台灣二００五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：平面座標上長方形沙發旋轉問題之解的存在性

學　　校：國立臺中第一高級中學

作　　者：周義超、林柏延

作者簡介

作者一：照片右邊者

我的名字是林柏延，國中是就讀安和國中，而目前就讀台中一中一年級。目前我的興趣是：看書、用電腦和算數學，雖然在班上的數學成績普普通通，但是每次解決掉一題數學題目時，總是可以帶給我莫大的欣喜，所以我對算數學題目樂此不疲，這也是我參加數學科展最大的原因！

雖然在考上了一中後，功課壓力變得比國中時候更大了，競爭也比以前更激烈，所以休閒時間也大幅地縮小，不能像國中一樣整天沉迷在電腦和書本及數學中了，不過我還是能利用課餘時間繼續做科展，雖然有一點累，但是我還是樂此不疲！

作者二：照片左邊者

我是周義超，目前就讀台中一中一年級。國小時雖然數學成績不太好，但對數學還蠻有興趣的。當我遇到了不會的數學問題，便沉浸在思考的世界中，如果真的不會，再去問學校的老師。雖然考上了一中，但我對於敏銳度似乎沒有多大的改變，但是數學的興趣卻愈來愈濃厚。

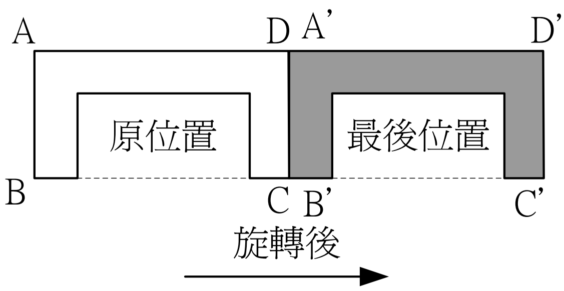
我從國中一年級下學期開始接觸「科展」，是由國賢老師所指導，並得到了第六名。這對那時候的我來說，真的是一個莫大的鼓勵！我在二年級和林柏延同學一起討論，並持續了將近兩年的時間，終於爲我們心中的疑惑找到了解答。不過，我覺得這個問題應該可以有更多、更值得去研究的地方；只是我所學到有關數學的知識還不太足夠吧！這次很榮幸的能夠來參加這次的比賽，希望在這次比賽能夠有不錯的表現。

平面座標上長方形沙發旋轉問題之解的存在性

摘要

這篇報告要探討下列的「轉沙發的問題」是否有解？

> 有一個長方形的沙發，如圖一，若要求每次只能以「四個頂點逆時針或順時針連續旋轉 90 度」的方式轉動，請問當長寬具備何種關係時，沙發經數次轉動後，剛好可以「轉」到相鄰的位置，如圖一，而且沙發坐人的正面方向仍保持不變呢？



圖一

我們把原問題看成「平面座標上長方形旋轉的數學問題」，再利用「平面座標、三角函數、複數、複數的極式表示及向量」等數學工具，導出符合題目要求的方程式，最後證出當長與寬的比值爲正實數時，有下列的結果：

1.當長與寬比值爲無理數時，此問題無解。
2.當長與寬比值是最簡分數時，若分子爲奇數，此問題無解。
3.當長與寬比值是最簡分數時，若分子爲偶數，分母爲奇數，此問題有解。
4.在有解的情況下，我們可以找出特定轉法的最小值。
5.當長與寬比值是最簡分數時，若分子爲偶數，分母爲奇數，沙發可轉至 A 點座標爲 $(\alpha p,0)$ 的位置，其中 $\alpha \in Z$ ，且沙發坐人的正面方向保持不變。
6.當長與寬比值是最簡分數時，若分子爲奇數，分母爲偶數，沙發可轉至 A 點座標爲 $(0,\beta q)$ 的位置，其中 $\beta \in Z$ ，且沙發坐人的正面方向保持不變。
7 當的長與寬比值爲正實數時，可將沙發轉至 A 點的座標爲 $(2\alpha p+2\beta q,2\gamma p+2\omega q)$ 的位置，其中 $\alpha,\beta,\gamma,\omega \in Z$ ，且沙發坐人的正面方向保持不變。

The Solution of Rotating Sofa Problem

Abstract

In this paper we discuss the solution of rotating sofa problem as follows :

The condition is : Merely allow to rotate the sofa several times by rotating 90 degrees clockwise or counterclockwise around the vertex. (maybe A, B, C, or D in Fig. 1)
The question is : What's the relationship between the length and the width of the sofa, if we request the sofa translated next to the original position with direction unchanged. (as shown in Fig. 1 with A'B'C'D').

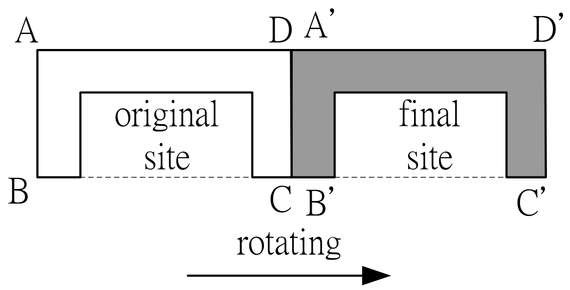


Figure 1

We take this problem as a mathematical one of rotating a rectangle in plane coordinates. Then we derive the desired equations by using the tools of plane coordinates, trigonometric functions, complex number, polar form of complex number, and vector. Finally, we prove that：

1. When the ratio of length and width is irrational, the problem has no solution.
2. When the length of sofa is odd in the ratio of length and width, the problem has no solution.
3. When the ratio of length and width is even, the problem has solutions.
4. When the solutions exist , we can find the minimum of the number of rotations.
5. When the ratio of length and width is an irreducible fraction, which has the even numerator and the odd denominator, the sofa can be rotated to the coordinate $(\alpha p, 0)(\alpha \in Z)$which is the new position of A and keep the original position with direction unchanged.
6. When the ratio of length and width is an irreducible fraction, which has the odd numerator and the even denominator, the sofa can be rotated to the coordinate $(0, \beta q)(\beta \in Z)$ which is the new position of A and keep the original position with direction unchanged.
7. When the ratio of length and width is a real positive number, the sofa can be rotated to the coordinate $(2\alpha p + 2\beta q, 2\gamma p + 2\omega q)(\alpha, \beta, \gamma, \omega \in Z)$which is the new position of A and keep the original position with direction unchanged.

一、前言

（一）研究動機

本篇文章的問題是從網址http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/-private/m14.htm.的網頁裡看到的，因爲「旋轉」的動作在數學上可以用複數的極式表示，我們想由此出發；逐一導出把長方形沙發利用「旋轉」移至「相鄰位置」的數學式，進而討論解的存在性。

在「研究過程」一節中有兩個重點，第一個是得出長方形沙發「頂點」經過任意次旋轉後的座標表示式，第二個是利用此座標表示式我們可以證明長方形沙發長寬比值爲何時；符合要求的轉法解是否存在。

（二）研究目的

引進「旋轉」的數學式，導出長方形沙發「頂點」經過任意次旋轉後的座標表示式，進而判定何種長寬比值下；此問題是有解或是無解的。

二、研究過程

（一）研究問題的數學化

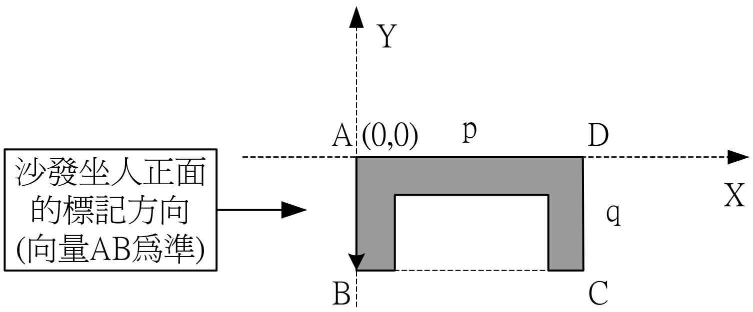
爲了數學討論上的方便，我們給出下列的規定：

1.假設長方形沙發的長是 p、寬是 q。沙發的四個頂點，由左上開始，按逆時針的排列順序，分別以「A、B、C、D」來標示，如圖二。

2.由於題目要求「沙發轉動前和轉動後，可坐人的正面方向必須不變」，我們以向量 $\boldsymbol{AB}$ 的方向(朝下)標記坐人正面的方向(也是朝下)，（如圖二）。因此可知，若沙發經 n 次旋轉後，轉到相鄰的位置時，只要向量 $\boldsymbol{AB}$ 的方向仍朝下；那坐人正面的方向必保持不變(仍朝下)。

註：本文均以粗字斜體「$\boldsymbol{AB}$」表示向量 $\overrightarrow{AB}$

3.爲了討論的方便，我們加上一個以「A 爲原點，向量 $\boldsymbol{AD}$ 爲 x 軸正向，向量 $\boldsymbol{AB}$ 爲 y 軸負向」的平面直角座標，來標示沙發的位置（如圖二）。每次沙發位置的改變，都是以 A 點及向量 $\boldsymbol{AB}$ 的改變爲準。



圖二

（二）一次旋轉的數學表示式

> 定義一
>
> 若沙發以某一頂點V逆時針旋轉角度 θ 時，我們以函數 $f_{V\theta}$ 表示，其中V爲頂點A、B、C、D之一。爲了方便把 $f_{V\theta}$ 稱爲一個子轉法。

利用「複數的極式」，我們可得：

定理一

頂點 A 以一頂點 V (V 可以是 A)逆時針旋轉角度θ時，則

$$f_{V\theta}(A)=V+(A-V)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

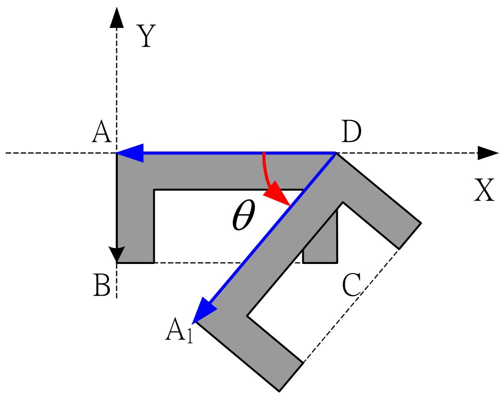
(注意：上式的「A－V」是使用平面座標的減法)或

令$f_{V\theta}(A)=A_1$，$R_\theta=\cos\theta+i\sin\theta$，則有

$$\boldsymbol{VA_1}=\boldsymbol{VA}R_\theta$$

證明：

如圖三 (取V爲D點)，不難看出將$\boldsymbol{VA}$旋轉θ角，即是$\boldsymbol{VA_1}$ 。 □



圖三

另外，根據複數的極式可知：

性質二 (1) $R_\theta R_\varphi=R_{\theta+\varphi}$ (2) $(R_\theta)^k=R_{k\theta}$

（三）所有轉法的化簡和表示式

性質三 $f_{V\theta}f_{V\varphi}=f_{V\theta}\circ f_{V\varphi}=f_{V(\theta+\varphi)}$

證明：

令$f_{V\varphi}(A)=A_1$，$f_{V\theta}(A_1)=A_2$，則$\boldsymbol{VA_1}=\boldsymbol{VA}R_\varphi$，$\boldsymbol{VA_2}=\boldsymbol{VA_1}R_\theta$。可得$\boldsymbol{VA_2}=\boldsymbol{VA}R_\varphi R_\theta=\boldsymbol{VA}R_{\theta+\varphi}$，即$f_{V\theta}\circ f_{V\varphi}(A)=f_{V(\theta+\varphi)}(A)$ 。 □

對於一個任意的轉法，可以依照下列的步驟化簡：

1.一個任意的轉法F，必定是「有限多個子轉法$f_{V\theta}$」的合成。利用性質二，可以規定相鄰兩個子轉法的轉點必相異。

2.利用三角函數中「同界角」的概念，可以限制每個子轉法的轉角θ爲$0\leq\theta<360^\circ$，因爲轉角0°的子轉法，相當於「不移動」的旋轉，其實可以去掉。

3.因相鄰子轉法的轉點均相異，爲了把轉法F規則化，我們規定「轉點依序爲A、B、C、D，各用一次的 4 個子轉法，稱爲轉法F的一個循環」。若中一個循環中有一個轉

點V的子轉法未出現，則以轉點V且轉角 0°的子轉法填補空缺。

舉個例子說明上面的化簡步驟：

(例 1) 假設F＝$\boxed{f_{D180^{\circ}} f_{D270^{\circ}}} f_{C90^{\circ}} \boxed{f_{A90^{\circ}} f_{A90^{\circ}}} f_{C90^{\circ}} f_{D360^{\circ}} f_{B180^{\circ}} f_{A(-90)^{\circ}}$，

第一步化簡得F＝$\boxed{f_{D450^{\circ}}} f_{C90^{\circ}} \boxed{f_{A180^{\circ}}} f_{C90^{\circ}} f_{D360^{\circ}} f_{B180^{\circ}} f_{A(-90)^{\circ}}$，

第二步化簡得F＝$\boxed{f_{D90^{\circ}}} f_{C90^{\circ}} f_{A180^{\circ}} f_{C90^{\circ}} f_{B180^{\circ}} \boxed{f_{A270^{\circ}}}$，

第三步化簡得F＝$f_{D90^{\circ}} f_{C90^{\circ}} \boxed{f_{B0^{\circ}}} f_{A180^{\circ}} \boxed{f_{D0^{\circ}}} f_{C90^{\circ}} f_{B180^{\circ}} f_{A270^{\circ}}$，

可知化簡後的轉法F具有 2 個循環。其中，第一循環＝$f_{D0^{\circ}} f_{C90^{\circ}} f_{B180^{\circ}} f_{A270^{\circ}}$，而第二循環＝$f_{D90^{\circ}} f_{C90^{\circ}} f_{B0^{\circ}} f_{A180^{\circ}}$

根據上面的步驟，我們可得：

> 轉法假設
>
> 對於一個旋轉n次的轉法F，可以規定F具有m個循環，相鄰子轉法$f_{V\theta}$的轉點V均相異，且一個子轉法$f_{V\theta}$每次只能用 0 到 3 次。由此可設
>
> $$F=(f_{D90^{\circ}})^{h_{m,4}}(f_{C90^{\circ}})^{h_{m,3}}(f_{B90^{\circ}})^{h_{m,2}}(f_{A90^{\circ}})^{h_{m,1}}\cdots(f_{D90^{\circ}})^{h_{1,4}}(f_{C90^{\circ}})^{h_{1,3}}(f_{B90^{\circ}})^{h_{1,2}}(f_{A90^{\circ}})^{h_{1,1}}$$
>
> 其中，$h_{1,1}+\cdots+h_{m,4}=n$，$h_{k,j}=0$、1、2、3，且 $1\leqq k\leqq m$，$1\leqq j\leqq 4$

由假設可得出例 1 的F＝$(f_{D90^{\circ}})^{1}(f_{C90^{\circ}})^{1}(f_{B90^{\circ}})^{0}(f_{A90^{\circ}})^{2}(f_{D90^{\circ}})^{0}(f_{C90^{\circ}})^{1}(f_{B90^{\circ}})^{2}(f_{A90^{\circ}})^{3}$。

（四）沙發轉動後的座標表示

利用性質一、性質二及轉法假設，可得出本節的主要定理：

> 定理四
>
> 任取一個旋轉 n 次且具有 m 個循環的轉法 F 如下：
>
> $$F=(f_{D90^{\circ}})^{h_{m,4}}(f_{C90^{\circ}})^{h_{m,3}}(f_{B90^{\circ}})^{h_{m,2}}(f_{A90^{\circ}})^{h_{m,1}}\cdots(f_{D90^{\circ}})^{h_{1,4}}(f_{C90^{\circ}})^{h_{1,3}}(f_{B90^{\circ}})^{h_{1,2}}(f_{A90^{\circ}})^{h_{1,1}}$$
>
> 假設$A_{4m}=F(A)$，則
>
> $$A_{4m}=A+\overrightarrow{AB}(R_{h_{1,1}90^{\circ}}+\cdots+R_{(h_{1,1}+\cdots+h_{m,1})90^{\circ}})+\overrightarrow{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^{\circ}}+\cdots+R_{(h_{1,1}+\cdots+h_{m,2})90^{\circ}})+\overrightarrow{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^{\circ}}+\cdots+R_{(h_{1,1}+\cdots+h_{m,3})90^{\circ}})+\overrightarrow{DA}(R_{(h_{1,1}+\cdots+h_{1,4})90^{\circ}}+\cdots+R_{(h_{1,1}+\cdots+h_{m,4})90^{\circ}})$$
>
> 其中，$h_{1,1}+\cdots+h_{m,4}=n$，$h_{k,j}=0$、1、2、3，且 $1\leqq k\leqq m$，$1\leqq j\leqq 4$
>
> 若依規定取A為原點，且$\overrightarrow{AB}=(0,-q)=-qi$，$\overrightarrow{BC}=(p,0)=p$，$\overrightarrow{CD}=(0,q)=qi$，$\overrightarrow{DA}=(-p,0)=-p$，$R_{k90^{\circ}}=(R_{90^{\circ}})^{k}=i^{k}$，則可得
>
> $$A_{4m}=p[(i^{h_{1,1}+h_{1,2}}+\cdots+i^{h_{1,1}+\cdots+h_{m,2}})-(i^{h_{1,1}+\cdots+h_{1,4}}+\cdots+i^{h_{1,1}+\cdots+h_{m,4}})]+qi[(i^{h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3}}+\cdots+i^{h_{1,1}+\cdots+h_{m,3}})-(i^{h_{1,1}}+\cdots+i^{h_{1,1}+\cdots+h_{m,1}})]$$

證明：

當 $1\leqq k\leqq m$，$1\leqq j\leqq 4$，令$A_{4k+j-4}=(f_{V90^{\circ}})^{h_{k,j}}\ldots(f_{D90^{\circ}})^{h_{1,4}}(f_{C90^{\circ}})^{h_{1,3}}(f_{B90^{\circ}})^{h_{1,2}}(f_{A90^{\circ}})^{h_{1,1}}(A)$，其中 j＝1 時取 V=A，j =2 時取 V=B，j =3 時取 V=C，j =4 時，取 V=D。

1.當 k＝1 時，由性質二可知：

(1)若j＝1，$A_1=(f_{A90^o})^{h_{1,1}}(A)$，即$\boldsymbol{AA_1}=\boldsymbol{AA}R_{h_{1,1}90^o}$，則$A_1=A+\boldsymbol{AA}R_{h_{1,1}90^o}$且
$B_1=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}$、$C_1=A+\boldsymbol{AC}R_{h_{1,1}90^o}$、$D_1=A+\boldsymbol{AD}R_{h_{1,1}90^o}$

(2)若j＝2，$A_2=(f_{B90^o})^{h_{1,2}}(A_1)$，即$\boldsymbol{B_1A_2}=\boldsymbol{B_1A_1}R_{h_{1,2}90^o}$，則$A_2=B_1+\boldsymbol{B_1A_1}R_{h_{1,2}90^o}$，
又$\boldsymbol{B_1A_1}=\boldsymbol{BA}R_{h_{1,1}90^o}$，故$A_2=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}+\boldsymbol{BA}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}$，且
$B_2=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}+\boldsymbol{BB}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}$、$C_2=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}$、
$D_2=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}+\boldsymbol{BD}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}$

(3)若j＝3，$A_3=(f_{C90^o})^{h_{1,3}}(A_2)$，即$\boldsymbol{C_2A_3}=\boldsymbol{C_2A_2}R_{h_{1,3}90^o}$，則$A_3=C_2+\boldsymbol{C_2A_2}R_{h_{1,3}90^o}$，
又$\boldsymbol{C_2A_2}=\boldsymbol{CA}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}$，故$A_3=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\boldsymbol{CA}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}$，且
$B_3=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\boldsymbol{CB}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}$、
$C_3=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\boldsymbol{CC}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}$、
$D_3=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\boldsymbol{CD}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}$

(4)若j＝4，$A_4=(f_{D90^o})^{h_{1,4}}(A_3)$，即$\boldsymbol{D_3A_4}=\boldsymbol{D_3A_3}R_{h_{1,4}90^o}$，則$A_4=D_3+\boldsymbol{D_3A_3}R_{h_{1,4}90^o}$，
又$\boldsymbol{D_3A_3}=\boldsymbol{DA}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}$，故
$A_4=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\boldsymbol{CD}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}+\boldsymbol{DA}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3}+h_{1,4})90^o}$，且
$B_4=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\boldsymbol{CD}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}+\boldsymbol{DB}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3}+h_{1,4})90^o}$、
$C_4=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\boldsymbol{CD}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}+\boldsymbol{DC}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3}+h_{1,4})90^o}$、
$D_4=A+\boldsymbol{AB}R_{h_{1,1}90^o}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\boldsymbol{CD}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}+\boldsymbol{DD}R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3}+h_{1,4})90^o}$

2.假設 1≦k≦m-1，1≦j≦4 時，定理成立。
當 k＝m 時，由性質二可知：

(1)若j＝1，$A_{4m-3}=(f_{A90^o})^{h_{m,1}}(A_{4m-4})$，即$\boldsymbol{A_{4m-4}A_{4m-3}}=\boldsymbol{A_{4m-4}A_{4m-4}}R_{h_{m,1}90^o}$，則
$A_{4m-3}=A_{4m-4}+\boldsymbol{A_{4m-4}A_{4m-4}}R_{h_{m,1}90^o}$，又$\boldsymbol{A_{4m-4}A_{4m-4}}=\boldsymbol{AA}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^o}$，故
$A_{4m-3}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^o})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^o})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^o})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^o})+\boldsymbol{AA}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^o}$，且
$B_{4m-3}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^o})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^o})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^o})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^o})+\boldsymbol{AB}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^o}$、
$C_{4m-3}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^o})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^o})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^o})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^o})+\boldsymbol{AC}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^o}$、
$D_{4m-3}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^o})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^o})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^o})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^o})+\boldsymbol{AD}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^o}$

(2)若j＝2，$A_{4m-2}=(f_{B90^o})^{h_{m,2}}(A_{4m-3})$，即$\boldsymbol{B_{4m-3}A_{4m-2}}=\boldsymbol{B_{4m-3}A_{4m-3}}R_{h_{m,2}90^o}$，則
$A_{4m-2}=B_{4m-3}+\boldsymbol{B_{4m-3}A_{4m-3}}R_{h_{m,2}90^o}$，又$\boldsymbol{B_{4m-3}A_{4m-3}}=\boldsymbol{BA}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1})90^o}$，故
$A_{4m-2}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^o})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^o})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^o})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^o})+\boldsymbol{AB}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^o}+\boldsymbol{BA}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1}+h_{m,2})90^o}$，且
$B_{4m-2}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^o})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^o})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^o})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^o})+\boldsymbol{AB}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^o}+\boldsymbol{BB}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1}+h_{m,2})90^o}$、
$C_{4m-2}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^o})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^o})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^o})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^o}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^o})+\boldsymbol{AB}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^o}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1}+h_{m,2})90^o}$、

$D_{4m-2}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^{o}})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^{o}})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^{o}})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^{o}})+\boldsymbol{AB}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^{o}}+\boldsymbol{BD}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1}+h_{m,2})90^{o}}$

(3)若$j=3$，$A_{4m-1}=(f_{C90^{o}})^{h_{m,3}}(A_{4m-2})$，即$\boldsymbol{C_{4m-2}A_{4m-1}}=\boldsymbol{C_{4m-2}A_{4m-2}}R_{h_{m,3}90^{o}}$，則

$A_{4m-1}=C_{4m-2}+\boldsymbol{C_{4m-2}A_{4m-2}}R_{h_{m,3}90^{o}}$，又$\boldsymbol{C_{4m-2}A_{4m-2}}=\boldsymbol{CA}R_{(h_{1,1}+\ldots++h_{m,2})90^{o}}$，故

$A_{4m-1}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^{o}})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^{o}})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^{o}})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^{o}})+\boldsymbol{AB}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^{o}}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1}+h_{m,2})90^{o}}+\boldsymbol{CA}R_{(h_{1,1}+\ldots++h_{m,3})90^{o}}$，且

$B_{4m-1}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^{o}})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^{o}})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^{o}})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^{o}})+\boldsymbol{AB}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^{o}}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1}+h_{m,2})90^{o}}+\boldsymbol{CB}R_{(h_{1,1}+\ldots++h_{m,3})90^{o}}$、

$C_{4m-1}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^{o}})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^{o}})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^{o}})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^{o}})+\boldsymbol{AB}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^{o}}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1}+h_{m,2})90^{o}}+\boldsymbol{CC}R_{(h_{1,1}+\ldots++h_{m,3})90^{o}}$、

$D_{4m-1}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^{o}})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^{o}})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^{o}})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^{o}})+\boldsymbol{AB}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^{o}}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1}+h_{m,2})90^{o}}+\boldsymbol{CD}R_{(h_{1,1}+\ldots++h_{m,3})90^{o}}$

(4)若$j=4$，$A_{4m}=(f_{D90^{o}})^{h_{m,4}}(A_{4m-1})$，即$\boldsymbol{D_{4m-1}A_{4m}}=\boldsymbol{D_{4m-1}A_{4m-1}}R_{h_{m,4}90^{o}}$，則

$A_{4m}=D_{4m-1}+\boldsymbol{D_{4m-1}A_{4m-1}}R_{h_{m,4}90^{o}}$，又$\boldsymbol{D_{4m-1}A_{4m-1}}=\boldsymbol{DA}R_{(h_{1,1}+\ldots++h_{m,3})90^{o}}$，故

$A_{4m}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),1})90^{o}})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),2})90^{o}})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),3})90^{o}})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4})90^{o}})+\boldsymbol{AB}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{(m-1),4}+h_{m,1})90^{o}}+\boldsymbol{BC}R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1}+h_{m,2})90^{o}}+\boldsymbol{CD}R_{(h_{1,1}+\ldots++h_{m,3})90^{o}}+\boldsymbol{DA}R_{(h_{1,1}+\ldots++h_{m,4})90^{o}}$

因此，由數學歸納法可知

$A_{4m}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1})90^{o}})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,2})90^{o}})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,3})90^{o}})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,4})90^{o}})$

同理可得

$A_{4m}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1})90^{o}})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,2})90^{o}})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,3})90^{o}})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,4})90^{o}})$

$A_{4m}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1})90^{o}})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,2})90^{o}})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,3})90^{o}})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,4})90^{o}})$

$A_{4m}=A+\boldsymbol{AB}(R_{h_{1,1}90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,1})90^{o}})+\boldsymbol{BC}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,2})90^{o}})+\boldsymbol{CD}(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,3})90^{o}})+\boldsymbol{DA}(R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{1,4})90^{o}}+\ldots+R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,4})90^{o}})$

□

由「沙發轉動前後，可坐人的正面方向必須不變」的要求，可得：

定理五

任取一個旋轉 n 次且具有 m 個循環的轉法 F 如下：

$F=(f_{D90^{o}})^{hm,4}(f_{C90^{o}})^{hm,3}(f_{B90^{o}})^{hm,2}(f_{A90^{o}})^{hm,1}\cdots(f_{D90^{o}})^{h1,4}(f_{C90^{o}})^{h1,3}(f_{B90^{o}})^{h1,2}(f_{A90^{o}})^{h1,1}$

當$h_{1,1}+\cdots+h_{m,4}=4t$ (t是正整數)時，AB方向仍朝下。

證明：

由定理四，知$A_{4m}=D_{4m-1}+\boldsymbol{D_{4m-1}A_{4m-1}}R_{h_{m,4}90^{o}}$、$B_{4m}=D_{4m-1}+\boldsymbol{D_{4m-1}B_{4m-1}}R_{h_{m,4}90^{o}}$，故

$$\boldsymbol{A_{4m}B_{4m}} = \boldsymbol{A_{4m-1}B_{4m-1}} R_{h_{m,4}90^{o}} = \boldsymbol{AB}\, R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,4})90^{o}}$$

因此當$\boldsymbol{A_{4m}B_{4m}}=\boldsymbol{AB}$時，沙發轉動前後，可坐人的正面方向必不變。即當$R_{(h_{1,1}+\ldots+h_{m,4})90^{o}}=1$，或 $(h_{1,1}+\ldots+h_{m,4})90^{o}=360^{o}t$，或$h_{1,1}+\ldots+h_{m,4}=4t$ 時，$\boldsymbol{A_{4m}B_{4m}}$方向仍不變(朝下)。 □

根據定理四及定理五，可以列出研究問題的方程式如下：

定理六

任取一個旋轉 n 次且具有 m 個循環的轉法 F，必須符合下列的方程式，才能使「轉沙發的問題」有解

1.旋轉n次：$h_{1,1}+\cdots+h_{m,4}=n$

2.坐人的正面方向不變：$h_{1,1}+\cdots+h_{m,4}=4t$

3.「轉」到相鄰的位置：$A_{4m}=D$，即

$$p[(i^{h1,1+h1,2}+\cdots+i^{h1,1+\cdots+hm,2})-(i^{h1,1+\cdots+h1,4}+\cdots+i^{h1,1+\cdots+hm,4})]$$
$$+qi[(i^{h1,1+h1,2+h1,3}+\cdots+i^{h1,1+\cdots+hm,3})-(i^{h1,1}+\cdots+i^{h1,1+\cdots+hm,1})]=p$$

為了討論方便，重述如下：

4.旋轉次數與坐人的正面方向不變：$n=4t$

5.轉到相鄰位置：$A_{4m}=D$，等價於

$(b_1-b_3-d_1+d_3)p+(a_2-a_4-c_2+c_4)q=p$，及

$(b_2-b_4-d_2+d_4)p+(-a_1+a_3+c_1-c_3)q=0$

證明：

假設

$i^{h1,1}+\cdots+i^{h1,1+\cdots+hm,1}=a_1+a_2i-a_3-a_4i$且$a_1+a_2+a_3+a_4=m$，$a_1,a_2,a_3,a_4$為非負整數

$i^{h1,1+h1,2}+\cdots+i^{h1,1+\cdots+hm,2}=b_1+b_2i-b_3-b_4i$且$b_1+b_2+b_3+b_4=m$，$b_1,b_2,b_3,b_4$為非負整數

$i^{h1,1+h1,2+h1,3}+\cdots+i^{h1,1+\cdots+hm,3}=c_1+c_2i-c_3-c_4i$且$c_1+c_2+c_3+c_4=m$，$c_1,c_2,c_3,c_4$為非負整數

$i^{h1,1+\cdots+h1,4}+\cdots+i^{h1,1+\cdots+hm,4}=d_1+d_2i-d_3-d_4i$且$d_1+d_2+d_3+d_4=m$，$d_1,d_2,d_3,d_4$為非負整數

則$A_{4m}=[(b_1-b_3-d_1+d_3)p+(a_2-a_4-c_2+c_4)q]$

$+[(b_2-b_4-d_2+d_4)p+(-a_1+a_3+c_1-c_3)q]\,i$，

因$A_{4m}=D=p+0i$，可得

$(b_1-b_3-d_1+d_3)p+(a_2-a_4-c_2+c_4)q=p$，及

$(b_2-b_4-d_2+d_4)p+(-a_1+a_3+c_1-c_3)q=0$ □

（五）已知無解和有解的情形

我們已假設沙發的長是 p、寬是 q，並規定 p≧q，可判斷無解和有解的情形如下：

定理七　當長與寬的比值為無理數時，此問題無解。

證明：

在定理六的第 5 式中，將$(b_1-b_3-d_1+d_3)p+(a_2-a_4-c_2+c_4)q=p$移項後，可得

$p/q=(-a_2+a_4+c_2-c_4)/(b_1-b_3-d_1+d_3-1)$為有理數，與假設矛盾，故無解。 □

定理八　當長與寬比值是最簡分數時，若分子為奇數，此問題無解。

證明：

在定理六的第 5 式中，將$(b_1-b_3-d_1+d_3)p+(a_2-a_4-c_2+c_4)q=p$，及

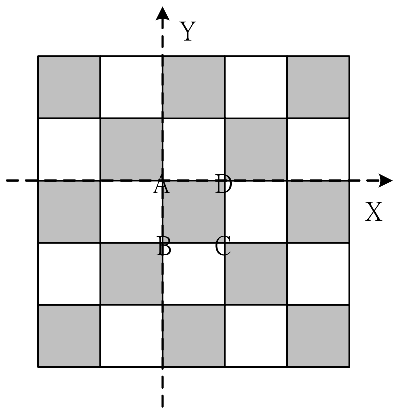
$(b_2-b_4-d_2+d_4)p+(-a_1+a_3+c_1-c_3)q=0$ 兩式相加可得：

$(b_1+b_2-b_3-b_4-d_1-d_2+d_3+d_4)p+(-a_1+a_2+a_3-a_4+c_1-c_2-c_3+c_4)q=p$，

故 $2[(p+q)m-p(b_3+b_4+d_1+d_2)-q(a_1+a_4+c_2+c_3)]=p$

當長(即 p)為正奇數時，顯然是無解的。 □

特別地，由定理八可知當沙發是正方形時，問題是無解的。然而有趣的是：「正方形沙發符合條件的位置，像是西洋棋的棋盤」，如圖四。



圖四

定理九　當長與寬比值是最簡分數時，若分子為偶數，分母為奇數，此問題有解。

證明：

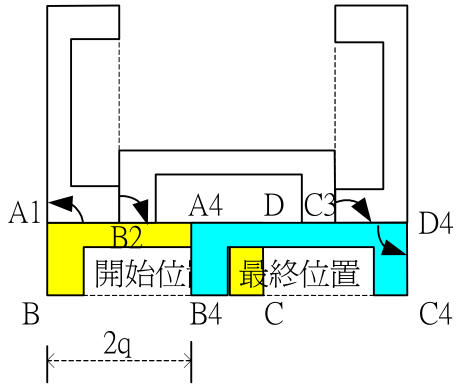
我們發現兩種特殊的轉法F_1與F_2，說明如下：

$$取F_1=f_{D90^{\circ}}\,f_{C(-90)^{\circ}}\,f_{B(-90)^{\circ}}\,f_{A90^{\circ}}=(f_{D90^{\circ}})^1(f_{C90^{\circ}})^3(f_{B90^{\circ}})^3(f_{A90^{\circ}})^1，$$

F_1會將沙發右移到兩倍寬距離（即 2q）的位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。如圖五。

說明：將F_1的轉法代入定理四，其中F_1的n=8，m=1，可得A_4的複數表示式為：

$A_1=p(i^4-i^8)+qi(i^7-i^1)=2q$



$F_1 = f_{D90^\circ} \circ f_{C(-90)^\circ} \circ f_{B(-90)^\circ} \circ f_{A90^\circ}$

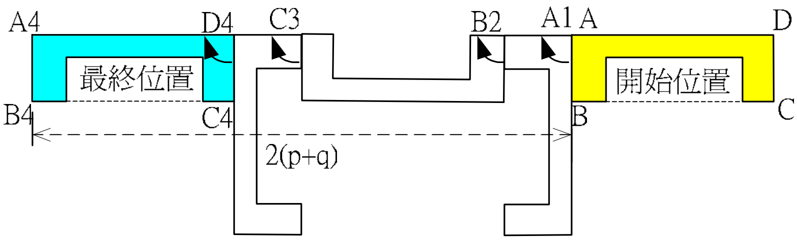
圖五

取$F_2 = f_{D(-90)^\circ} \circ f_{C(-90)^\circ} f_{B(-90)^\circ} \circ f_{A(-90)^\circ} = (f_{D90^\circ})^3 (f_{C90^\circ})^3 (f_{B90^\circ})^3 (f_{A90^\circ})^3$

F_2會將沙發向左移到兩倍長寬和距離（即 $2(p+q)$）的位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。如圖六：

說明：將F_2的轉法代入定理四，其中F_2的n=12，m=1，可得A_4的複數表示式爲：

$A_2=p(i^6-i^{12})+qi(i^9-i^3)=-2(p+q)$



$F_2 = f_{D(-90)^\circ} \circ f_{C(-90)^\circ} f_{B(-90)^\circ} \circ f_{A(-90)^\circ}$

圖六

現在我們利用F_1、F_2，可以導出此問題「當長與寬比值是最簡分數時，若分子爲偶數，分母爲奇數」的解。假設轉法F_1轉了x次；F_2轉了y次（x、y爲正整數），可以把沙發移至右側相鄰的位置，則依問題我們必須要求p、q、x、y滿足下式：

$-2(p+q)y+2qx = p$

$(2y+1)p = 2q(x-y)$

$p/q=2(x-y)/2y+1$

不難看出長寬比值 p/q 的分母爲奇數，分子爲偶數。

最後，代入定理六檢驗：取定$F=(F_2)^y (F_1)^x$

1.旋轉次數與坐人的正面方向不變：$n = 8x+12y = 4(2x+3y)$。

2.轉到相鄰位置：因F的循環數$m = x+y$，所以$A_{4(x+y)} = (F_2)^y (F_1)^x(A)$，即

$$A_{4(x+y)} = p[(i^4+\cdots+i^{4+8(x-1)}+i^{8x+6}+\cdots+i^{8x+6+12(y-1)})-(i^8+\cdots+i^{8+8(x-1)}+i^{8x+12}+\cdots+i^{8x+12+12(y-1)})]$$
$$+qi[(i^7+\cdots+i^{7+8(x-1)}+i^{8x+9}+\cdots+i^{8x+9+12(y-1)})-(i^1+\cdots+i^{1+8(x-1)}+i^{8x+3}+..+i^{8x+3+12(y-1)})]$$
$$=p[(x-y)-(x+y)]+qi[(-xi+yi)-(xi-yi)]$$
$$=-2yp+2(x-y)q$$；將 $p/q=2(x-y)/2y+1$ 代入

=-2py+2py+p

=p □

由移動的座標可以看出轉法F中，F_1與F_2的轉動順序可做交換，其轉法解排列數爲(x+y)!/x!y!。

例一：p/q 比值小於 1 的情況：p＝2，q＝5

2/5=2(x- y)/(2y+1)

可得 2(2y+1)＝10(x-y)

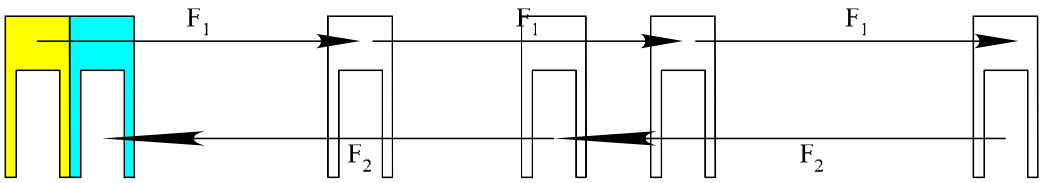
4y+2＝10x-10y

10x- 14y＝2

5x- 7y＝1

則 x＝3，y＝2

因此，可知有 10 種轉法可以達成問題的要求，其中一種爲$(F_2)^2 (F_1)^3$，如圖七。



圖七

例二：p/q 比值大於 1 的情況：p＝4，q＝3

4/3=2(x- y)/(2y+1)

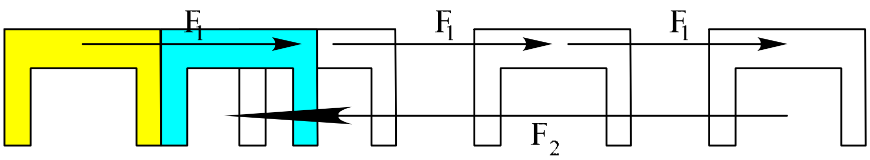
可得 4(2y+1)＝6(x- y)

8y+4＝6x- 6y

6x- 14y＝4

則 x＝3，y＝1

因此，可知有 4 種轉法可以達成問題的要求，其中一種爲$F_2 (F_1)^3$，如圖八。



圖八

（六）在沙發問題有解的情形下，轉動次數最小値的求法

預備定理（一）：若且爲若 二元一次不定方程式 ax＋by＝c 有整數解則 (a , b)是 c 的倍數。 【註】(a,b)爲最大公因數

預備定理（二）：若 $x＝x_0$，$y＝y_0$是 ax＋by＝c 的一組整數解，則此不定方程式的通解爲 $x＝x_0－bt$，$y＝y_0＋at$

在有解的情況下(也就是之前所討論的：當長寬比爲最簡分數時，若分子爲偶數，分母爲奇數，則此問題有解)，首先假設轉法 F_1轉了 x 次，F_2轉了 y 次(x、y 爲正整數)，接著我們可求出旋轉次數的最小値，表示如下：

設：長$p=2p_1$，寬$q=2q_1-1$ 且 p_1、q_1是正整數
則在有解的情況下需滿足 $-2(p+q)y+2qx=p$
再把 $p=2p_1$ ， $q=2q_1-1$ 代入上式
可得 $-2(2p_1+2q_1-1)y+2(2q_1-1)x=2p_1$
最後可得到 $(2q_1-1)x-(2p_1+2q_1-1)y=p_1$
由預備定理（一）可知：
如果不定方程式 $(2q_1-1)x-(2p_1+2q_1-1)y=p_1$ 有整數解
因 $(2q_1-1, -2p_1-2q_1+1)$
$=(2q_1-1, -2p_1-2q_1+1-(-2q_1+1))$
$=(2q_1-1, -2p_1)$
則$(2q_1-1, -2p_1)$必須要能被p_1給整除，不定方程式才會有整數解。

接著，我們假設：(x_0, y_0)是$(2q_1-1)x-(2p_1+2q_1-1)y=1$的一組特解，再利用輾轉相除法來求出這組特定的解$(x_0, y_0)$，則由預備定理（二）可列出$(2q_1-1)x-(2p_1+2q_1-1)y=p_1$的通解如下：

$x=p_1x_0+(2p_1+2q_1-1)t$，(t是整數)．．．．．(１)
$y=p_1y_0+(2q_1-1)t$，(t是整數)．．．．．(２)

把(１)式加(２)式，可得轉法總次數為
$x+y=p_1(x_0+y_0)+[(2p_1+2q_1-1)+(2q_1-1)]t$，其最小值產生於
$t>-p_1(x_0+y_0)/(2p_1+4q_1-2)$ 時
則$t_{min}=[-p_1(x_0+y_0)/(2p_1+4q_1-2)]+1$，其中，[ ]為高斯符號，可得轉法總次數最小值。

舉例說明：若長方形沙發長為4，寬為3，可得$p=4$，$q=3$
則 $p_1=2$ ， $q_1=2$ 代入$(2q_1-1)x-(2p_1+2q_1-1)y=1$
得 $3x-7y=1$ $(3,-7)=(3,7)=1$
不難找到 $3(-2)-7(-1)=1$
因此可知一組特解是 $x_0=-2$，$y_0=-1$
代入(１)和(２)得到 $x=-4+7t$，$y=-2+3t$
因$x+y>0$，則$-6+10t>0$，此時$t_{min}=1$，故$x=3$，$y=1$

（七）沙發轉至其他位置有解的情況

定理十 當沙發的長與寬比值，分子為偶數，分母為奇數時，我們可以將沙發轉動到A點的座標為$(\alpha p,0)$的位置，其中$\alpha\in Z$，且沙發坐人的正面方向保持不變。

證明：

由定理九，我們找到兩種特殊的轉法F_1與F_2，使得當沙發的長與寬比值是最簡分數，若分子為偶數，分母為奇數，沙發可以轉到右邊相鄰的位置（即右移p的位置）。

其次我們也發現在相同條件下，沙發也可以轉到左邊相鄰的位置（即左移p的位置），證明如下：

假設轉法F_1轉了x次；F_2轉了y次（x、y為正整數），可以把沙發移至左側相鄰的位置（即左移p的位置），則依問題我們必須要求p、q、x、y滿足下式：

$-2(p+q)y+2qx=-p$

$(2y-1)p=2q(x-y)$

$p/q=2(x-y)/(2y-1)$

不難看出長寬比值 p/q 的分子爲偶數，分母爲奇數。

最後，代入定理六檢驗：取定$F=(F_2)^y(F_1)^x$

1.旋轉次數與坐人的正面方向不變：$n=8x+12y=4(2x+3y)$。

2.轉到相鄰位置：因F的循環數$m=x+y$，所以$A_{4(x+y)}=(F_2)^y(F_1)^x(A)$，即

$$
\begin{aligned}
A_{4(x+y)} &= p[(i^{4}+\cdots+i^{4+8(x-1)}+i^{8x+6}+\cdots+i^{8x+6+12(y-1)})-(i^{8}+\cdots+i^{8+8(x-1)}+i^{8x+12}+\cdots+i^{8x+12+12(y-1)})] \\
&\quad +qi[(i^{7}+\cdots+i^{7+8(x-1)}+i^{8x+9}+\cdots+i^{8x+9+12(y-1)})-(i^{1}+\cdots+i^{1+8(x-1)}+i^{8x+3}+..+i^{8x+3+12(y-1)})] \\
&= p[(x-y)-(x+y)]+qi[(-xi+yi)-(xi-yi)] \\
&= -2yp+2(x-y)q\text{；將 } p/q=2(x-y)/(2y-1)\text{代入} \\
&= -2py+2py-p \\
&= -p
\end{aligned}
$$

由上述說明與定理九，我們可知當沙發的長與寬比值是最簡分數時，若分子爲偶數，分母爲奇數時，我們可以將沙發轉動到 A 點的座標爲$(\alpha p,0)$的位置，其中$\alpha\in Z$，且沙發坐人的正面方向保持不變。 □

定理十一　當沙發的長與寬比值是最簡分數時，若分子爲奇數，分母爲偶數時，我們可以將沙發轉動到 A 點的座標爲$(0,\beta q)$，其中，$\beta\in Z$，且沙發坐人的正面方向保持不變。

證明：

我們找到兩種特殊的轉法：

$F_3=f_{D180^\circ}f_{C180^\circ}=(f_{D90^\circ})^2(f_{C90^\circ})^2$，$F_3$會將沙發下移到兩個寬的距離（即下移 2q）位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。

$F_4=f_{B90^\circ}f_{C90^\circ}f_{D90^\circ}f_{A90^\circ}=(f_{B90^\circ})^1(f_{C90^\circ})^1(f_{D90^\circ})^1(f_{A90^\circ})^1$，$F_4$會將沙發上移到兩個寬和兩個長的距離（即上移 2（p＋q））的位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。

當沙發的長與寬比值，分母爲偶數，分子爲奇數時，沙發可以轉到上面相鄰的位置（即上移 q 的位置），證明如下：

假設轉法F_3轉了x次；F_4轉了y次（x、y爲正整數），可以把沙發移至上面相鄰的位置（即上移q的位置），則依問題我們必須要求p、q、x、y滿足下式：

$2(p+q)y-2qx=q$

$2yp=q(2x-2y+1)$

$p/q=(2x-2y+1)/2y$

不難看出長寬比值 p/q 的分母爲偶數，分子爲奇數。

最後，代入定理六檢驗：取定$F=(F_4)^y(F_3)^x$

1.旋轉次數與坐人的正面方向不變：$n=4x+4y=4(x+y)$。

2.轉到相鄰位置：因F的循環數$m=2x+3y$，所以$A_{4(2x+3y)}=(F_2)^y(F_1)^x(A)$，即

$$
\begin{aligned}
A_{4(2x+3y)} &= p[(i^{0}+\cdots+i^{0+4(x-1)}+i^{4x+1}+i^{4x+2}+i^{4x+4}+\cdots+i^{4(x+y-1)+1}+i^{4(x+y-1)+2}+i^{4(x+y-1)+4}) \\
&\qquad -(i^{4}+\cdots+i^{4+4(x-1)}+i^{4x+2}+i^{4x+3}+i^{4x+4}+\cdots+i^{4(x+y-1)+2}+i^{4(x+y-1)+3}+i^{4(x+y-1)+4})] \\
&\quad +qi[(i^{2}+\cdots+i^{2+4(x-1)}+i^{4x+1}+i^{4x+3}+i^{4x+4}+\cdots+i^{4(x+y-1)+1}+i^{4(x+y-1)+3}+i^{4(x+y-1)+4}) \\
&\qquad -(i^{0}+\cdots+i^{0+4(x-1)}+i^{4x+1}+i^{4x+2}+i^{4x+3}+\cdots+i^{4(x+y-1)+1}+i^{4(x+y-1)+2}+i^{4(x+y-1)+3})] \\
&= p[(x+yi-y+y)-(x-y-yi+y)]+qi[(-x+yi-yi+y)-(x+yi-y-yi)] \\
&= 2ypi+(-2x+2y)qi\text{；將 } p/q=(2x-2y+1)/2y\text{ 代入}
\end{aligned}
$$

$= (2x-2y+1)qi+(-2x+2y)qi$

$=qi$

當沙發的長與寬比值，分母爲偶數，分子爲奇數時，沙發也可以轉到下面相鄰的位置（即下移 q 的位置），證明如下：

假設轉法F_3轉了x次；F_4轉了y次（x、y爲正整數），可以把沙發移至下面相鄰的位置（即下移q的位置），則依問題我們必須要求p、q、x、y滿足下式：

$2(p+q)y-2qx=-q$

$2yp=q(2x-2y-1)$

$p/q=(2x-2y-1)/(2y)$

不難看出長寬比值 p/q 的分母爲偶數，分子爲奇數。

最後，代入定理六檢驗：取定$F=(F_4)^y (F_3)^x$

1.旋轉次數與坐人的正面方向不變：$n=4x+4y=4(x+y)$。

2.轉到相鄰位置：因F的循環數$m=2x+3y$，所以$A_{4(2x+3y)}=(F_2)^y (F_1)^x(A)$，即

$$\begin{aligned}A_{4(2x+3y)} = p[& (i^0+\cdots+i^{0+4(x-1)}+i^{4x+1}+i^{4x+2}+i^{4x+4}+\cdots+i^{4(x+y-1)+1}+i^{4(x+y-1)+2}+i^{4(x+y-1)+4}) \\ & -(i^4+\cdots+i^{4+4(x-1)}+i^{4x+2}+i^{4x+3}+i^{4x+4}+\cdots+i^{4(x+y-1)+2}+i^{4(x+y-1)+3}+i^{4(x+y-1)+4})] \\ +qi[& (i^2+\cdots+i^{2+4(x-1)}+i^{4x+1}+i^{4x+3}+i^{4x+4}+\cdots+i^{4(x+y-1)+1}+i^{4(x+y-1)+3}+i^{4(x+y-1)+4}) \\ & -(i^0+\cdots+i^{0+4(x-1)}+i^{4x+1}+i^{4x+2}+i^{4x+3}+\cdots+i^{4(x+y-1)+1}+i^{4(x+y-1)+2}+i^{4(x+y-1)+3})]\end{aligned}$$

$=p[(x+yi-y+y)-(x-y-yi+y)]+qi[(-x+yi-yi+y)-(x+yi-y-yi)]$

$= 2ypi+(-2x+2y)qi$；將 $p/q=(2x-2y-1)/(2y)$代入

$=(2x-2y-1)qi+(-2x+2y)qi$

$=-qi$

由上述說明，我們可知當沙發的長與寬比值，分子爲奇數，分母爲偶數時，我們可以將沙發轉動到 A 點的座標爲$(0,\beta q)$的位置，其中$\beta \in Z$，且沙發坐人的正面方向保持不變。

□

> 定理十二　當沙發的長與寬比值爲任意實數時，我們可以將沙發轉動到 A 點的座標爲$(2\alpha p+2\beta q,2\gamma p+2\omega q)$的位置，其中，$\alpha,\beta,\gamma,\omega \in Z$，且沙發坐人的正面方向保持不變。

證明：

首先，先證明可將沙發轉動到 A 點的座標爲$(2\alpha p+2\beta q,0)$的位置，其中$\alpha,\beta \in Z$，且沙發坐人的正面方向保持不變。

我們找到四個轉法如下：

$F_1=f_{D90^\circ} f_{C(-90)^\circ} f_{B(-90)^\circ} f_{A90^\circ}=(f_{D90^\circ})^1(f_{C90^\circ})^3(f_{B90^\circ})^3(f_{A90^\circ})^1$，$F_1$會將沙發右移到兩個寬的距離(即右移 2q）的位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。。

$F_2=f_{D270^\circ} f_{C270^\circ} f_{B270^\circ} f_{A270^\circ}=(f_{D90^\circ})^3(f_{C90^\circ})^3(f_{B90^\circ})^3(f_{A90^\circ})^3$，$F_2$會將沙發左移到兩個寬和兩個長的距離（即左移 2（p＋q））的位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。。

$F_5=f_{D90^\circ} f_{C90^\circ} f_{B90^\circ} f_{A90^\circ}=(f_{A90^\circ})^1(f_{B90^\circ})^1(f_{C90^\circ})^1(f_{D90^\circ})^1$，$F_5$會將沙發左移到兩個寬的距離（即左移 2q）的位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。。

$F_6=f_{A90^\circ} f_{B90^\circ} f_{C90^\circ} f_{D90^\circ}=(f_{A90^\circ})^1(f_{B90^\circ})^1(f_{C90^\circ})^1(f_{D90^\circ})^1$，$F_6$會將沙發右移到兩個寬和兩個長的距離（即右移 2（p＋q））的位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。。

利用這四個轉法可以將沙發轉動到 A 點的座標爲$(2\alpha p+2\beta q,0)$的位置，其中$\alpha,\beta \in Z$，且沙發坐人的正面方向保持不變。

$A_{4m}=(F_6)^d (F_5)^c (F_2)^b (F_1)^a(A)$

$=2aq-2b(p+q)-2cq+2d(p+q)$

$=(2d-2b)p+(2a-2b-2c+2d)q$

又$A_{4m}=2\alpha p+2\beta q$，所以$\alpha=d-b$，$\beta=a-b-c+d$

舉例說明：

若有一個長方形沙發，長(p)爲 3，寬(q)爲 2 時，要將沙發的 A 點轉至(16,0)的位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。

我們首先將 16 化成 $2\times2\times3+2\times1\times2$，即$\alpha=2$、$\beta=1$，則 d-b=2，a-b-c+d=1，我們可找到 a=1，b=1，c=2，d=3 符合要求。

$A_{4m}=(F_6)^3(F_5)^2(F_2)^1(F_1)^1(A)$

$=2\times1\times2-2\times1\times(3+2)-2\times2\times2+2\times3\times(3+2)$

$=4-10-8+30$

$=16$

亦即，A_{4m}爲(16,0)。

接著，我們再證明將沙發轉動到 A 點的座標爲$(0,2\gamma p+2wq)$的位置，其中$\alpha,\beta\in Z$，且沙發坐人的正面方向保持不變。

我們找到四個轉法如下：

$F_3=f_{D180^\circ}f_{C180^\circ}=(f_{D90^\circ})^2(f_{C90^\circ})^2$，$F_3$會將沙發下移到兩個寬的距離（即下移 2q）位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。

$F_4=f_{B90^\circ}f_{C90^\circ}f_{D90^\circ}f_{A90^\circ}=(f_{B90^\circ})^1(f_{C90^\circ})^1(f_{D90^\circ})^1(f_{A90^\circ})^1$，$F_4$會將沙發上移到兩個寬和兩個長的距離（即上移 2（p＋q））的位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。

$F_7=f_{B180^\circ}f_{A180^\circ}=(f_{B90^\circ})^2(f_{A90^\circ})^2$，$F_7$會將沙發上移到兩個寬的距離（即上移 2q）位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。

$F_8=f_{A270^\circ}f_{D270^\circ}f_{C270^\circ}f_{B270^\circ}=(f_{A90^\circ})^3(f_{D90^\circ})^3(f_{C90^\circ})^3(f_{B90^\circ})^3$，$F_8$會將沙發下移到兩個寬和兩個長的距離（即下移 2（p＋q））的位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。

利用這四個轉法可以將沙發轉動到 A 點的座標爲$(0,2\gamma p+2wq)$的位置，其中$\alpha,\beta\in Z$，且沙發坐人的正面方向保持不變。

$A_{4m}=(F_8)^h(F_7)^g(F_4)^f(F_3)^e(A)$

$=(-2eq)i+2f(p+q)i+2gqi-2h(p+q)i$

$=〔(2f-2h)p+(-2e+2f+2g-2h)q〕i$

又$A_{4m}=2\gamma p+2\omega q$，所以$\gamma=f-h$，$\omega=-e+f+g-h$

舉例說明：

若有一個長方形沙發，長(p)爲 3，寬(q)爲 2 時，要將沙發的 A 點轉至(0,16)的位置，且沙發坐人的正面方向保持不變。

我們首先將 16 化成 $2\times2\times3+2\times1\times2$，即$\gamma=2$、$\omega=1$，則 f-h=2，-e+f+g-h=1，我們可找到 e=2，f=3，g=1，h=1 符合要求。

$A_{4m}=(F_8)^1(F_7)^1(F_4)^3(F_3)^2(A)$

$=〔-2\times2\times2+2\times3\times(3+2)+2\times1\times2-2\times1\times(3+2)〕i$

$=（-8+30+4-10）i$

$=16i$

亦即，A_{4m}爲(0,16)。

所以由上述的討論結果，可知若$A_{4m}=(F_8)^h(F_7)^g(F_6)^f(F_5)^e(F_4)^d(F_3)^c(F_2)^b(F_1)^a(A)$，則可將沙發轉到A點的座標爲$(2\alpha p+2\beta q,2\gamma p+2\omega q)$的位置，其中，$\alpha,\beta,\gamma,\omega\in Z$，且沙發坐人的正面方

向保持不變。

三、研究結果

我們經由一些轉法假設，再利用旋轉的極式表示，可以成功導出沙發轉動後頂點的座標表示式。我們已經解出長與寬比值爲實數時，此問題是否無解或有解的情況。

（一）當長與寬比值爲無理數時，此問題無解。

（二）當長與寬比值是最簡分數時；若分子爲奇數，此問題無解。

（三）當長與寬比值是最簡分數時，若分子爲偶數，分母爲奇數，此問題有解。

（四）在有解的情況下，我們可以找出特定轉法的最小值。

（五）當長與寬比值是最簡分數時，若分子爲偶數，分母爲奇數，沙發可轉至 A 點座標爲$(\alpha p,0)$的位置，其中$\alpha\in Z$，且沙發坐人的正面方向保持不變。

（六）當長與寬比值是最簡分數時，若分子爲奇數，分母爲偶數，沙發可轉至 A 點座標爲$(0,\beta q)$的位置，其中$\beta\in Z$，且沙發坐人的正面方向保持不變。

（七）當的長與寬比值爲正實數時，可將沙發轉至 A 點的座標爲$(2\alpha p+2\beta q,2\gamma p+2\omega q)$的位置，其中$\alpha,\beta,\gamma,\omega\in Z$，且沙發坐人的正面方向保持不變。

四、討論

我們也發現本研究的方法具有一般性，至少還可以處理三大類的問題：

（一）你可以考慮不同形狀的沙發，例如，正三角形、正五邊形、正六邊形等的沙發。

（二）如果一塊正面朝上的長方形榻榻米，若每次只能以四個邊用翻轉的方式搬動，請問可不可能將榻榻米搬到原位置的旁邊，而且正面還是朝上呢？

（三）另外，這個問題本身也可以往三度空間延伸：
若在平面上，有一個正面朝上的立方塊，若每次只能以一個稜邊用翻轉 90 度的方式移動，請問可不可能將立方塊「翻轉」到相鄰的位置，而且正面還是朝上呢？

五、參考資料

[1] 國立編譯館國中數學教科書編審委會，國民中學數學第二冊，正式本再版三刷，台北市，國立編譯館，第 46 到 72 頁，民 90。

[2] 國立編譯館國中數學教科書編審委員會，國民中學數學第六冊，正式本再版二刷，台北市，國立編譯館，第 6 到 39 頁，民 91。

[3] 高中數學第一冊，修訂版，台南市，南一書局有限公司，第 46 到 61 頁，民 91。

[4] 高中數學第二冊，修訂版，台南市，南一書局有限公司，第 65 到 211 頁，民 91。

[5] 高中數學第三冊，修訂版，台南市，南一書局有限公司，第 1 到 64 頁，民 91。