

臺灣二〇〇三年國際科學展覽會

科 別：工程學科

作品名稱：「轉環」的餘地

學 校：國立新竹高級中學

作 者：黃淵璋

作者簡介



在從前的學習經驗中，曾有過考不及格、有也過名列前茅的時候，但是不論成績如何，總不會影響我學習的興趣，尤其對於那些貼近我們生活的學科，能夠讓我們以更清楚的觀點來看待周遭的一切。在學習時以生活經驗驗證所學，更能讓自己沉浸在學習的樂趣中。而學習時的最大喜悅，莫過於那種體會「看似複雜、其實簡單」的興奮。或許就是這種感覺，讓我不管成績好壞也能樂在學習。

摘要

在生活的觀察中，我們注意到人們在轉動呼拉圈時似乎是行一種「以軸轉動一個半徑遠大於軸半徑的環」的運動，在查過相關資料後，並沒有發現比較完整的探討。

本研究的目的，是要找出在圓環被轉軸所驅動的運動模式中，影響環轉動頻率的各個因素，諸如：環半徑、環質量、轉軸半徑與環轉速之間的關係。

根據我們所做的實驗，對相同的一個環而言，以半徑較小的軸用固定轉速轉動時，即使環的轉速變快，但始終與轉軸的轉速相等。由此我們推斷：無論環與軸之間的半徑關係為何，在環能穩定轉動的情況下，兩者的轉動週期將會相等。

另外，在實驗的過程中，「軸驅動環」所引起的軸晃動一直困擾著我們，但這也引發了一項應用：如果原本穩定轉動的環和軸振動，則振動將被放大，藉此設計可以作為地震感測器。亦可作為儀器的保護裝置或是指向裝置。

Abstract

While playing a hula-hoop, we noticed that it seems to be a motion that the axis rotates a circle whose radius is larger than axis'. By checking relative theses, we found that there is no better research having fully discussed about this topic.

The purpose of this research is to find out the motion pattern that a circle is rotated by the force of an axis and the factors affecting rotation, such as radius and mass of circles, the radius of axes, and the frequency of axes and circles.

According to our experience, no matter which height the circle stay at, or how fast the frequency of axis is, the frequency of circle will be the same. As a result of this, we guess that if it can be a stable circle, the frequencies of the axis and the circle shall be the same.

Another confusing fact is the vibration of the axis, but it enables a new application: if a vibration affects a circle-axis system, the vibration will be enlarged. By this application, we are able to design an earth-quake sensor, or protecting or pointing instruments as well.

壹、 研究動機：

呼拉圈是生活中隨處可見的運動器材，使用的方式也很簡單，但也不是每個人都可以搖的起來。由這點觀察引發了我們找出會影響這種運動的因素，並探討這些因素之間的關係的慾望。

貳、 研究目的：

藉由實驗得知呼拉圈在穩定轉動下的環半徑、軸半徑、環質量、環轉動頻率與軸轉動頻率之間的關係，並且能推測在已知條件下的呼拉圈轉動情形。進一步觀察是否有特殊的運動模式可供應用。

參、 研究器材：

一、轉軸：

1. 圓錐狀：頂端半徑 0.5 cm 底端半徑 2 cm

此設計可以方便我們取得轉軸半徑的數據。因為轉軸上不同高度的位置有不同的直徑，環在軸上穩定運動位置的半徑便可經由簡單的數學運算求得。

2. 直筒狀：半徑 1 cm

在利用圓錐狀轉軸研究過單一環被轉軸驅動的情形、對於轉軸半徑對環轉動的影響有了進一步了解之後，使用這種轉軸探討多個環在同軸上的轉動情況。

二、環：

我們實驗用的環有以下幾個限制：不能產生形變、質地均勻、正圓形；又因為環與轉軸的接觸面不一定垂直於地面，環在轉動時的傾斜角度即會被轉軸的斜度所影響，圖一中的 θ 角將被強制等於 α 角，環的厚度也因此而受限。最後，我們決定以紙板割出各種半徑的圓環。（見附錄一）

三、螺絲、螺帽：用作調整圓環質量的砝碼。

四、光電計時器：測量轉軸及環的轉動週期。

五、馬達：驅動轉軸。

六、可變電阻：串聯至馬達以調整轉軸轉度的速率。

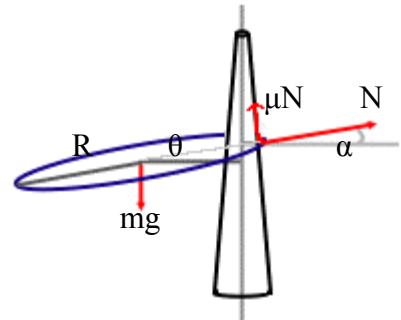
七、數位攝影機及相關電腦與軟體：觀察環傾斜角度。

肆、 原理：

一、正錐軸

如右圖，有一半徑 R 、質量 m 的環在轉軸半徑為 r 處穩定轉動。環質心和軸對環施力點連線的水平夾角為 θ ，軸施與環的正向力水平夾角為 α 。

既然環在軸的驅動下能持續轉動而不下落，必然有一力能夠抵消環本身的重量。這一力即為軸給予環之正向力和環與軸之間的摩擦力之合力在鉛垂方向的分力。如下：



圖一：環受力示意圖

$$mg = N \sin \alpha + \mu N \cos \alpha \quad \dots\dots \text{〔式一〕}$$

環的質心可視為以軸對環的施力點為原心做一等速率圓周運動，則所受向心力 F_c 與半徑 R_c 為：

$$F_c = ma = N \cos \alpha - \mu N \sin \alpha \quad \dots\dots \text{〔式二〕}$$

$$R_c = R \cos \theta \quad \dots\dots \text{〔式三〕}$$

由〔式一〕/〔式二〕得：

$$\frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} = \frac{g}{a} \quad \dots\dots \text{〔式四〕}$$

$$\text{又 } a = \omega^2 R_c = \frac{4\pi^2}{T^2} R \cos \theta \quad \dots\dots \text{〔式五〕}$$

將〔式五〕代入〔式四〕，我們可以得到：

$$T^2 = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \times \frac{R \cos \theta}{g} 4\pi^2 \quad \dots\dots \text{〔式六〕}$$

二、倒錐軸

如果將轉軸倒置轉動，則軸給予環的正向力方向為斜下、環軸之間摩擦力為向斜上。對應到關係式中，則〔式一〕、〔式二〕中的正負號對調，最後得到的關係式為：

$$T^2 = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \times \frac{R \cos \theta}{g} 4\pi^2 \quad \dots\dots \text{〔式七〕}$$

由〔式六〕、〔式七〕兩式我們發現：影響環轉動週期的因素只有一個——環的半徑，其他諸如環的質量、軸的半徑都與此無關。

三、直筒狀轉軸

在功率固定下，根據 $E_k = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} (I_0 + \Delta I) \omega^2$ ，我們可以做以下推算：

$$I_0 \omega_0^2 = (I_0 + \Delta I) \omega^2 \quad \dots\dots \text{〔式八〕}$$

$$\frac{(I_0 + \Delta I)}{I_0} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{T^2}{T_0^2} \quad \dots\dots \text{〔式九〕}$$

由〔式九〕可以得知：

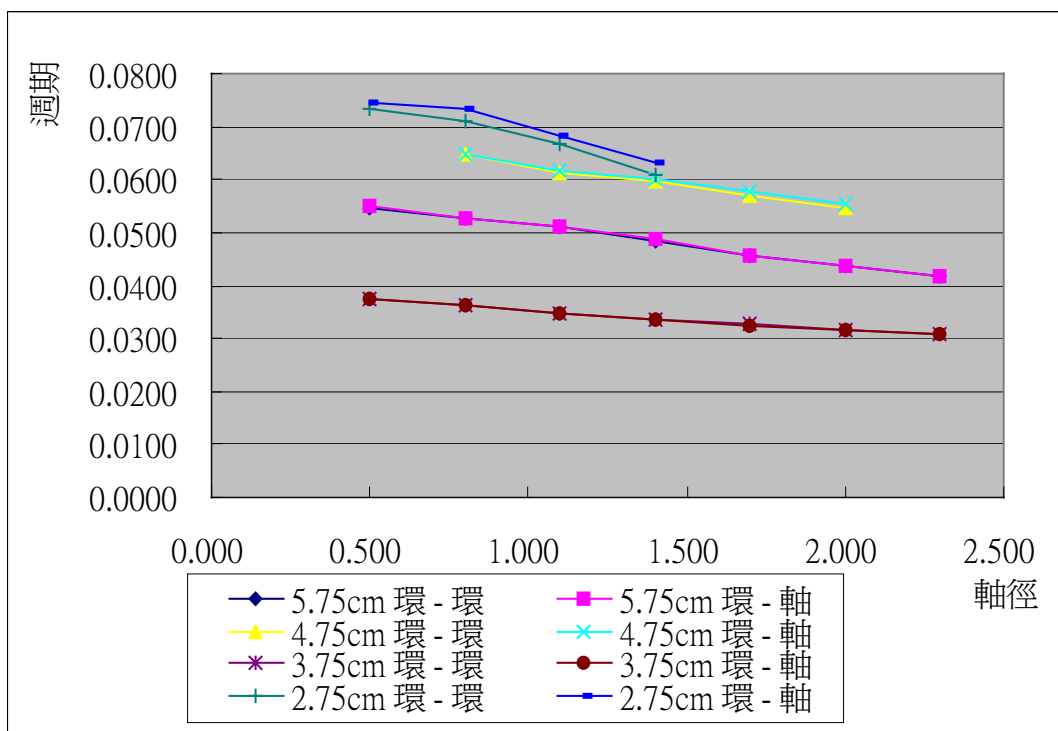
$$T_0^2 - T^2 \propto \Delta I \quad \dots\dots \text{〔式十〕}$$

伍、 實驗步驟

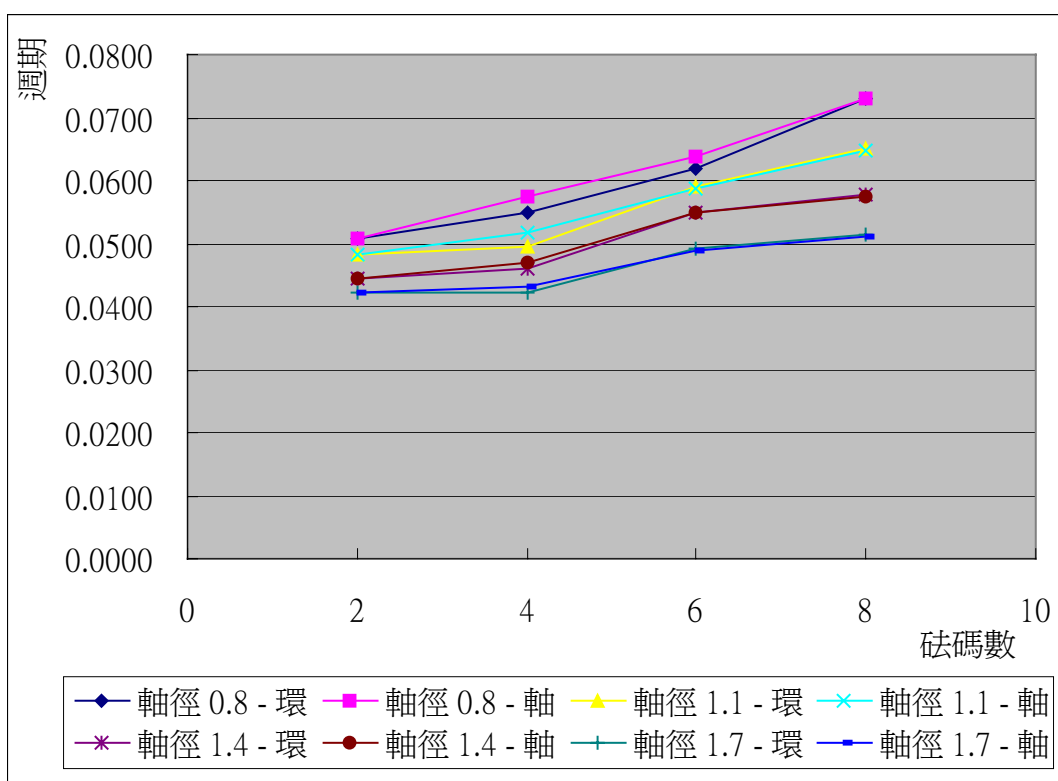
- 一、先將各個環分別置入圓錐轉軸，將環調整至轉軸的各個高度，使其作穩定轉動。
- 二、將環依次調整至轉軸頂部往下計 $\frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ 軸高度處。
- 三、當環在各高度穩定轉動後紀錄環徑 R、所在高度 h、環轉動週期 T、軸轉動週期 T'。
- 四、在環上栓上螺絲（作為砝碼）後重複步驟一、二與三。
- 五、逐次增加砝碼數，重複以上步驟。
- 六、將圓錐轉軸倒轉，重複以上步驟。
- 七、利用相似三角形將轉軸高度轉換為該高度的轉軸半徑。
- 八、將環置入直筒狀轉軸，逐次增加環的數目，並紀錄轉動週期 T
- 九、作實驗討論時，將以上實驗所得的數據交叉使用，可節省實驗時間。

陸、 實驗結果：

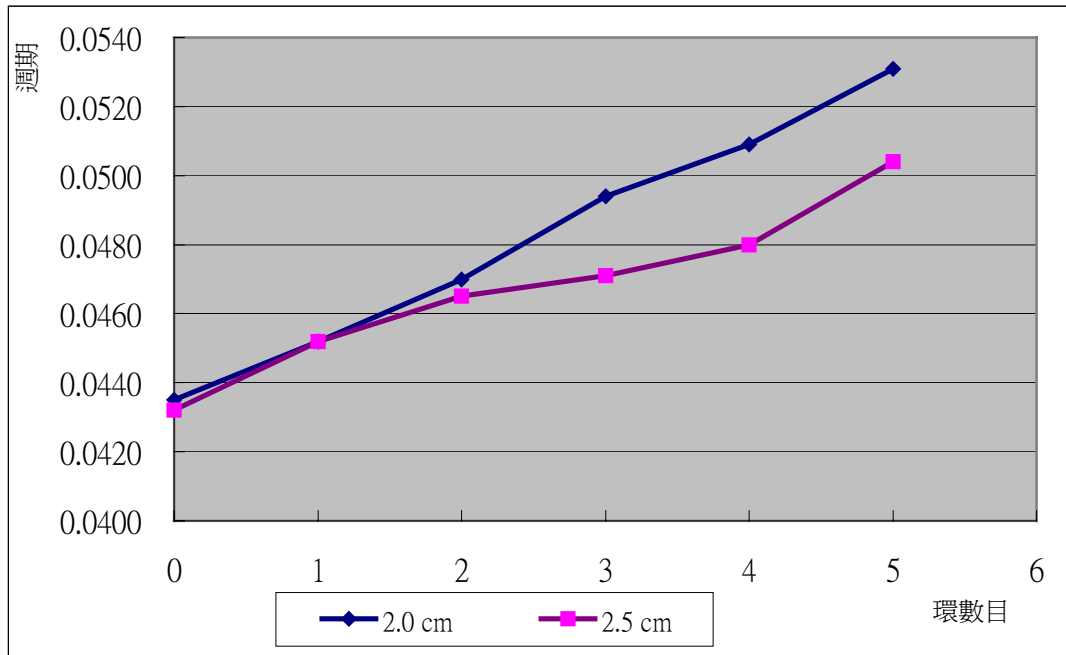
圖一：半徑為 2.75cm 到 5.75cm 的環被不同半徑的軸驅動的轉動頻率：



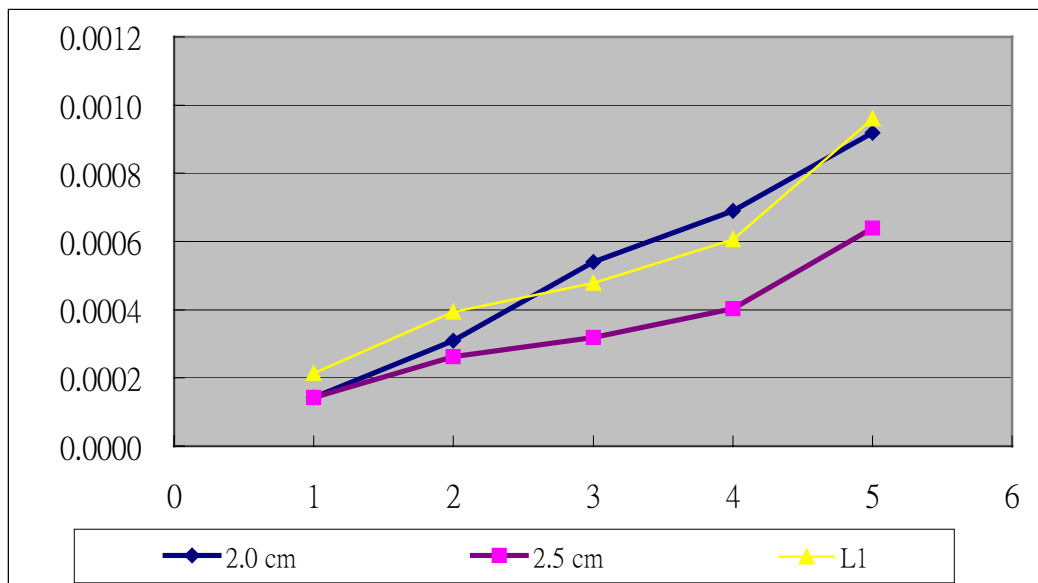
圖二：不同質量對於環轉動的影響（環半徑固定在 2.75cm）



圖三：不同環數目被同一轉軸驅動時的週期



圖四：縱軸 $T_0^2 - T^2$ 橫軸 環數目



柒、 結果討論

- 一、因為每一次環在進行實驗時，軸的轉動頻率會收到當時的環及環所在在的位置影響，所以進行實驗一時也觀察轉軸週期和環週期的關係，以便於之後的實驗將軸頻率修正至同一情況再討論。

二、在實驗一裡，軸、環的週期都幾乎一樣，由這個我們推論不管軸徑和環半徑之間的關係為何，只要在環能夠穩定轉動的情形下，兩者的轉動頻率應該會相同。這一點，跟我們的〔式六〕的結論符合：在其他變因都相同的情況下，轉軸的半徑對於環的轉動週期並沒有影響，都跟轉軸的轉動半徑相同。

三、由圖二可以發現，當環加上砝碼時，雖然環轉動週期增加，但是由於軸的轉動情形也會受到其所驅動的環影響，比較圖中各點軸與環的週期也幾乎是相等的。依據這一點，我們可以推論：對同一個半徑的環與固定的軸徑而言，只要其他變因都相同，無論軸所驅動的環的質量大小，兩者的轉速也還是一樣的。將此結果跟〔式六〕比對，〔式六〕中環的質量的確沒有成爲任何變因。

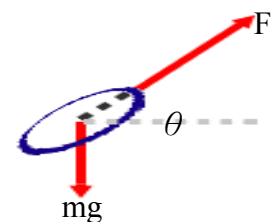
四、由於在能得知轉軸轉動頻率的情況下，便能同時獲得環的轉動頻率，因此在之後的實驗中，只需要測得轉軸的頻率即可。

五、由圖三中可以發現在供應固定的功率下，每增加一個環，轉軸與環的轉動週期便增加，且呈現線性的關係。半徑相同的環轉動慣量相同，每增加一個環便要有一部分的能量供給其轉動的動能，但因為由電源補充的能量是固定的，反映到轉動情形上，就是轉動週期增加。

六、半徑較大的環轉動慣量也大，轉動時消耗的能量也多，在相同環數量的情形時，轉動週期應該較小的環大。可是在圖三中呈現的情形卻是 2 cm 的環週期大於 2.5 cm；但實驗 2.5 cm 環在轉軸上轉動情形時，轉軸的晃動幅度均較 2 cm 環轉動時小，如此消耗在晃動上的能量較少、轉軸頂端與固定點之間的摩擦消耗掉的能量也少，便能有更多的能量能轉換成轉動能。

七、在圖四中發現圖形的確有表現出〔式十〕的比例關係；而 2.5cm 環的轉動慣量約爲 2.0cm 環的 1.5 倍，圖中 L1 便是將 2.5cm 的數據線乘予 1.5 做比較。

八、在發現轉軸的週期跟環的週期相同之後，我們可以將軸驅動環的施力模式類比成一個較爲單純的錐動擺：F 爲轉軸給予之正向力和環軸之間摩擦力的合力、 θ 爲 F 與水平分力的夾角。



九、在直筒狀轉軸的實驗中，我們發現只要將環置於轉軸上的適當高度，便可有效的將轉軸的振動幅度降低。不同的環能夠修正轉軸晃動情形的所

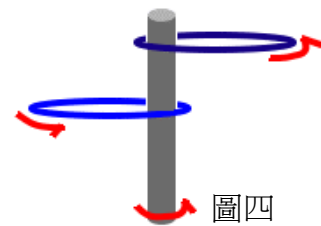
需要位置並不相同；環的數量改變時，各環的高度位置也須依情況調整。

十、在直筒狀轉軸的研究中，以攝影機由轉軸正上方拍得環的轉動時的相對位置，經過比較發現環的位置並沒有出現預期的分布（出現在相對位置上）。但考慮【八】的情形，由於環會對轉軸產生力矩，所以當各個環所在的高度位置不同時，其分布的位置也應該有所不同。

捌、 應用與展望：

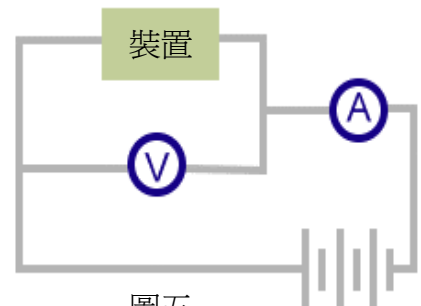
一、在轉軸的安裝過程中，我們發現要避免轉軸的晃動是一件難以處理的問題，再加上與其上轉動的環，晃動幅度有時會更為加大。實驗上，將轉軸頂固定在一孔中，已大幅改善此缺點。反過來想，軸晃動的性質正可以應用於感測振動，例如在軸上至兩環使穩定轉動，但若受到外界的振動，其上的兩個環可能將此振動的幅度放大，可以提升儀器敏感度。

二、在直筒狀轉軸的實驗中，有觀察到如果將環調整到適當高度，可以修正轉軸的晃動情形。由此聯想到一項應用：有一晃動幅度會依情況改變（例如：頂端載重）的轉軸以利用將環移動到適當的位置以減低其晃動情形。



圖四

三、環在轉動時，環與空氣摩擦，消耗了原本的所帶有能量；爲了要繼續轉動，轉軸必定提供了一些能量給轉環、補充其損失的能量。在這方面，可以將馬達與電源供應器間先串聯一安培計、與馬達並聯一伏特計，如圖五，藉此可以得到電功率消長之間的資料，利用公式 $P = IV$ 進一步加以計算討論，解釋馬達與轉軸之間更細微的影響。



圖五

四、有搖過呼拉圈的人都知道，在一些情況下，呼拉圈將會從腰際滑落；但在我們目前的實驗中，並沒有做出這樣的情形。可能是因爲我們的轉軸轉速過快，也可能是因爲我們所使用的環的半徑較小，尚未達到在某一軸轉速下不能夠被驅動穩定轉動的半徑的緣故。將來可製作半徑更大、質量更大的環以找到這樣的臨界情況，並針對這些臨界的情況作比較、討論。

五、呼拉圈由靜止到因被腰驅動而穩定轉動的過程也是一件值得研究的主題，在一開始的時候我們會將呼拉圈向一個方向甩動，這個方向是否一定要和最後環轉動的方向相同、亦或是不同；一開始的轉動半徑是否要比較大、轉動半徑的大小又跟這個由靜止到轉動的過程有什麼影響？目前這些問題都因為使用一開始轉速便穩定的轉軸而無法討論。

六、環要能夠持續的轉動，必須要有能量的持續補充。但補充的方式可以有很多種，不一定是像實驗中的以圓柱體旋轉驅動，也可以物體以直線做環週期運動，但運動的方式是否有一定，是等速率、S.H.M.、或是有其他方式、或者有其他的運動路線；其能量轉換的比率又如何？

七、目前的實驗用的轉軸驅動圓環的情形與真實我們搖呼拉圈的情形有不小的差異，將來可以設計轉盤上距原心儀段距離處有一柱狀突起作為研究器材，模擬更接近真實情形的轉動。

玖、 附錄

一、實驗用環規格（單位：半徑 cm、質量 g）

圓錐狀轉軸用環

編號	A	B	C	E	E	F	G	H	I
內徑	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
淨質量	0.76	0.94	1.07	1.18	1.31	1.47	1.56	1.66	1.94

環的內徑與外徑之間的差值固定為 1.5 cm，討論時取內徑與外徑的平均值為環半徑。另外在環上四等份處打上孔，作為螺絲栓上之用以調整質量。

在直筒狀轉軸實驗中，另外製作半徑為 2 cm、2.5 cm，內外徑差均為 1 cm 的環各 5 個。

二、實驗數據

0 砝碼數

環徑	軸徑(cm)	軸週期(s)	環週期(s)	軸頻率(Hz)	環頻率(Hz)
2.75 cm	1.400	0.0632	0.0609	15.8228	16.4117
	1.100	0.0684	0.0666	14.6306	15.0171
	0.800	0.0732	0.0710	13.6612	14.0893
	0.500	0.0746	0.0734	13.4048	13.6159
3.75 cm	2.300	0.0308	0.0309	32.4281	32.3843
	2.000	0.0315	0.0316	31.7523	31.6738
	1.700	0.0325	0.0326	30.7485	30.6847

	1.400	0.0335	0.0336	29.8090	29.7979
	1.100	0.0347	0.0347	28.8314	28.8063
	0.800	0.0362	0.0363	27.6339	27.5617
	0.500	0.0375	0.0375	26.6334	26.6548
4.75 cm	2.000	0.0554	0.0546	18.0668	18.3007
	1.700	0.0576	0.0568	17.3611	17.6098
	1.400	0.0601	0.0599	16.6389	16.7081
	1.100	0.0616	0.0613	16.2338	16.3096
	0.800	0.0650	0.0647	15.3965	15.4672
5.75 cm	2.300	0.0419	0.0419	23.8646	23.8646
	2.000	0.0438	0.0438	22.8164	22.8218
	1.700	0.0458	0.0458	21.8415	21.8475
	1.400	0.0486	0.0485	20.5589	20.6004
	1.100	0.0511	0.0510	19.5874	19.6255
	0.800	0.0527	0.0527	18.9911	18.9828
	0.500	0.0549	0.0548	18.2305	18.2510

2 砵碼數

2.75 cm	2.000	0.0381	0.0382	26.2381	26.1766
	1.700	0.0423	0.0423	23.6215	23.6220
	1.400	0.0444	0.0444	22.5241	22.5019
	1.100	0.0482	0.0483	20.7415	20.7021
	0.800	0.0507	0.0509	19.7397	19.6347
	0.500	0.0535	0.0535	18.7047	18.6883
3.75 cm	2.300	0.0445	0.0445	22.4830	22.4972
	2.000	0.0467	0.0466	21.4104	21.4386
	1.700	0.0501	0.0494	19.9439	20.2480
	1.400	0.0552	0.0553	18.1200	18.0835
	1.100	0.0652	0.0652	15.3337	15.3330
	0.800	0.0690	0.0688	14.4908	14.5397
	0.500	0.0706	0.0708	14.1718	14.1289

4 砵碼數

2.75 cm	2.000	0.0372	0.0370	26.8817	27.0255
	1.700	0.0432	0.0421	23.1481	23.7624
	1.400	0.0470	0.0461	21.2766	21.7003
	1.100	0.0518	0.0497	19.3050	20.1406
	0.800	0.0574	0.0550	17.4216	18.1984
3.75 cm	2.000	0.0598	0.0588	16.7224	17.0152
	1.700	0.0617	0.0616	16.2075	16.2307

	1.400	0.0698	0.0681	14.3266	14.6744
	1.100	0.0732	0.0720	13.6612	13.8865
	0.800	0.0788	0.0796	12.6904	12.5704

6 砝碼數

2.75 cm	2.000	0.0457	0.0457	21.8908	21.8619
	1.700	0.0490	0.0491	20.4199	20.3653
	1.400	0.0549	0.0548	18.2170	18.2541
	1.100	0.0587	0.0589	17.0303	16.9809
	0.800	0.0638	0.0619	15.6701	16.1448
	0.500	0.0711	0.0705	14.0684	14.1785

8 砝碼數

2.75 cm	1.700	0.0512	0.0515	19.5313	19.4096
	1.400	0.0573	0.0577	17.4425	17.3451
	1.100	0.0649	0.0651	15.4105	15.3649
	0.800	0.0729	0.0729	13.7210	13.7133
	0.500	0.0792	0.0791	12.6327	12.6502

半徑 2 cm 環在直筒狀轉軸週期

數量	0	1	2	3	4	5
週期	0.0435	0.0452	0.0470	0.0494	0.0509	0.0531

半徑 2 cm 環在直筒狀轉軸週期

數量	0	1	2	3	4	5
週期	0.0432	0.0452	0.0465	0.0471	0.0480	0.0504