台灣二００五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：完全圖立方乘積之最小控制

得獎獎項：大會獎佳作

學　　校：臺北市立建國高級中學、臺北市私立復興國民中學

作　　者：陳冠儒、陳冠霖

評語與建議事項：

本文所研究的最小控制數是道非常困難、也極爲熱門的一項研究。本研究所獲得的上界爲完整的研究帶來極大的改進的空間。

作品名稱：完全圖立方乘積之最小控制

作　　者：陳冠儒

目前就讀於建國中學數理資優班一年級

35 屆台北市中小學科展生活與應用科學密碼大作戰佳作

36 屆台北市中小學科展生活與應用科學蛙鳴鳥聲知多少佳作及精神研究獎

43 屆全國科展地球科學科太陽、月亮斜斜掛大會獎佳作

43 屆全國科展數學科密碼鎖大會獎第二名

92 年度數學研究三角形周長和邊長為整數時的組合關係

台北市政府教育局 92 年國中盃數學競賽二等獎

93 年度台灣國際科展數學科密碼鎖佳作

作　　者：陳冠霖
目前就讀於私立復興中學國中三年級

36 屆台北市中小學科展生活與應用科學蛙鳴鳥聲知多少佳作及精神研究

36 屆台北市中小學科展數學科密碼鎖特優

43 屆全國科展數學科密碼鎖大會獎第二名

台北市政府教育局 92 年國中盃數學競賽佳作

93 年度台灣國際科展數學科密碼鎖佳作

2004 年國際國中生科學奧林匹亞競賽國家代表隊研習營結業

完全圖立方乘積之最小控制

中文摘要：

完全圖K_n是指一個圖中有n個點，且任意一個點都跟其它的點有邊相連。兩個圖G和H的卡氏乘積$G\square H$的點集$V(G\square H)=\{(g,h)|\ g\in V(G),h\in V(H)\}$，兩個點$(g_1,h_1)$和$(g_2,h_2)$有邊相連若且爲若$g_1=g_2$ 且$h_1\sim h_2$，或$g_1\sim g_2$且$h_1=h_2$。

三個完全圖K_a、K_b、K_c的立方乘積是指$K_a\square K_b\square K_c$。一個圖$G$中的一點$v$所連的其它點稱爲這個點$v$的鄰居，也就是$N(v)=\{x \mid x\sim v\}$。一個點集$S$中的所有點的鄰居的聯集稱爲這個點集的鄰居，也就是$N(S)=\cup_{v\in S}N(v)$。如果一個點集$S$和它的鄰居$N(S)$包含了一個圖$G$的所有的點，也就是$S\cup N(S)=V(G)$稱這個點集$S$是這個圖$G$的一個控制集。我們把圖$G$的所有控制集中點數最少的稱爲最小控制集，並定最小控制集的點數爲最小控制數$\gamma(G)$，也就是$\gamma(G)=min\{\,|S|,\ S$是G的控制$\}$。

本文的目的在於研究完全圖立方乘積的最小控制，也就是要給$\gamma(K_a\square K_b\square K_c)$一個上界。

特別當 $a=b=c=n$時，$\gamma(K_a\square K_b\square K_c)=\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil^2+\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor^2$。

英文摘要（Abstract）：

A complete graph K_n is a graph with n vertices, which any vertex is adjacency to every other vertices. The Cartesian product of two graph G and H which is denoted $G\square H$ is define as follow: the vertex set $V(G\square H)=\{(g,h)|\ g\in V(G), h\in V(H)\}$，and two vertices (g_1,h_1) and (g_2,h_2) is adjacent if and only if $g_1=g_2$ and $h_1\sim h_2$ or $g_1\sim g_2$ and $h_1=h_2$. The Cartesian product of three complete graph K_a,K_b,K_c is $K_a\square K_b\square K_c$,which is the same with $(K_a\square K_b)\square K_c$.

In a graph G, the neighbor of a vertex v $N(v)$ is the set of the vertices adjacent to the vertex v, that is $N(v)=\{x \mid x\sim v\}$。 The neighbor of a vertex set S is N(S), which is the union of the neighbors of vertex v over S, that is $N(S)=\cup_{v\in S}N(v)$. For a graph G, if a vertex set S unions its neighbor N(S) equal to the vertex set of G, that is $S\cup N(S)=V(G)$, we say that S is a dominating set of G. The domination number of a graph G will be denoted as $\gamma(G)$, which is the minimum size of all dominating set of G..

We give an upper bound to $\gamma(K_a\square K_b\square K_c)$. And when $a=b=c$, $\gamma(K_a\square K_b\square K_c) \leqq \left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor^2$.

一、前言：

1988 年國際奧林匹克數學競賽，東德提供了一題預選題題目如下：一個保險櫃上的鎖由三個旋鈕組成，每個旋鈕有 8 種不同的位置(號碼)。由於保險櫃構造上的缺點，三個旋鈕中只要有兩個在正確位置時，櫃門即被打開。問至少嘗試多少次組合，才能保證門一定被打開(假定不知道“正確的組合”)。書中證明了如果要保證能打開鎖，至少要試 32 次，也就是只試 31 次，無法保證可以打開鎖。一種試 32 次保證打開的解爲：{ (1,1,1), (1,2,4), (1,3,3), (1,4,2), (2,1,2), (2,2,1), (2,3,4), (2,4,3), (3,1,3), (3,2,2), (3,3,1), (3,4,4), (4,1,4), (4,2,3), (4,3,2), (4,4,1); (5,5,5), (5,6,8), (5,7,7), (5,8,6), (6,5,6), (6,6,5), (6,7,8), (6,8,7), (7,5,7), (7,6,6), (7,7,5), (7,8,8), (8,5,8), (8,6,7), (8,7,6), (8,8,5)}。

若有一個密碼鎖有三個旋鈕，每個位置的號碼分別爲 $1\sim a$、$1\sim b$、$1\sim c$，其中$a, b, c\in \boldsymbol{N}$，若用$K_a\square K_b\square K_c$代表這一個鎖，則這個鎖所有可能號碼組合$L=\{ (x, y, z) \mid 1\leqq x\leqq a, 1\leqq y\leqq b, 1\leqq z\leqq c ; x, y, z\in \boldsymbol{N} \}$。也因爲如此，這個鎖也可看成一個邊長分別$a, b, c$之長方體被切割成$a\times b\times c$個單位正方體，每一個單位正方體的座標爲$(x, y z)$，恰對應了一種密碼鎖可能的號碼。明顯知，$|L|=a\times b\times c$。

當我們試了某個號碼，不失一般性的假設試的號碼爲(1,1,1)，若原先的密碼爲$(1,1,t)$、$(1, t,1)$或 $(t,1,1)$，都是可被打開的。從 L 的幾何圖形來看，當成先把座標(1,1,1)的正方體塗成黑格，再從(1,1,1)這個黑格往 X、Y、Z 三個方向各延伸出一條線段，這三條線所覆蓋的正方體的座標恰是猜(1,1,1)可以打的開號碼。我們的目標就是找出如何放最少個黑格，使得這些黑格及及延伸的直線可完全覆蓋大長方體。

這樣的問題恰恰與求完全圖立方乘積的最小控制是等價的。所謂的完全圖K_n是指一個圖中有n個點$\{1,2,\ldots,n\}$，且任意一個點都跟其它的點有邊相連。兩個圖G和H的卡氏乘積$G\square H$的點集$V(G\square H)=\{ (g,h) \mid g\in V(G), h\in V(H)\}$，兩個點$(g_1,h_1)$和$(g_2,h_2)$有邊相連若且爲若$g_1=g_2$ 且$h_1\sim h_2$，或$g_1\sim g_2$且$h_1=h_2$。

一個圖G中的一點v所連的其它點稱爲這個點v的鄰居，也就是$N(v)=\{ x \mid x\sim v\}$。我們說一個點v可以控制的點爲$v\cup N(v)$，也就是一個警衛可以在某一個位置v，可以看守到的點就是v還有和v相鄰的點。一個點集S中的所有點的鄰居的聯集稱爲這個點集的鄰居，也就是$N(S)=\cup_{v\in S}N(v)$。如果一個點集S和它的鄰居$N(S)$包含了一個圖G的所有的點，也就是$S\cup N(S)=V(G)$稱這個點集S是這個圖G的一個控制集，本文中的S，就是指圖G的一個控制。我們把圖G的所有控制集中點數最少的稱爲最小控制集，並定最小控制集的點數爲最小控制數$\gamma(G)$，也就是$\gamma(G)=min\{\,|S| \mid S\cup N(S)=V(G), S\subseteq V(G)\}$。

完全圖的立方乘積是指三個完全圖K_a、K_b、K_c的卡氏乘積$K_a\square K_b\square K_c$，跟$(K_a\square K_b)\square K_c$或$K_a\square(K_b\square K_c)$是一樣的。在圖$G=K_a\square K_b\square K_c$中，$V(G)=\{ (x, y, z) \mid 1\leqq x\leqq a, 1\leqq y\leqq b, 1\leqq z\leqq c；x, y, z\in \boldsymbol{N} \}$，點$(x, y, z)$跟點$(t,u,v)$有邊相聯若且爲若$x=t$, $y=u$且z和v在K_c中有邊相連，或$x=t$, $z=v$且y和u在K_b中有邊相連或$y=u$, $z=v$且x和t在K_a中有邊相連。跟原先的圖L，對於給定的a, b, c，$V(L)=\{ (x, y, z) \mid 1\leqq x\leqq a, 1\leqq y\leqq b, 1\leqq z\leqq c；x, y, z\in \boldsymbol{N} \}$，點$(t,u,v)$和同一行和同一列和同一排的所有點相連是一樣的。因此，對有缺陷的密碼鎖找最快的開鎖法，跟對圖$G = K_a\square K_b\square K_c$找最小控制是等價的問題。我們也把圖$K_a\square K_b\square K_c$看成是一個$a\times b\times c$的長方體。

本文將針對$a=b=c=n$、$a=b<c$，$a=b>c$和$a>b>c$四個部份，去給 $\gamma(K_a\square K_b\square K_c)$一個上界。以下的討論，任何一個變數若沒有特別說明，都是自然數。

二、研究過程與結果

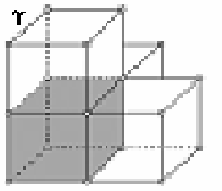

圖1

二之一　第一個部份是先解決三個位置都相同，即$a=b=c=n$的情況。可以將將邊長爲n的正方體切成兩個立體物件，每一個立體物件都像圖一那樣。再對每個一立體物件找到最小控制。像這樣由四個邊長爲r的正方體組合成的立體物件，我們稱爲邊長爲r的三叉體。對於邊長爲r的三叉體，可以很容易得到一個大小爲r^2的控制。給定邊長爲n的正方體，把它分成兩個邊長分別爲s和t

的三叉體，在$s+t=n$的條件下，s^2+t^2的最小值在s和t分別是$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$和$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$的時候。

定理一　對於給定的n，完全圖K_n自己的卡氏立方乘積的最小控制數 $\gamma(K_n\square K_n\square K_n) \leqq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2$。

設 $s=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，$t=\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$，且選取 1,2,3,…,$s$ 爲模 s 下的一組剩餘系，選取 $s+1$, $s+2$, $s+3$, ……,n 爲模 t 下的一組剩餘系，很明顯的知 A=$\{(i, j, i+j-1) \mid 1\leqq i\leqq s, 1\leqq j\leqq s,$　其中 $i+j-1$ 爲模 s 下的數$\}$及 B=$\{(n-i, n-j, n-i-j) \mid 0\leqq i\leqq h-1, 0\leqq j\leqq h-1,$ 其中 $n-i-j$ 爲模 t 下的數 $\}$，A∪B 可以做爲圖 G 的一組控制。像 A 集合中的點的分佈方式，我們稱爲轉格。

二之二　當$a=b=n$，$c=n+k$時，圖$G=K_n\square K_n\square K_{n+k}$的控制是跟$K_n\square K_n\square K_n$的控制是有關的。

從前一小節我們知道，當$s+t=n$，一個$n\times n\times n$的正方體，可由兩個邊長分別爲s、t的三叉體組合而成 (這邊我們假設$s\leqq t$)。 而這個正方體往某一方向(就說是z方向)多了k層變成$n\times n\times(n+k)$的長方體。若只往Z方向延伸一層，有s^2+t^2的點依然被控制，只需要再加上s個守衛就可以控制所有增加的點，故延伸k層只需加$s\times k$個點，即可成爲$K_n\square K_n\square K_{n+k}$的一個控制，就是$\gamma(K_n\square K_n\square K_{n+k}) \leqq s^2+t^2+sk$。

定理二　$\gamma(K_n\square K_n\square K_{n+k})\leqq min\,\{s^2+t^2+sk \mid s+t=n; t\geq s\geq 0; s, t \in Z\}$，特別當$k\geqq 2n-2$時，也就是當$c\geqq 3a-2$時，$\gamma(K_a\square K_a\square K_c)=a^2$。

透過簡單的計算，可以知道在$s+t=n;\ t\geq s\geq 0;\ s,\ t\in Z$的條件下，當$s=\text{round}(\frac{2n-k}{4})=\text{round}(\frac{3a-c}{4})$時，$s^2+t^2+sk$會有極小值。選取 1,2,3,…,$s$爲模$s$下的一組剩餘系，選取$s+1$, $s+2$, $s+3$, ……,n爲模t下的一組剩餘系，可以得到A=$\{(i, j, i+j-1) \mid 1\leqq i\leqq s, 1\leqq j\leqq s,$ 其中$i+j-1$ 爲模 s

下的數}、B={(n-i, n-j, n-i-j) | $0\leqq i\leqq t$-1, $0\leqq j\leqq t$-1, 其中n-i-j爲模t下的數}、C＝{(i, i, n+j) | $1\leqq i\leqq s$, $1\leqq j\leqq k$}, 則A∪B∪C可以做爲圖G的一組控制。

二之三　當 $a=b=n>c$ 的情況

在這個條件下，我們完成了一些case的證明。透過這些例子的研究，我們找到了一個可以找圖G＝$K_n \square K_n \square K_c$的一組控制的方法。另外，我們也發現了一個簡單的性質。

引理三　兩個完全圖的卡氏立方乘積$K_n \square K_n \square K_c$和$K_{n+1} \square K_{n+1} \square K_c$的最小控制有以下的關係：$\gamma(K_{n+1} \square K_{n+1} \square K_c) \leqq \gamma(K_n \square K_n \square K_c)+c$。

證明：　令S是圖$K_n \square K_n \square K_c$的最小控制，令S'＝{ ($n$+1, n+1, i) | $1\leqq i\leqq c$}，則S∪S'可以是圖$K_{n+1} \square K_{n+1} \square K_c$的一個控制。如此就證明了$\gamma(K_{n+1} \square K_{n+1} \square K_c) \leqq \gamma(K_n \square K_n \square K_c)+c$。

引理四　當c＝2 時，圖$K_n \square K_n \square K_2$的最小控制$\gamma(K_n \square K_n \square K_2)=2(n-1)$。

證明　爲了方便，在以下的證明及以後的討論中，X_i用來表示$\{i\} \square K_b \square K_c$，$Y_i$表示$K_a \square \{i\} \square K_c$，$Z_i$用來表示$K_a \square K_b \square \{i\}$。令S={($i$+$j$-1, i+j-1, j) | $1\leqq i\leqq n$-1, j=1,2}，則S可爲圖$K_n \square K_n \square K_2$的一組控制。現在令T是一個大小爲 $2n-3$ 的點集，令$T_1=T\cap Z_1$，$T_2=T\cap Z_2$爲T的兩個互斥的子集，因$\left\lfloor \frac{2n-3}{2} \right\rfloor = n-2$，也就是說$T_1$和$T_2$中較小的集合只有$n-2$ 個點。不失一般性的設T_1只有$n-2$個點，則Z_1中有 4 個點需要T_2中的 4 個點來控制。此時只剩下$n-5$ 個點，不可能完全控制Z_2的所有點，因此$\gamma(K_n \square K_n \square K_2)=2(n-1)$。

引理五　當$c=3$ 時，圖$K_4 \square K_4 \square K_3$的最小控制$\gamma(K_4 \square K_4 \square K_3)=8$，圖$K_5 \square K_5 \square K_3$的最小控制$\gamma(K_5 \square K_5 \square K_3)=10$，當$n\geqq 6$ 時，圖$K_n \square K_n \square K_3$的最小控制$\gamma(K_n \square K_n \square K_3)=3(n-2)$。

引理五的證明跟引理四的證明很類似，也是用鴿籠原理加上一些仔細的計數，就可以完成證明。透過引理四與引理五，我們提出了以下的猜想。

猜想六　當$n \geqq c(c-1)$時，圖$K_n \square K_n \square K_c$的最小控制$\gamma(K_n \square K_n \square K_c) = c(n-c+1)$。

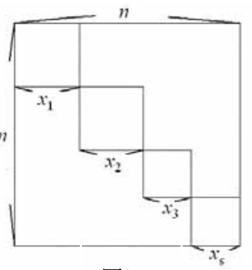

圖2

當 $n \geqq c(c-1)$時，我們提供一個方法去找到一組盡量小的控制。先把$n \times n \times c$的長方體切成 c 層，每一層都是邊長 n 的正方形。再把這邊長爲 n 的正方形切成 s 個小正方形(區塊)如圖 2 一樣，設這些小正方形的邊長分別是 x_1 、 x_2 、… 、 x_s 。一個邊長 x_i 的區塊如完全靠上下控制，則需要 x_i^2 個黑格。我們只需要照著如前文中所題到的轉格的方式排列，在每一層都放置 x_i 個點。除了這 x_i 層之外的 $c-x_i$ 層，各層在這邊長 x_i 的區塊都已被控制，只要妥善的選取 $n-x_i$ 個點，就可以完全覆蓋這些層。

如此，每一層可以在一個區塊完全沒有點，故我們計算在 $x_1, x_2, \ldots x_{s-1}$ 這幾個區塊中，共有 $t = c - x_1 + c - x_2 + .. + c - x_{s-1}$ 這麼多層已經有在某一個區塊沒有選取點，所以在最後一個區塊 x_i 中，有 t 層各層都有 x_i 個黑格。如此我們就有以下定理。

定理七　當$n \leqq c(c-1)$時，圖$K_n \square K_n \square K_c$的最小控制$\gamma(K_n \square K_n \square K_c)$

$$\min\{\, x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_{s-1}^2 + t\,x_s \mid x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_{s-1} \leqq x_s,\quad x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{s-1} + x_s = n,$$

$$t = (s-1)c - (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{s-1}) \,\}$$

二之四 最後是 $a > b > c$ 的情況

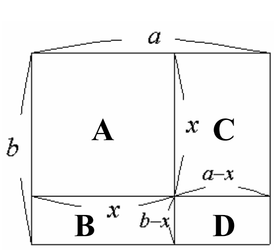

圖3

令S是圖$G = K_a \square K_b \square K_c$的一個控制，也而$S_i = S \cap Z_i$爲S的一組分割，不失一般性的設$S_1$爲最小的子集且$|S_1| = x$，$0 < x \leqq b$，則長方體$a \times b \times c$就如圖 3 一樣的被分成A、B、C、D四區。其中$Z_1$在D區還有$(a-x)(b-x)$個點需要被其它在$Z_i$，$i \neq 1$ 的點來控制，S就至少在D區需要$(a-x)(b-x)$個點。我們假設這些點平均的分配在Z_j，$j = 2,3,4,..b-x+1$，都有$a-x$個。

做爲一組控制的 S 在 D 區是沒有點共有 $c-(b-x)$層(包括第一層)，這些層在 A 區都要 x 個點，共需 $x(c+x-b)$ 個點。因爲至少有第一層在 D 區是沒有點落在 S 中，且 $b>c$，因此我們知道 $0<(c+x-b)<x$。

S 在 D 區有選到點的的層數是 $b-x$ 層，再考慮這些層在 A 區的情況，因爲 S 在 A 區有選到 x 個點的已經有$(c+x-b)$層了，這些在 A 區的點至少能形成一個邊長$(c+x-b)$的正方形，如此在這 $b-x$ 層中，每層只需要再選到 $x-(c+x-b)$個點就能完全被控制。因此 S 還需要$(b-x)(b-c)$個點。

把這三類的點加起來共有 $2x^2-(a+3b-2c)x+b(a+b-c)$個點。經過配方後，知道當x是在 $0<x\leqq b$這範圍中離 $\frac{a+3b-2c}{4}$ 最近的整數時，能到到一組盡量小的控制。我們只要把給定的 a、b、c代進去算出x，就可以得到最小控制數的上界。

而當$x=b$時，，此時 $\frac{a+3b-2c}{4}\geq b-\frac{1}{2}$，即$a\geqq b+2c-2$，時，函數值會等於$bc$。這跟$b=c$的情況，$a\geqq 3c-2$ 時只要試c^2次就好的結果是一致的。但當$a=b$時，這個方法得到的最小控制數會比貳之三節所提供方法來的大，但我們仍然不太清楚是什麼原因。

定理八 當$a>b>c$時，圖$K_a\square K_b\square K_c$的最小控制$\gamma(K_a\square K_b\square K_c)\leqq 2x^2-(a+3b-2c)x+b(a+b-c)$, if $\frac{a+3b-2c}{4}\geqq b$, x=b， eles x=round($\frac{a+3b-2c}{4}$)。

三、結論與應用

定理一 對於給定的n，完全圖K_n自己的卡氏立方乘積的最小控制數 $\gamma(K_n\square K_n\square K_n)\leqq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2+\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2$。

定理二 $\gamma(K_n\square K_n\square K_{n+k})\leqq min\,\{s^2+t^2+sk\mid s+t=n;\ t\geq s\geq 0;\ s,t\in Z\}$，特別當$k\geqq 2n-2$ 時，也就是當$c\geqq 3a-2$ 時，$\gamma(K_a\square K_a\square K_c)=a^2$。

引理三 兩個完全圖的卡氏立方乘積$K_n\square K_n\square K_c$和$K_{n+1}\square K_{n+1}\square K_c$的最小控制有以下的關係：$\gamma(K_{n+1}\square K_{n+1}\square K_c)\leqq\gamma(K_n\square K_n\square K_c)+c$。

引理四 當$c=2$ 時，圖$K_n\square K_n\square K_2$的最小控制$\gamma(K_n\square K_n\square K_2)=2(n-1)$。

引理五　當 $c=3$ 時，圖 $K_4\square K_4\square K_3$ 的最小控制 $\gamma(K_4\square K_4\square K_3)=8$，圖 $K_5\square K_5\square K_3$ 的最小控制 $\gamma(K_5\square K_5\square K_3)=10$，當 $n\geqq 6$ 時，圖 $K_n\square K_n\square K_3$ 的最小控制 $\gamma(K_n\square K_n\square K_3)=3(n-2)$。

猜想六　當 $n\geqq c(c-1)$ 時，圖 $K_n\square K_n\square K_c$ 的最小控制 $\gamma(K_n\square K_n\square K_c)=c(n-c+1)$。

定理七　當 $n\leqq c(c-1)$ 時，圖 $K_n\square K_n\square K_c$ 的最小控制 $\gamma(K_n\square K_n\square K_c)$

$$min\{\, x_1^2+x_2^2+......+x_{s-1}^2+t\,x_s \mid x_1\leqq x_2\leqq x_3\leqq \ldots\leqq x_{s-1}\leqq x_s,\quad x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{s-1}+x_s=n,$$

$$t=(s-1)c-(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{s-1})\,\}$$

定理八　當 $a>b>c$ 時，圖 $K_n\square K_n\square K_c$ 的最小控制 $\gamma(K_n\square K_n\square K_c)\leqq 2x^2-(a+3b-2c)x+b(a+b-c)$,

if $\dfrac{a+3b-2c}{4}\geqq b$, x=b， eles x=round($\dfrac{a+3b-2c}{4}$)。

我們一直很希望能夠證明我們所提供的方法所找到的一組控制，就是圖 $K_a\square K_b\square K_c$ 的最小控制，但總有一些情況不能克服。不過我們有信心相信，在 $a=b=c$ 時的確是最佳解，也就是我們猜想 $\gamma(K_n\square K_n\square K_n)=\left\lfloor \dfrac{n}{2}\right\rfloor^2+\left\lceil \dfrac{n}{2}\right\rceil^2$ 應該是對的。希望在不久的將來我們能加以突破，或是進一步去找圖 $K_a\square K_b\square K_c\square K_d$ 的最小控制。

四、參考資料

單墫、胡大同　　　數學奧林匹克第 28、29 屆國際數學競賽預選題　　九章出版社 p.42，p.73~p.75