarrow \Delta ADB \cong \Delta ADC \Rightarrow \overline{BD} = \overline{CD} \Rightarrow \angle 6 = \angle 7 = 30°$

$\therefore \angle 4 = \angle 5 = \angle 8 = \angle 9 = 30° \therefore \Delta ABC$ 爲正三角形。

由(1)，(2)證得本定理成立。

(3)若一個三角形，可由三個頂點各作一次點部分分割而分成三個相似三角形，則此三角形與其分割方式必爲圖 3-3-1。

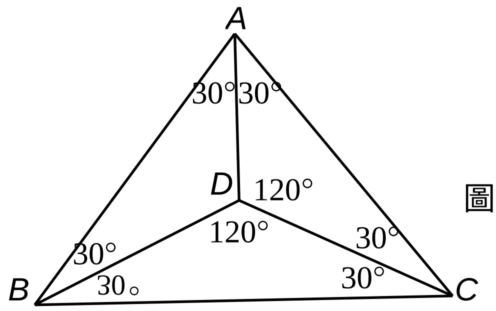
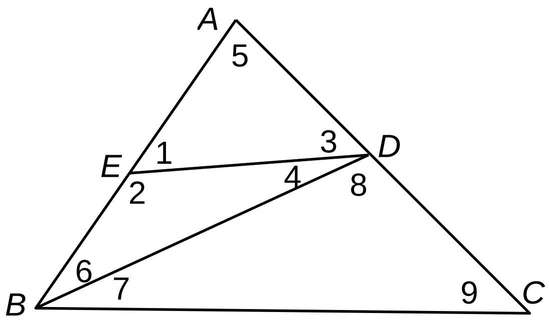


圖 3-3-1

$\boxed{\text{定理 3-4}}$若一個三角形，作一次點完全分割與一次邊完全分割，可分割成三個相似三角形，則原三角形之種類與其分割方式，共計有圖 3-4-1，圖 3-4-2，圖 3-4-4，圖 3-4-5 四種情形。(圖 3-4-3 的分割方式包含於圖 3-4-5)

【證明】若 $\Delta AED$ ，$\Delta BDE$ ，$\Delta BCD$ 相似，由定理 2-1 推得 $\angle 1 = \angle 2 = 90°$




(1) $\angle 3 = \angle 4$ ，$\angle 5 = \angle 6$ 的情況：

①若 $\angle 8 = \angle 3 = \angle 4$

$\Rightarrow \angle 8 = \angle 3 = \angle 4 = 60°$

$\Rightarrow \angle 5 = \angle 6 = 30°$

其情況又有

圖 3-4-1( $30° - 60° - 90°$ 直角△)和

圖 3-4-2( $30° - 30° 120°$ 等腰△)兩種分割方式：

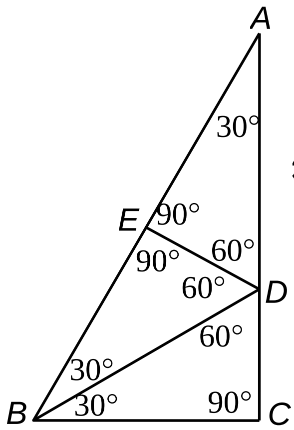


圖 3-4-1

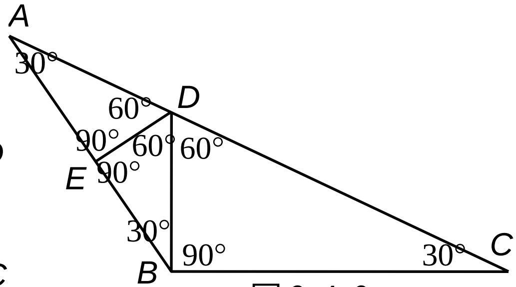


圖 3-4-2

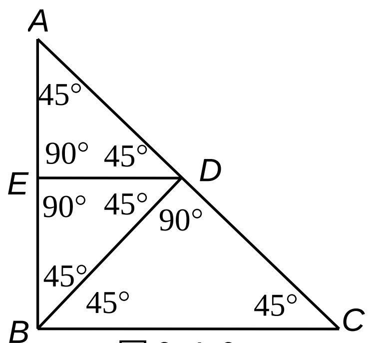


圖 3-4-3

②若$\angle 8 \neq \angle 4$ $\because \angle 8 > \angle 6$ $\therefore \angle 8 = \angle 2 = 90°$ $\Rightarrow$只有上圖3-4-3等腰直角三角形這種分割方式(此情況也將包含於以下所討論之圖3-4-5)。

(2) $\angle 3 = \angle 6$，$\angle 4 = \angle 5$即$\angle ADB = 90°$的情況$\Rightarrow \angle 8 = 90°$其情況分爲兩種：

①圖3-4-4：$\angle 7 = \angle 6$，$\angle 9 = \angle 4$的情形(等腰三角形)。

②圖3-4-5：$\angle 7 = \angle 4$，$\angle 9 = \angle 6$的情形(直角三角形)。

(圖3-4-4和3-4-5實際分割時，可以是$\overline{DE} \perp \overline{AB}$或$\overline{DE} \perp \overline{BC}$)

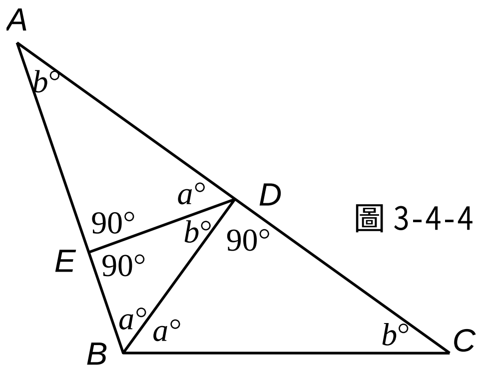



圖3-4-4

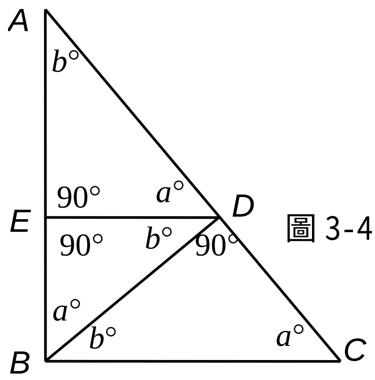



圖3-4-5

二、相似四分割的相關定理與作圖證明：

以下定理4-1~定理4-7，主要針對無點完全分割線的分割方式進行討論：

$\boxed{\text{定理 4-1}}$若一個三角形被四條點部分分割線分成四個組成三角形，則不可能分割成四個相似△。

【證明】若△$ABE$，△$ADE$，△$ACD$，△$BCD$相似

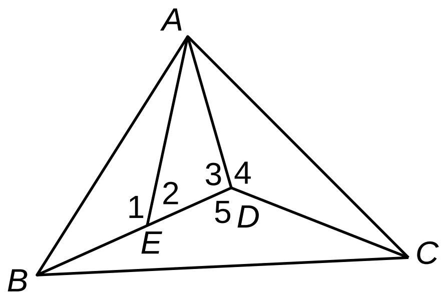
由定理2-1$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = \angle 90°$

$\Rightarrow \angle 3 < \angle 90°$ $\because \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360°$

$\Rightarrow \angle 4$，$\angle 5$皆爲鈍角

$\therefore$△$ACD$，△$BCD$爲鈍角△

故與△$ABE$，△$ADE$爲直角三角形必不相似，故此定理成立。




$\boxed{\text{定理 4-2}}$若一個三角形有三條點部分分割線與一條邊部分分割線，則不可能分割成四個相似三角形。

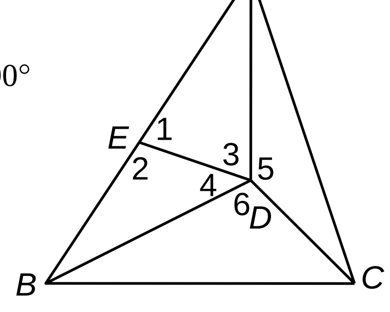
【證明】若△$ADE$，△$BDE$，△$ACD$，△$BCD$相似，

由定理2-1$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = 90°$ $\therefore \angle 3 < 90°$，$\angle 4 < 90°$

$\Rightarrow \angle 3 + \angle 4 < 180$ 但$\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360°$

$\therefore \angle 5 + \angle 6 > 180° \Rightarrow \angle 5$，$\angle 6$至少有一個鈍角

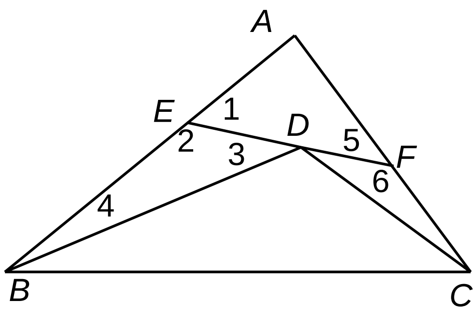
$\therefore$△$ACD$與△$BCD$中至少有一個鈍角△，而



這一個三角形必與直角△不相似，故此定理成立。

定理 4-3 若一個三角形有兩條點部分分割線，與一條邊完全分割線，則不可能分割成四個相似三角形。

【證明】若△$AEF$，△$BDE$，△$BCD$，△$DCF$相似，




$\because \angle 1 = \angle 3 + \angle 4 \Rightarrow \angle 1 > \angle 3$ ，$\angle 1 > \angle 4$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$　　又$\because \angle 1 + \angle 2 = 180°$

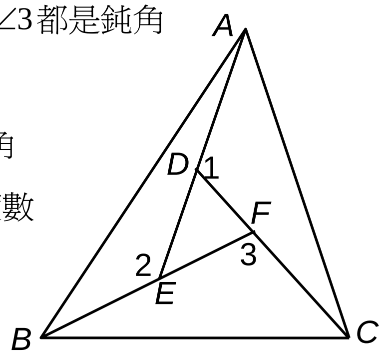
$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = 90°$

同理$\angle 5 = \angle 6 = 90°$

$\therefore \angle 1 + \angle 5 = 180°$ 與三角形內角和等於$180°$的性質不合，故此定理成立。

定理 4-4 若一個三角形只有三條點部分分割線，則不可能分割成四個相似三角形。

【證明】(1)若$\Delta DEF$ 的三內角都是銳角，則$\angle 1$ ，$\angle 2$ ，$\angle 3$都是鈍角




$\Rightarrow$四個組成三角形不可能全部都相似。

(2)若令$\Delta DEF$ 的三內角中的$\angle EDF$ 爲直角或鈍角

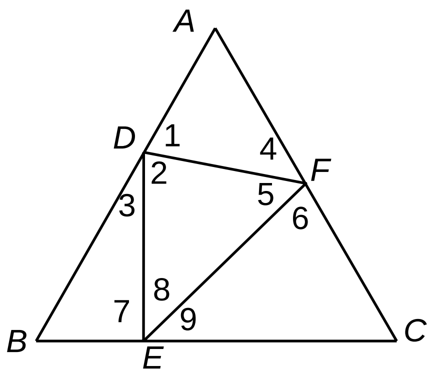
則$\angle 2$ ，$\angle 3$都是鈍角，且不等於$\angle EDF$ 的度數

$\Rightarrow$四個組成三角形不可能全部都相似。

(3)由(1)，(2)推得本定理成立。

定理 4-5 若一個三角形作三條邊完全分割線，且三條分割線皆不與原三角形的各邊平行，則無法作成相似四分割。

【證明】我們分三種情形討論：




(1)正△： $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

$\because \overline{DF}$ 不平行於$\overline{BC}$ ，$\overline{DE}$ 不平行於$\overline{AC}$ ，

$\overline{EF}$ 不平行$\overline{AB}$　　$\therefore \angle 1 \neq \angle 4 \neq 60°$

若△$ADF$，△$DEF$，△$BDE$，△$CEF$相似，

則$\angle 2$ ，$\angle 5$ ，$\angle 8$恰有一個角等於$60°$ 。

設$\angle 2 = 60°$　　$\because \angle 1 \neq \angle 5$　　$\therefore \angle 4 = \angle 5$

又$\angle 9 \neq \angle 5$　　$\therefore \angle 6 = \angle 5$

$\therefore \angle 4 = \angle 5 = \angle 6 = 60°$ (不合) ，推得四個三角形必不相似。

也就是說正△的情況時，此定理成立。

(2)等腰△： $\angle B = \angle C \neq \angle A$

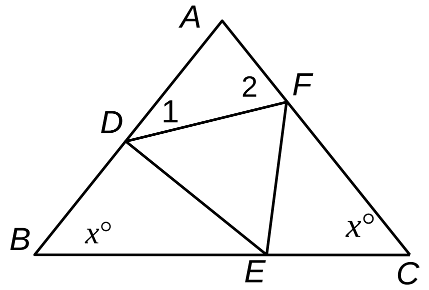
設$\angle B = \angle C = x°$

$\because \overline{DF}$ 不平行於 $\overline{BC}$ $\therefore \angle 1 \neq \angle 2 \neq x°$

$\because \angle A \neq x°$ $\therefore \triangle ADF$沒有一個角等於 $x°$

即$\triangle ADF$與$\triangle BDE$必不相似，

結果符合定理推論。




(3)$\triangle ABC$三內角均不相等：$\angle A \neq \angle B \neq \angle C \neq \angle A$

設 $\angle A = a°$ ，$\angle B = b°$ ，$\angle C = c°$ ，且 $a \neq b \neq c \neq a$

若$\triangle ADF$、$\triangle DEF$、$\triangle BDE$、$\triangle CEF$相似，則此四個三角形的三內角度數均為 $a°$ 、$b°$ 、$c°$ 。由 $\overline{DF}$ 不平行於 $\overline{BC} \Rightarrow \angle 1 = c^0$ ，$\angle 4 = b^0$

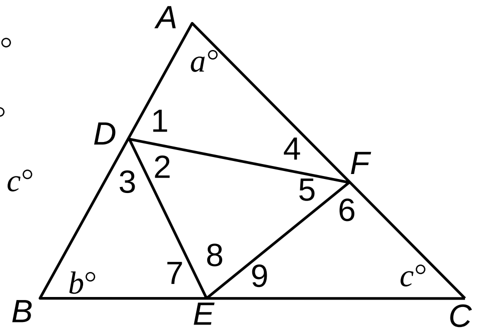
由 $\overline{DE}$ 不平行於 $\overline{AC} \Rightarrow \angle 3 = c^0$ ，$\angle 7 = a°$

由 $\overline{EF}$ 不平行於 $\overline{AB} \Rightarrow \angle 6 = b°$ ，$\angle 9 = a°$

$\because \angle 2 \neq \angle 4 = b°$ ，$\angle 2 \neq \angle 7 = a°$ $\therefore \angle 2 = c°$

$\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ $\Rightarrow 3c° = 180°$

$\Rightarrow c° = 60° \Rightarrow \angle 2 = 60°$




同理 $\angle 5 = b°$ ，$\angle 8 = a° \Rightarrow b° = 60°$ ，$c° = 60°$

此結果與事實不合 $\therefore$必不相似。

(4)由(1)，(2)，(3)討論，可推得本定理成立。

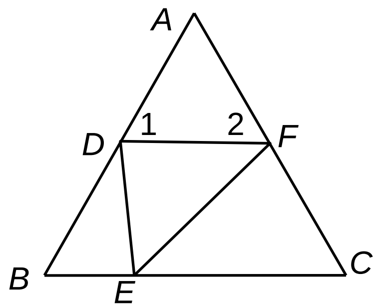
$\boxed{\text{定理 4-6}}$若一個三角形作三條邊完全分割線，且三條線中只有一條與一邊平行，另兩條線皆不與邊平行，則無法作成相似四分割。

【證明】我們分三種情形討論：

(1)正$\triangle$：$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

且 $\overline{DF} \;/\!/\; \overline{BC}$ ，$\overline{DE}$ 不平行於 $\overline{AC}$ ，

$\overline{EF}$ 不平行於 $\overline{AB} \Rightarrow \angle 1 = \angle 60°$




則$\triangle ADF$為正$\triangle$，但$\triangle BDE$不為正$\triangle$$\therefore$必不相似。

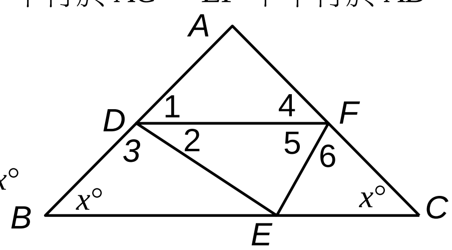
(2)等腰$\triangle$：

① $\angle B = \angle C \neq \angle A$，且 $\overline{DF} \;/\!/\; \overline{BC}$ ，$\overline{DE}$ 不平行於 $\overline{AC}$ ，$\overline{EF}$ 不平行於 $\overline{AB}$ 。

設 $\angle 1 = \angle 4 = \angle B = \angle C = x°$ $\therefore \angle 3 = x°$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 6 = x°$ $\therefore \angle 2 = \angle 5$

$\because$四個組成三角形相似 $\therefore \angle 2 = \angle 5 = x°$

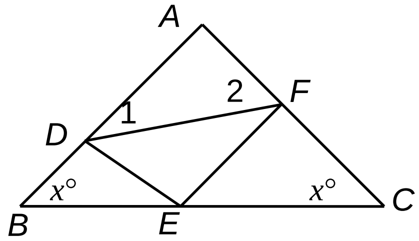


$\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 3x° = 180°$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 60°$

$\Rightarrow \angle 2 = \angle 5 = 60°$（不合） $\therefore$必不相似。

②若$\angle B = \angle C \neq \angle A$，且$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$，



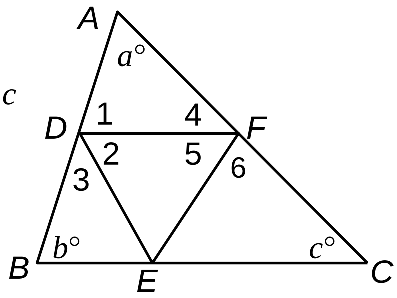

$\overline{DF}$不平行於$\overline{BC}$，$\overline{DE}$不平行於$\overline{AC}$

$\because \angle 1 \neq x°$，$\angle 2 \neq x°$ $\therefore \angle A = x°$

$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C$（不合）

$\therefore$必不相似。

(3)$\triangle ABC$三內角均不相等：$\because \angle A \neq \angle B \neq \angle C$




設$\angle A = a°$，$\angle B = b°$，$\angle C = c°$，且$a \neq b \neq c$

若$\overline{DF} \parallel \overline{BC}$，$\overline{DE}$不平行於$\overline{AC}$，

$\overline{EF}$不平行於$\overline{AB}$，

設$\angle 1 = \angle B = b°$，$\angle 4 = \angle C = c°$

若$\triangle ADF$、$\triangle DEF$、$\triangle BDE$、$\triangle CEF$相似，則此四個相似△的三內角必為$a°$、$b°$、$c°$ $\because \overline{DE}$不平行於$\overline{AC}$ $\therefore \angle 3 = c°$，又$\angle 1 = b° \Rightarrow \angle 2 = a°$

又$\overline{EF}$不平行於$\overline{AB}$ $\therefore \angle 6 = b°$，又$\angle 4 = c° \Rightarrow \angle 5 = a° \Rightarrow \angle 2 = \angle 5$

$\therefore \triangle DEF$為等腰$\triangle \Rightarrow \triangle DEF$與$\triangle ADF$必不相似。

(4)由(1)、(2)、(3)推得本定理成立。

定理 4-7 對不等邊$\Delta ABC$而言($\angle A \neq \angle B \neq \angle C \neq \angle A$)作三條邊完全分割線，且其中兩條與原三角形的邊平行，而另一條與原三角形的邊不平行，這種相似四分割的可能分割方式有以下三種：

(1) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$，$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$，$\overline{DF}$不平行於$\overline{BC}$。(如圖 4-7-1)

(2) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$，$\overline{DF} \parallel \overline{BC}$，$\overline{EF}$不平行於$\overline{AB}$。(如圖 4-7-2)

(3) $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$，$\overline{DF} \parallel \overline{BC}$，$\overline{DE}$不平行於$\overline{AC}$。(如圖 4-7-3)

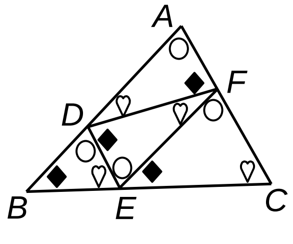



圖 4-7-1

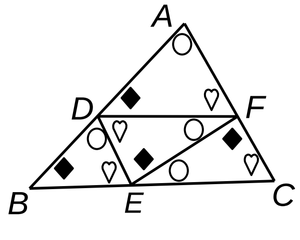



圖 4-7-2

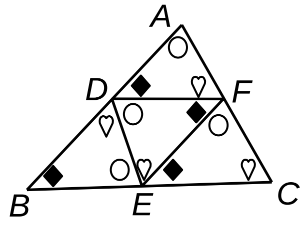
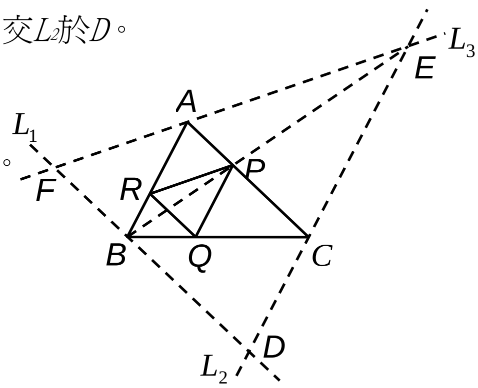



圖 4-7-3

以上這種相似四分割的方式，由於四個組成三角形的面積中，有兩個會相等，而且是另外兩個一大一小的三角形面積的比例中項（將在後文中加以證明)。爲了便於說明起見，我們特別將這種相似四分割的分割方式，稱爲「比例四分割」，由於研究發現，一般的相似四分割的尺規作圖其實很容易(主要作中點或分角線或垂直線)，所以我們也試圖找到「比例四分割」的簡易尺規作圖法，同時探討「比例四分割」的幾何性質並給予證明。

三、比例四分割之尺規作圖：

(一)如何利用尺規完成一個不等邊三角形$\Delta ABC$之一種比例四分割的作圖法，經由我們不斷努力試驗，終於發現以下很簡單的第三或第四種作法。




【法一】(1)過$B$作$L_1 \parallel \overline{AC}$，過$C$作$L_2 \parallel \overline{AB}$，且$L_1$交$L_2$於$D$。

(2)過$A$作$L_3$分別交$L_2$於$E$，交$L_1$於$F$，

且使$\angle EAC = \angle ABC \Rightarrow \angle FAB = \angle ACB$。

(3)連$\overline{BE}$交$\overline{AC}$於$P$。

(4)作$\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$交$\overline{BC}$於$Q$。

(5)作$\overline{QR} \parallel \overline{AC}$交$\overline{AB}$於$R$。

(6)連$\overline{PR}$。(7) $\Delta ARP$，$\Delta RQB$，$\Delta PCQ$，$\Delta QPR$爲相似△。

【證明】$\because \overline{PQ} \parallel \overline{AB}$，$\overline{QR} \parallel \overline{AC}$ $\therefore \dfrac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \dfrac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} = \dfrac{\overline{BR}}{\overline{AR}}$ 又$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle CEP \Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{EP}}$ $\therefore \dfrac{\overline{BP}}{\overline{EP}} = \dfrac{\overline{BR}}{\overline{AR}} \Rightarrow \overline{PR} \parallel \overline{AE} \Rightarrow \overline{PR} \parallel \overline{EF}$

$\Rightarrow \Delta ARP$，$\Delta RQB$，$\Delta PCQ$，$\Delta QPR$的三個內角度數皆對應相等，故此四個三角形相似。

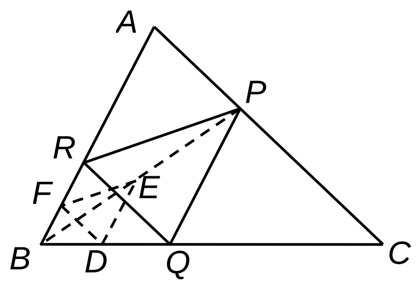
【法二】(1)作任一條直線$\overline{DF} // \overline{AC}$，且分別交$\overline{BC}$，$\overline{AB}$於$D$，$F$。

(2)過$D$作$\overleftrightarrow{DE} // \overline{AB}$，過$F$作$\overleftrightarrow{FE}$，並使$\angle AFE = \angle C$，令$\overleftrightarrow{DE}$和$\overleftrightarrow{FE}$相交於$E$。

(3)作$\overleftrightarrow{BE}$交$\overline{AC}$於$P$

(4)作$\overline{PQ} // \overline{AB}$，且$\overline{PQ}$交$\overline{BC}$於$Q$。

(5)作$\overline{QR} // \overline{AC}$，且$\overline{QR}$交$\overline{AB}$於$R$。



(6)連$\overline{PR}$。

(7) $\Delta ARP$，$\Delta RQB$，$\Delta PCQ$，$\Delta QPR$即爲所求。

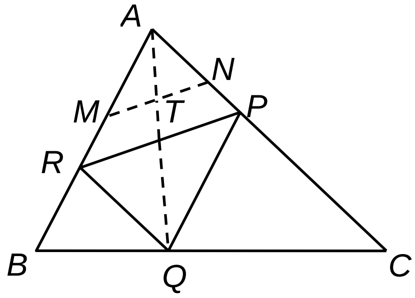
【證明】$\because \overline{PQ} // \overline{AB} // \overline{DE}$　　$\therefore \overline{BD}:\overline{DQ}=\overline{BE}:\overline{EP}$ ……①

又$\overline{QR} // \overline{AC} // \overline{DF}$　　$\therefore \overline{BD}:\overline{DQ}=\overline{BF}:\overline{FR}$ ……②

由①、②$\Rightarrow \overline{BE}:\overline{EP}=\overline{BF}:\overline{FR} \Rightarrow \overline{EF} // \overline{PR}$

$\therefore \angle ARP=\angle AFE=\angle C \Rightarrow \Delta ARP$，$\Delta RQB$，$\Delta PCQ$，$\Delta QPR$的三個內角對應相等，故四個三角形相似。

【法三】(1)作$\angle AMN=\angle ACB$，$M$，$N$分別在$\overline{AB},\overline{AC}$上。



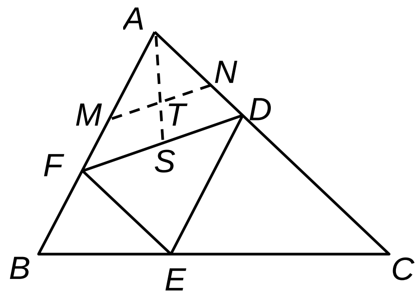

(2)取$\overline{MN}$中點$T$。　(3)作$\overleftrightarrow{AT}$交$\overline{BC}$於$Q$。

(4)作$\overline{QP} // \overline{AB}$交$\overline{AC}$於$P$。

(5)在$\overline{AB}$上取一點$R$，使$\overline{AR}=\overline{PQ}$

(6)連$\overline{PR}$、$\overline{RQ}$，則$\Delta ARP$，$\Delta RQB$，$\Delta PCQ$，$\Delta QPR$即爲所求。

【證明】假設$\overline{DE} // \overline{AB}$，$\overline{EF} // \overline{AC}$，$\overline{FD}$不平行於$\overline{BC}$，且$\overline{DE}$，$\overline{EF}$，$\overline{DF}$將$\Delta ABC$相似四分割，令$\overleftrightarrow{AT}$交$\overline{FD}$於$S$。




$\because \overline{MT}=\overline{TN}$，$\overline{MN} // \overline{FD}$

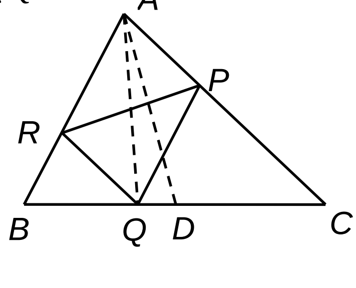
$\Rightarrow \overline{MT}:\overline{FS}=\overline{AT}:\overline{AS}=\overline{TN}:\overline{SD}$

$\Rightarrow \overline{FS}=\overline{SD}$

也就是說$\overleftrightarrow{AT}$與$\overleftrightarrow{AE}$是同一條直線，故作法成立。

【法四】(1)令$\angle BAD>\angle CAD$(不失一般性)，取$\overline{BC}$中點$D$，連$\overline{AD}$。

(2)作$\angle BAQ$，使$\angle BAQ=\angle CAD$，且$\overrightarrow{AQ}$交$\overline{BC}$於$Q$。




(3)作$\overline{QP} // \overline{AB}$交$\overline{AC}$於$P$。

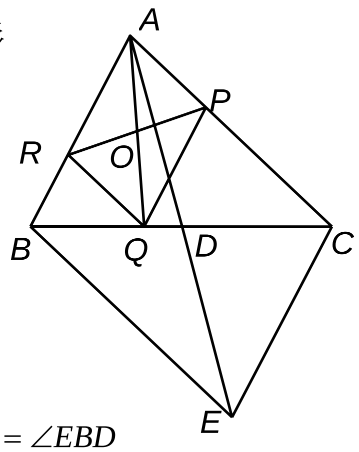
(4)在$\overline{AB}$上取$R$，使$\overline{AR}=\overline{PQ}$。

(5)連 $\overline{RQ}$ ， $\overline{PR}$ ，則 $\Delta ARP$ ， $\Delta RQB$ ， $\Delta PCQ$ ， $\Delta QPR$ 即爲所求。

【證明】(1)延長 $\overrightarrow{AD}$ ，在 $\overrightarrow{AD}$ 上取一點 $E$ ，使得 $\overline{DE}=\overline{AD}$ 。

(2)連 $\overline{BE}$ ， $\overline{EC}$ ，令 $\overline{AQ}$ ， $\overline{PR}$ 交於 $O$ 。

(3) $\because\ \overline{BD}=\overline{CD}$ ， $\overline{AD}=\overline{DE}$ $\therefore ABEC$ 爲平行四邊形




$\Rightarrow \angle AEB=\angle CAD=\angle BAQ$ 　又 $\overline{QR}\,//\,\overline{AC}\,//\,\overline{BE}$

$\therefore \angle ABE=\angle ARQ \Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta QRA$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AQ}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{AR}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\overline{AE}}{\frac{1}{2}\overline{AQ}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{AR}} \Rightarrow \frac{\overline{DE}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{AR}}$$

又 $\angle BED=\angle RAO$ 　$\therefore \Delta BDE \sim \Delta ROA$ $\Rightarrow \angle ARP=\angle EBD$

$\because \angle EBD=\angle ACB$ $\therefore \angle ARP=\angle ACB \Rightarrow \Delta ARP \sim \Delta ACB$

得證： $\Delta ARP \sim \Delta RQB \sim \Delta PCQ \sim \Delta QPR$ 。

(二)由定理 4-7 以及比例四分割的尺規作圖，容易推論得知：

1.原三角形爲不等邊三角形，則比例四分割有三種不同的分割方式。

2.原三角形爲一般的等腰三角形，則比例四分割的分割方式有兩種(對任何已畫定位置的三角形，只要分割線的位置不同，就視爲不同的分割方式)。

3.原三角形爲正三角形，並不存在比例四分割的相似分割作法。

$\boxed{\text{定理 4-8}}$ 作任意三角形的三條邊完全分割線，若此三條分割線與三角形的三邊皆分別平行，則分割出的四個組成三角形必全等。

【證明】若 $D$，$E$，$F$ 爲中點，則 $\overline{DF}\ //\ \overline{BC}$ ，$\overline{DE}\ //\ \overline{AC}$ ，$\overline{EF}\ //\ \overline{AB} \Rightarrow$ △$ADF$，△$BDE$，△$CEF$，△$DEF$ 爲全等△。

如圖 4-8-1，假設將 $\overleftrightarrow{DF}$ 向 $\overline{BC}$ 平移成 $\overleftrightarrow{D'F'}$，$\overleftrightarrow{DE}$ 平移成 $\overleftrightarrow{D'E'}$，且 $\overline{D'F'}\ //\ \overline{BC}$ ，$\overline{D'E'}\ //\ \overline{AC}$ ，連 $\overline{E'F'}$ 。由圖可看出 $\overline{EF}$ 與 $\overline{E'F'}$ 交於 $P$ ，但過 $P$ 僅有一條直線 $\overleftrightarrow{EF}$ 平行 $\overline{AB}$ ，故 $\overline{E'F'}$ 不平行於 $\overline{AB}$ 。由此可推論得知：任意三角形作三條邊完全分割線分別與原三角形的三邊平行，此相似四分割必爲全等四分割。

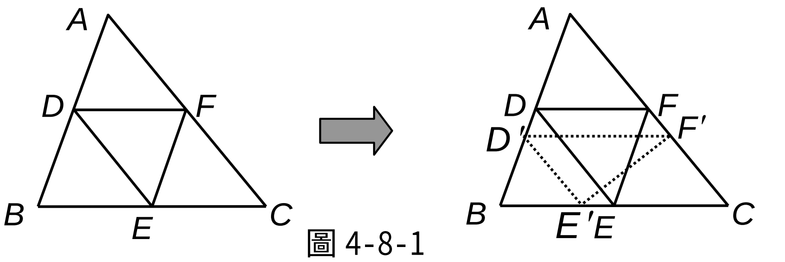



圖 4-8-1

四、比例四分割的相關幾何性質及其證明：

定理 5-1 如圖 5-1-1 之 $\Delta ABC$ 中，$\overline{PQ} // \overline{AB}$，$\overline{RQ} // \overline{AC}$，$\overline{PR}$ 不平行於 $\overline{BC}$，且 $\overline{PQ}$，$\overline{RQ}$，$\overline{PR}$ 使 $\Delta ABC$ 比例四分割。令 $\Delta BRQ$ 面積爲 $X$，$\Delta APR$ 面積爲 $Y$，$\Delta PCQ$ 面積爲 $Z$，則(1) $\overline{PR}^2 = \overline{BQ} \times \overline{CQ}$　(2) $Y^2 = XZ$　(3) $\Delta ABC$ 面積 $= (\sqrt{X} + \sqrt{Z})^2$

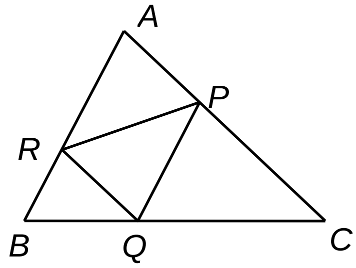


圖 5-1-1

【證明】(1)由 $\Delta QPR \sim \Delta RQB \Rightarrow \overline{PR} : \overline{BQ} = \overline{PQ} : \overline{RQ} \cdots\cdots$①

由 $\Delta PCQ \sim \Delta QPR \Rightarrow \overline{PQ} : \overline{QR} = \overline{CQ} : \overline{PR} \cdots\cdots$②

由①，② $\Rightarrow \overline{PR} : \overline{BQ} = \overline{CQ} : \overline{PR} \Rightarrow \overline{PR}^2 = \overline{BQ} \times \overline{CQ}$

(2) $\because X : Y = \overline{BQ}^2 : \overline{PR}^2$，$Y : Z = \overline{PR}^2 : \overline{CQ}^2$

又 $\overline{BQ} : \overline{PR} = \overline{PR} : \overline{CQ} \Rightarrow \overline{BQ}^2 : \overline{PR}^2 = \overline{PR}^2 : \overline{CQ}^2 \quad \therefore X : Y = Y : Z \Rightarrow Y^2 = XZ$

(3) $\Delta ABC$ 面積 $= X + 2Y + Z = X + 2\sqrt{XZ} + Z = (\sqrt{X} + \sqrt{Z})^2$

定理 5-2 $\Delta ABC$ 中，$\overline{PQ} // \overline{AB}$，$\overline{RQ} // \overline{AC}$，$\overline{PR}$ 不平行於 $\overline{BC}$，且 $\overline{PQ}$，$\overline{RQ}$，$\overline{PR}$ 使 $\Delta ABC$ 比例四分割，圓 $O_1$，圓 $O_2$，圓 $O_3$ 分別爲 $\Delta BRQ$，$\Delta APR$，$\Delta PCQ$ 的外接圓。則(1) $\overline{PR}$ 爲圓 $O_1$，圓 $O_3$ 的公切線(如圖 5-2-1)。 (2)設圓 $O_1$，圓 $O_3$ 相交於 $O$，$Q$ 兩點，則 $\overline{AQ}$、圓 $O_1$、圓 $O_2$、圓 $O_3$ 共點於 $O$ 點(如圖 5-2-2)。 (3)連 $\overline{O_1O_2}$，$\overline{O_1O_3}$，$\overline{O_2O_3}$，作 $\overleftrightarrow{O_2O}$ 交 $\overline{O_1O_3}$ 於 $Q_1$，作 $\overline{P_1Q_1} // \overline{O_1O_2}$，$\overline{Q_1R_1} // \overline{O_2O_3}$，連 $\overline{P_1R_1}$，則 $\overline{P_1Q_1}$，$\overline{Q_1R_1}$，$\overline{P_1R_1}$ 將 $\Delta O_1O_2O_3$ 比例四分割(如圖 5-2-3)。 (4)若圓 $O_4$，圓 $O_5$，圓 $O_6$ 分別爲 $\Delta R_1O_1Q_1$，$\Delta R_1O_2P_1$，$\Delta P_1O_3Q_1$ 的外接圓，則圓 $O_4$，圓 $O_5$，圓 $O_6$ 必交於點 $O$ (如圖 5-2-4)。

【證明】(1) $\because \angle RBQ = \dfrac{1}{2} RQ$ 弧的度數，又 $\angle PRQ = \angle RBQ \Rightarrow \angle PRQ = \dfrac{1}{2} RQ$ 弧的度數

$\therefore \overline{PR}$ 爲圓 $O_1$ 的切線。同理可證 $\overline{PR}$ 爲圓 $O_3$ 的切線，可推得 $\overline{PR}$ 爲圓 $O_1$ 與圓 $O_3$ 的公切線。

(2)連 $\overline{OA}$，$\overline{OP}$，$\overline{OQ}$，$\overline{OR}$

$\because (\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC) + (\angle POR + \angle ROQ + \angle POQ)$

$= 180° + 360° = 540°$

又 $\angle ABC + \angle ROQ = 180°$ ，

$\angle ACB + POQ = 180°$

$\therefore \angle BAC + \angle ROP = 180°$

$\Rightarrow$ 圓 $O_2$ 經過 $O$ 點

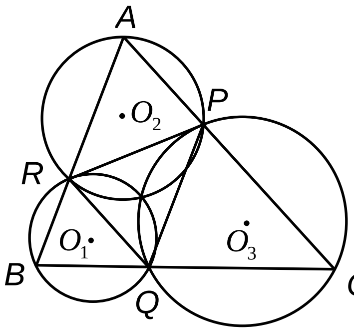


圖 5-2-1

$\because \angle AOR = \angle APR = \dfrac{1}{2} AR$ 弧度數。

又 $\angle APR = \angle ABQ$　　$\therefore \angle AOR = \angle ABQ$

$\because \angle ABQ + \angle ROQ = 180°$　　$\therefore \angle AOR + \angle ROQ = 180° \Rightarrow A$ ，$O$ ，$Q$ 三點共線。

得證：$\overline{AQ}$ ，圓 $O_1$ ，圓 $O_2$ ，圓 $O_3$ 共點於 $O$ 點。

(3) $\because$ 四邊形 $O_2RO_1O$ ，$OO_1QO_3$ 為鳶形

$\therefore \angle O_2O_1O = \dfrac{1}{2}\angle OO_1R$ ，

$\angle O_3O_1O = \dfrac{1}{2}\angle OO_1Q$

$\therefore \angle O_2O_1O_3 = \dfrac{1}{2}(\angle OO_1R + \angle OO_1Q)$

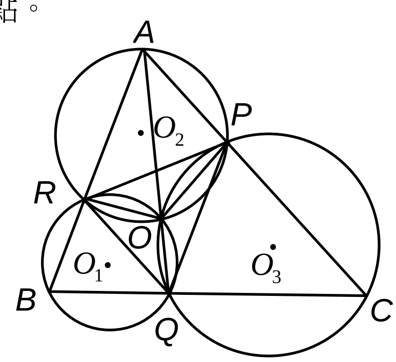


圖 5-2-2

$= \dfrac{1}{2}\angle RO_1Q = \angle RBQ$

同理可證：$\angle O_2O_3O_1 = \angle ACB$ ，

$\angle O_1O_2O_3 = \angle BAC$

$\therefore \Delta O_2O_1O_3 \sim \Delta ABC$

設 $\overline{O_2O_3}$ 交 $OP$ 弧於 $N$

$\Rightarrow \angle OAP = \dfrac{1}{2} PNO$ 弧的度數

又四邊形 $O_2OO_3P$ 為鳶形

$\therefore \angle OO_2N = ON$ 弧度數 $= \dfrac{1}{2} PNO$ 弧度數

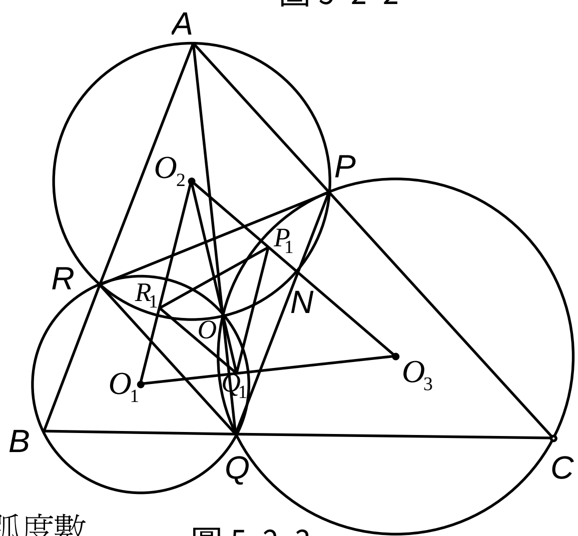


圖 5-2-3

$\Rightarrow \angle Q_1O_2O_3 = \angle OAP = \angle QAC$

$\therefore \overline{P_1Q_1}$ ，$\overline{Q_1R_1}$ ，$\overline{P_1R_1}$ 將 $\Delta O_1O_2O_3$ 比例四分割。

(4) $\because$ 四邊形 $OO_1QO_3$ 為鳶形　　$\therefore \overline{O_1O_3}$ 為 $\overline{OQ}$ 的中垂線

$\therefore \overline{Q_1O} = \overline{Q_1Q} \Rightarrow \Delta Q_1OQ$ 為等腰 $\Delta$

又 $\overline{O_2A} = \overline{O_2O} \Rightarrow \Delta O_2OA$ 為等腰 $\Delta$

$\because \angle O_2OA = \angle Q_1OQ$　　$\therefore \Delta O_2OA \sim \Delta Q_1OQ$

$\Rightarrow \overline{O_2O}:\overline{OQ_1}=\overline{AO}:\overline{OQ}$ ，故 $O$ 點爲兩相似 $\Delta ABC$ ，$\Delta O_2O_1O_3$ 的對應點。

$\therefore \Delta R_1O_1Q_1$ ，$\Delta O_2R_1P_1$ ，$\Delta P_1O_3Q_1$ 的外接圓 $O_4$ ，$O_5$ ，$O_6$ 必會交於點 $O$ 。

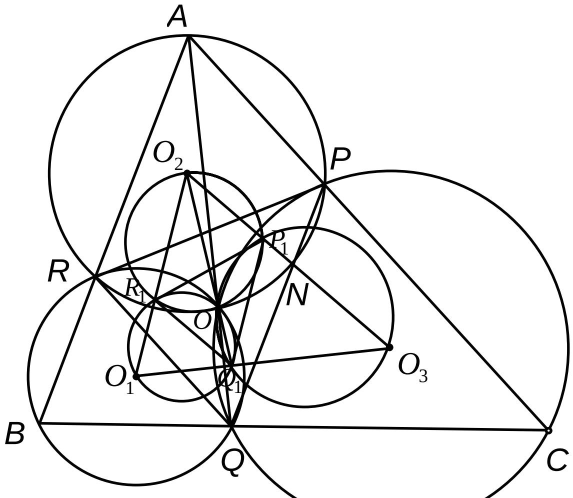
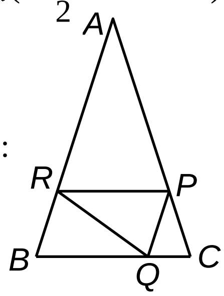


圖 5-2-4

五、黃金三角形之比例四分割：

(一)黃金三角形：頂角爲 $36°$ 的等腰三角形的底和腰之比等於黃金數( $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$ )；頂角爲 $108°$ 的等腰三角形的腰與底之比等於黃金數，我們把這兩種等腰三角形稱爲「黃金三角形」。




(二)黃金三角形的比例四分割性質(以 $36°-72°-72°$ 的三角形爲例)：

$\because \overline{PQ}:\overline{PR}=\overline{PR}:\overline{AR}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\therefore \Delta RPQ$ ，$\Delta ARP$ 兩個黃金三角形的對應邊長的比值爲 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ；同理可得 $\Delta PCQ$ ，$\Delta RPQ$ 兩個黃金三角形的對應邊長的比值也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

$\Rightarrow$ 黃金三角形經比例四分割後，三個不同大小的組成三角形，若將對應邊長由大到小排列，將成爲公比爲黃金數的等比數列。

(三)如何利用簡易的摺紙，找出將黃金三角形 $ABC$ 比例四分割的摺痕線：

1.三內角爲 $36°-72°-72°$ 的黃金三角形：

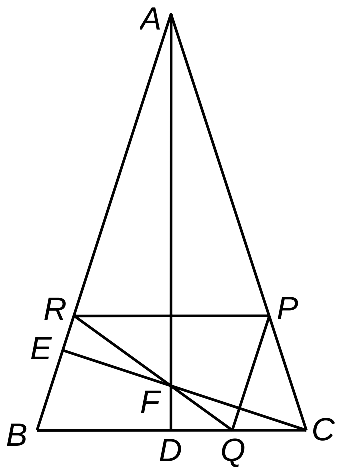
【作法】(1)作 $\overleftrightarrow{AD}\perp\overline{BC}$ ，交 $\overline{BC}$ 於 $D$ 。

(2)作 $\overline{CE}\perp\overline{AB}$ 交 $\overline{AB}$ 於 $E$ ，令 $\overline{CE}$ 交 $\overline{AD}$ 於 $F$ 。

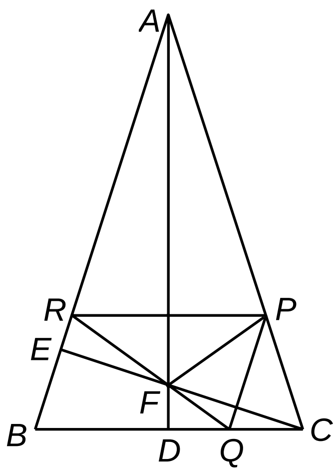
(3)作 $\overline{CF}$ 的中垂線 $\overleftrightarrow{PQ}$ ，而 $\overleftrightarrow{PQ}$ 分別交 $\overline{AC}$ ，$\overline{BC}$ 於 $P$ ，$Q$ 。

(4)作 $\overline{PR}//\overline{BC}$ 交 $\overline{AB}$ 於 $R$ 。

(5)連 $\overline{RQ}$ ，則 $\overline{PQ}$ ，$\overline{RQ}$ ，$\overline{PR}$ 比例四分割 $\Delta ABC$ 。



【證明】(1)連$\overline{FQ}$，$\overline{FR}$。




(2)$\because \overleftrightarrow{PQ}$為$\overline{CF}$的中垂線　$\therefore \angle QFP = \angle QCP = 72°$

(3)$\because \overline{CE} \perp \overline{AB}$　$\therefore \overline{PQ} // \overline{AB}$，又$\overline{PR} // \overline{BC}$

$\Rightarrow \angle CPQ = \angle CAB = 36° = \angle FPQ$

$\therefore \angle FPR = \angle CPR - \angle CPF = 108° - 72° = 36°$

(4)$\because \overline{AD}$為$\overline{PR}$的中垂線　$\therefore \overline{FR} = \overline{FP}$

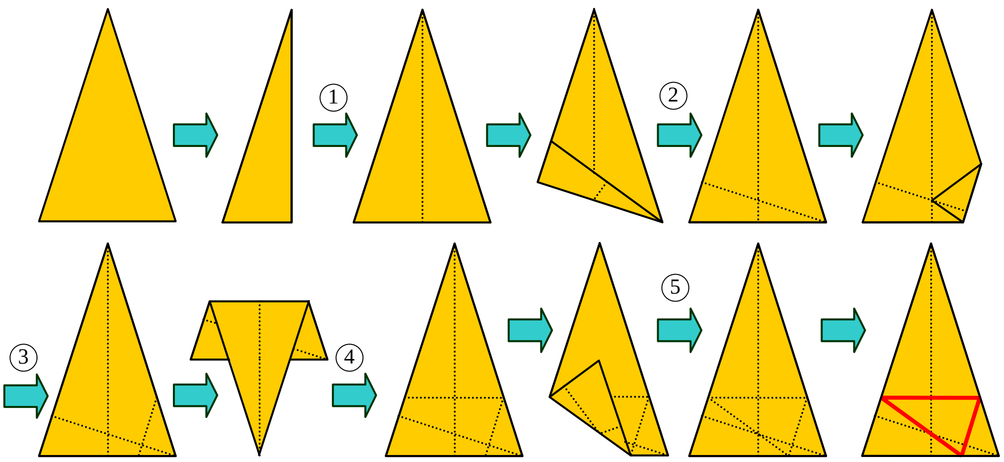
$\Rightarrow \angle FRP = \angle FPR = 36°$，$\angle RFP = 180° - 36° \times 2 = 108°$

(5)$\because \angle RFP + \angle QFP = 108° + 72° = 180°$　$\therefore Q$，$F$，$R$共線

$\Rightarrow \Delta RPQ$之三內角皆為$36° - 72° - 72°$

故得證$\overline{PQ}$，$\overline{RQ}$，$\overline{PR}$比例四分割$\Delta ABC$。

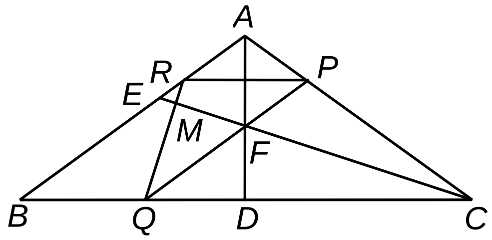
【摺紙】以上的尺規作圖法，使$36° - 72° - 72°$的黃金三角形紙張，只要摺出五條摺痕線，就可找到比例四分割的三條分割線。




2.三內角為$108° - 36° - 36°$的黃金三角形：

(前一種尺規作圖法，雖然也可以將此種黃金三角形比例四分割，但由於實際摺紙時，有些摺痕線的交點會落在紙張外部，所以才會改採以下另一種作法。)

【作法】(1)作$\overline{AD} \perp \overline{BC}$，且交$\overline{BC}$於$D$。

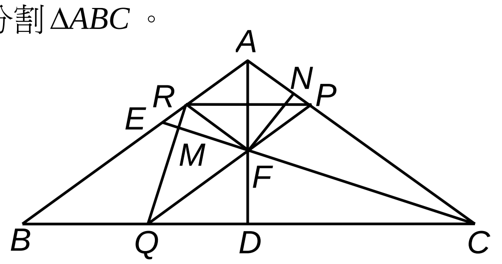



(2)作$\angle ACB$的分角線$\overline{CE}$分別交$\overline{AD}$，$\overline{AB}$於$F$，$E$。

(3)作$\overline{AF}$的中垂線$\overleftrightarrow{PR}$，而$\overleftrightarrow{PR}$分別交$\overline{AB}$，$\overline{AC}$於$R$，$P$。

(4)過 $R$ 作 $\overleftrightarrow{RQ} \perp \overline{CE}$ ，分別交 $\overline{CE}$ ， $\overline{BC}$ 於 $M$ ， $Q$ 。

(5)連 $\overline{PQ}$ ，則 $\overline{PQ}$ ， $\overline{RQ}$ ， $\overline{PR}$ 比例四分割 $\Delta ABC$ 。




【證明】(1)連 $\overline{FQ}$ ， $\overline{FP}$ 。

(2) $\because$ $\overleftrightarrow{PR}$ 爲 $\overline{AF}$ 的中垂線

$\Rightarrow \overline{PA} = \overline{PF}$ ， $\overline{RA} = \overline{RF}$

又 $\overline{PR} // \overline{BC} \Rightarrow \angle APR = \angle ACB = \angle ABC = \angle ARP = 36° \Rightarrow \overline{AR} = \overline{AP}$

$\therefore$ 四邊形 $APFR$ 爲菱形。

(3) $\because \angle CEA = 180° - \angle EAC - \angle ACE = 180° - 108° - 18° = 54°$

$\Rightarrow \angle ERM = 36° \Rightarrow \angle MRF = 180° - 36° \times 3 = 72°$

(4)作 $\overline{FN} \perp \overline{AC}$ ，令垂足爲 $N$ 。 $\because \angle FMR = \angle FNP = 90°$ ， $\overline{FR} = \overline{FP}$

又 $\angle MRF = \angle NPF = 72°$ $\therefore \Delta FMR \cong \Delta FNP \Rightarrow \overline{FM} = \overline{FN}$

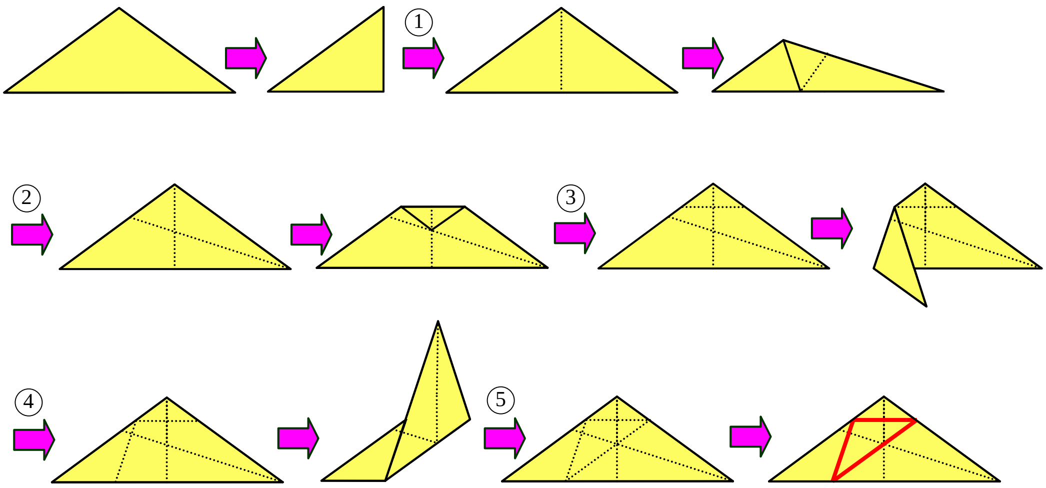
(5) $\because$ $\overline{CE}$ 平分 $\angle ACB$ ， $\overline{FD} \perp \overline{BC}$ $\therefore \overline{FD} = \overline{FN} \Rightarrow \overline{FD} = \overline{FM} \Rightarrow \angle MQF = \angle DQF$

(6) $\because \angle BQR = 180° - 36° - 36° = 108°$ $\therefore \angle RQD = 72° \Rightarrow \angle MQF = \angle FQD = 36°$

$\Rightarrow \angle RFQ = 72°$ $\therefore \angle PFR + \angle RFQ = 108° + 72° = 180°$ $\therefore P$ ， $F$ ， $Q$ 共線

$\Rightarrow \Delta RPQ$ 的三內角度數爲 $108°$ ， $36°$ ， $36°$ ，故得證 $\overline{PQ}$ ， $\overline{RQ}$ ， $\overline{PR}$ 比例四分割 $\Delta ABC$ 。

【摺紙】以上的尺規作圖法，使 $108° - 36° - 36°$ 的黃金三角形紙張，只要摺出五條摺痕線，就可找到比例四分割的三條分割線。




## 伍、討論：

一、由以上對三角形相似四分割的定理研究，可得知：(1)除了由三邊中點連線段所作的全等四分割，以及(2)三條邊完全分割線所作的比例四分割外，其它的相似四分割至

少必須包含一條點完全分割線。

二、由前項的說明，讓我們思考到含點完全分割線的相似四分割，在點完全分割線兩側的組成三角形必是以下兩種情形之一：(1)一側爲三個，另一側爲一個組成的相似三角形；或是(2)兩側皆各爲兩個組成的相似三角形。既然如此，我們就可將研究過程中找出的相似三分割的各式三角形，從各邊外再附加一個相似三角形，進而討論出一些三角形相似四分割的情形。同時，也可以將已完成相似二分割的兩個三角形，以彼此外加的方式再討論出一些三角形相似四分割的情形，如此就可以討論出含點完全分割線的各式三角形的所有相似四分割。

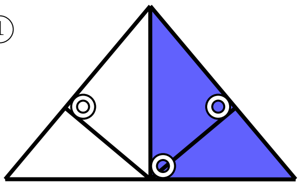
三、上面的思考作法，我們稱之爲「外加法」。或許有人會如此想，所有包含點完全分割線的相似三分割的三角形，在點完全分割線某一側必定只有一個組成三角形，只要再以一條分割線將它分割成兩個相似三角形(我們稱之爲「內分法」)，不就可以討論出上面二之(2)的情形了。其實，這樣的想法，聽起來好像頗有道理，我們一開始也認爲好像無誤，但是仔細推敲後才發現，對於可以「母子相似」的直角三角形它是沒問題，可是沒有「母子相似」的三角形，這種以偏概全的想法會有「漏網之魚」的危險。

四、由於以「母子相似」的「內分法」輔助討論出相似四分割的做法，是頗有效率的方法。於是我們便決定對相似三分割的所有三角形(如圖 3-3-1 以及圖 3-4-1~3-4-5)，先進行「外加法」和「內分法」(組成三角形爲直角三角形)的討論與作圖，至於少數的「漏網之魚」，只要再以相似二分割的兩個三角形，以彼此外加的方式進行討論，至此就可以將全部的相似四分割一網打盡(如以下的討論內容)：

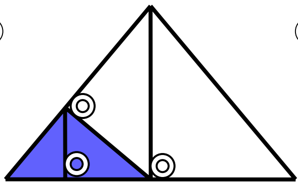
1.由三分割造四分割的作法：(以下針對某一已相似三分割的三角形(見圖 3-3-1、圖 3-4-1、圖 3-4-2、圖 3-4-4、圖 3-4-5)進行討論，圖形中<u>塗色部分</u>表示<u>內分</u>或<u>外加</u>的部分，而「◎」表示 90 度角，「○」表示 30 度角)。

(1)等腰△(非$30°-30°-120°$)使用內分法：

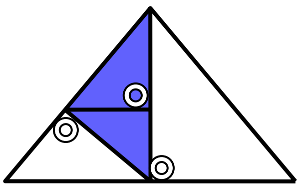
①



②

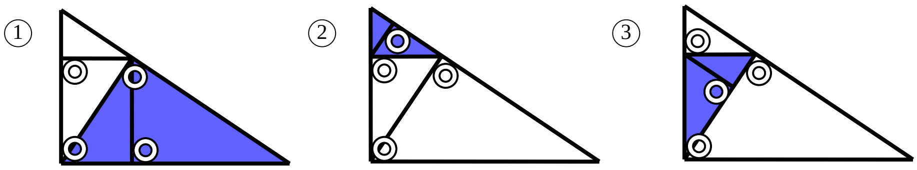


③



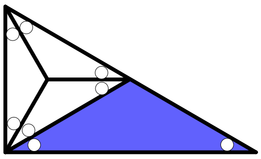
※外加法討論的情況已包含於內分法所討論的內容中。

(2)直角△(非$30°-60°-90°$)使用內分法：



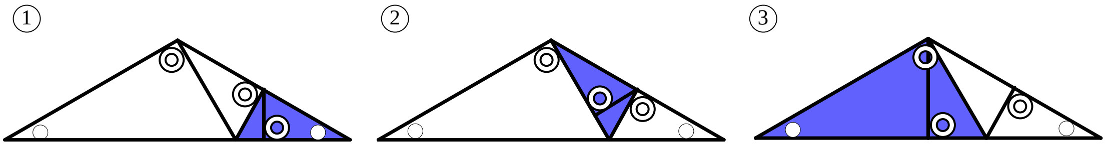

※外加法討論出的情形將與直角三角形內分法或等腰三角形的內分法所討論的內容重覆。

(3)正△使用外加法：

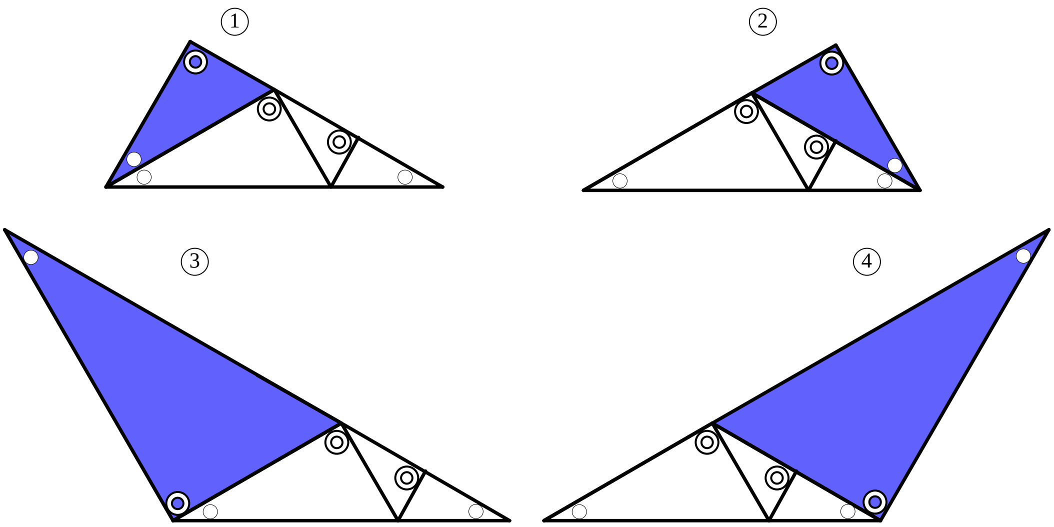


(4) $30^\circ - 30^\circ - 120^\circ$ 等腰△：

【1】使用內分法：



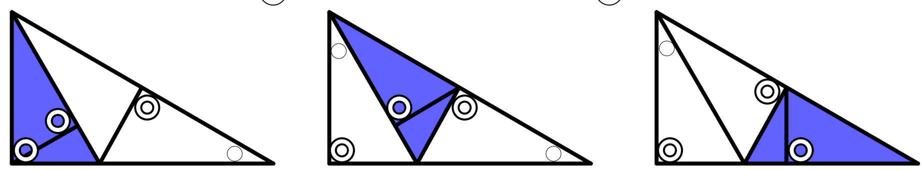

【2】使用外加法：



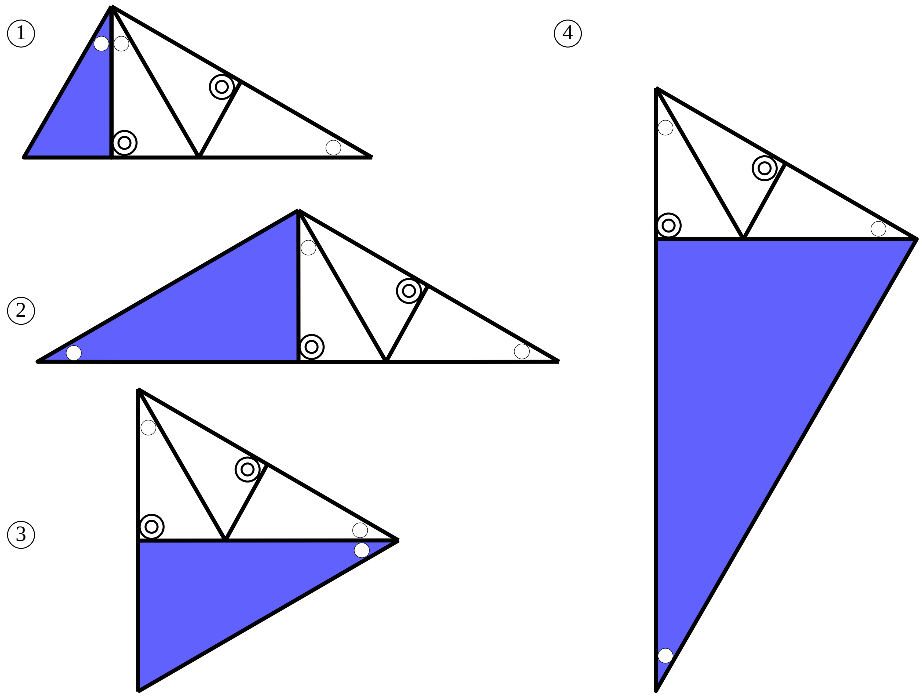

(5) $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 直角△：

【1】使用內分法：

① ② ③



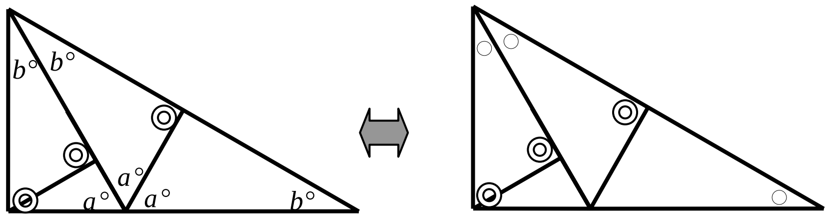
【2】：使用外加法：




2.由兩個二分割彼此外加造四分割的作法(點完全分割線的兩側各有一個相似二分割)：

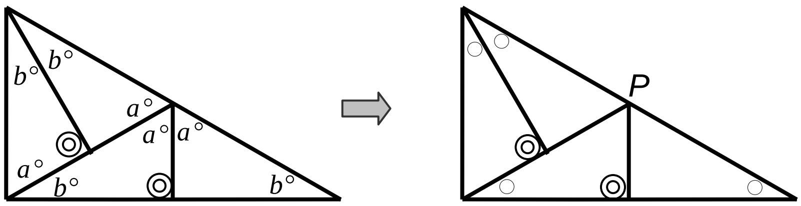
(1)若兩個相似二分割的三角形皆爲直角三角形的情形，或者其中有一爲直角三角形，另一爲等腰三角形(非直角)，它們都會包含於相似三分割的內分法討論內容，這是因爲其中的直角三角形內分後的相似二分割會「母子相似」，也就是說這個直角三角形未內分前必與另一個已相似二分割的直角或等腰三角形合成相似三分割，所以只要以相似三分割的內分法討論，就必定可以討論出這些相似四分割的圖形。

例如：兩個相似二分割的三角形其中一爲直角三角形，另一爲等腰三角形(非直角)，若將直角三角形的斜邊與等腰三角形的一腰接合在一起，就可討論出 $30°-60°-90°$ 的一種相似四分割的情形(如下頁圖)，但實際上這個相似四分割的圖形，在 $30°-60°-90°$ 以相似三分割再進行內分時，就會被討論到。

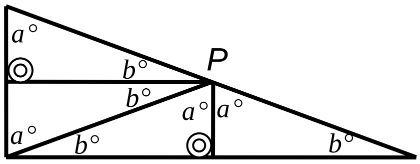



(2)我們只需討論兩個相似二分割的三角形皆爲等腰三角形(非直角)的情形：(再扣除相似三分割已經討論出來的部份)

①一底接一腰：討論出$30°-60°-90°$三角形的一種相似四分割方式，其中 $P$ 爲斜邊中點。




②一腰接一腰：討論出一般直角三角形的一種相似四分割方式，其中 $P$ 爲斜邊中點。




## 陸、結論：

一、任意三角形作相似四分割時，由三邊中點連線段所作的全等四分割；以及三條邊完全分割線所作的比例四分割，組成三角形與原三角形必定會「母子相似」。

二、任意三角形作相似四分割時，除了由三邊中點連線段所作的全等四分割；以及三條邊完全分割線所作的比例四分割外，其它的相似四分割至少包含一條點完全分割線。

三、三角形比例四分割的分割方式：

(一)若原三角形爲不等邊三角形，則比例四分割共可產生三種不同的分割方式。

(二)若原三角形爲一般等腰三角形，則比例四分割的分割方式只有兩種。

(三)若原三角形爲正三角形，則不存在比例四分割的相似分割作法。

四、$\Delta ABC$ 中，$\overline{PQ}//\overline{AB}$，$\overline{RQ}//\overline{AC}$，$\overline{PR}$ 不平行於 $\overline{BC}$，且 $\overline{PQ}$，$\overline{RQ}$，$\overline{PR}$ 使 $\Delta ABC$ 比例四分割。令 $\Delta BRQ$ 面積爲 $X$，$\Delta APR$ 面積爲 $Y$，$\Delta PCQ$ 面積爲 $Z$，則(1) $\overline{PR}^2=\overline{BQ}\times\overline{CQ}$ (2) $Y^2=XZ$ (3) $\Delta ABC$ 面積 $=(\sqrt{X}+\sqrt{Z})^2$。(參考圖 5-1-1)

五、$\Delta ABC$ 中，$\overline{PQ}//\overline{AB}$，$\overline{RQ}//\overline{AC}$，$\overline{PR}$ 不平行於 $\overline{BC}$，且 $\overline{PQ}$，$\overline{RQ}$，$\overline{PR}$ 使 $\Delta ABC$ 比例四分割，圓 $O_1$，圓 $O_2$，圓 $O_3$ 分別爲 $\Delta BRQ$，$\Delta APR$，$\Delta PCQ$ 的外接圓。則(1) $\overline{PR}$ 爲圓 $O_1$，圓 $O_3$ 的公切線。 (2)設圓 $O_1$，圓 $O_3$ 相交於 $O$，$Q$ 兩點，則 $\overline{AQ}$，圓 $O_1$，圓 $O_2$，圓 $O_3$ 共點於 $O$ 點。 (3)連 $\overline{O_1O_2}$，$\overline{O_1O_3}$，$\overline{O_2O_3}$，作 $\overleftrightarrow{O_2O}$ 交 $\overline{O_1O_3}$ 於 $Q_1$，作 $\overline{P_1Q_1}//\overline{O_1O_2}$，$\overline{Q_1R_1}//\overline{O_2O_3}$，連 $\overline{P_1R_1}$，則 $\overline{P_1Q_1}$，$\overline{Q_1R_1}$，$\overline{P_1R_1}$ 將 $\Delta O_1O_2O_3$ 比例四分割。 (4)若圓 $O_4$，圓 $O_5$，圓 $O_6$ 分別爲 $\Delta R_1O_1Q_1$，$\Delta R_1O_2P_1$，$\Delta P_1O_3Q_1$ 的外接圓，則圓 $O_4$，圓 $O_5$，圓 $O_6$ 必交於點 $O$。(參考圖 5-2-1~圖 5-2-4)

六、兩種黃金三角形，若運用摺紙的方式，皆只需五條摺痕線就可完成比例四分割，而且分割後三個大小不同的組成三角形，將對應邊長(或周長)由大到小排列，會形成公比也恰爲黃金數($\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$)的等比數列。

七、三角形進行相似四分割時，可依下列流程考慮其分割方式(如下頁起的分割總圖，圖中的「◎」表示 90 度角，「●」表示 60 度角，「○」表示 30 度角，「＊」表示 45 度角，而且對任何一個已畫定位置的三角形，只要分割線的位置不同，就視爲不同的分割方式)：

1.若爲正三角形，可作 22 種不同方式的相似四分割(如附件(一))。

2.若是 $30°-30°-120°$ 等腰三角形，可作 18 種不同方式的相似四分割(如附件(二))。

3.若是 $30°-60°-90°$ 直角三角形，可作 19 種不同方式的相似四分割(如附件(三))。

4.若是 $45°-45°-90°$ 等腰直角三角形，可作 8 種不同方式的相似四分割(如附件(四))。

5.若是其它的直角三角形，可作 10 種不同方式的相似四分割(如附件(五))。

6.若是其它的等腰三角形，可作 8 種不同方式的相似四分割(如附件(六))。

7.非以上 1~6 項的三角形，只可作 4 種不同方式的相似四分割(如附件(七))。

## 捌、參考資料：


一、李恭晴、陳昭地等編著「國中數學第五冊」；台北市：國立編譯館。(民 92.8)

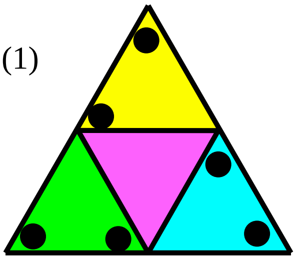
二、李恭晴、陳昭地等編著「國中數學第四冊」；台北市：國立編譯館。(民 92.1)

三、徐澤州等編著「國中數學奧林匹克讀本(二年級)」初版；新竹市：凡異出版社，P224。(民 90.6)

附件(一)

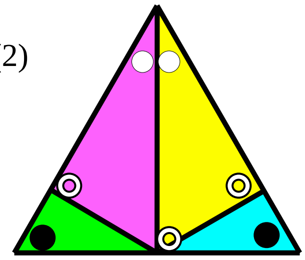
## 1.正三角形：共有 22 種相似四分割的分割方式。

(1)



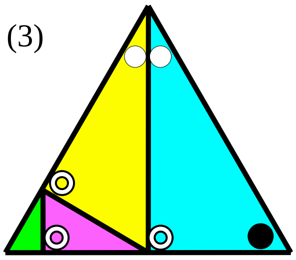
三邊中點連線段
的全等四分割

(2)



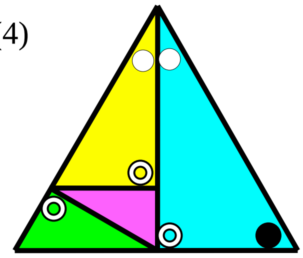
等腰三分割內分

(3)



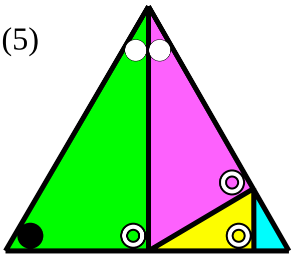
等腰三分割內分

(4)



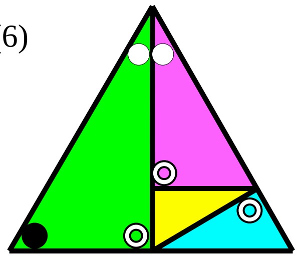
等腰三分割內分

(5)



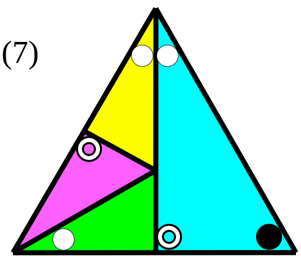
等腰三分割內分

(6)



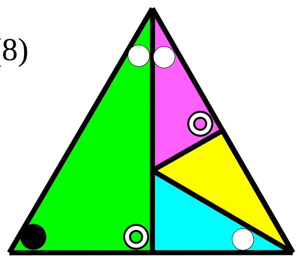
等腰三分割內分

(7)



30-60-90 三分割外加

(8)



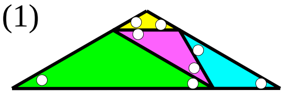
30-60-90 三分割外加

(2)~(8)七種分割方式的任一種經由旋轉，都有三種變化，所以有 21 種分割方式。

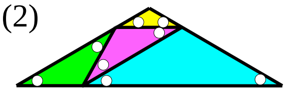
附件(二)

## 2.30-30-120 等腰三角形：共有 18 種相似四分割的分割方式。

(1)

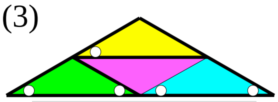


(2)



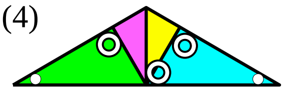
兩種比例四分割

(3)



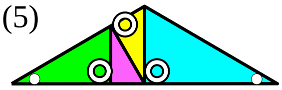
三邊中點連線段
的全等四分割

(4)



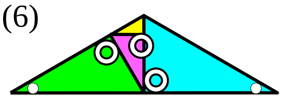
等腰三分割內分

(5)



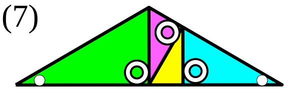
等腰三分割內分

(6)



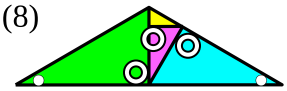
等腰三分割內分

(7)



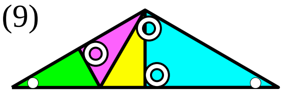
等腰三分割內分

(8)



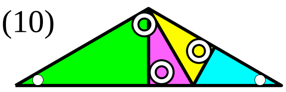
等腰三分割內分

(9)



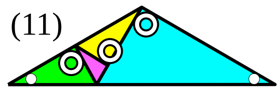
30-30-120 三分割內分

(10)



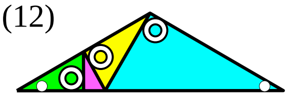
30-30-120 三分割內分

(11)



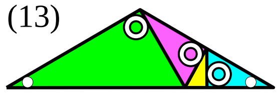
30-30-120 三分割內分

(12)



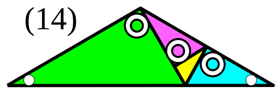
30-30-120 三分割內分

(13)



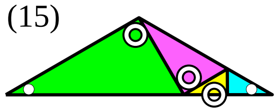
30-30-120 三分割內分

(14)



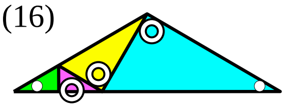
30-30-120 三分割內分

(15)



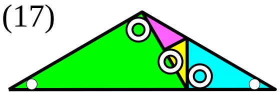
30-30-120 三分割外加

(16)



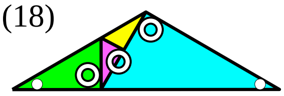
30-30-120 三分割外加

(17)



30-30-120 三分割外加

(18)

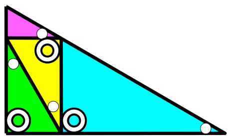


30-30-120 三分割外加

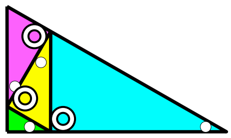
附件(三)

**3.30-60-90 直角三角形：共有 19 種相似四分割的分割方式。**

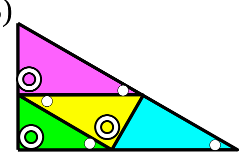
(1)



(2)

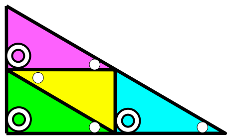


(3)



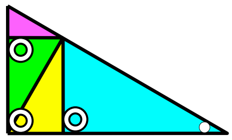
三種比例四分割

(4)



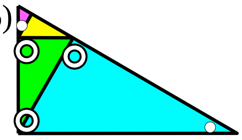
三邊中點連線段
的全等四分割

(5)



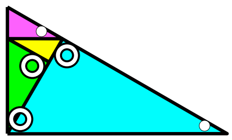
直角三分割內分

(6)



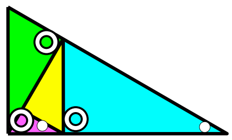
直角三分割內分

(7)



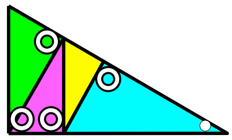
直角三分割內分

(8)



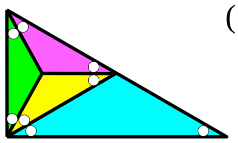
直角三分割內分

(9)



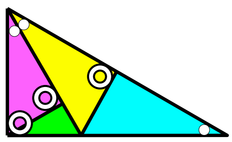
直角三分割內分

(10)



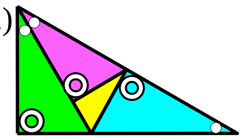
正三角形三分割外加

(11)



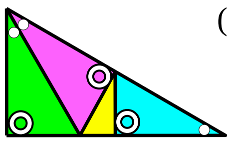
30-60-90 三分割內分

(12)



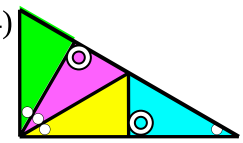
30-60-90 三分割內分

(13)



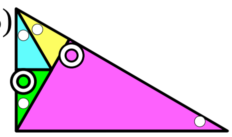
30-60-90 三分割內分

(14)



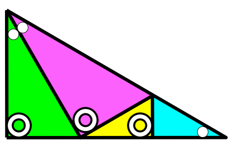
30-60-90 三分割外加

(15)



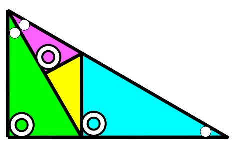
30-60-90 三分割外加

(16)



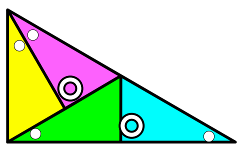
30-30-120 三分割外加

(17)



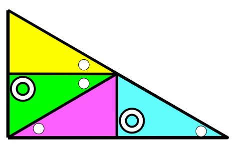
30-30-120 三分割外加

(18)



等腰二分割彼此外加

(19)

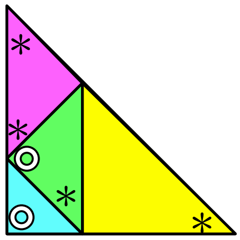


等腰二分割彼此外加

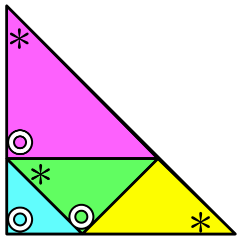
附件(四)

## 4.等腰直角三角形：共有 8 種相似四分割的分割方式。

(1)

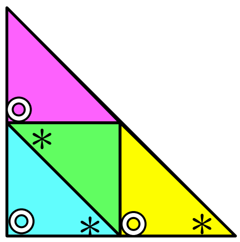


(2)



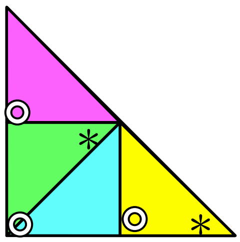
兩種比例四分割

(3)



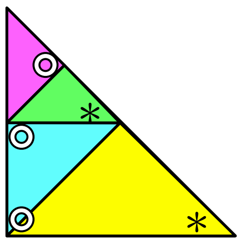
三邊中點連線段的全等四分割

(4)



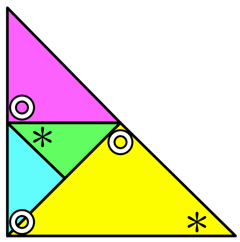
直角三分割內分

(5)



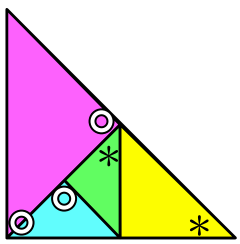
直角三分割內分

(6)



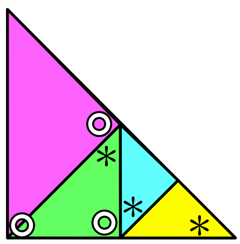
直角三分割內分

(7)



直角三分割內分

(8)

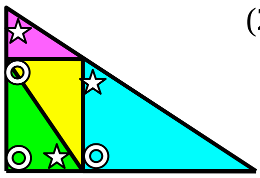


直角三分割內分

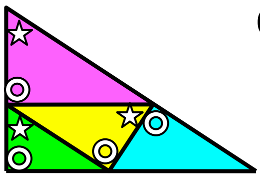
附件(五)

**5.一般直角三角形：共有 10 種相似四分割的分割方式。**

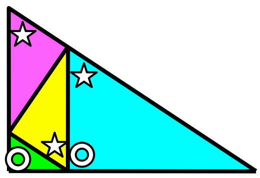
(1)



(2)

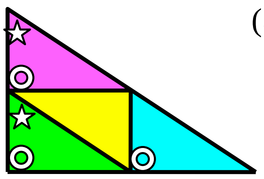


(3)

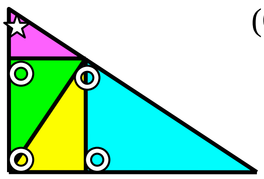


三種比例四分割

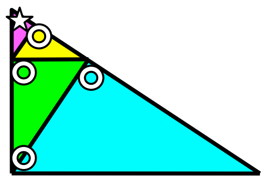
(4)



(5)



(6)

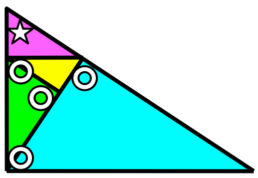


三邊中點連線段的全等四分割

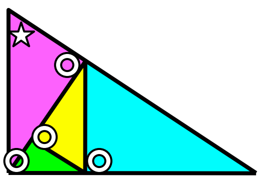
直角三分割內分

直角三分割內分

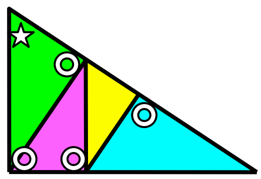
(7)



(8)



(9)

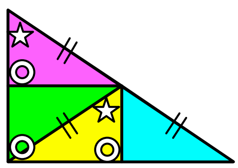


直角三分割內分

直角三分割內分

直角三分割內分

(10)

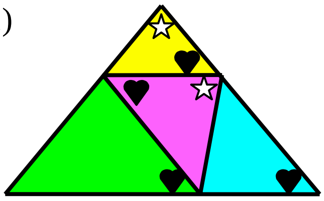


等腰二分割彼此外加

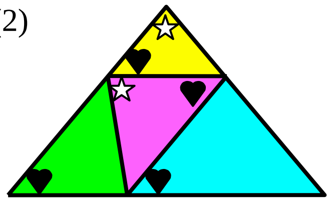
附件(六)

## 6.一般等腰三角形：共有 8 種相似四分割的分割方式。

(1)

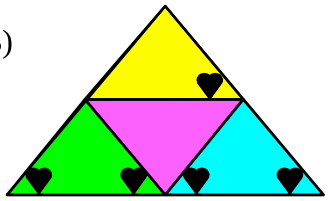


(2)



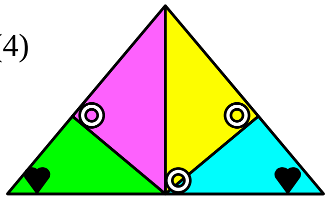
兩種比例四分割

(3)



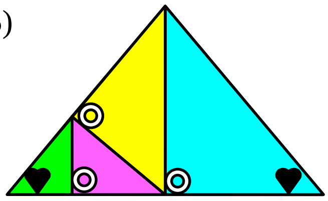
三邊中點連線段
的全等四分割

(4)



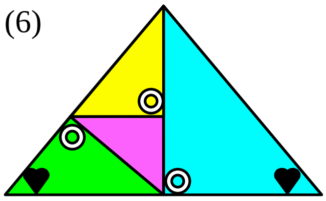
等腰三分割內分

(5)



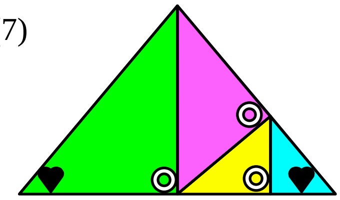
等腰三分割內分

(6)



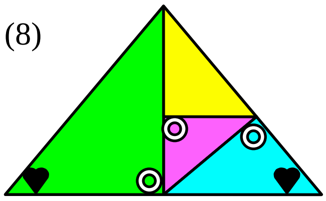
等腰三分割內分

(7)



等腰三分割內分

(8)

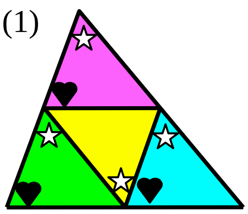


等腰三分割內分

附件(七)

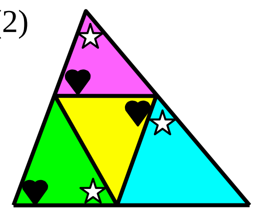
## 7.其它三角形(非 1~6 項)：共有 4 種相似四分割的分割方式。

(1)

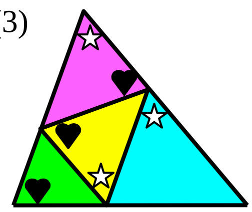


三邊中點連線段
的全等四分割

(2)



(3)



三種比例四分割

(4)