

臺灣二〇〇三年國際科學展覽會

科 別：物理科

作品名稱：搖搖樂－自然的搖擺頻率

學 校：台中縣立大雅國民中學

作 者：楊珮雯、張耀仁

作者簡介



<楊珮雯>

我家是從事服務業的，所以常要利用課餘的時間幫忙，沒有什麼時間發展其他的興趣。雖然如此，我還是常利用時間讀書，所以學校的功課還普普，所幸我有理化方面的興趣，參加的科展，就是我尋找樂趣的地方，當閒暇時，透過做實驗，時常讓我更專注做一件事，而且還有意外的收穫！常言道：要從實驗中找到樂趣，實驗才會有發展。



<張耀仁>

我出生在一個幸福的家庭，爸爸媽媽常帶我們去旅遊，以至於能飽覽各地的奇風異俗，培養我廣泛的興趣，而其中我又偏好於閱讀，而學校的課程中，理化的方面又是我特別感興趣的。在求學過程上，我很認真，而在研究科學上，我也一樣用心。我常在做實驗時，發現很多意想不到的事，許多現象也常不經意的被發現，發現越多，越覺得有趣，收穫也越大。

作品名稱：搖搖樂—自然的搖擺頻率

作者：楊珮雯、張耀仁

英文摘要：(abstract)

The Fun of Yo-yo: the Frequency of Constant Swings

Abstract

This research explores the phenomena of swinging objects--- simple pendulum and compound pendulum, which are constantly observed in physics. The inertial moment of the swing produces pressure to fixed points of support on which the swings occur, especially in compound pendulum, which are classified as restricted single freedom. The study provided here explores the phenomena of the frequency of unfixed supporting points. The exploration of this research develops experimentally as follows:

- a. fan shaped objects swinging on the plane surface
- b. flats swinging on the arced surface
- c. fan shaped objects swinging on the are-curved surface

An impressive conclusion that there is no swinging phenomenon of fixed supporting points in gravity field on earth is achieved from the above experiments. A number of factors influence the phenomena of swings:

- a. the shapes of swinging objects and the influence of mass inertial moment
- b. the interaction between swinging objects and interfacing paths
- c. little influence from swinging mass to the swinging frequency

中文摘要：

搖搖樂—自然的搖擺頻率

- 一. 此研究是探討物體自由搖擺的現象，單擺和複擺是在物理學上常見的擺動現象，都是一種固定支點的擺動現象，尤其複擺運動時，擺動物體受轉動慣性影響而造成支點的受力，為一種拘束的第一向後運動現象。而本研究在探討多自由度自由支點的單一方向度之擺動現象。
- 二. 本實驗從這幾種方向分別探討
 1. 扇形體在平面上之擺動
 2. 平板在圓弧面上之擺動
 3. 扇形體在圓弧曲面上之擺動
- 三. 經我們實驗研究結果發現，在地球重力場中沒有固定支點的搖擺現象，是受到下列幾種因素影響
 1. 搖擺形體的形狀，其質量慣性矩的影響。
 2. 擺動物體與接觸路徑的相互影響。
 3. 擺動質量對擺動的頻率影響很小。

搖搖樂—自然的搖擺頻率

壹、研究動機

在一個偶然的機會中，在校園內看見了來校做工程的工人，所帶的半圓形容器桶在地面上規律的搖動著，同一期間在理化課正在介紹單擺運動，老師說單擺具有週期性運動的現象，我們並了解到具有週期性運動現象均可以用來作為時間的計時，並且正在實驗利用單擺的等時性來計時，探討單擺的週期性擺動特性，在這樣概念刺激下，讓我覺得對扇形體擺動與單擺特性及其週期與哪些變因有關呢？因此找了幾位同學想對此搖擺動特性進行一次探討之旅。

貳：研究主題

- 一、探討對扇形體在平面上之搖擺頻率。
- 二、探討平板在圓形曲面上之搖擺頻率。
- 三、探討對扇形體在曲面路徑上之搖擺頻率。
- 四、探討扇形體擺動與單擺、複擺擺動行為之對照。

參：應用研究之力學背景原理

- 一、轉動剛體之能量守恆。
- 二、剛體旋轉運動之簡諧運動特性。
- 三、物體之質量慣性矩。
- 四、轉動體之轉動慣量。

肆：研究過程

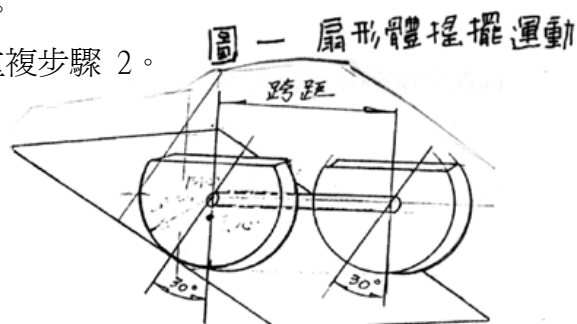
為了探討各種形狀對搖動週期的影響，我們以壓克力板製作曲率半徑 11.25 cm、9.25cm、8cm、6cm 平均厚 4.3mm 之壓克力板片，並切割成不同高度之扇形片，以形成不同形狀、質量，分別控制變因進行實驗比較。

一、扇形體在平面上之搖擺週期

實驗 1-1：相同曲率半徑，不同質量之扇形體在平面上之搖擺運動

1.步驟：

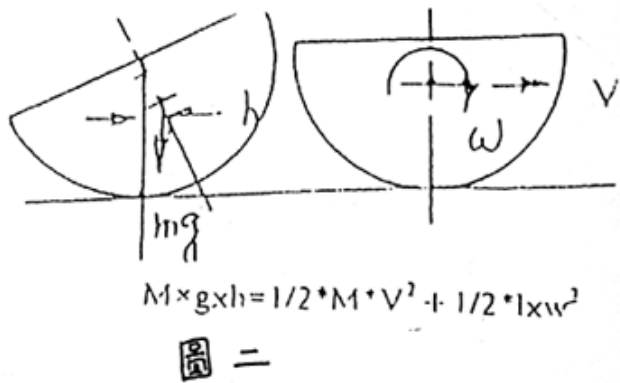
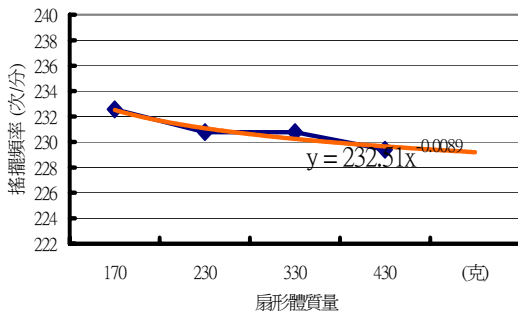
- ①取曲率半徑 11.25cm 之扇形體裝置，如圖一所示。
- ②取四片跨距 10cm 以 30 度接觸點起始搖動，測量搖動 20 次所需時間，計算其週期與頻率，並取平均值記錄之。
- ③改裝成六、八、十、十二片，並重複步驟 2。



2. 結果：

曲率半徑	質量	560g (四片)	860g (六片)	1060g (八片)	1280g (十片)	1500g (十二片)
	週期					
11.25cm	時間 (秒/20次)	24.67	24.33	24.32	24.36	24.29
	週期 (秒/次)	1.23	1.216	1.216	1.218	1.215
	頻率 (次/分)	48.78	49.34	49.34	49.26	49.38

相同曲率不同質量扇形體再相同曲率路徑之擺動



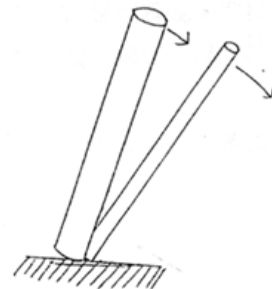
3. 討論

- ① 這種結果質量對搖擺頻率影響不大，對照複擺的情形不同，複擺物體質量越大擺動頻率越小，而兩者在操作上的差異是複擺為固定支點之擺動，而搖擺運動搖體也是一種實體，為一種非定點的自由擺動現象。
- ② 我們由力學基本能量原理了解到，當質量越大，偏轉時，其偏轉後位能也越大 ($m \times g \times h$)，但是由牛頓第一及第二定律知道，質量越大其相對運動慣性也變大，因此我們推論最後的搖擺速度是由增加的位能及慣性兩者交互作用的結果。

實驗 1-1-1：為了瞭解實驗 1-1 的結果，我們又取長度相同，不同質量的桿子。由立直位置同時下放，如圖二，觀察是否同時著地。

1. 結果：

桿長	182 cm	182 cm	182 cm
質量	1000	2000	3000
著地順序	相同	相同	相同



搖搖樂—自然的搖擺頻率

2.討論：

- ①相同長度，不同質量之桿子由相同傾角釋放兩者同時著地。
- ②相同長度之桿子，質量較大的具有較大位能，如圖三，但相對於地面旋轉支點之轉動質量矩也較大，因此兩個交互作用後達地面時間相同。
- ③實驗 1-2 中，搖擺為靜動之交替作用，故也是位能與動能的交替，所以質量較大的扇形體位能也大，但轉動慣量也大，而長度較長的位能小，但轉動慣量也小之故。

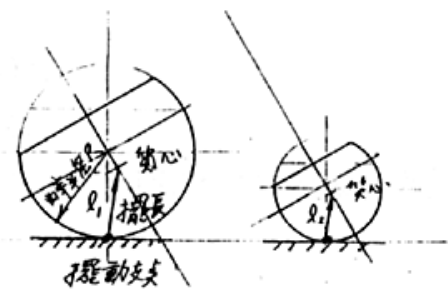
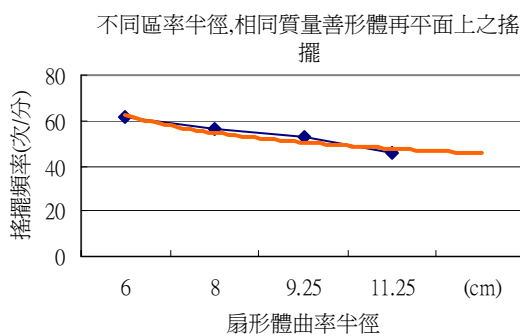
實驗 1-2：不同曲率半徑、相同質量之扇形體在平面上之搖擺運動

1.步驟:

- ①取質量 316.6g 曲率半徑 6.00cm 之扇形體，並裝置如圖一所示。
- ②取 30 度擺角接觸點起始搖動，測量搖動 20 次所需時間計算其週期，並取平均值記錄之。
- ③相同質量改變半徑為 8cm、9.25cm、11.25cm 重複步驟 2。

2.結果：

質量(g)	曲率半徑	6.00cm	8.00cm	9.25cm	11.25cm
	週期				
316.6g	時間 (秒/20 次)	19.6	21.38	22.87	26.32
	週期 (秒/次)	0.98	1.07	1.14	1.32
	頻率 (次/分)	61.23	56.07	52.45	45.45



圖四. 半徑越大時,相當於擺長越大

3、討論

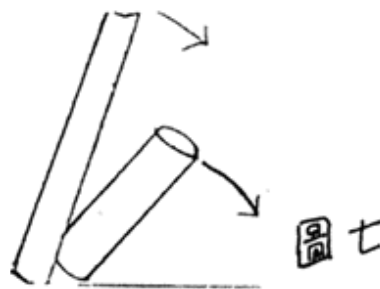
- ①相同質量時，扇形體曲率半徑越大其擺動週期越大，頻率越小。
- ②由對照單擺或複擺時我們發現扇形體質心到接觸點之距離可看成是擺長，擺長越大週期越大，故當半徑越大時，相當於擺長越大，相對週期也越大，反之越小（如圖四所示）。
- ③並且曲率半徑越小時，圓曲率越大單位圓心角所對應之下降垂直距離越大，所需提升力越大。

搖搖樂—自然的搖擺頻率

實驗 1-2-1：爲了瞭解實驗 1-2 的結果，我們又取相同質量，不同長度的桿子。由立直位置同時下放，如圖，觀察是否同時著地。

1. 結果：

桿長(cm)	26 cm	36 cm	46 cm
質量(g)	110g	110g	110g
著地順序	1	2	3



2. 討論：

- ①相同質量，不同長度之桿子由相同傾角釋放後較短的先著地。
- ②相同質量之桿子，長度較長的具有較大位能，如圖示，但相對於地面旋轉支點之轉動慣量矩也較大，因此兩個交互作用後達地面時間較長。
- ③實驗 1-2 中，搖擺爲靜動之交替作用，故也是位能與動能的交替，所以曲率半徑小的位能也小，但轉動慣量較小，故擺動較快，而半徑較大的位能大，但轉動慣量也大，擺動較慢之故。

實驗 1-3：相同曲率半徑不同高度扇形體在平面上之搖擺運動

由前面兩個實驗的結果，我們推論影響擺動週期的因素是擺動體的半徑，但是在實驗操作中，我們在實驗 1-1 和實驗 1-2 中，不論固定曲率半徑或質量，只要形狀高度不同，其搖擺週期也不同。這是我們在切割各種半徑的扇形體所沒有注意到的，因此我們想探討，當其高度不同時，其搖動情形是否有什麼變化，因此我們又進行了下列實驗操作比較：

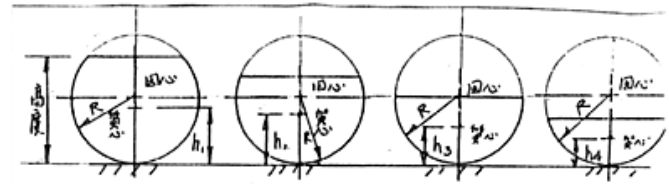
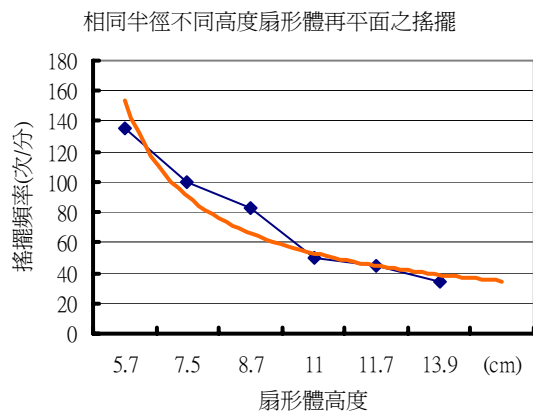
1. 步驟：

- ①取曲率半徑爲 9.9cm 之木片，分別切割成高度爲 5.7cm、7.5cm、8.7cm、11.0cm、11.7cm、13.9cm，等六種形狀。(如圖五所示)
- ②取高度爲 5.7cm 之扇形體兩片組合，並以 30 度角起始擺動 20 次，量測所需時間，重複多次操作後求平均值並計算週期後記錄之。
- ③依次取 7.5cm、8.7cm、11.0cm、11.7cm、13.9cm 不同高度之扇形體，重複步驟 2 之操作。

2. 結果：

曲率半徑	高度	5.7cm	7.5cm	8.7cm	11.0cm	11.7cm	13.9cm
	週期	80.0g	100.0g	110.0g	160.0g	170.0g	180.0g
9.9cm	時間 (秒/10 次)	4.45	6.41	7.25	11.98	13.32	17.39
	週期 (秒/次)	0.45	0.641	0.73	1.20	1.33	1.76
	頻率 (次/分)	134.83	99.83	82.19	50.0	45.11	34.09

搖搖樂—自然的搖擺頻率



圖五. 曲率半徑相同. 高度不同

3. 討論：

- ①由實驗結果我們發現，在相同曲率半徑的扇形，其扇形體高度不同時，其擺動頻率也不同.當高度越大時，擺動頻率也越小,這樣的結果讓我們得到證實，搖動體之曲率半徑並不是影響搖動週期唯一條件，高度也是變因之一，因高度大的其質心位置也較高，對照實驗 1-2 中圖四說明，搖擺的擺長也加長，週期也相對加大，所以頻率變小。
- ②在實驗操作中，我們發現當起始搖動角度太大時，扇形體會引起滑動，且扇形高度越小時,在越小時起始角度就產生滑動，由圖四觀察得知因搖擺接觸點隨時在變，且外圓曲率半徑不變，當質心越低時，搖擺同時產生之擺長變化越大的關係，當我們改變觸面(墊紙)時就不會因增加了摩擦力。
- ③綜合實驗 1-2 及本實驗說明，搖動頻率應與形狀有關，曲率半徑及高度決定了形狀，而由形狀與質量決定了轉動體的慣性矩大小，影響了搖擺的頻率。

二、平板在圓弧面上，搖擺運動頻率之探討

前面的實驗操作我們探討扇形體在平面上的搖擺週期，在討論過程中我們有一想法說，如果將實驗裝置倒置操作，將扇形體固定然後將平板平衡置於圓弧上使產生搖擺運動，那此搖擺現象是否與前面的實驗會結果相同呢？那樣的好奇使我們又進行下列的幾項探討實驗來探究真相。

實驗 2-1：相同質量、不同長度之平板體在相同曲率半徑圓弧上之擺動

1. 步驟：

- ①取曲率半徑 11.25cm,之扇形體裝置。
- ②質量 110g 長度 16cm 之平板、平衡放置於圓弧上保持平衡,以手輕壓使產生偏轉一小角度（如圖六所示）。
- ③重覆操作測量搖動 20 次所需時間計算其週期,並取平均值記錄之。
- ④取相同質量 110g，但改變長度為 26 cm、36cm、46 cm，並重複 2、3 步驟之操作並記錄之。

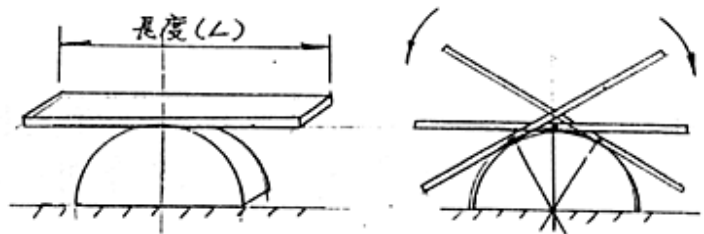
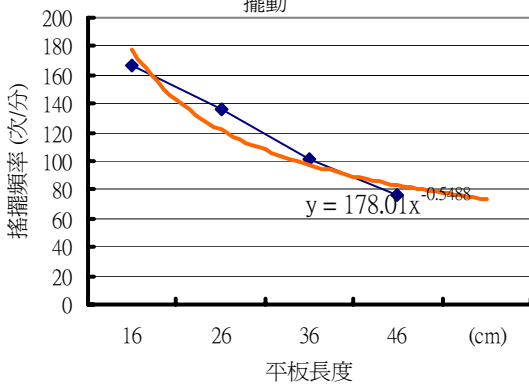
搖搖樂—自然的搖擺頻率

2.結果

平板質量 $m=110g$

曲率半徑	長度	16cm	26cm	36cm	46 cm
	週期				
11.25cm	時間 (秒/20 次)	7.17	8.72	11.75	15.86
	週期 (秒/次)	0.36	0.44	0.59	0.79
	頻率 (次/分)	166.67	136.36	101.69	75.95

相同質量不同長度平板再相同曲率半徑圓弧上擺動

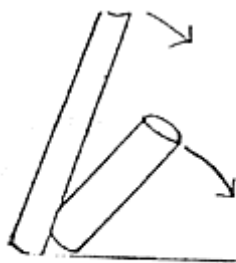


圖六. 平板在圓弧面上搖擺運動

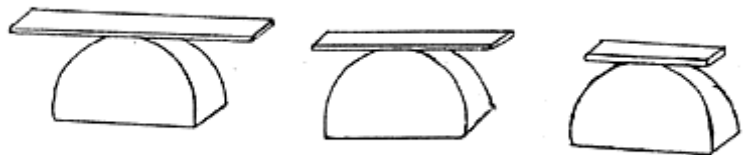
3.討論

①因長度越長時，其慣性也越大，故較不易轉動，這個現象在實驗 1-2-1 中，就驗證質量相同、長度不同之木板，由直立自然倒下時，結果長的較慢傾倒(如圖七示)表示慣性較大。

②所以平板搖擺運動時平板在左右兩端順時針、逆時針交替搖擺，再每一端點都是由靜止開始向內側傾倒，相同於前面木條的自然傾倒，所以長度大的慣性也大，來回搖擺速率較慢，因此週期變大頻率變小。(如圖八示)



圖七：長度不同之木條，由直立自然倒下，長的較慢傾倒

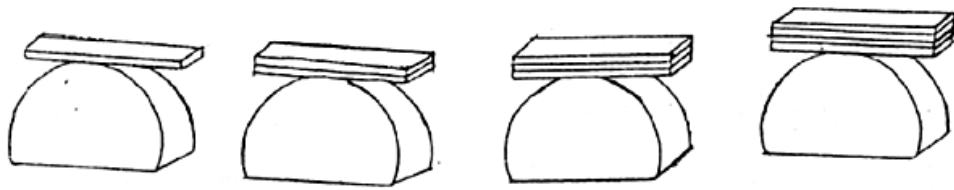


圖八：相同質量，不同長度之平板體，在相同曲率半徑圓弧上擺動

實驗 2-2：相同長度、不同質量之平板體在相同圓弧曲率半徑之擺動

1. 步驟：

- ①取曲率半徑 9.25cm, 之扇形體裝置, 如圖九所示。
- ②分別質量 80g 長度 36 cm 之平板、平衡放置於圓弧上接觸搖動。
- ③重覆操作測量搖動 20 次所需時間計算其週期，並取平均值記錄之。
- ④改變平板質量為 160g、240g、320g、400g，並重複 2、3 步驟之操作並記錄之。

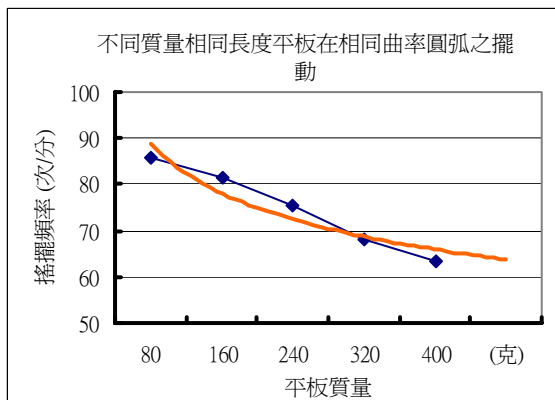


圖九. 相同長度不同質量之平板, 在相同曲率半徑上之搖擺運動

2. 結果：

圓弧半徑 $R=9.25\text{cm}$

平板長度	平板質量					
	時間	80g	160g	240g	320g	400g
36cm	時間 (秒/20 次)	14.02	14.73	15.92	17.57	18.93
	週期 (秒/次)	0.70	0.737	0.796	0.879	0.947
	頻率 (次/分)	85.71	81.41	75.38	68.26	63.36



3.討論：

- ①相同質量，不同長度之桿子由相同傾角釋放後較短的先著地。
- ②相同質量之桿子，長度較長的具有較大位能，如圖示，但相對於地面旋轉支點之轉動質量矩也較大，因此兩個交互作用後達地面時間較長。
- ③實驗 1-2 中，搖擺為靜動之交替作用，故也是位能與動能的交替，所以曲率半徑小的位能也小，但轉動質量較小，而半徑較大的位能大，但轉動質量也大之故。

實驗 2-3：相同質量、相同長度之平板體在不同圓弧曲率半徑之搖擺

1.步驟：

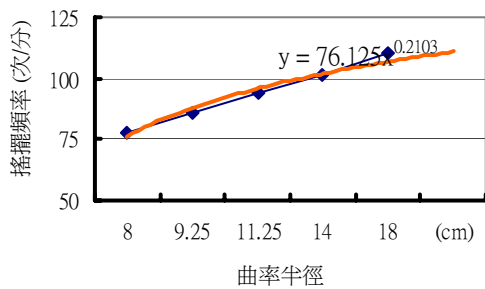
- ①取曲率半徑 11.25cm，之扇形體固定裝置。
- ②取質量 80g 長度 36 cm之平板、輕放置於圓弧上並調整支點兩邊質量使保持平衡（如圖十所示），以手輕壓平板使產生偏轉一小角度後放開產生搖擺運動。
- ③重覆操作測量搖動 20 次所需時間計算其週期，並取平均值記錄之。
- ④改變圓弧曲率半徑為 9.25 cm、11.25 cm、14cm、18cm，並重複 2、3 步驟之操作。

2.結果：

平板質量 $m=80g$

平板長度	圓弧半徑	8cm	9.25cm	11.25cm	14cm	18cm
36 cm	時間 (秒/20 次)	15.39	14.07	12.73	11.82	10.82
	週期 (秒/次)	0.61	0.70	0.522	0.59	0.54
	頻率 (次/分)	77.92	85.71	93.75	101.42	110.16

相同質量相同長度再不同曲率半徑圓弧上之擺動



圖十

相同質量、相同長度之平板體在不同圓弧曲率半徑之搖擺

3.討論：

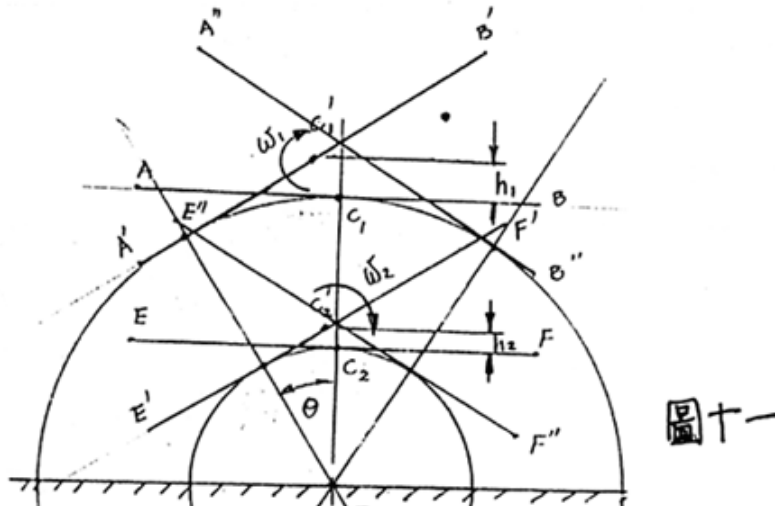
- ①平板搖擺時，在曲率半徑大的圓弧上產生上下搖擺時，產生較大之質心垂直高

搖搖樂—自然的搖擺頻率

度及水平位置變化，因此重力對支點之力矩較小圓大 ($m \times g \times h_1 > m \times g \times h_2$ 因 $h_1 > h_2$)。

② 平板擺動是由平板偏轉產生之位能轉換成動能，而平板轉動能量需克服轉動慣量，由能量轉換式 $m \times g \times h = 1/2 I \omega^2$ ($W = \sqrt{2 \times m \times g \times h / I}$) 因相同平板 $I = m \times R^2$ 故 I 值固定，故 $h_1 > h_2$ 所以 $\omega_1 > \omega_2$ ，而平板擺動角度等於在圓弧上之旋轉角度 2θ ，所以大圓弧週期 $T_1 = 4\theta / \omega_1$

小圓弧週期 $T_2 = 4\theta / \omega_2$ 故 $T_1 < T_2$ ，所以平板在大圓弧半徑上之擺動較快。



實驗 2-4：平板在曲面上搖擺的圖解分析

由前面的實驗結果得知，平板在曲面上的搖擺快慢恰好與曲面在平板上搖擺相反，對於搖擺操作的改變，我們歸納結果改變變因有①搖擺路徑由平面變成曲面 ②擺體的形狀的改變 ③彼此相對運動的特性，因此我們想藉圖解法來瞭解究竟

① 首先觀察平板在不同曲率半徑之曲面上傾斜一角度、使其產生下滑之角度 結果：曲率半徑小之曲面上，平板傾斜產生下滑之角度之比曲率半徑大者為小。

② 由能量的觀點來分析平板搖擺的快慢，將平板放在大小不同的曲面上由平衡位置偏轉一相同圓心角時(使不產生下滑)(如圖十一示)，由圖可知在曲率半徑大之上平板接觸點產生的垂直位移較大，而質心距離接觸點產生的水平距離也大，但在曲率半徑小之圓上卻相反，接觸點產生的垂直位移較小，質心距離接觸點之水平距離也小，綜合這些比較結果表列如下：

	小曲率半徑曲面	大曲率半徑曲面	比較
垂直位移	h_1	h_2	$h_1 < h_2$
水平距離	L_1	L_2	$L_1 < L_2$
扇形體重量	W_1	W_2	$W_1 = W_2$
回復位能	$E_1 = W_1 \times L_1$	$E_2 = W_2 \times L_2$	$E_1 < E_2$

搖搖樂—自然的搖擺頻率

由上表我們發現瞭解大圓上之位能明顯大於小圓，同時我們參閱高中物理學有關轉動能量一章中，(高中物理第二冊第二章)，提及轉動物體具有的能量 $E=1/2*I\omega^2$ I =物體質量慣性矩 ω =物體旋轉速度,因此將上表中 E_1 . E_2 全部轉為扇形體之轉動能代入

$$E_1=1/2*(I * \omega_1^2) \quad \omega_1=\sqrt{2E_1/I}.....(1)$$

$$E_2=1/2*(I * \omega_2^2).... \omega_2=\sqrt{2E_2/I}.....(2)$$

由(1),(2)式我們可得 $\omega_2 > \omega_1$ ，所以在大圓上之平板擺動頻率較快

③由高中物理中我們研讀慣性距(I 值),並經老師指導,說明 I 適用以表示一物體旋轉的慣性量值,與物體的質量形狀有關 $I=mk^2$ ，其中 m 為物體質量 k 為轉動半徑,因此,質量 (m) 與長度(L)越大,轉動越困難,就是因為質量的慣性越大，表示轉動越困難。

④而在改變質量實驗中,增加質量卻沒有改變搖擺週期,由前面推論質量增加使產生搖擺之位能也相對增加，但轉動慣性也相對增加，所以交互作用結果頻率沒有改變，在實驗 1-1 中也得到證明。

三、扇形體在圓形曲面上之搖擺運動頻率之探討

由前面的實驗中扇形體與平板兩種的搖擺主動件、固定件互換，得到不同的實驗結果，確時讓我們感到更加好奇搖擺運動的奧秘，因此我們想如果改變扇形體搖擺的接觸平面路徑為曲面路徑，那搖擺的結果又是如何的呢？ 因此又進行了下列幾次實驗來探討真相

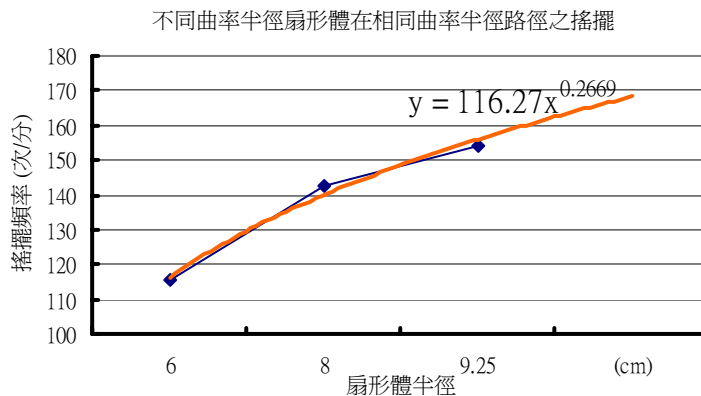
實驗 3-1：不同扇形體半徑、相同曲率半徑之曲面上的搖擺頻率。

1.步驟:

- ①取一曲率為 14.75cm 之環狀圈,並固定在桌面上。
- ②取曲率半徑為 6.00cm 扇形體,置於環狀圈之內圈上,周向偏轉一小角度後放開，使產生擺動，量測搖擺 20 次所需時間，重複操作，取平均值,計算週期並記錄之。
- ③改變扇形體之半徑為 8cm 及 9.25cm，重複步驟 2。

2.結果

曲面路徑半徑	扇形體曲率半徑	6.00 cm	8.00 cm	9.25 cm
	時間			
14.75 cm	時間 (秒/20 次)	10.49	8.45	7.77
	週期 (秒/次)	0.52	0.42	0.39
	頻率 (次/分)	115.38	142.86	153.85



3.討論

①實驗的結果,真讓我們驚奇,其扇形體在曲面上的搖擺頻率與在平面上的搖擺完全相反,扇形體曲率半徑越大,在平面搖擺頻率越小,但是在曲面路徑上時,扇形體半徑越大時卻擺動越快,實驗操作唯一改變的原因就是接觸面路徑由平面改成曲面,所以我們認為曲面路徑大小是影響搖擺頻率改變的原因。

②接著我們想瞭解扇形體在曲面上之運動狀態,我們在曲面上放置一圓球,使產生上下滾動,(如圖十二示),在這樣來回滾動過程中,我們發現兩種轉動,一是扇形體繞自身質心的自轉,另一是繞著曲面中心的公轉,而扇形在曲面上的搖擺運動,是如同前面圓球以曲率中心的公轉,搖擺過程接觸點的改變卻是繞著扇形體軸心的自轉。公轉與自轉是在藉由摩擦力相互的拘束的狀況下運動。

③我們以圖分析當偏轉 θ 角度時,兩種擺動情形

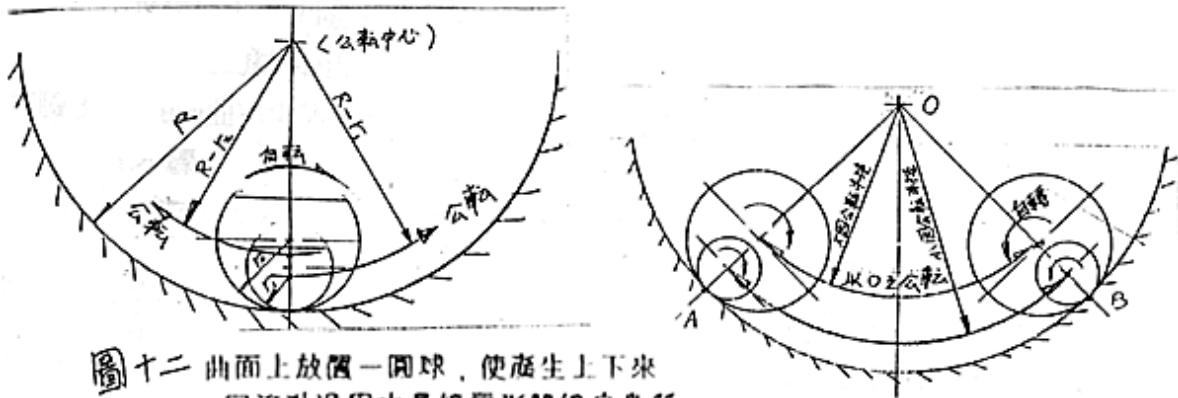
1、大曲率半徑之扇形體

扇形體質心位置升高 $h_1 = (R - r_1) \cdot (1 - \cos\theta)$, 增加位能 $E_1 = m \times g \times h_1$ 位能轉換成轉動動能 $m \times g \times h_1 = 1/(2I_1 \times \omega_1^2)$; $W_1 = (\sqrt{2 \times g \times h_1}) / I_1$

2、小曲率半徑之扇形體

扇形體質心位置升高 $h_2 = (R - r_2) \times (1 - \cos\theta)$, 增加位能 $E_2 = m \times g \times h_2$ 位能轉換成動能 $m \times g \times h_2 = 1/(2 \times I_2 \times \omega_2)$; $\omega_2 = (\sqrt{2 \times g \times h_2}) / I_2$,

因 $r_1 > r_2$ 故 $h_1 < h_2$, 所以 $\omega_1 < \omega_2$, 而搖擺週期 $T_1 = (4 \times \theta \times (R - r_1)) / (\omega_1 \times r_1)$; $T_2 = (4 \times \theta \times (R - r_2)) / (\omega_2 \times r_2)$, 故 $T_1 < T_2$ 所以扇形體曲率半徑較大, 擺動頻率較高。



圖十二 曲面上放置一圓球，使產生上下來回滾動過程中是繞扇形體自身質心的自轉，繞著曲面中心的公轉。

實驗 3-2：相同曲率半徑的曲面路徑，相同曲率半徑的扇形體，不同質量之擺動頻率，在實驗 1-1 中實驗結果發現質量與搖擺頻率沒有明顯影響，我們也想探討那質量在曲面路徑的搖擺是否也一樣呢？

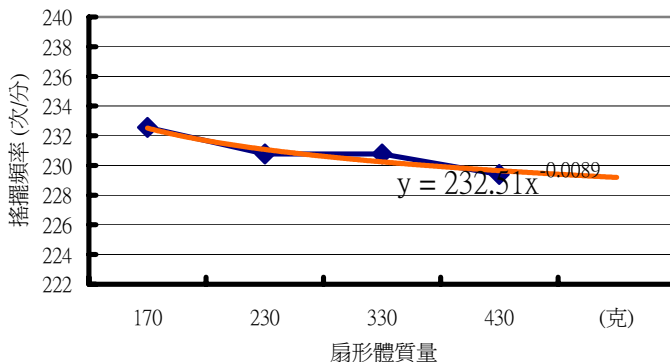
1. 步驟：

- ①取一曲率為 14.75cm 之環狀圈,並固定在桌面上。
- ②取曲率半徑為 9.25cm 高 4cm 扇形體,置於環狀圈之內圈上，周向偏轉一小角度後放下,使產生擺動，測量搖擺 20 次所需時間，重複操作多次，取平均值，計算週期並記錄之。
- ③增加扇形體之質量（片數），並重複步驟 2 之操作。

2. 結果

面路徑半徑	扇形體質量	170g	230g	330g	430g
	時間/秒	(2 片)	(4 片)	(6 片)	(8 片)
14.75 cm	時間 (20 次)	5.16	5.26	5.25	5.21
	週期 (秒/次)	0.258	0.26	0.26	0.261
	頻率 (次/分)	232.56	230.77	230.77	229.89

相同曲率不同質量扇形體再相同曲率路徑之擺動



搖搖樂—自然的搖擺頻率

3.討論：

由實驗結果,我們發現扇形體在曲面路徑的搖擺,質量似乎也沒有影響,這個結果與在平面搖動的結果相同,我們推論應該也是位能與慣性增加作用交互的原因。

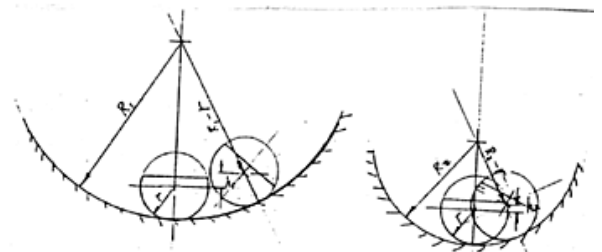
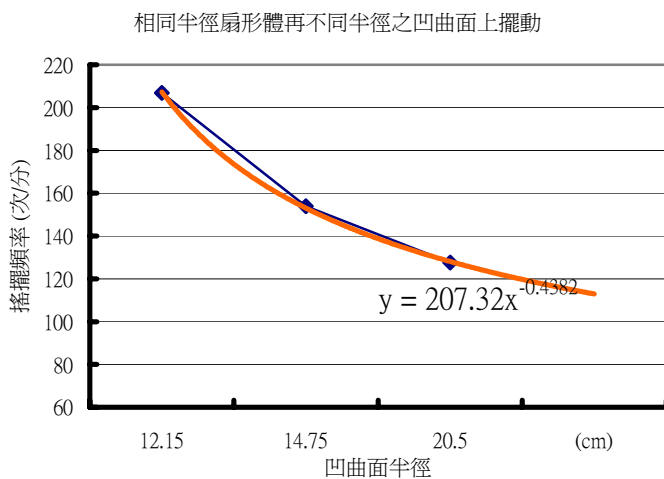
實驗 3-3：相同曲率半徑扇形體在不同曲率半徑之曲面路徑之搖擺頻率

1.步驟：

- ①取一曲率半徑為 14.75cm 之環狀圈,並固定在桌面上。
- ②取曲率半徑為 9.25cm 扇形體,置於環狀圈之內圈上,周向偏轉一小角後放平,使產生擺動,測量搖擺 20 次所需時間,重複操作多次,取平均值,計算週期並記錄之。(如圖十三)
- ③改變路徑之曲率半徑為 12.15cm、20.5cm 並重複操作步驟 2、3 之操作

2.結果：

扇形體曲率半徑	曲面路徑半徑	12.15 cm	14.75 cm	20.5 cm
9.25cm	時間 (20 次)	5.89	7.77	9.42
	週期 (秒/次)	0.29	0.39	0.47
	頻率 (次/分)	206.90	153.85	127.66



圖十三. 相同扇形體在不同曲面路徑上之搖擺運動

3.討論：

- ①由實驗結果我們發現,當固定扇形半徑時,相對的較大半徑之曲面路徑之搖擺週期也越大頻率越小,較小半徑扇形體搖擺週期變小頻率變快。
- ②我們以圖分析當偏轉 θ 角度時

大曲率半徑之路徑

直心位置升高 $h_1 = (R_1 - r) \cdot (1 - \cos\theta)$ 增加位能 $E_1 = m \times g \times h_1$ 位能轉換成轉動動能 $m \times g \times h_1 = 1/2 \times I \times \omega_1^2$ $\omega_1 = (\sqrt{2 \times g \times h_1}) / I$ 而搖擺週期 $T_1 = (4 \times \theta \times (R_1 - r)) / (\omega_1 \times r_1)$; $T_2 =$

搖搖樂—自然的搖擺頻率

$(4 \times \theta \times (R_2 - r)) / (\omega_1 \times r_2)$ 故 $T_1 > T_2$ 所以曲率半徑較大之曲面，擺動頻率較慢。

小曲率半徑之路徑

質心位置升高 $h_2 = (R_2 - r) \times (1 - \cos\theta)$ ，增加位能 $E_2 = m \times g \times h_2$ ，位能轉換成動能 $m \times g \times h_2 = (1/2 \times I \times \omega_2^2)$ ； $\omega_2 = (\sqrt{2 \times g \times h_2}) / I$ ，因相同扇形體 I 值相等，且 $R_1 > R_2$ 所以 $(R_1 - r) > (R_2 - r)$

伍、結論

由前面三種不同近似相同的搖擺實驗操作，但結果也都不同，由此可見各種搖擺運動的快慢，則依其接觸運動所行成的力、能量、慣性及相對路徑的交互作用而變化，綜合本次探討我們得到一些結論如下。

- ①扇形體在平面上的搖擺頻率，是以平面接觸點為擺動支點產生搖擺，而支點卻隨搖擺運動隨時改變。而搖擺能量則是因為扇形體質心相對於支點之偏轉，而產生之重力位能來產生搖擺運動，與質量大小也沒有明顯關係(如實驗 1-1 之結果)。
- ②平板在圓形曲面上的搖擺頻率，平板在大圓上之搖擺速率較在小圓上快，當平板長度加長時，因相對慣性距 I 變大，慣性也加大，所以搖擺速率也較慢。
- ③扇形體在曲面上之搖擺恰完全與在平板上相反，大半徑之扇形體搖擺頻率比小半徑扇形體快，非常奇妙的改變，經過圖解分析及功能原理分析，因扇形體的搖擺其質心是以繞著曲面的中心擺動，而扇形體質心到曲面中心的距離就相當於擺長，由單擺性質瞭解，擺動週期與擺長的平方根成正比，因此當扇形體半徑變大時，相當於擺長變短 $(R-r)$ 【 R ：曲面半徑， r ：扇形體半徑】，擺動頻率變快週期變小，扇形體半徑小時，擺長變大擺動週期變大，頻率變小。
- ④參考四十屆縣科展研究擺動與前進中，我們量測實體物體在不同支點擺動時之點都有產生大小不同的作用力。(除了以質心為支點直接產生旋轉外)，這次探討的三種擺動實驗都是在沒有拘束的狀況下搖擺，擺體自然搖擺，所以接觸點變動相當於單擺或複擺支點隨時在改變一般。靠摩擦力阻止滑動，當扇形體高度較大時，其質心較高較不易產生滑動，而高度較低時，其質心較低較易產生滑動。
- ⑤扇形體在平面上搖擺、平板在曲面上及扇形體在曲面路徑上搖擺，質量對搖擺頻率沒有影響，我們實驗結果得知是由質量慣性矩交互作用的結果。
- ⑥在實驗進行中，其實有很多變因我們仍無法完全控制，例如空氣的阻力，活動面的接觸性質，連接桿的位置是否在質心上，及連接桿的質量等變因也會影響實驗的結果，這些有待我們更進一步時來加以探討。

陸、研究應用

- 1 搖擺的現象在我們的生活中隨處可見，沒想到它有著這麼多學問，大自然的奧妙真讓我們好奇與嚮往。對周圍環境中處處的擺動都可以引起我們的探討。
- 2 經過這樣的實驗探討，讓我們聯想到船在水中的搖擺，降落傘下落搖擺時又有一番奧秘，我

搖搖樂—自然的搖擺頻率

們將繼續在課餘去探索奧秘。

柒*、參考資料(Reference)

1. 國中理化第四冊 國立編譯館。
2. 高中物理第二冊 國立編譯館。
3. 震動學理論與應用 W.T. Thomson 著 康淵 譯 曉園出版社。
4. 台中縣四十屆科展物理組作品 擺動與前進 蔡瑞恭 蔡宗憲。