台灣二ＯＯ五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：一個也沒漏掉，一個正有理數的排序的研究

學　　校：臺南縣私立興國高級中學

作　　者：顏煥庭

作者簡介

我的名字是顏煥庭，目前就讀於台南縣興國高中三年級。從小就對數學情有獨鍾，受到數學老師們的薰陶，對於數學問題總是充滿好奇，尤其是想通之後的那份喜悅。數學就像魔術師，變幻著無窮的驚奇饗宴。

這次的研究中，不僅是學術上的收穫，更深刻體會做研究要誠懇且踏實。在這過程中我要特別感謝我的爹娘；還有不斷引導我的老師，是你帶領我闖進了多彩多姿的數學天堂，鼓勵我不斷往前邁進；以及熱情的 younger 老師。 另外，謝謝協助過我的同學(子豪、育霖、曉盈)。這份成果希望能和你們一同分享。

一個也沒漏掉，一個正有理數的排序的研究

None Is Lost

英文摘要：

A Study about the Arrangement of the Positive Rational Numbers

Summary：

Let's discuss an interesting sequence. There is a very special quality in it. In this sequence, choose two numbers, which are close to each other, and suppose the first number as "member" while the second one as "denominator." Then we can get a fraction sequence that includes all of the positive rational numbers! According to this special quality, we can arrange positive rational numbers by the following method. Then we can get a brand-new way of the arrangements.

(1). We can find many theorems about this sequence according to this special arrangement of the positive rational numbers.

(2). We can prove the rule that this fraction sequence includes all of the positive rational numbers by mathematical induction. Furthermore, every positive rational number appears only once.

(3). After dividing this sequence into several parts, we can get a sequence rule list by using trial balance and find a faster method to express the sequence.

(4). Arrange the a_n sequence by the tree model. By this way, we can get all of the positive rational numbers much faster.

(5). Finally, we can develop the operation method to solve the questions that what position would one positive rational number be in the sequence and what is the first, second, third or nth positive rational number of the sequence.

中文摘要：

本文中我們探討一個有趣的數列。這個數列有一個非常特殊的性質：將數列相鄰兩項的前項當分子，後項當分母，所產生的分數數列，恰好會出現所有的正有理數。 這個特殊的性質表示，可以將正有理數按照這個方式作排序，這個排序將完全不同於常見的正有理數排序的方法。

(1). 在正有理數的排序的結構中，我們做出許多有關於此數列的定理。

(2). 用數學歸納法證明此分數數列涵蓋所有正有理數，且每一正有理數只出現過一次。

(3). 將數列分割後，利用試算表製成數列規則表，並整理出快速的方法將數列表達出來。

(4). 將 a_n 數列排成"樹"的模式，可更快速的把正有理數寫下來。

(5). 最後，設計出搜尋正有理數的演算法，解決在 $\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$ 分數數列中第 n 個正有理數會是多少；以及正有理數 $\dfrac{q}{p}$ 會出現在數列中第幾項的問題。

一、前言及研究動機：

我們在寒假中接觸一個有趣的數學問題。在這個問題中，讓我們產生了很大的興趣，題目說明數列的兩個規則：

$$\{a_n\}_{n\ge 0}\text{，}a_0=1\text{，}n\in Z\text{，}n\ge 0 \qquad (1)$$

$$a_{2n+1}=a_n, a_{2n+2}=a_n+a_{n+1} \qquad (2)$$

其中此$\{a_n\}$數列$\{a_n\}_{n\ge 0}=\{1.1.2.1.3.2.\cdots\cdots\}$。

在研究此數列時，經過許多次觀察與猜測，發現在這看似毫無規則的數字中若將數列適當的分割開來，每一間隔都有固定的形式，間隔與間隔之間能找到些許的規則，這是新的發現，有對稱、遞迴等與一般正有理數排序數列完全不同的方法。並藉由此數列，將數列變換成$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\ge 1}$的形式時，可將每一個正有理數都涵蓋在裡面，這讓我們感到非常有趣，因此我們仔細研究此數列中的規則並得到定理，證明有關所有正有理數涵蓋其中的結果，並更深入一步推廣出相關的結論。

二、研究目的：

1 爲了知道是否所有正有理數都存在這數列中，我們不斷觀察有什麼規則，最後發現並近一步證明出$\{a_n\}$數列中含有偶數項等於前後兩奇數項和的規則。

2 經由觀察並由數學歸納法證明得知$a_{2^n-1}=1$，將a_n數列以1爲界採段落式分隔法，使數列分隔開來，並將a_n數列每移一項寫成分子及分母形式的$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\ge 1}$分數數列，再觀察其中是否有規則，發現以下幾點規則：

(1) 第n間隔中包含了2^{n-1}個正有理數$n\in N$。

(2) 每一間隔的首末兩項爲倒數。

(3) 若取第n個間隔與第$n+1$個間隔，則第$n+1$個間隔的分母相加總和或分子相加總和爲第n個間隔的分母總和或分子總和的 3 倍。

(4) $\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\ge 1}$數列中，證明是否能涵蓋所有的正有理數及每一正有理數有無重複性。

3 藉由試算表並利用已知的數列規則找出更簡易且快速的方法將所有正有理數呈現出來。

4 設計一套演算解決第 n 個正有理數會是多少，以及正有理數 $\frac{p}{q}$ 會是第幾項的問題。

5 在這個研究報告中共分爲九個章節：

(1) 數列的定義與分析推廣。

(2) 從 a_n 數列中經由觀察數字的變化、猜想與分析。

(3) 將 a_n 數列每隔一項寫成分子及分母形式的 $\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$ 分數數列。

(4) 觀察間隔分母分子總和的問題。

(5) 所有正有理數出現的過程。

(6) 將數列每一間隔做不同的排列，金字塔規則表。

(7) 將 a_n 數列排成“樹”的模式，可更快速的把正有理數寫下來。

(8) 搜尋正有理數的演算法。

(9) 利用演算法的策略轉換成輾轉相除法的型式，將正有理數能更有規則的找出來。

三、研究方法與過程：

（一）數列的定義與分析推廣

定義一：$\{a_n\}_{n\geq 0}$，$a_0=1$，$n\in Z$，$n\geq 0$，$a_{2n+1}=a_n$，$a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}$。

當n為奇數項時，會等於第$2n+1$項的值，亦等於$\frac{(2n-1)}{2}$項的值，$ex:a_9=a_{19}=a_4=3$。

當n為偶數項時，會等於第$\frac{n}{2}$加上第$\left(\frac{n}{2}\right)-1$項的和。$ex:a_8=a_4+a_3=3+1=4$

若繼續以這樣的模式尋找，可得到一系列的值：

n	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
a_n	1	2	3	3	4	5	5	4	5	7	8	7	7	8	7	5	6	9	11	10	11

n	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1	5	4	7	3	8

$a_2=a_0+a_1, a_4=a_1+a_2, a_6=a_2+a_3$，顯然偶數項為連續兩項相加的和，且連續的偶數對應相加的項有一定的規律，這個規律若以n表示，則連續三個偶數為

$a_n+a_{n+1}, a_{n+1}+a_{n+2}, a_{n+2}+a_{n+3}$。

証明：假設三個連續的偶數為a_{2n+2}、a_{2n+4}、a_{2n+6}。

$\because$ 定義 $a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}$

$\therefore a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}, a_{2n+4}=a_{n+1}+a_{n+2}, a_{2n+6}=a_{2n+2}+a_{2n+3}$

所以經由推導得知三個連續的偶數為a_n+a_{n+1}，$a_{n+1}+a_{n+2}$，$a_{n+2}+a_{n+3}$。

再者，發現 "1" 有某種規律的出現，$a_3=a_1$，$a_5=a_2$，$a_7=a_3$由此大膽假設$a_{2^n-1}=1$。

經由証明得到引理一：$a_{2^n-1}=1$

証明：當$n=1$時，$a_1=1$；當$n=2$時，$a_3=1$；若假設$n=k$時，$a_{2^k-1}=1$成立。

則當$n=k+1$時，$a_{2^{k+1}-1}=a_{\frac{\left(2^{k+1}-1\right)+1}{2}}=a_{2^k-1}=1$。$\left(\because a_n=a_{2n+1}\Leftrightarrow a_{\frac{n-1}{2}}=a_n\right)$

既然$a_{2^n-1}=1$是一個很明顯的規則，我們將每兩連續出現的 1 分隔開來各形成一段數列來討論。這樣討論方式將用在把a_n數列每隔一項寫成分子及分母形式的$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$分數數列中。

（二）從a_n數列中經由觀察數字的變化、猜想與分析

在觀察數列中，我們發現凡是偶數項的值等於前後兩奇數項相加的值。
以下列出部分a_n數列，說明我們的發現過程：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1	5	4	7	3	8

注意加粗的偶數項（$ex: a_2=a_1+a_3=1+1=2$；$a_4=a_3+a_5=1+2=3$；

$a_6=a_5+a_7=2+1=3$）在觀察中發現偶數項爲前後兩奇數項的和，於是我們猜測有此規則。

定理一：在a_n數列中，$a_{2n}=a_{2n-1}+a_{2n+1}$，$n\in N$。

證明：

（1）$n=1$時，$a_2=a_1+a_3$，

而a_2可以分解得到a_1+a_0，而$a_3=a_1\rightarrow a_1+a_0=a_1+a_3$。

故左式＝右式。

（2）$n=2$時，$a_4=a_5+a_3$，

而a_4可以分解得到$a_2+a_1, a_5=a_2, a_3=a_1\rightarrow a_2+a_1=a_2+a_1$。

故左式＝右式。

（3）設$n=k$時，得到$a_{2k}=a_{2k-1}+a_{2k+1}$。

（4）$n=k+1$時，得到$a_{2k+2}=a_{2k+3}+a_{2k+1}$，

當$a_{2k}=a_{2k+1}+a_{2k-1} \Rightarrow a_{2k+1}=a_{2k}-a_{2k-1}$代入$a_{2k+2}=a_{2k+3}+a_{2k+1}$，

得到$a_{2k+2}=a_{2k+3}+a_{2k}-a_{2k-1} \Rightarrow a_{2k+2}+a_{2k-1}=a_{2k+3}+a_{2k}$。

而根據原本定義$a_{2n+1}=a_n$，$a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}$，

得到$a_{2k+2}=a_k+a_{k+1}$，$a_{2k-1}=a_{k-1}$，$a_{2k+3}=a_{k+1}$，$a_{2k}=a_k+a_{k-1}$。

把它們帶進去得到$a_k+a_{k+1}+a_{k+1}=a_{k+1}+a_k+a_{k-1}$。

左式＝右式，當$n=k+1$時，$n \in N$ 恆成立。

綜合以上四點，由數學歸納法得知 $a_{2n}=a_{2^n-1}+a_{2^n+1}$。

（三）將a_n數列每隔一項寫成分子及分母形式的$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$分數數列

(1)　我們將a_n數列以 1 爲界採段落式分隔法，並將數列中的數a_n數列每隔一項寫成分子及分母形式的$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$分數數列，自然使這分數數列中亦爲分隔的狀態。以下爲部分數列：

$$\frac{1}{1}\Big| \Rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{1}\Big| \Rightarrow \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3}{1}\Big| \Rightarrow \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{1}\Big| \Rightarrow \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{3}{8} \cdots$$

在第一個分隔較爲特殊，因爲$a_0=a_1=1$，在a_0與a_1中並無其他數，所以並不將此二項做分隔的動作。在觀察分隔與分隔間的差異性，發現第一分隔中只有 1 個有理數，第二個間隔中有 2 個有理數，第三個間隔中有 4 個有理數，於是我們猜想是否在第n個間隔中包含2^{n-1}個分數，經由証明得到此定理。

定理二：將$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$數列每兩連續出現$a_n=1$分隔開來各自形成一段數列，則在第$n$間隔

中包含了 2^{n-1} 個正有理數，$n\in N$ 。

證明：

首先 $\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$ 數列中的分隔法是一分母爲 1 時做分隔的動作，每一間隔末項的分母爲 1，也等於 a_{2^n-1}，即爲：$\dfrac{a_0}{a_1}\Big|\dfrac{a_1}{a_2}\dfrac{a_2}{a_3}\Big|\dfrac{a_3}{a_4}\dfrac{a_4}{a_5}\dfrac{a_5}{a_6}\dfrac{a_6}{a_7}\Big|\dfrac{a_7}{a_8}\cdots\cdots\Big|\dfrac{a_{2^{n-1}-1}}{a_{2^{n-1}}}\cdots\cdots\dfrac{a_{2^n-2}}{a_{2^n-1}}\Big|\dfrac{a_{2^n-1}}{a_{2^n}}\cdots\cdots$

若欲求每一間隔含有多少個分數，即求每一間隔首尾項分母的 a_n 之 n 項相減加 1 即爲答案。

第一間隔中首項的分母爲 $a_1=a_{2^0}$，所包含的分數有 2^0 個，

第二間隔中首項的分母爲 a_2，末項分母爲 a_3，所包含的分數有 $3-2+1=2^1$ 個，

第三間隔中首項的分母爲 a_4，末項分母爲 a_7，所包含的分數有 $7-4+1=2^2$ 個，

第 n 間隔中首項的分母爲 $a_{2^{n-1}}$，末項分母爲 a_{2^n-1}，所包含的分數有

$\left(2^n-1\right)-\left(2^{n-1}\right)+1=2^n-2^{n-1}=\left(2^{n-1}+2^{n-1}\right)-2^{n-1}=2^{n-1}$ 個。

(2) 在 $\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$ 數列中(以下是部份數列)

$$\frac{1}{1}\Big|\Rightarrow\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2}{1}\Big|\Rightarrow\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{3}{1}\Big|\Rightarrow\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{4}{1}\Big|\Rightarrow\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{4}{7}\Rightarrow\frac{7}{3}\Rightarrow\frac{3}{8}\cdots\cdots$$

我們同時取每一間隔的首項爲 $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots\cdots$，這些分數的分母似乎依照間隔的不同以公差爲 1 遞增。並且第一個間隔是 $\frac{1}{1}$，第二個間隔是 $\frac{1}{2}$，第三個間隔是 $\frac{1}{3}$，我們猜測第 n 個間隔首項會是 $\frac{1}{n}$。同樣地，若取每一間隔最後一個數爲 $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{4}{1}\cdots$，發現恰與同一間隔的首項恰成爲倒數，若照前面首項的規則來看，是不是在第 n 個間隔的末項就是 $\frac{n}{1}$ 呢？

接著，我們再來找這些首項及末項分別在數列中是第幾項。在定理二證明中得知每間隔的首項在數列中爲第 2^{n-1} 項，而間隔中末項的數即爲下一間隔首項的前一項，故在數列中爲第 2^n-1 項。

定理三--1：在$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$數列中，第$n$間隔的首項，即數列中第$2^{n-1}$項的值爲 $\dfrac{1}{n}$，$n\in N$ 。

證明：

取$a_1,a_2,a_4,a_8\cdots\cdots,a_{2^n}$ 。

$\because$定義一$a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}$，

a_{2^n}項時，$a_{2^n}=a_{2^{n-1}}+a_{2^{n-1}-1}$；$a_{2^{n+1}}$項時，$a_{2^{n+1}}=a_{2^n}+a_{2^n-1}$；

由引理一$a_{2^n-1}=a_{2^{n-1}-1}=1$，則$a_{2^n}=a_{2^{n-1}}+1$；$a_{2^{n+1}}=a_{2^n}+1$

$a_{2^{n+1}}-a_{2^n}=a_{2^n}-a_{2^{n-1}}=\left(a_{2^{n-1}}+a_{2^{n-1}-1}\right)-a_{2^{n-1}}=a_{2^{n-1}-1}=1$

得知$a_{2^{n+1}}-a_{2^n}=1$。故$a_1,a_2,a_4,a_8\cdots\cdots,a_{2^n}$是一公差爲 1 的等差數。

則$\left(a_{2^0},a_{2^1},a_{2^2},a_{2^3},\cdots\cdots,a_{2^{n-1}}\right)=\left(1,2,3,4,\cdots\cdots,n\right)$ 。

所以在$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$的數列中，第$2^{n-1}$項的分母爲$n$ 。

再者，這個新數列是以$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$的模式排序而成，當分母爲$a_n$時，分子爲$a_{n-1}$ 。

現在是求$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$數列中的第$2^{n-1}$項，就是$\dfrac{a_{2^{n-1}}-1}{a_{2^{n-1}}}$，其中分母$a_{2^{n-1}}$我們知道爲$n$ 。

分子爲$a_{2^{n-1}-1}=a_{2^n-1}=1$(引理一$a_{2^n-1}=1$)

故數列中的第2^{n-1}的值爲$\dfrac{a_{2^{n-1}}-1}{a_{2^{n-1}}}=\dfrac{1}{n}$ 。

定理三--2：在$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$數列中，第$n$間隔的末項，即數列中第$2^n-1$項的值爲$\dfrac{n}{1}$。$n\in N$

証明：

$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq1}$ 的數列中，在第 n 個間隔中末項為下一間隔首位數 2^n 的前一項，為 2^n-1 項。

在 $\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq1}$ 數列中第 2^n-1 項為 $\frac{a_{2^n-2}}{a_{2^n-1}}$。引理一 $a_{2^n-1}=1$。

a_{2^n-2} 項也是 $\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq1}$ 數列中第 2^n-2 項 $\left(\frac{a_{2^n-3}}{a_{2^n-2}}\right)$ 的分母，

我們發現第 2^n-2 項的分母會等於 2^{n-1} 項的分母，也就是說 $a_{2^n-2}=a_{2^{n-1}}$，是不是這樣呢？

以下利用數學歸納法證明之：

$a_{2^n-2}=a_{2^{n-1}}$，由定義 $\left(a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}\right)$ 可將 a_{2^n-2} 及 $a_{2^{n-1}}$ 分解，

假設 $a_{2^n-2}=a_{2^{n-1}}$，其中 $a_{2^n-2}=a_{2^{n-1}-1}+a_{2^{n-1}-2}$；$a_{2^{n-1}}=a_{2^{n-2}}+a_{2^{n-2}-1}$。

引理一提到 $a_{2^n-1}=a_{2^{n-1}-1}=a_{2^{n-2}-1}=1$，則證明 $a_{2^{n-1}-2}=a_{2^{n-2}}$ 即可。

（1）$n=1$ 時，$a_1=a_0$　左式＝右式。

（2）$n=2$ 時，$a_2=a_2$　左式＝右式。

（3）$n=3$ 時，$a_4=a_6$，其中 $a_4=a_1+a_2=a_1+a_1+a_0$；

$$a_6=a_2+a_3=a_0+a_1+a_1=2a_1+a_0$$ 　左式＝右式。

（4）假設 $n=k$ 時，$a_{2^{k-1}-2}=a_{2^{k-2}}$ 成立。

（5）$n=k+1$ 時，$a_{2^k-2}=a_{2^{k-1}}$，其中 $a_{2^k-2}=a_{2^{k-1}-1}+a_{2^{k-1}-2}$；$a_{2^{k-1}}=a_{2^{k-2}}=a_{2^{k-2}-1}$，

$\because a_{2^{k-2}-1}=a_{2^{k-1}-1}=1$。在 $n=k$ 時，$a_{2^{k-1}-2}=a_{2^{k-2}}$。

$\therefore$ 左式＝右式，故 $a_{2^k-2}=a_{2^{k-1}}$ 恆成立。

由數學歸納法得知，$a_{2^n-2}=a_{2^{n-1}}$，由定理 3-1 證明中在 $\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq2}$ 數列，第 2^{n-1} 項 $\left(\frac{a_{2^{n-1}-1}}{a_{2^{n-1}}}\right)$ 的值為 $\frac{1}{n}$。由此得知 $a_{2^{n-1}}=n$。故在數列中第 2^n-1 項為 $\frac{a_{2^n-2}}{a_{2^n-1}}=\frac{a_{2^{n-1}}}{1}=\frac{n}{1}$。與 2^{n-1} 項互為倒數。

（四）觀察間隔分母分子總和的問題

當我們猜想間隔與間隔間的差異性是否有規律性，觀察分數總和的變化，由於分數之間分母與下一分數分子成斜線對應，則分母總和與分子總合相同。

$$\left.\frac{1}{1}\right|\Rightarrow\frac{1}{2}\Rightarrow\left.\frac{2}{1}\right|\Rightarrow\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{2}{3}\Rightarrow\left.\frac{3}{1}\right|\Rightarrow\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{3}{4}\Rightarrow\left.\frac{4}{1}\right|\Rightarrow\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{4}{7}\Rightarrow\frac{7}{3}\Rightarrow\frac{3}{8}\cdots$$

我們取前四個間隔做觀察，

第一個間隔分子總和＝分母總和＝1

第二個間隔分子總和＝分母總和＝$2+1=3$

第三個間隔分子總和＝分母總和＝$3+2+3+1=9$

第四個間隔分子總和＝分母總和＝$4+3+5+2+5+3+4+1=27$

從這些觀察發現，相鄰的間隔分子或分母總和竟成倍數 3 在成長。

定理四：$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq1}$ 數列中，第 n 個間隔中，分子和＝分母和＝3^{n-1} 。$n\in N$

證明：

將間隔以 a_n 型式表示：

$$\left.\frac{a_0}{a_1}\right|\frac{a_1}{a_2}\left.\frac{a_2}{a_3}\right|\frac{a_3}{a_4}\frac{a_4}{a_5}\frac{a_5}{a_6}\left.\frac{a_6}{a_7}\right|\frac{a_7}{a_8}\frac{a_8}{a_9}\frac{a_9}{a_{10}}\frac{a_{10}}{a_{11}}\frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{a_{12}}{a_{13}}\frac{a_{13}}{a_{14}}\left.\frac{a_{14}}{a_{15}}\right|\frac{a_{15}}{a_{16}}\frac{a_{16}}{a_{17}}\frac{a_{17}}{a_{18}}\frac{a_{18}}{a_{19}}\frac{a_{19}}{a_{20}}\frac{a_{20}}{a_{21}}\frac{a_{21}}{a_{22}}\cdots\cdots$$

第一個間隔分母爲 $a_1=3^0$ 。

第二個間隔分母爲 a_2 、 a_3 $\because a_2=2a_1$ ， $a_3=1$ $\therefore a_2+a_3=3a_1=3\left(3^0\right)=3^1$ 。

第三個間隔分母爲 a_4 、 a_5 、 a_6 、 a_7 $\because a_5=a_2$ 、 $a_7=a_3$ ， $a_4=a_1+a_2$ ， $a_6=a_2+a_3$

$\therefore a_4+a_5+a_6+a_7=3\left(a_2+a_3\right)=3\left(3^1\right)=3^2$ 。

第四個間隔分母爲： a_8 、 a_9 、 a_{10} 、 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{13} 、 a_{14} 、 a_{15} ；

其中 $a_9=a_4$ 、 $a_{11}=a_5$ 、 $a_{13}=a_6$ 、 $a_{15}=a_7$ ，奇數項爲前一間隔分母。

又 $a_8=a_3+a_4$ 、 $a_{10}=a_4+a_5$ 、 $a_{12}=a_5+a_6$ 、 $a_{14}=a_6+a_7$ 。

則$a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=3\left(a_4+a_5+a_6+a_7\right)$

由這幾個間隔的分析，可得到下列規則：

(1) 在某一間隔中奇數項的分母依序為上一個間隔的所有分母，偶數項的分母可分解成由上一間隔分母組成的型式，經過相加後總和為前一間隔的 3 倍。

(2) 每一間隔的總和是公比為 3 的等比數。第一間隔總和3^0，則第n個間隔總和3^{n-1}。

（五）所有正有理數出現的過程

(1). 將前 5 個間隔出現的分母分層來看：

分母為 1 的分數：$\frac{1}{1}$、$\frac{2}{1}$、$\frac{3}{1}$、$\frac{4}{1}$、$\frac{5}{1}$

分母為 2 的分數：$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、$\frac{7}{2}$

分母為 3 的分數：$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{4}{3}$、$\frac{5}{3}$、$\frac{7}{3}$、$\frac{8}{3}$

分母為 4 的分數：$\frac{1}{4}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{5}{4}$、$\frac{7}{4}$

分母為 5 的分數：$\frac{3}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{8}{5}$、$\frac{7}{5}$、$\frac{4}{5}$

分母為 6 的分數：無

分母為 7 的分數：$\frac{4}{7}$、$\frac{5}{7}$、$\frac{2}{7}$、$\frac{3}{7}$

分母為 8 的分數：$\frac{3}{8}$、$\frac{5}{8}$

這個分類法是依在前 5 個分隔中,分母相同者,依序排出分數，當分母為 1、2、3、4 時，則依序出現的分數是由小到大由真分數到假分數且皆為最簡分數。而當分母為 5 時，所出現的真分數是為分母為 1、2、3、4 中出現的$\frac{5}{1}$、$\frac{5}{2}$、$\frac{5}{3}$、$\frac{5}{4}$的倒數。同理，又當分母為 7 時，所有目前出現的真分數$\frac{4}{7}$、$\frac{5}{7}$、$\frac{2}{7}$、$\frac{3}{7}$，是分子為 7（$\frac{7}{4}$、$\frac{7}{5}$、$\frac{7}{2}$、$\frac{7}{3}$）的倒數。

但是，若在分母為n有真分數尚未出現，那就表示在n＜的分母中，還未出現過此真分數的倒數。

例如：上面分層表中就沒有分母為 6 的分數，則表示在分母為 6＜中尚未出現分子為 6 的分數。

繼續推演得知，在同一分母中假分數的出現依樣為最簡分數。當取前 5 個間隔中的分數來看，

任一分母的分數皆以某種規則增加或減少，但所出現的數越多，分數的值是正向成長的。且所出現的數不重複。

若取前 6 個間隔中的分數來看（整理在下面），所出現的數一樣不與前面出現過的分數重複，且同一分母出現的分數，其值愈來愈大。

若取∞個間隔時，由以上的推演，是否所有的有理數皆會出現在數列中。

以下的整理是將前 6 個間隔的分數依照分母的不同分層，而再每個分母中是依照該分數在此數列中出現的順序排序：

分母為 1 的分數：$\frac{1}{1}$、$\frac{2}{1}$、$\frac{3}{1}$、$\frac{4}{1}$、$\frac{5}{1}$、$\frac{6}{1}$

分母為 2 的分數：$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、$\frac{7}{2}$、$\frac{9}{2}$

分母為 3 的分數：$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{4}{3}$、$\frac{5}{3}$、$\frac{7}{3}$、$\frac{8}{3}$、$\frac{10}{3}$、$\frac{11}{3}$

分母為 4 的分數：$\frac{1}{4}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{5}{4}$、$\frac{7}{4}$、$\frac{9}{4}$、$\frac{11}{4}$

分母為 5 的分數：$\frac{3}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{8}{5}$、$\frac{7}{5}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{6}{5}$、$\frac{13}{5}$、$\frac{12}{5}$、$\frac{9}{5}$

分母為 6 的分數：$\frac{1}{6}$、$\frac{5}{6}$

分母為 7 的分數：$\frac{4}{7}$、$\frac{5}{7}$、$\frac{2}{7}$、$\frac{3}{7}$、$\frac{11}{7}$、$\frac{12}{7}$、$\frac{9}{7}$、$\frac{10}{7}$

分母為 8 的分數：$\frac{3}{8}$、$\frac{5}{8}$、$\frac{11}{8}$、$\frac{13}{8}$

分母為 9 的分數：$\frac{5}{9}$、$\frac{7}{9}$、$\frac{2}{9}$、$\frac{4}{9}$

分母為 10 的分數：$\frac{7}{10}$、$\frac{3}{10}$

分母為 11 的分數：$\frac{4}{11}$、$\frac{3}{11}$、$\frac{8}{11}$、$\frac{7}{11}$

分母為 12 的分數：$\frac{5}{12}$、$\frac{7}{12}$

分母為 13 的分數：$\frac{8}{13}$、$\frac{5}{13}$

定理五：對於所有的正有理數都包含在$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq1}$數列中，一個也沒漏。

證明：

一開始，按照定義$a_0=1$，$a_{2n+1}=a_n$，$a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}$寫出這項規則數列，所對應出來的值

皆爲正整數。於是我們假設任意取兩個互質的正整數r、s。且r、s在數列中存在著第n項，滿足下列關係式：$a_n = r$；$a_{n+1} = s$。

爲了確實知道這關係是是否滿足，我們用數學歸納法求證：

（1） 當$r = s = 1$時，r、s的最大公因數爲 1，在數列中實際存在$a_0 = a_1 = 1$。成立。

在任取兩數時，此兩數是爲互質的正整數，且在前面，我們舉用$r = s = 1$爲例子，所以$r = s = 1$就不再討論。所以接下來，$r \neq s \neq 1$，且爲互質的正整數。
對於r、s皆爲正整數而言，我們分爲$r > s$；$r < s$討論：

（2） $r > s$時，根據一開始的歸納法假設，

我們寫成$a_n = r - s$，$a_{n+1} = s$時，$a_{2n+2} = r$且$a_{2n+3} = s$。

根據定義$a_0 = 1$，$a_{2n+1} = a_n$，$a_{2n+2} = a_n + a_{n+1}$，

則 $a_{2n+2} = a_n + a_{n+1} = r$，$a_{2n+3} = a_{n+1} = s$。

則$a_n = a_{2n+2} - a_{2n+3} = \left(a_n + a_{n+1}\right) - a_{n+1} = r - s$。

故上列關係是存在數列中，成立。

（3） $r < s$時，根據一開始的歸納法假設，

我們寫成$a_n = r$，$a_{n+1} = s - r$時，$a_{2n+1} = r$且$a_{2n+2} = s$。

根據定義$a_0 = 1$，$a_{2n+1} = a_n$，$a_{2n+2} = a_n + a_{n+1}$，

則$a_{2n+1} = a_n = r$，$a_{2n+2} = a_n + a_{n+1} = s$。

則$a_{n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} = \left(a_n + a_{n+1}\right) - a_n = s - r$。

故上列關係是存在數列中，成立。

故由數學歸納法得知，任取兩互質的正整數，皆可存這數列中的n項及$n+1$項，意即存在於數列中得連續兩項。

藉由這個結果，我們後來是將此數列在寫成$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$的形式，並且在這新的數列中每一個分數的分子及分母爲互質的正整數。

故對於所有的正有理數皆存在$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$的數列中。

(2). 當我們證明所有正有理數皆包含於$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$數列時，同時我們存疑這些有理數是否有重複性出的可能？最後經由以下證明，所有的正有理數是無重複性的。

定理六：對於所有的正有理數都在$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$數列中只出現一次，也就是說每一正有理數無重複性。

證明--1

根據定理五證明中的以下關係式加以推廣：

$r<s$時，$a_{2n+1}=r$，$a_{2n+2}=s \Rightarrow a_n=r$，$a_{n+1}=s-r\neq s$。

$r>s$時，$a_{2n+2}=r$，$a_{2n+3}=s \Rightarrow a_n=r-s\neq r$，$a_{n+1}=s$。

我們在數列中任兩連續的數不可能找到另外與其一樣的連續兩數，

同時寫成$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$的數列時，任一分數不可能找到與它一樣的分數。

故每一個正有理數無重複性，並只存在一個。

證明--2

a_{2n+1}與a_{2n+2}為連續的兩數，

假設在小於a_{2n+1}存在有任兩連續的數與（a_{2n+1}、a_{2n+2}）為同值。

$a_{2n+1}=a_n$，即表示（a_n、a_{n+1}）=（a_{2n+1}、a_{2n+2}）。則$a_{2n+1}=a_n$，左式=右式。

$a_{n+1}\neq a_{2n+2}$ $\because a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}$ $\therefore$左式≠右式。

與假設矛盾，故不可能有連續兩數與（a_{2n+1}、a_{2n+2}）相同。

並且當寫成$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$的數列時，找不到與（$a_{n-1}$、$a_n$）相同的連續兩數，

故每一正有理數只單獨存在，無重複性。

（六）將數列每一間隔做不同的排列，金字塔規則表

我們依照定分隔法，將每一分隔分數的分母取出整理成規則表，此規則表以a_n形式表示即爲如下：（附表三有更多數據）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_1															
a_2	a_3														
a_4	a_5	a_6	a_7												
a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}								
a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}	a_{30}	a_{31}
a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}	a_{39}	a_{40}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}
a_{64}	a_{65}	a_{66}	a_{67}	a_{68}	a_{69}	a_{70}	a_{71}	a_{72}	a_{73}	a_{74}	a_{75}	a_{76}	a_{77}	a_{78}	a_{79}
a_{128}	a_{129}	a_{130}	a_{131}	a_{132}	a_{133}	a_{134}	a_{135}	a_{136}	a_{137}	a_{138}	a_{139}	a_{140}	a_{141}	a_{142}	a_{143}

在將a_n依照定義$a_{2n+1}=a_n$，$a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}$其所對應的值即爲如下：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1																
2	1															
3	2	3	1													
4	3	5	2	5	3	4	1									
5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1	
6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	5	9	2	9
7	6	11	5	14	9	13	4	15	11	18	7	17	6	13	3	14
8	7	13	6	17	11	16	5	19	14	23	9	22	7	17	4	19
9	8	15	7	20	13	19	6	23	17	28	11	27	8	21	5	24

（最上一列的數代表直排等差數列的公差）

分橫向及直排來看；在橫列中，第一列有 1 一個數，就是第二個間隔中分數的分母。

第二列有 2，1 兩個數,就是第二個間隔中分數的分母作排序。

第三列有 3，2，3， 1 ，四個數，也就是第三間隔中分數的分母作排序。

第四列有 4，3，5，2，5，3，4，1，八個數，也就是第四間隔中分數的分母作排序。

第n列有2^{n-1}個數，即爲定理二。

在直排中，每一排的數也會各自形成數列，且每一排皆爲等差數列。

第一排公差是 1，第二排公差是 1 ，第三排公差是 2

第四排公差是 1，第五排公差是 3，第六排公差是 2，……。

即從第一排開始,每一排的公差依序是 1，1，2，1，3，2，3， 1 ，……。

也就是 a_0 ， a_1 ， a_2 ， a_3 ， a_4 ， a_5…… 。

再來看首項的分佈，討論在每一列的數中，是該排數列首項的項數分佈情形：

第一列：a_0 。

第二列：$a_3 \Rightarrow a_{2^1+2^0}$ 。

第三列：a_6 、$a_7 \Rightarrow a_{2^2+2^1}$ 、a_{2^3-1} 。

第四列：a_{12} 、a_{13} 、a_{14} 、$a_{15} \Rightarrow a_{2^3+2^2}$ 、$a_{2^3+2^2+1}$ 、$a_{2^3+2^2+2}$ 、a_{2^4-1} 。

第五列：a_{24} 、a_{25} 、……、$a_{31} \Rightarrow a_{2^4+2^3}$ 、$a_{2^4+2^3+1}$ 、……、a_{2^5-1} 。

第 n 列：由以上的演算我們可知在第 n 列時，項數是該排數列首項的爲

$a_{2^{n-1}+2^{n-2}}$ 、$a_{2^{n-1}+2^{n-2}+1}$ 、……、a_{2^n-1} 。

在前面提到每一排數列的公差依序爲 a_0 、a_1 、a_2 、a_3 、……、a_n ，然後對照上面首項的演算法來看，討論每一列的數中，數爲該排首項的公差：

第一列：a_0 。

第二列：$a_1 \Rightarrow a_{2^0}$ 。

第三列：a_2 、$a_3 \Rightarrow a_{2^1}$ 、a_{2^2-1} 。

第四列：a_4 、a_5 、a_6 、$a_7 \Rightarrow a_{2^2}$ 、a_{2^2+1} 、a_{2^2+2} 、a_{2^3-1} 。

第五列：a_8 、a_9 、……、$a_{15} \Rightarrow a_{2^3}$ 、a_{2^3+1} 、……、a_{2^4-1} 。

第 n 列：由以上的演算，其對應首項 $a_{2^{n-1}+2^{n-2}}$ 、$a_{2^{n-1}+2^{n-2}+1}$ 、……、a_{2^n-1} 的公差依序爲

$a_{2^{n-2}}$、$a_{2^{n-2}+1}$、……、$a_{2^{n-1}+1}$。

則經由以上的演算法，我們可清楚得知在某一排中的首項及公差，然後利用首項及公差，可不斷地運算出所有的數。再將這些數依$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$的形式排序，可得到所有的有理數。

（七）將a_n數列排成“樹”的模式，可更快速的把正有理數寫下來

我們想到將a_n數列排成“樹”的模式，由1個數開始分歧，$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 8 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2^n$。

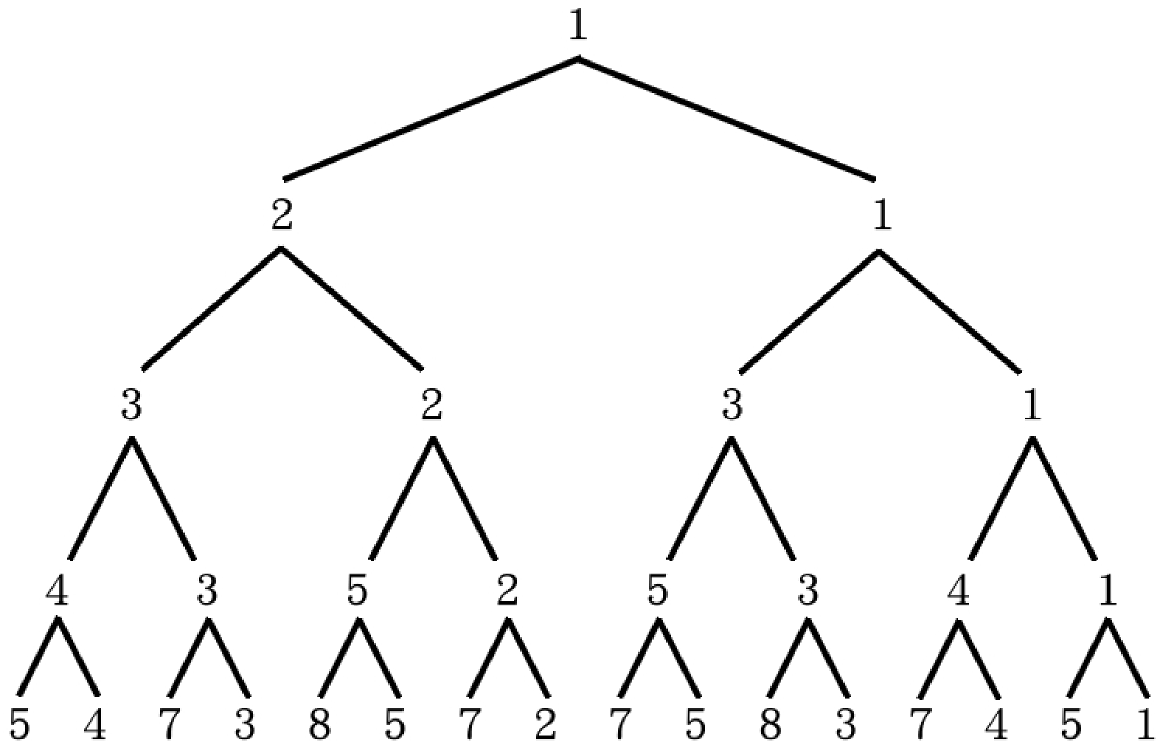
這樣的模式由上到下排列恰符合將第一個間隔（有2^0個正有理數）放在樹的第一代，
將第二間隔（有2^1個正有理數）放在樹的第二代，
將第三間隔（有2^2個正有理數）放在樹的第三代，以此類推。
接著，我們發現有以下三個規則：

(1) 每一列最左邊的數依序是$\left(a_{2^0}, a_{2^1}, a_{2^2}, a_{2^3}, \cdots\cdots, a_{2^{n-1}}\right) = \left(1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, n\right)$。（定理 3-1 證明提過）

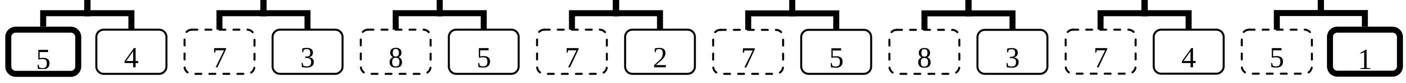
(2) 最右邊的數是$a_{2^n-1} = 1, n \in N$。（引理一）

(3) 將第$n-1$間隔的數依序放在第n個間隔的偶數項，而奇數項爲左右兩偶數項相加的和。（定理一）

綜合以上三點，則可將數不斷的寫下去，因此藉由此方法可將正有理數快速的寫下來。



圖一. 將a_n數列排成“樹”的模式



圖二. 將圖一縮小，並以圖說明此三個規則

(1) 每一列最左邊的數依序是$\left(1,2,3,4,\cdots\cdots,n\right)$。

(2) 最右邊的數是$a_{2^n-1}=1, n\in N$ 。

(3) 將第$n-1$間隔的數依序放在第n個間隔的偶數項，而奇數項爲左右兩偶數項相加的和。

（八）搜尋正有理數的演算法

演算法的主要策略如下：

$(1)\ r > s$ 時，$a_n = r - s$ ，$a_{n+1} = s$ 時，$a_{2n+2} = r$ 且 $a_{2n+3} = s$ 。

$(2)\ r < s$ 時，$a_n = r$ ，$a_{n+1} = s - r$ 時，$a_{2n+1} = r$ 且 $a_{2n+2} = s$ 。

例如問題：$\dfrac{q}{p}$ ，$(p\ ,\ q) = 1$ 位於數列中第幾項？

答案就是在尋找 p 、 q 兩連續互質的正整數，位於數列中第幾項。

假設 $r = p$ ，$s = q$ ，依照以上演算法的二個策略，不斷的作數字相消的動作。

若當 p 、 q 值很大時，利用這兩個演算法的策略，將 p 、 q 的值不斷相消變小。

同時， p 、 q 所對應的項數也會隨之變動，直到數字與所對應的項數在我們所能掌握的資料中(即數字減到前100項)，就可反推回去，知道是第幾項了。

以下我們舉一個實際的例子來驗證演算法的兩個策略：

問題一：$\dfrac{92}{2003}$ 出現在正有理數數列中的第幾項？

即求（92、2003）這兩連續數字出現在 a_n 數列的第幾項。

根據上述的關係，

當 $r = 92$ ，$s = 2003$ 時，$\because r < s$ $\quad \therefore a_{2n+1} = 92$ 、 $a_{2n+2} = 2003$

$$\Rightarrow a_{(2n+2)\cdot 2^{-1}-1} = 92 \text{ 、 } a_{(2n+2)\cdot 2^{-1}} = 1911$$

當 $r = 92$ ，$s = 1911$ 時，$\because r < s$ $\quad \therefore a_n = 92$ 、 $a_{n+1} = 1911$

$$\Rightarrow a_{(2n+2)\cdot 2^{-2}-1} = 92 \text{ 、 } a_{(2n+2)\cdot 2^{-2}} = 1819$$

繼續下一次演算都是 $r < s$ ，$a_{(2n+2)\cdot 2^{-2}} \Rightarrow a_{(2n+2)\cdot 2^{-3}}$ ，

由此形式一直演算，從（ $r = 92$ ，$s = 2003$ ）經過 21 次相同的相消運算，

直到 $r = a_{(2n+2)\cdot 2^{-21}-1} = 92$ 、 $s = a_{(2n+2)\cdot 2^{-21}} = 71$ 時，

$\because r > s$ $\quad \therefore a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-1}-1} = 21$ 、 $a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-1}} = 71$

當$r=21$，$s=71$時，$\because r<s$　$\therefore a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-1}-1}=21$、$a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-1}}=71$

$\Rightarrow a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-2}-1}=21$、$a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-2}}=50$

當$r=21$，$s=50$時，$\because r<s$　$\therefore a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-2}-1}=21$、$a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-2}}=50$

$\Rightarrow a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-3}-1}=21$、$a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-3}}=29$

當$r=21$，$s=29$時，$\because r<s$　$\therefore a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-3}-1}=21$、$a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-3}}=29$

$\Rightarrow a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-4}-1}=21$、$a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-4}}=8$

當$r=21$，$s=8$時，$\because r>s$　$\therefore a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-4}-1}=21$、$a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-4}}=8$

$\Rightarrow a_{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-4}-1}=21$、$a_{\{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-4}-1\}\cdot 2^{-1}}=8$

當$r=13$，$s=8$時，$\because r>s$　$\therefore a_{\{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-4}-1\}\cdot 2^{-1}-1}=13$、$a_{\{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-4}-1\}\cdot 2^{-1}}=8$

$\Rightarrow a_{\{\{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-4}-1\}\cdot 2^{-1}-1\}\cdot 2^{-1}-1}=5$、$a_{\{\{[(2n+2)\cdot 2^{-21}-1]\cdot 2^{-4}-1\}\cdot 2^{-1}-1\}\cdot 2^{-1}}=8$

（再經過四次的推演，將會是$r=s=1$；$a_0=a_1=1$。反推回去就知道 2003 在哪一項，92 即便知道。）

當$r=5$，$s=8$兩連續數字出現在a_n數列中前 100 項，我們可很輕易知道（5、8）是位於第幾項。（5、8）=（a_{25}、a_{26}），即

$$\left\{\left\{\left[\left(2n+2\right)2^{-21}-1\right]2^{-4}-1\right\}2^{-1}-1\right\}2^{-1}-1=25$$

$$\left\{\left\{\left[\left(2n+2\right)2^{-21}-1\right]2^{-4}-1\right\}2^{-1}-1\right\}2^{-1}=26$$

$a_{2n+2}=2003\Rightarrow 2n+2=3592421376$。

$a_{2n+1}=92\Rightarrow 2n+1=3592421375$。

故在$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$分數數列中，$\dfrac{92}{2003}$就在第 3592421376 項。

過程中的演算都是下列關係式慢慢將數字變小再反推回去。

$r=s$：$a_0=a_1=1$。

$r>s$：（$a_n=r-s$，$a_{n+1}=s$）、（$a_{2n+2}=r$，$a_{2n+3}=s$）。

$r<s$：（$a_n=r$，$a_{n+1}=s-r$）、（$a_{2n+1}=r$，$a_{2n+2}=s$）。

同理，若要求第n項的數值爲何，一樣的道理即可求得

（九）利用演算法的策略轉換成輾轉相除法的型式，將正有理數能更有規則的找出來。

在問題一的實際例子中，利用演算法二個策略推算時，我們發現這兩個策略：

(1) $r>s$時，$a_n=r-s$，$a_{n+1}=s$時，$a_{2n+2}=r$且$a_{2n+3}=s$。

(2) $r<s$時，$a_n=r$，$a_{n+1}=s-r$時，$a_{2n+1}=r$且$a_{2n+2}=s$。

這是一個輾轉相消的動作,因此我們想到引用輾轉相除法的原理來取代這些雜亂的演算步驟。以下是引用輾轉相除法的說明：

若要求$\dfrac{p}{q}$爲數列中第幾項,即求p、q爲$\{a_n\}$數列中的第幾項。最後答案爲分母q的第幾項。

假設$(p,q)=1, p\neq q$，$p,q\in N$，有兩種情形討論：（1）$p>q$（2）$p<q$

1. 當$p>q$時：

依照演算法的第一個策略，假設$a_{2n+2}=p, a_{2n+3}=q$。

(i) q經過h次相減步驟直到$p-hq<q$爲止。因此，第$2n+3$項的q也得進行h次（除以 2 再減 1）的運算。
假設第$2n+3$項的q運算h次後爲第x項，第x項仍是q。則$p-hq$會是$x-1$項。

(ii) 再依照演算法的第二個策略，$p-hq$需經過k次相減步驟直到$q-k\left(p-hq\right)<p-hq$爲止。
因此，第$x-1$項的$p-hq$也得進行k次（除以 2 再減 1）的運算。
假設第$x-1$項的$p-hq$運算k次後爲第y項，第y項仍是$p-hq$。則$q-k\left(p-hq\right)$會是第$y+1$項。

於是，若寫成輾轉相除法的格式爲：

(i)

$$
\begin{array}{c|c|c|}
h & p & q \\
 & hq & \\
\cline{2-2}
 & p-hq & \\
\end{array}
$$

當 $p>q$ 時，使用演算法第一策略，要使 $p-hq<q$，再進行第二策略。
假設第 $2n+3$ 項的 q 會運算第 x 項，x 項仍是 q。則 $p-hq$ 會是 $x-1$ 項。

(ii)

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
h & p & q & k \\
 & hq & k\left(p-hq\right) & \\
\cline{2-3}
 & p-hq & q-k\left(p-hq\right) & \\
\end{array}
$$

當 $p-hq<q$ 時，經過經過 k 次相減步驟直到 $q-k\left(p-hq\right)<p-hq$。

假設第 $x-1$ 項的 $p-hq$ 運算後爲第 y 項。則 $q-k\left(p-hq\right)$ 會是第 $y+1$ 項。

依照以上的兩種模式，反覆作輾轉相減的動作。要使 $p-hq=1$ 時，才可停止輾轉相減的動作。此時便是經過 $h+k$ 次輾轉相減的動作。
而原是 $2n+3$ 項的 q 也進行 h 次（除以 2 再減 1）的運算後變爲第 x 項。則 $p-hq$ 會是第 $x-1$ 項。第 $x-1$ 項再進行 k 次（除以 2 再減 1）運算後爲第 y 項。

y 項等於 $p-hq=1$，同時 $y+1$ 項等於 $q-k\left(p-hq\right)$。

最後，$y+1$ 項即是 $2^{q-k\left(p-hq\right)-1}$ 項。知道 $y+1$ 項後，反求 $2n+3$ 即可知道 $\frac{p}{q}$ 爲數列中的第幾項。

2. 當 $p<q$ 時：

依照演算法的第二個策略，假設 $a_{2n+1}=p, a_{2n+2}=q$。

(i) p 經過 m 次相減步驟直到 $q-mp<q$ 爲止。因此，第 $2n+1$ 項的 p 也得進行 m 次（減 1 再除以 2）的運算。
假設第 $2n+1$ 項的 p 運算 m 次後爲第 α 項，第 α 項仍是 p。則 $q-mp$ 會是 $\alpha+1$ 項。

(ii) 再依照演算法的第一個策略，$q-mp$ 需經過 n 次相減步驟直到 $p-n\left(q-mp\right)<q-mp$ 爲止。

因此，第 $\alpha+1$ 項的 $q-mp$ 也得進行 n 次（減 1 再除以 2）的運算。

假設第 $\alpha+1$ 項的 $q-mp$ 運算 n 次後爲第 β 項，第 β 項仍是 $q-mp$。則 $p-n\left(q-mp\right)$ 會是第 $\beta-1$ 項。

於是，若寫成輾轉相除法的格式爲：

(i)

$$\begin{array}{c|c|c|l} & p & q & m \\ & & mp & \\ \cline{3-3} & & q-mp & \end{array}$$

當 $p<q$ 時，先使用演算法的第二個策略，要使 $q-mp<q$，再進行第一策略

假設第 $2n+1$ 項的 p 運算 m 次後爲第 α 項，第 α 項仍是 p。則 $q-mp$ 會是 $\alpha+1$ 項。

(ii)

$$\begin{array}{c|c|c|l} n & p & q & m \\ & n\left(q-mp\right) & mp & \\ \cline{2-3} & p-n\left(q-mp\right) & q-mp & \end{array}$$

當 $q-mp<q$ 時，經過 n 次相減要使得 $p-n\left(q-mp\right)<q-mp$。

假設第 $\alpha+1$ 項的 $q-mp$ 運算 n 次後爲第 β 項。則 $p-n\left(q-mp\right)$ 會是第 $\beta-1$ 項。

依照以上的兩種模式，反覆作輾轉相減的動作。要使 $p-n\left(q-mp\right)=1$ 時，才可停止輾轉相減的動作。此時便是經過 $n+m$ 次輾轉相減的動作。

而原是第 $2n+1$ 項的 p 運算 m 次（減 1 再除以 2）後爲第 α 項。$q-mp$ 爲第 $\alpha+1$ 項。第 $\alpha+1$ 項運算 n 次（減 1 再除以 2）後爲第 β 項。

β 項等於 $q-mp$，同時 $\beta-1$ 項的 $p-n\left(q-mp\right)=1$。

最後，β 項即是 2^{q-mp-1} 項。知道 β 項後，反求 $2n+2$ 即可知道 $\frac{p}{q}$ 爲數列中的第幾項。

以下我們舉一個實際的例子來檢視輾轉相減的策略：

問題二：$\dfrac{94}{2005}$出現在正有理數數列中的第幾項？且須經過多少次的輾轉相減運算？

求$\dfrac{94}{2005}$位於數列中的第幾項，只需求出$(94,2005)$出現在$\{a_n\}$數列中第幾項便可。

最後答案會是分母 2005 的第幾項。

$$\begin{array}{|c|c|l} 94 & 2005 & 21 \\ & -1794 & \\ \cline{2-2} & 31 & \end{array} \qquad \because 94<2005 \therefore \text{假設 } a_{2n+1}=94, a_{2n+2}=2005$$

首先，94 需經過 21 次相減於 2005 的步驟，使$2005-21\times 94=31<94$。

同時，第$2n+1$項的 94 也進行 21 次（減 1 再除以 2）的運算。（由於計算量過於龐大，不列於書面上，計算式可參考問題一）

假設$2n+1$項後來變成第α項，第α項仍是 94。則 31 會是第$\alpha+1$項。

$$\begin{array}{r|c|c|} 3 & 94 & 2005 \\ & 93 & -1794 \\ \cline{2-3} & 1 & 31 \end{array}$$

再來，3 經過了 3 次相減於 94 的步驟，使得$94-3\times 31=1<31$。

同時，第$\alpha+1$項的 31 也進行 3 次（減 1 再除以 2）的運算。

假設第$\alpha+1$項後來變成第β項，第β項仍是 31。則$94-3(2005-21\times 31)=1$會是$\beta-1$項。

當我們得到左邊的數$p-n(q-mp)=1$時，就停止再作輾轉相減的動作了。

便得知經過了$3+21=24$次的輾轉相減步驟。

最後，第$\beta-1$項就是$2^{31-1}=2^{30}$項，$\beta=2^{30}+1$，再反求$2n+2$項是多少。

而分母$2005=a_{2n+2}\Rightarrow 2n+2=18014398524162048$。

故$\dfrac{94}{2005}$在數列中的第18014398524162048項。

四、結論：

一開始接觸到這個數列，了解數字中存在著遞迴定義，並發現數列中$a_{2^n-1}=1$，於是a_n數列以1為界，採段落式分隔，大膽的將數列分割開來討論。

從彼此間隔中比較其差異性，再觀察出其中的性質。

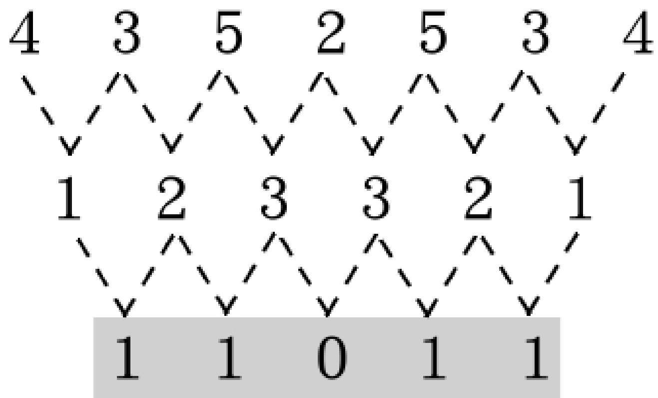
並証明了所有的正有理數一個也沒漏掉的出現在這數列中。而利用將a_n數列排成“樹”的模式，可更快速的把正有理數寫下來。最後，設計出一套演算法可在短時間內完全解決任一正有理數存在於數列中第幾項的問題。

五、未來展望：

(一) 我們從第三個間隔開始，把分母做兩兩相減取絕對值的動作，竟發現當減到特定的某一列時會形成110的模式。我們將前幾個間隔做這樣差分的動作，歸納出一個論點；

在第n個間隔，做2^{n-3}次差分動作，會形成110的模式，$n\geq 4$。

對於這個論點我們是經由前幾個間隔的觀察歸納出來，這只是猜想，我們希望能證明出來。以下為第四間隔及第五間隔分別做差分的圖。



圖三. 將第四間隔的分母去掉最後的 1，作差分動作

5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1

1 3 4 5 3 2 5 5 2 3 5 4 3 1 4

2 1 1 2 1 3 0 3 1 2 1 1 2 3

1 0 1 1 2 3 3 2 1 1 0 1 1

1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0

圖四. 將第五間隔的分母去掉最後的 1，作差分動作

(二) 假設 $\beta < \alpha$ ，則介於 $\frac{1}{\alpha}$ □ $\frac{\beta}{\alpha}$ 之間的正有理數中，何者在數列中為最多項？是否能找出規則並寫成一般式？

(三) 將 a_n 數列排成“樹”的模式（第七章節的圖一），圖一是一完整的二元樹，其中是否還能延伸出更多不同的發現與新的結果？

六、參考資料：

一、國立高雄大學應用數學系高中資優班每月一題 02。（http://math.nuk.edu.tw/senior/sindex.htm）。

二、美國大學生 2002 Putnam 競賽試題 A5。

三、顏煥庭、詹曉盈，2004，台灣省第四十四屆高級中等學校第五分區科學展覽會，數學科第九件，一個也沒漏掉。

附表一（以定義數列 $a_{2n+1}=a_n, a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}\ \{a_n\}_{n\geq 0}, a_0=1, n\in Z, n\geq 0$ ）前 100 項

a1＝1	a2＝a0＋a1＝2	a77＝a38＝10	a78＝a38＋a39＝13
a3＝a1＝1	a4＝a1＋a2＝3	a79＝a39＝3	a80＝a39＋a40＝14
a5＝a2＝2	a6＝a2＋a3＝3	a81＝a40＝11	a82＝a40＋a41＝19
a7＝a3＝1	a8＝a3＋a4＝4	a83＝a41＝8	a84＝a41＋a42＝21
a9＝a4＝3	a10＝a4＋a5＝5	a85＝a42＝13	a86＝a42＋a43＝18
a11＝a5＝2	a12＝a5＋a6＝5	a87＝a43＝5	a88＝a43＋a44＝17
a13＝a6＝3	a14＝a6＋a7＝4	a89＝a44＝12	a90＝a44＋a45＝19
a15＝a7＝1	a16＝a7＋a8＝5	a91＝a45＝7	a92＝a45＋a46＝16
a17＝a8＝4	a18＝a8＋a9＝7	a93＝a46＝9	a94＝a46＋a47＝11
a19＝a9＝3	a20＝a9＋a10＝8	a95＝a47＝2	a96＝a47＋a48＝11
a21＝a10＝5	a22＝a10＋a11＝7	a97＝a48＝9	a98＝a48＋a49＝16
a23＝a11＝2	a24＝a11＋a12＝7	a99＝a49＝7	a100＝a49＋a50＝19
a25＝a12＝5	a26＝a12＋a13＝8		
a27＝a13＝3	a28＝a13＋a14＝7		
a29＝a14＝4	a30＝a14＋a15＝5		
a31＝a15＝1	a32＝a15＋a16＝6		
a33＝a16＝5	a34＝a16＋a17＝9		
a35＝a17＝4	a36＝a17＋a18＝11		
a37＝a18＝7	a38＝a18＋a19＝10		
a39＝a19＝3	a40＝a19＋a20＝11		
a41＝a20＝8	a42＝a20＋a21＝13		
a43＝a21＝5	a44＝a21＋a22＝12		
a45＝a22＝7	a46＝a22＋a23＝9		
a47＝a23＝2	a48＝a23＋a24＝9		
a49＝a24＝7	a50＝a24＋a25＝12		
a51＝a25＝5	a52＝a25＋a26＝13		
a53＝a26＝8	a54＝a26＋a27＝11		
a55＝a27＝3	a56＝a27＋a28＝10		
a57＝a28＝7	a58＝a28＋a29＝11		
a59＝a29＝4	a60＝a29＋a30＝9		
a61＝a30＝5	a62＝a30＋a31＝6		
a63＝a31＝1	a64＝a31＋a32＝7		
a65＝a32＝6	a66＝a32＋a33＝11		
a67＝a33＝5	a68＝a33＋a34＝14		
a69＝a34＝9	a70＝a34＋a35＝13		
a71＝a35＝4	a72＝a35＋a36＝15		
a73＝a36＝11	a74＝a36＋a37＝18		
a75＝a37＝7	a76＝a37＋a38＝17		

附表二（藉由此數列$a_{2n+1}=a_n, a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}$，$\left\{a_n\right\}_{n\geq 0}, a_0=1, n\in Z, n\geq 0$）的定義，

將數列寫成$\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right\}_{n\geq 1}$ 的形式）定理一中的分隔法，以下爲前七個間隔的分數：

$$\frac{1}{1}\Rightarrow\left|\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2}{1}\right|\Rightarrow\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{3}{1}\Big|\Rightarrow\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{4}{1}\Big|\Rightarrow$$

$$\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{4}{7}\Rightarrow\frac{7}{3}\Rightarrow\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{8}{5}\Rightarrow\frac{5}{7}\Rightarrow\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{2}{7}\Rightarrow\frac{7}{5}\Rightarrow\frac{5}{8}\Rightarrow\frac{8}{3}\Rightarrow\frac{3}{7}\Rightarrow\frac{7}{4}\Rightarrow\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{5}{1}\Big|\Rightarrow$$

$$\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{6}{5}\Rightarrow\frac{5}{9}\Rightarrow\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{4}{11}\Rightarrow\frac{11}{7}\Rightarrow\frac{7}{10}\Rightarrow\frac{10}{3}\Rightarrow\frac{3}{11}\Rightarrow\frac{11}{8}\Rightarrow\frac{8}{13}\Rightarrow\frac{13}{5}\Rightarrow\frac{5}{12}\Rightarrow\frac{12}{7}\Rightarrow$$

$$\frac{7}{9}\Rightarrow\frac{9}{2}\Rightarrow\frac{2}{9}\Rightarrow\frac{9}{7}\Rightarrow\frac{7}{12}\Rightarrow\frac{12}{5}\Rightarrow\frac{5}{13}\Rightarrow\frac{13}{8}\Rightarrow\frac{8}{11}\Rightarrow\frac{11}{3}\Rightarrow\frac{3}{10}\Rightarrow\frac{10}{7}\Rightarrow\frac{7}{11}\Rightarrow\frac{11}{4}\Rightarrow$$

$$\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{9}{5}\Rightarrow\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{6}{1}\Big|\Rightarrow\frac{1}{7}\Rightarrow\frac{7}{6}\Rightarrow\frac{6}{11}\Rightarrow\frac{11}{5}\Rightarrow\frac{5}{14}\Rightarrow\frac{14}{9}\Rightarrow\frac{9}{13}\Rightarrow\frac{13}{4}\Rightarrow\frac{4}{15}\Rightarrow\frac{15}{11}\Rightarrow$$

$$\frac{11}{18}\Rightarrow\frac{18}{7}\Rightarrow\frac{7}{17}\Rightarrow\frac{17}{10}\Rightarrow\frac{10}{13}\Rightarrow\frac{13}{3}\Rightarrow\frac{3}{14}\Rightarrow\frac{14}{11}\Rightarrow\frac{11}{19}\Rightarrow\frac{19}{8}\Rightarrow\frac{8}{21}\Rightarrow\frac{21}{13}\Rightarrow\frac{13}{18}\Rightarrow$$

$$\frac{18}{5}\Rightarrow\frac{5}{17}\Rightarrow\frac{17}{12}\Rightarrow\frac{12}{19}\Rightarrow\frac{19}{7}\Rightarrow\frac{7}{16}\Rightarrow\frac{16}{9}\Rightarrow\frac{9}{11}\Rightarrow\frac{11}{2}\Rightarrow\frac{2}{11}\Rightarrow\frac{11}{9}\Rightarrow\frac{9}{16}\Rightarrow\frac{16}{7}\Rightarrow\frac{7}{19}\Rightarrow$$

$$\frac{19}{12}\Rightarrow\frac{12}{17}\Rightarrow\frac{17}{5}\Rightarrow\frac{5}{18}\Rightarrow\frac{18}{13}\Rightarrow\frac{13}{21}\Rightarrow\frac{21}{8}\Rightarrow\frac{8}{19}\Rightarrow\frac{19}{9}\Rightarrow\frac{9}{14}\Rightarrow\frac{14}{3}\Rightarrow\frac{3}{13}\Rightarrow\frac{13}{6}\Rightarrow\frac{6}{17}\Rightarrow$$

$$\frac{17}{7}\Rightarrow\frac{7}{18}\Rightarrow\frac{18}{11}\Rightarrow\frac{11}{15}\Rightarrow\frac{15}{4}\Rightarrow\frac{4}{13}\Rightarrow\frac{13}{9}\Rightarrow\frac{9}{14}\Rightarrow\frac{14}{5}\Rightarrow\frac{5}{11}\Rightarrow\frac{11}{6}\Rightarrow\frac{6}{7}\Rightarrow\frac{7}{1}\Big|\cdots\cdots$$

附表三（將 a_n 依照定義 $a_{2n+1}=a_n,a_{2n+2}=a_n+a_{n+1}$ 找出其值，將數列每一間隔做不同的排列，爲金字塔型規則表。）

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1																									
2	1																								
3	2	3	1																						
4	3	5	2	5	3	4	1																		
5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1										
6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	5	9	2	9	5	12	5	13	8	11	3	10	7
7	6	11	5	14	9	13	4	15	11	18	7	17	6	13	3	14	9	19	8	21	13	18	5	17	12
8	7	13	6	17	11	16	5	19	14	23	9	22	7	17	4	19	13	26	11	29	18	25	7	24	17
9	8	15	7	20	13	19	6	23	17	28	11	27	8	21	5	24	17	33	14	37	23	32	9	31	22
10	9	17	8	23	15	22	7	27	20	33	13	32	9	25	6	29	21	40	17	45	28	39	11	38	27
11	10	19	9	26	17	25	8	31	23	38	15	37	10	29	7	34	25	47	20	53	33	46	13	45	32
12	11	21	10	29	19	28	9	35	26	43	17	42	11	33	8	39	29	54	23	61	38	53	15	52	37
13	12	23	11	32	21	31	10	39	29	48	19	47	12	37	9	44	33	61	26	69	43	60	17	59	42
14	13	25	12	35	23	34	11	43	32	53	21	52	13	41	10	49	37	68	29	77	48	67	19	66	47
15	14	27	13	38	25	37	12	47	35	58	23	57	14	45	11	54	41	75	32	85	53	74	21	73	52
16	15	29	14	41	27	40	13	51	38	63	25	62	15	49	12	59	45	82	35	93	58	81	23	80	57
17	16	31	15	44	29	43	14	55	41	68	27	67	16	53	13	64	49	89	38	101	63	88	25	87	62
18	17	33	16	47	31	46	15	59	44	73	29	72	17	57	14	69	53	96	41	109	68	95	27	94	67
19	18	35	17	50	33	49	16	63	47	78	31	77	18	61	15	74	57	103	44	117	73	102	29	101	72
20	19	37	18	53	35	52	17	67	50	83	33	82	19	65	16	79	61	110	47	125	78	109	31	108	77
21	20	39	19	56	37	55	18	71	53	88	35	87	20	69	17	84	65	117	50	133	83	116	33	115	82
22	21	41	20	59	39	58	19	75	56	93	37	92	21	73	18	89	69	124	53	141	88	123	35	122	87

我的名字是顏煥庭，目前就讀於台南縣興國高中三年級。從小就對數學情有獨鍾，受到數學老師們的薰陶，對於數學問題總是充滿好奇，尤其是想通之後的那份喜悅。數學就像魔術師，變幻著無窮的驚奇饗宴。

這次的研究中，不僅是學術上的收穫，更深刻體會做研究要誠懇且踏實。在這過程中我要特別感謝我的爹娘；還有不斷引導我的老師，是你帶領我闖進了多彩多姿的數學天堂，鼓勵我不斷往前邁進；以及熱情的 younger 老師。 另外，謝謝協助過我的同學(子豪、育霖、曉盈)。這份成果希望能和你們一同分享。