

臺灣二〇〇三年國際科學展覽會

科 別：物理科

作品名稱：環保水氣壓計

學 校：基隆市立安樂高級中學

作 者：郭庭瑄

作者簡介



大家好！我是庭瑄。很高興能參與此次的科展活動，本文以波以耳定律為基礎，配合環境保育的概念，所設計出無污染的環保水氣壓計。在整個研究的過程當中，雖然遇到了不少困難與瓶頸，但經過無數次的努力、修正與討論，終使實驗成果與理論推導能相符合，對我來說是一次非常奇妙的歷程。

非常感謝劉老師的指導，還有總是在旁邊替我加油打氣的父母、老師與同學，沒有你們，我不可能有這樣的表現。

摘要

本研究利用波以耳定律為基礎，以理論計算推導的方式，模擬水氣壓計的操作模式，並探討其校準模式與誤差來源。

以此設計出的水氣壓計有以下兩個特色：

1. 大氣壓力的變化與水氣壓計液面的變化為線性關係。
2. 可以得到比水銀氣壓計更佳的靈敏度。

而在水氣壓計的校準上分別探討了標準校準、壓力差校準、溫度校準與重力密度校準。利用標準校準可以得到水氣壓計液面變化與大氣壓力變化的線性關係式。而溫度校準與密度校準在儀器操作環境為定溫下則可併入標準校準。

Abstract

This study based on Boyle's law imitates the operation model of water barometer and discusses its calibration and sources of error. The designed water barometer has two features:

1. The relationship between atmospheric pressure and the height changes of the surface of the water barometer is linear.
2. More sensitive than that of a mercury barometer.

We also discuss standard calibration, pressure calibration, thermo calibration and gravidensity calibration. The linearity between atmospheric pressure and the height changes of the surface of the water barometer is known by standard calibration; thermo calibration and gravidensity calibration can be merged into standard calibration under constant temperature surroundings.

壹、研究動機

自從 1643 年義大利人托里切利成功的利用水銀柱測量出大氣壓力後，水銀氣壓計至今仍被普遍使用，且被公認為準確度極高的氣壓量測方式。

我們知道一大氣壓約為 $76 \text{ cm} \cdot \text{Hg}$ ，若換算成水柱的話大約為 $10 \text{ m} \cdot \text{H}_2\text{O}$ 。比較之後發現利用水銀測量大氣壓力，所需試管不需超過 1 m ；而使用水來測量大氣壓力，所需試管則超過 10 m ，因此若用水來量測大氣壓力便非常的不方便，在操作上也非常的困難。

但是以環保的角度來看，水不但便宜、隨手可得而且不會造成環境污染，若能利用水來量測大氣壓力則能減少水銀對環境的破壞。

貳、研究目的

- 一、利用波以耳定律，以理論計算推導的方式，模擬水氣壓計的操作模式。
- 二、利用理論計算，改變空氣柱的設計，使水氣壓計其靈敏度能大於水銀氣壓計。
- 三、設計出能在實驗室使用的水氣壓計，並探討其校準模式與誤差來源。

參、研究方法

一、理論推導

當溫度固定時，定量的氣體所受的壓力越大時其體積則越小，其所受的壓力越小時其體積則越大。因此定溫、定量的氣體其體積與所受壓力成反比，此即著名的波以耳定律。推導如下：

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1} \quad \text{交叉相乘得} \quad P_1 V_1 = P_2 V_2 \dots\dots(1)$$

(圖一) 為水氣壓計的原始設計。(圖一) (a) 為長 l 半徑為 r 的圓柱型空氣柱， V_1 為空氣柱體積 ($V_1 = \pi r^2 \times l$)， P_1 為空氣柱內壓力，即大氣壓力。

(圖一) (b) 乃將空氣柱倒插入水槽中，使空氣柱完全沒入水中， x 為空氣柱內水面上升的高度， V_2 為空氣柱內氣體的體積 ($V_2 = \pi r^2 \times (l - x)$)， P_2 為空氣柱內氣體壓力，且 P_2 與管柱內液面 A 點壓力 (P_A)、水槽內 B 點壓力 (P_B) 相等，所以 $P_2 = P_A = P_B = P_1 + (l - x) \times d$ (d 為水的密度)。

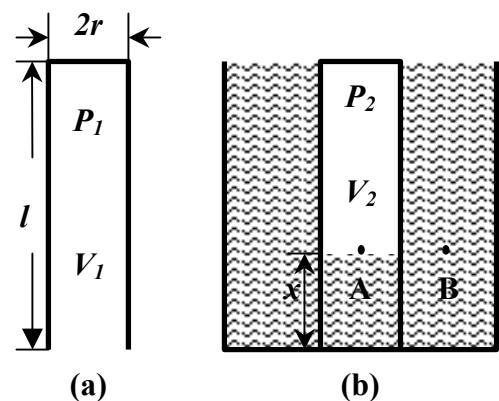
將 P_1 、 V_1 、 P_2 、 V_2 分別代入式子(1)可得：

$$P_1 \times (\pi r^2 \times l) = [P_1 + (l - x) \times d] \times [\pi r^2 \times (l - x)] \dots\dots(2)$$

將式子(2)加以整理可得：

$$P_1 = \frac{(l^2 - 2 \cdot l \cdot x + x^2) \times d}{x} \dots\dots(3)$$

在本文中將以 CGS 制的單位來運算，因此可以視水的密度為 1 gw/cm^3 (在靠近地球表面之處可視質量 1 g 的物體其重量為 1 gw ；本文將此定義為重力密度 (gravidensity))。如此可將式



(圖一) 水氣壓計原理示意圖

子(3)改寫成：
$$P_1 = \frac{(l-x)^2}{x} \dots\dots(4)$$

此式即本研究用來設計水氣壓計的原始理論公式。

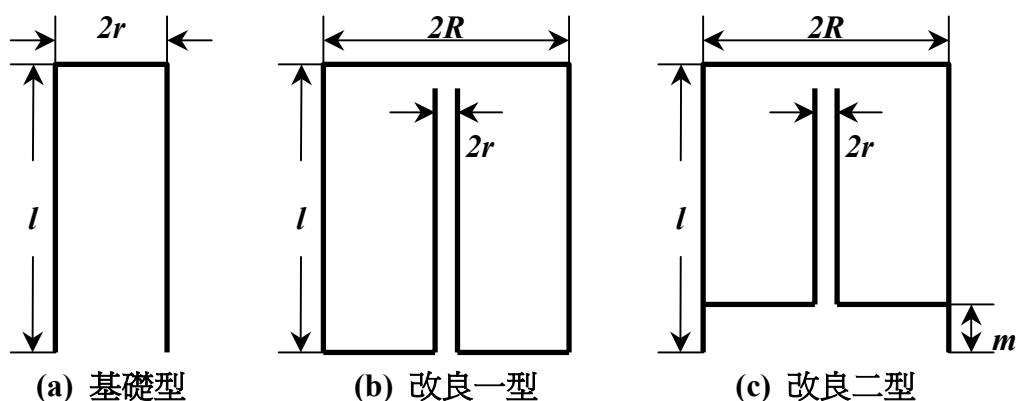
二、電腦模擬分析

利用 MicroCal Origin 3.0 版數據分析處理軟體，將推導出的氣壓方程式帶入不同的 x (以每次增加 0.1 cm 帶入) 求得對應之 P_1 值，探討 x 與 P_1 的關係並分析比較 $\Delta P / \Delta x$ 值，以作為水氣壓計的設計參考。

肆、研究結果與討論

本研究所做的理論推導過程中，共設計了 (圖二) 中的三種空氣柱：

文中將探討當大氣壓力在 700 gw/cm^2 至 1200 gw/cm^2 時， P_1 (大氣壓) 與 x 值 (空氣柱內水面上升的高度) 間的關係。為了比較水氣壓計與水銀氣壓計的靈敏度我們分別於



(圖二) 空氣柱

$P_1 = 1200 \text{ gw/cm}^2$ 、 $P_1 = 1000 \text{ gw/cm}^2$ 與 $P_1 = 700 \text{ gw/cm}^2$ 分析其 $\Delta P / \Delta x$ 之值。

$\Delta P / \Delta x$ 表示水柱每單位長度變化的氣壓變化量。 $\Delta P / \Delta x$ 值越小則表示空氣柱內液面變化越容易受氣壓變化的影響，其靈敏度則越高。而水銀氣壓計其 $\Delta P / \Delta x = 13.6 \text{ (gw/cm}^3)$ ，因此本研究將以 $\Delta P / \Delta x < 13.6 \text{ (gw/cm}^3)$ 做水氣壓計設計上的標準。

一、基礎型空氣柱之理論計算

(一)、公式推導

基礎型空氣柱 (圖一) 之公式推導結果即 (4) 式

$$P_1 = \frac{(l-x)^2}{x} \dots\dots(4)$$

(二)、理論計算

(4) 式中的 l 值 (空氣柱長) 分別以 100 cm、200 cm、300 cm、400 cm、500 cm、600 cm 代入，可以得到表一為基礎型空氣柱靈敏度比較表與表二為液面上升高度比較表。

表一：基礎型空氣柱靈敏度比較

$\Delta P/\Delta x$ (gw/cm ³)	$P_1 = 1200$ gw/cm ²	$P_1 = 1000$ gw/cm ²	$P_1 = 700$ gw/cm ²
$l = 100$ cm	194.6	142.4	78.0
$l = 200$ cm	60.7	4617	27.2
$l = 300$ cm	33.0	25.4	15.7
$l = 400$ cm	22.0	17.2	11.0**
$l = 500$ cm	16.3	12.9**	8.5**
$l = 600$ cm	12.9**	10.3**	6.9**

*表示 $\Delta P/\Delta x = 13.6$ **表示 $\Delta P/\Delta x < 13.6$

表二：基礎型空氣液面上升高度比較

x (cm)	$P_1 = 1200$ gw/cm ²	$P_1 = 1000$ gw/cm ²	$P_1 = 700$ gw/cm ²
$l = 100$ cm	7.1 ~ 7.2	8.3 ~ 8.4	11.2 ~ 11.3
$l = 200$ cm	25.4 ~ 25.5	29.1 ~ 29.2	37.6 ~ 37.7
$l = 300$ cm	51.4 ~ 51.5	58.3 ~ 58.4	73.3 ~ 73.4
$l = 400$ cm	83.4 ~ 83.5	93.7 ~ 93.8	115.5 ~ 115.6**
$l = 500$ cm	120.2 ~ 120.3	133.9 ~ 134.0**	162.6 ~ 162.7**
$l = 600$ cm	160.7 ~ 160.8**	178.0 ~ 178.1**	213.4 ~ 213.5**

*表示 $\Delta P/\Delta x = 13.6$ **表示 $\Delta P/\Delta x < 13.6$

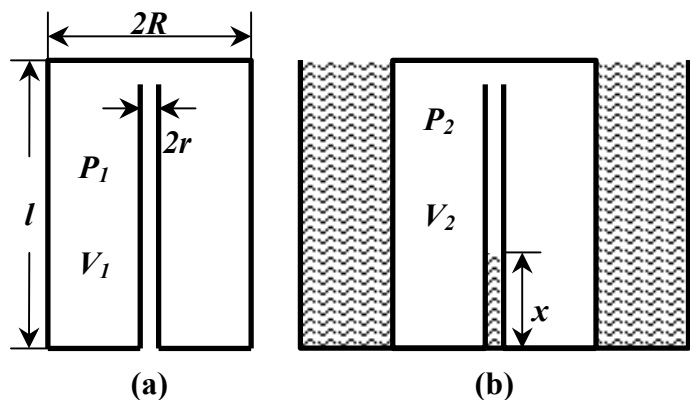
- 1、由表一可以發現基礎型空氣柱越長其測量之靈敏度則越高，而表二則說明了基礎型空氣柱越長其液面高度變化受大氣壓力的影響則越大。
- 2、若要達到水銀氣壓計的靈敏度，則需空氣柱長 500 cm 以上，使得操作上非常不便。而空氣柱越長液面上升高度越高（甚至超過人的身高），使得觀察上亦不方便。

二、改良一型空氣柱之理論計算

為便於操作與觀察，將基礎型空氣柱改良成爲（圖三）改良一型空氣柱，並將空氣柱長度限定在 100cm。

（一）、公式推導

（圖三）(a)爲長 $l=100$ cm 內半徑爲 r ，外半徑爲 R 的改良一型空氣柱， V_1 爲空氣柱體積（ $V_1 = \pi R^2 \times l$ ）， P_1 爲空氣柱壓力，即大氣壓力。（圖三）(b) 將空氣柱倒插入水槽中，使空氣柱完全沒入水中如圖， x 爲內半徑空氣柱水面上升的高度， V_2 爲空氣柱內氣體的體積（ $V_2 = \pi R^2 \times l - \pi r^2 x$ ）， P_2 爲空氣柱內氣體壓力，且 $P_2 = P_1 + (l - x) \times d$ （ d 爲水的密度； $d = 1\text{g/cm}^3$ ）。將 P_1 、 V_1 、 P_2 、 V_2 分別代入式子(I)可得：



（圖三）改良一型空氣柱示意圖

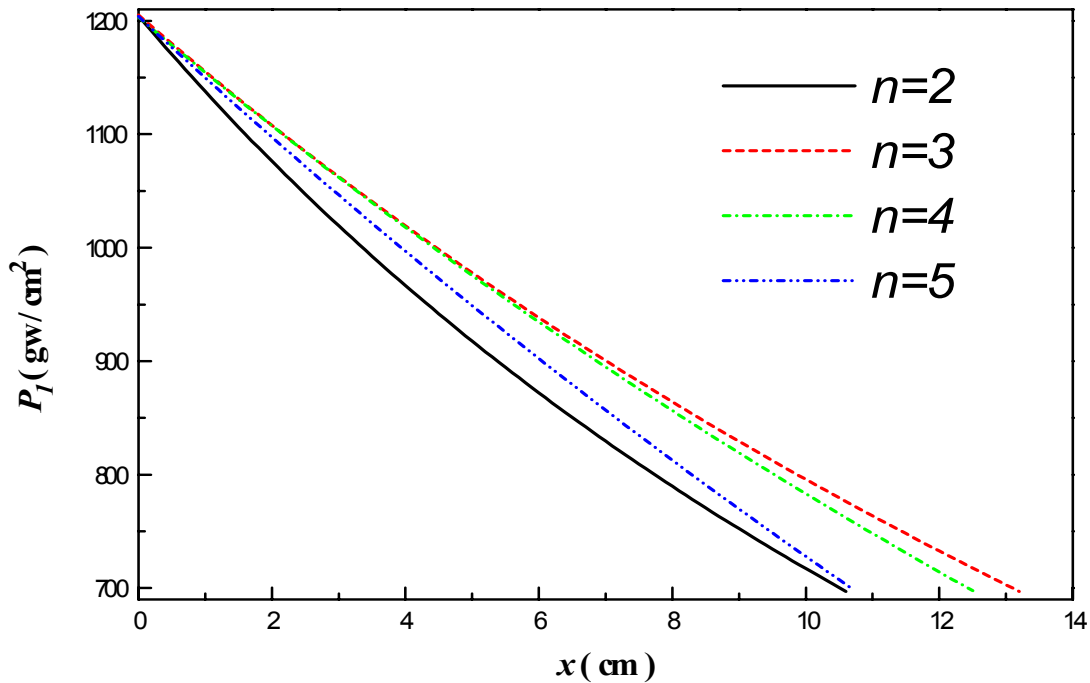
$$P_1 \times (\pi R^2 \times l) = [P_1 + (l - x) \times d] \times [\pi R^2 \times l - \pi r^2 x] \dots (5)$$

(5)式中 $d=1$ 、 $l=100$ ，且設外半徑 R 與內半徑 r 的比值 $\frac{R}{r} = n$ 則可得：

$$P_1 = \frac{(100n^2 - x) \times (100 - x)}{x} \dots (6)$$

(二)、理論計算

(6)式中的 n 值分別以 2、3、4、5 代入可得：(圖四) 為改良一型空氣柱不同 n 值 P_1 由 700 gw/cm² 至 1200 gw/cm² 液面上升高度的比較圖(以 $P_1=1200$ gw/cm² 液面高度為 0 作圖)、表三為改良一型空氣柱靈敏度比較表，表四為改良一型空氣柱液面上升高度比較表。



(圖四) 改良一型空氣柱不同 n 值液面上升高度之比較

表三：改良一型空氣柱靈敏度比較

$\Delta P/\Delta x$ (gw/cm ³)	$P_1 = 1200$ gw/cm ²	$P_1 = 1000$ gw/cm ²	$P_1 = 700$ gw/cm ²
$n = 2$	69.3	53.2	32.9
$n = 3$	50.9	41.4	29.0
$n = 4$	49.6	42.5	23.3
$n = 5$	54.8	48.8	40.6

*表示 $\Delta P/\Delta x = 13.6$ **表示 $\Delta P/\Delta x < 13.6$

表四：改良一型空氣液面上升高度比較

x (cm)	$P_1 = 1200 \text{ gw/cm}^2$	$P_1 = 1000 \text{ gw/cm}^2$	$P_1 = 700 \text{ gw/cm}^2$
$n = 2$	23.8 ~ 23.9	27.1 ~ 27.2	34.3 ~ 34.4
$n = 3$	41.6 ~ 41.7	46.0 ~ 46.1	54.7 ~ 54.8
$n = 4$	56.2 ~ 56.3	60.6 ~ 60.7	68.6 ~ 68.7
$n = 5$	66.9 ~ 67.0	70.8 ~ 70.9	77.5 ~ 77.6

*表示 $\Delta P/\Delta x = 13.6$ **表示 $\Delta P/\Delta x < 13.6$

(三)、討論

- 1、比較表一 ($l=100 \text{ cm}$) 與表三。當空氣柱皆為 100 cm 時，改良一型空氣柱其靈敏度大約為基礎型空氣柱的 2~3 倍。
- 2、由圖四與表三顯示，改良一型空氣柱外半徑(R)與內半徑(r)比值 n ($n = \frac{R}{r}$)，不會明顯影響改良一型空氣柱的靈敏度。
- 3、當 n 值大於等於 5 時，改良一型空氣柱靈敏度隨著 n 值變大而變差。

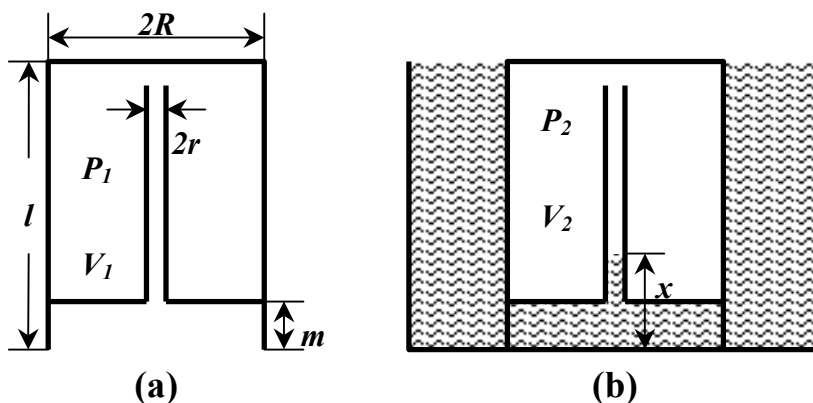
三、改良二型空氣柱之理論計算

就以上的數據分析顯示：基礎型空氣柱 ($l = 100 \text{ cm}$) 與改良一型空氣柱當空氣柱長皆為 100 cm 時，改良一型之空氣柱其靈敏度遠勝過基礎型空氣柱，但仍不及水銀氣壓計。

圖五乃是將基礎型空氣柱與改良一型空氣柱混合後所設計出的改良二型空氣柱。(圖五)(b)當柱內液面小於 m 時，即為基礎型。為使操作方便限定空氣柱長 $l = 100 \text{ cm}$ ，再者比較基礎型空氣柱 $l = 100 \text{ cm}$ 的計算， $P_1 < 1200 \text{ gw/cm}^2$ 時其柱內液面高度 $x > 7 \text{ cm}$ ，因此將 m 暫設為 7 cm ($m = 7 \text{ cm}$)。

(一)、公式推導

(圖五)(a)為改良二型空氣柱， V_1 為空氣柱體積 ($V_1 = \pi R^2 \times l$)， P_1 為空氣柱壓力，即大氣壓力。(圖五)(b)乃將空氣柱倒插入水槽中，使空氣柱完全沒入水中如圖， x 為內半徑空氣柱水面上升的高度， V_2 為空氣柱內氣體的體積



(圖五) 改良二型空氣柱示意圖

($V_2 = \pi R^2 \times (l - m) - \pi r^2 (x - m)$)， P_2 為空氣柱內氣體壓力，且 $P_2 = P_1 + (l - x) \times d$ (d 為水的密度； $d = 1 \text{ g/cm}^3$)。將 P_1 、 V_1 、 P_2 、 V_2 分別代入式子(1)可得：

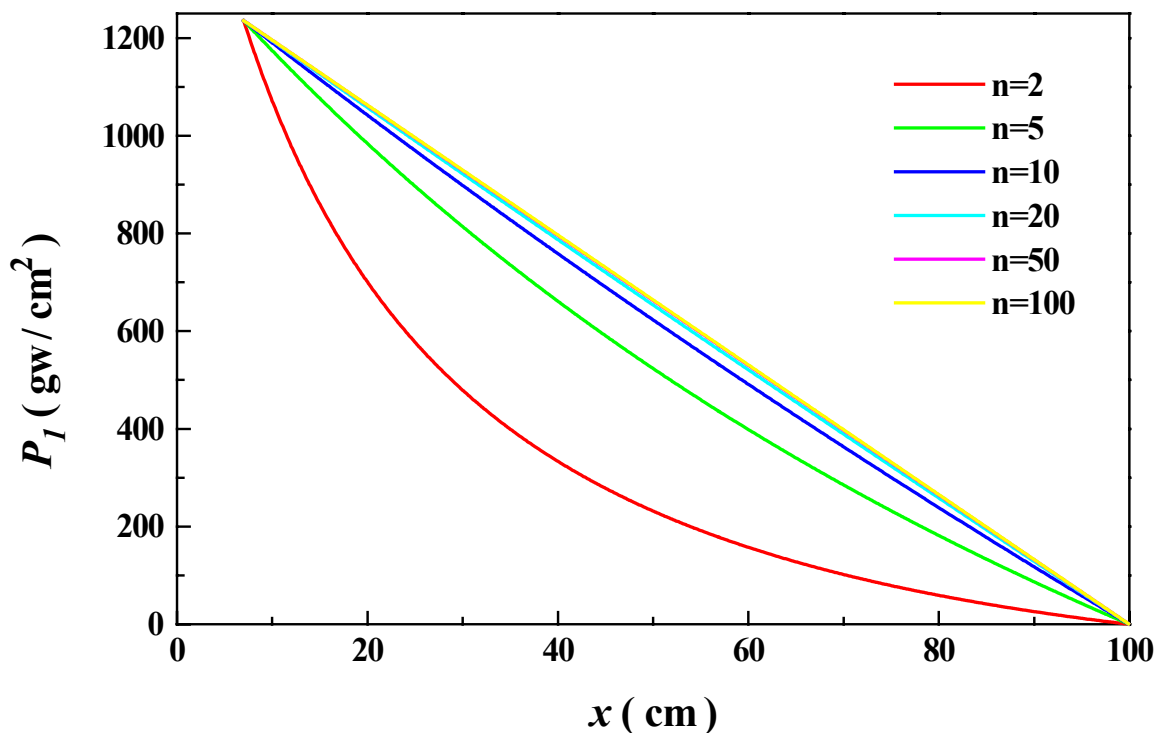
$$P_1 \times (\pi R^2 \times l) = [P_1 + (l - x) \times d] \times [\pi R^2 \times (l - m) - \pi r^2 (x - m)] \dots \dots (7)$$

(7)式中 $d=1$ 、 $l=100$ ，令 $m=7$ ，且設 $\frac{R}{r} = n$ 則可得：

$$P_1 = \frac{(100n^2 - 7n^2 - x + 7) \times (100 - x)}{7n^2 + x - 7} \dots\dots\dots(8)$$

(二)、理論計算

(8)式中的 n 值分別以 2、5、10、20、50、100 代入可得：(圖六) 改良二型空氣柱不同 n 值 P_1 由 700 gw/cm² 至 1200 gw/cm² 液面上升高度的比較圖、表五為改良二型空氣柱靈敏度比較表，表六為改良二型空氣柱液面上升高度比較表。



(圖六) 改良二型空氣柱不同 n 值液面上升高度之比較

表五：改良二型空氣柱靈敏度比較

$\Delta P/\Delta x$ (gw/cm ³)	$P_1 = 1200$ gw/cm ²	$P_1 = 1000$ gw/cm ²	$P_1 = 700$ gw/cm ²
$n = 2$	58.4	44.7	27.6
$n = 5$	20.5	18.1	14.9
$n = 10$	15.1	14.4	13.6*
$n = 20$	13.7	13.6*	13.3**
$n = 50$	13.4**	13.3**	13.3**
$n = 100$	13.3**	13.3**	13.3**

*表示 $\Delta P/\Delta x = 13.6$ **表示 $\Delta P/\Delta x < 13.6$

表六：改良二型空氣液面上升高度比較

x (cm)	$P_1 = 1200 \text{ gw/cm}^2$	$P_1 = 1000 \text{ gw/cm}^2$	$P_1 = 700 \text{ gw/cm}^2$
$n = 2$	7.5 ~ 7.6	11.5 ~ 11.6	20.0 ~ 20.1
$n = 5$	8.7 ~ 8.8	19.1 ~ 19.2	37.3 ~ 37.4
$n = 10$	9.3 ~ 9.4	22.8 ~ 22.9	44.2 ~ 44.3*
$n = 20$	9.5 ~ 9.6	24.2 ~ 24.3*	46.5 ~ 46.6**
$n = 50$	9.6 ~ 9.7**	24.6 ~ 24.7**	47.1 ~ 47.2**
$n = 100$	9.6 ~ 9.7**	24.7 ~ 24.8**	47.2 ~ 47.3**

*表示 $\Delta P/\Delta x = 13.6$ **表示 $\Delta P/\Delta x < 13.6$

三、討論

- 1、由表五顯示，當 n 值越大氣壓越小 $\Delta P/\Delta x$ 越接近 13.3 gw/cm^3 。
- 2、由表六顯示，當 n 值越大空氣柱內液面高度(x)與 P_1 的相關性越高，而不受 n 值的影響。
- 3、由圖六，當 $n = 100$ 時 P_1 與 x 幾乎為 $P_1 = 1328.28 - 13.29x$ 的線性關係。

4、由式子 (8) $P_1 = \frac{(100n^2 - 7n^2 - x + 7) \times (100 - x)}{7n^2 + x - 7}$ 當 $n \rightarrow \infty$ 時 P_1 可表示為 $P_1 = \frac{(93n^2) \times (100 - x)}{7n^2}$ 則 $P_1 = \frac{93 \cdot (100 - x)}{7} \rightarrow P_1 = 1328.57 - 13.29x \dots \dots (9)$ 由(9)

式得 P_1 與 x 為線性關係，且 $\Delta P/\Delta x = 13.3$ 。

- 5、為了瞭解 m 對改良二型空氣柱的影響，我們改寫 (7) 式 $P_1 \times (\pi R^2 \times l) = [P_1 + (l - x) \times d] \times [\pi R^2 \times (l - m) - \pi r^2 (x - m)]$ 得

$P_1 = \frac{(100n^2 - m \cdot n^2 - x + m) \times (100 - x)}{m \cdot n^2 + x - m}$ 當 $n \rightarrow \infty$ 時 P_1 可表示

$P_1 = \frac{(100 - m) \times n^2 \times (100 - x)}{m \cdot n^2} \rightarrow P_1 = \frac{100 \times (100 - m)}{m} - \frac{100 - m}{m} x \dots \dots (10)$ 由(10)式

得 P_1 與 x 為線性關係，且 $\Delta P/\Delta x = \frac{100 - m}{m} \dots \dots (11)$ 。

- 6、由(11)式當 m 越大時 $\Delta P/\Delta x$ 越小，靈敏度越大。但 m 過大則無法量測較大之氣壓。

表七為 100cm 基礎型空氣柱 P_1 與 x 之對應值表：

表七： $l = 100\text{cm}$ 之基礎型空氣柱 P_1 與 x 之對應值

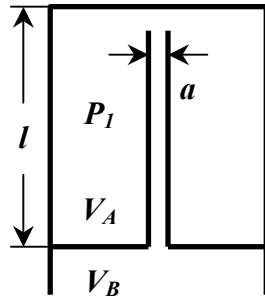
x	7.9	8.0	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5
P_1	1073.72	1058.00	1042.67	1027.71	1013.12	998.88	984.97
x	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0	9.1	9.2
P_1	971.39	958.13	945.16	932.50	920.11	908.00	896.16

由表七所示：

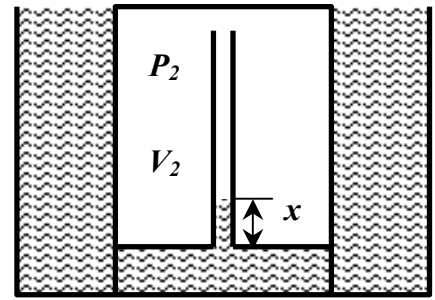
- 1、改良二型空氣柱，若設 $m = 8$ ， $n \rightarrow \infty$ ，則可測小於 1058 gw/cm^2 之大氣壓且 $P_1 = 1150 - 11.5x$ ， $\Delta P/\Delta x = 11.5$ 。
- 2、改良二型空氣柱，若設 $m = 9$ ， $n \rightarrow \infty$ ，則可測小於 920 gw/cm^2 之大氣壓且 $P_1 = 1011.11 - 10.11x$ ， $\Delta P/\Delta x = 10.1$ 。

四、儀器校準

為使儀器在測量上能更精確，本研究共探討了標準校準、壓力差校準、溫度校準與重力密度校準等四項校準模式。為方便儀器校準的探討，將(圖五)各項參數改為(圖七)所示。



(a)



(b)

(圖七) 改良二型空氣柱示意圖

(圖七)(a)中 V_A 為空氣柱上端體積， V_B 為空氣柱下端體積， a 則為內半徑 r 細管的截面積 (令 $n \geq 50$)。因此 P_1 為大氣壓力 $V_1 = V_A + V_B$ ， $P_2 = P_1 + (l-x) \cdot d$ ， $V_2 = V_A - a \cdot x$ ，將 P_1 、 P_2 、 V_1 、 V_2 帶入(1)式可得：

$$P_1 = \frac{l \cdot V_A \cdot d - [V_A + (l-x) \cdot a] \cdot d \cdot x}{V_B + a \cdot x} \dots\dots\dots(12)$$

由於 $n \geq 50$ 因此將(12)式化簡為：

$$P_1 = \frac{V_A}{V_B} \cdot l \cdot d - \frac{V_A}{V_B} \cdot d \cdot x \dots\dots\dots(13)$$

以下將使用(13)式探討標準校準、溫度校準與重力密度校準等三種校準模式。

(一)、標準校準

(13)式中 V_A 、 V_B 、 d 與 l 在常溫下可視為常數，因此可改寫為：

$$P_1 = C_1 - C_2 \cdot x \dots\dots\dots(14) \quad (C_1、C_2 \text{ 均為大於 } 0 \text{ 的常數})$$

標準校準乃將水銀氣壓計設為標準氣壓 (即 P_1)，細管液面高度 x 視為水氣壓計所測得之氣壓。將所測得多組的 P_1 與 x 的對應值，利用 MicroCal Origin 3.0 版數據分析處理軟體做線性迴歸分析求其直線方程式，即可得到 C_1 、 C_2 ，其中 C_2 即為氣壓計之靈敏度 ($\Delta P / \Delta x$)。

其次標準校正亦可將細管與液體之間的作用力所造成的液面上升，校正於 C_1 中，不需另行校準。在溫度固定的實驗環境中，溫度校準與密度校準皆可併入標準校準。

(二)、溫度校準

溫度校準分為注水前後溫差校準與操作環境溫度校準。其中操作環境的溫度差異在 V_A 與 V_B 皆為同一材質容器，其體膨脹係數相同下， $\frac{V_A}{V_B}$ 為一固定值。因此操作環境的溫度僅影響 d 與 l 的值，此部份將在密度校準再詳加說明。

根據理想氣體方程式 $PV = nRT$ 可得知，對定量氣體而言 $\frac{PV}{T} = nR = \text{常數}$ 。(13)式之推導乃針對注水前後氣體溫度沒有變化，設注水前氣體溫度為 T_1 ，注水後氣體溫度為 $T_2 = T_1 + \Delta T$ ，因此 $\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \dots\dots\dots(15)$ (P_2 、 V_2 為注水後沒有溫差的情形， P_1' 、 V_1' 為注

水後溫度由 T_1 變為 T_2 的情形) , 則 $P_2' = P_1 + (l - x') \cdot d$ ($x' = x + \Delta x$; x 實際值、 x' 為測量值) 、 V_2' 可視為等於 V_2 (ΔV 極小可忽略不計) 。(15) 式可改寫為 $\frac{P_1 + (l - x) \cdot d}{T_1} = \frac{P_1 + [l - (x + \Delta x)] \cdot d}{T_1 + \Delta T}$ (16) 整理可得 $\Delta x = -\frac{\Delta T \cdot [P_1 + (l - x) \cdot d]}{T_1 \cdot d}$ (17) ,

因此可得修正後的 $x = x' - \Delta x = x' + \frac{\Delta T \cdot [P_1 + (l - x) \cdot d]}{T_1 \cdot d}$ (18) 。若 ΔT 值不大下, 可將 x

視為 x' ; 若 ΔT 值過大則, 重新改寫(18)式為 $x = \frac{T_1 \cdot d \cdot x' + \Delta T \cdot (P_1 + l \cdot d)}{(T_1 + \Delta T) \cdot d}$ (19) 。

(三)、壓力差校準

由(圖七)可知 $P_2 = P_1 + (l - x) \cdot d$, 但在量測過程中 P_1 (大氣壓力) 會隨著環境的變化而有所差異。因此將上式改為 $P_2' = P_1 + \Delta P + (l - x) \cdot d$, 若將水的重力密度視為 $d = 1 \text{ gw/cm}^3$, 則 $P_2' = P_1 + [l - (x - \Delta P)]$ (20) 。由(20)式中可知當注水前後有大氣壓力變化時, 在實驗觀測上將影響 x 值, 因此將測得的 x 值 (以 cm 為單位) 減去壓力變化 (ΔP ; 以 gw/cm^2 為單位) 即可修正為原始的大氣壓力值。

(四)、重力密度校準

水的重力密度校準包括重力校準與溫度校準兩部分。重力校準主要是因為在不同的緯度與高度, 重力對物質作用的大小不同所做的校準。且在同一地點重力校準亦能併入標準校準, 不需另行計算。

溫度校準可將(13)式改寫成 $P_1 = \left(\frac{V_A}{V_B} \cdot l - \frac{V_A}{V_B} \cdot x \right) \cdot d_T = (c_1 - c_2 x) \cdot d_T$ (21) , 其中 d_T 為

水在不同溫度下的密度。將(19)式整理得 $\frac{P_1}{d_T} = c_1 - c_2 x$ (22) , 利用標準校準的線性迴歸分析, 即可求得 c_1 、 c_2 。

(五)、討論

- 1、由以上的探討可以發現, 水氣壓計只要在固定地點, 於固定溫度下進行實驗, 僅需進行標準校準。
- 2、由(17)式設注水前後溫差 $\Delta T = 0.1^\circ\text{C}$ 、 $T_1 = 300\text{K}$ 、 $d = 1 \text{ gw/cm}^3$ 、 $l = 93 \text{ cm}$ 、 $x = 25 \text{ cm}$ 、 $P_1 = 1000 \text{ gw/cm}^2$, 帶入則 $\Delta x = -0.31 \text{ cm}$ 。表示注水前後若有 0.1°C 的溫度變化就會有大約 0.3 公分水柱的變化。由此可知溫度控制與記錄在此實驗中扮演非常重要的角色。
- 3、由壓力差校準可以發現, 當注水前後有 0.1 cm-Hg ($= 1.36 \text{ cm-H}_2\text{O} = 1.36 \text{ gw/cm}^2$) 的大氣壓壓力差時, 將使細管內液面產生 1.36 cm 的變化。因此大氣壓力的變化在

儀器的校準是無法忽略的。且完成注水後的儀器對氣壓變化的觀察其靈敏度 $\Delta P/\Delta x = 1 \text{ gw/cm}^3$ ，為水銀氣壓計的 13.6 倍。

- 4、綜合以上的分析，對於實驗數據的校準先進行溫度校準與壓力差校準，再分析其標準校準。

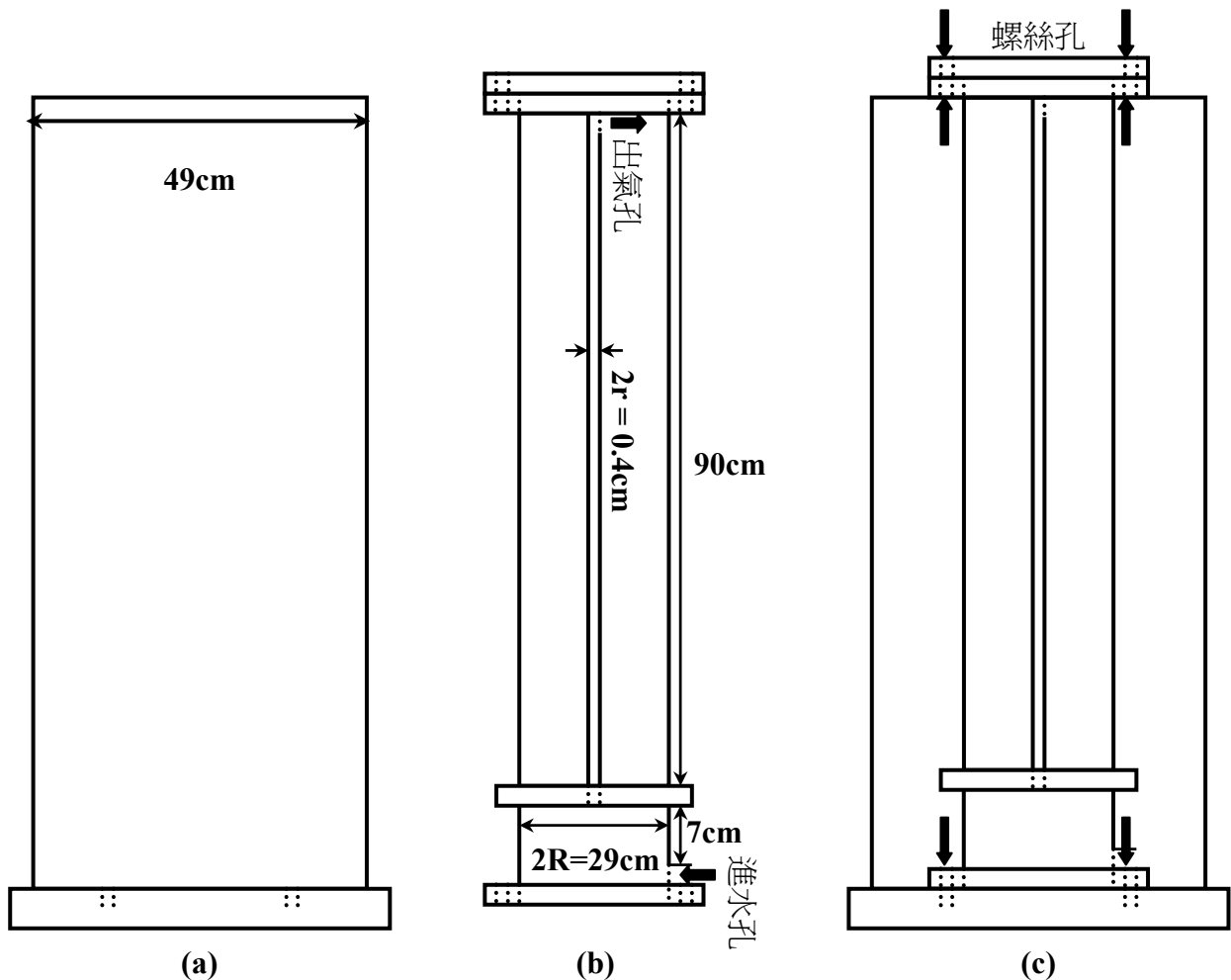
五、改良二型空氣柱之水氣壓計之設計、實驗操作與實驗數據分析

經由以上的計算，發現改良二型空氣柱不但能控制水氣壓計的靈敏度，亦能使水柱高度變化與大氣壓力變化成線性關係。本研究即以此為儀器設計的基礎。

(一) 環保一號水氣壓計

1、儀器設計

(圖八) 為環保一號水氣壓計。此裝置以壓克力為製作材質。(圖八) (a) 為外圍水桶，(圖八) (b) 為改良二型空氣柱，(圖八) (c) 為水氣壓計之組合。



(圖八) 環保一號水氣壓計

2、實驗操作

實驗步驟一：將水緩緩由外圍水桶注入，待外圍水桶水面與進水孔齊時，改良二型空氣

柱內壓力即為大氣壓力，且空氣柱內氣體為定量氣體（空氣柱內氣體不再逸出）。記錄空氣柱內氣體溫度。

實驗步驟二：水繼續由外圍水桶加速注入，由於外圍水桶水位升高，進水孔水壓增加使得空氣柱內液面上升。待下端空氣柱進滿水後，液面繼續於直徑 0.4cm 的細管內上升。

實驗步驟三：待外圍水桶液面上升至固定水位時停止注水。記錄空氣柱內氣體溫度、細管內液面高度與水銀氣壓計讀數。

實驗步驟四：每隔 10 分鐘記錄一次空氣柱內氣體溫度、細管內液面高度與水銀氣壓計讀數，連續記錄一小時。

實驗步驟五：放水，重複步驟一至四。於每日最後一次進水觀察結束後，不再放水，至隔日觀察液面變化，每隔 10 分鐘記錄一次空氣柱內氣體溫度、細管內液面高度與水銀氣壓計讀數，連續記錄一小時。

3、實驗結果

環保一號水氣壓計在操作上對於 V_B 氣體定量控制無法掌握得當，使得液面變化誤差過大。其次，由於外圍水桶過大注水時間過長，使空氣柱內氣體受外圍水溫影響導致液面高度持續變化無法正確測出空氣柱內氣體溫度與液面高度變化之關係。因此目前仍無法有效測得可分析之有效數據。

改良環保一號水氣壓計後，設計製作環保二號水氣壓計。以下將分析環保二號水氣壓計之設計、操作與數據分析。

(二) 環保二號水氣壓計

1、儀器設計與裝置

(圖九) 為環保二號水氣壓計。以壓克力為製作材質。

2、實驗操作

實驗步驟一：將電子溫度計 (TES 1310 TYPE-K) 置於環保二號水氣壓計內，測量精確度設為 $0.1\text{ }^{\circ}\text{F}$ ，誤差範圍 $\pm 0.3\%$ 。

實驗步驟二：密封上下封蓋。利用對稱方式將上下封蓋各 16 個螺絲孔以六角螺絲旋緊。

實驗步驟三：未注水前。紀錄時間、電子溫度計溫度 (T_F) 與水銀氣壓計壓力 (P_{Hg})。

實驗步驟四：將入水孔封閉後將水緩緩注入注水管，待高度約為 10cm 將入水孔打開，使水由入水孔進入水氣壓計。(注意：保持注水管水面高於水氣壓計內部水面高度，避免水氣壓計內部氣體經由入水孔逸出) 當水氣壓計內部水面接近細管底部時，減緩注水速率。當注水管水面於固定高度時停止注水。

實驗步驟五：紀錄時間、細管內液面高度、電子溫度計溫度 (T_F) 與水銀氣壓計壓力 (P_{Hg})。每 5 分鐘紀錄一次，連續紀錄 5 小時以上。

實驗步驟六：放水，重複步驟一至五。

3、實驗數據分析

(圖十)、(圖十一)與(圖十二)分別為二月一日、二月二日與二月四日所測得的原始數據圖。(圖十)(a)、(圖十一)(a)與(圖十二)(a)為細管內液面高度隨時間變化關係圖。(圖十)(b)、(圖十一)(b)與(圖十二)(b)為溫度隨時間變化關係圖。(圖十)(c)、(圖十一)(c)與(圖十二)(c)為氣壓隨時間變化關係圖。

由(圖十)、(圖十一)與(圖十二)中(a)、(b)圖的變化趨勢與溫度校準的理論相符合。

首先將測得的液面高度設為 x_0 ，比較注水前與測量時之氣壓差 (ΔP)，則經壓力差校準可得新的測量位置為 $[x_0 - \Delta P]$ 。

將 $[x_0 - \Delta P]$ 帶入溫度校準公式 (19 式)，且不考慮溫度對水密度的影響 (設水的重力密度為 $d = 1 \text{ gw/cm}^3$)，可得

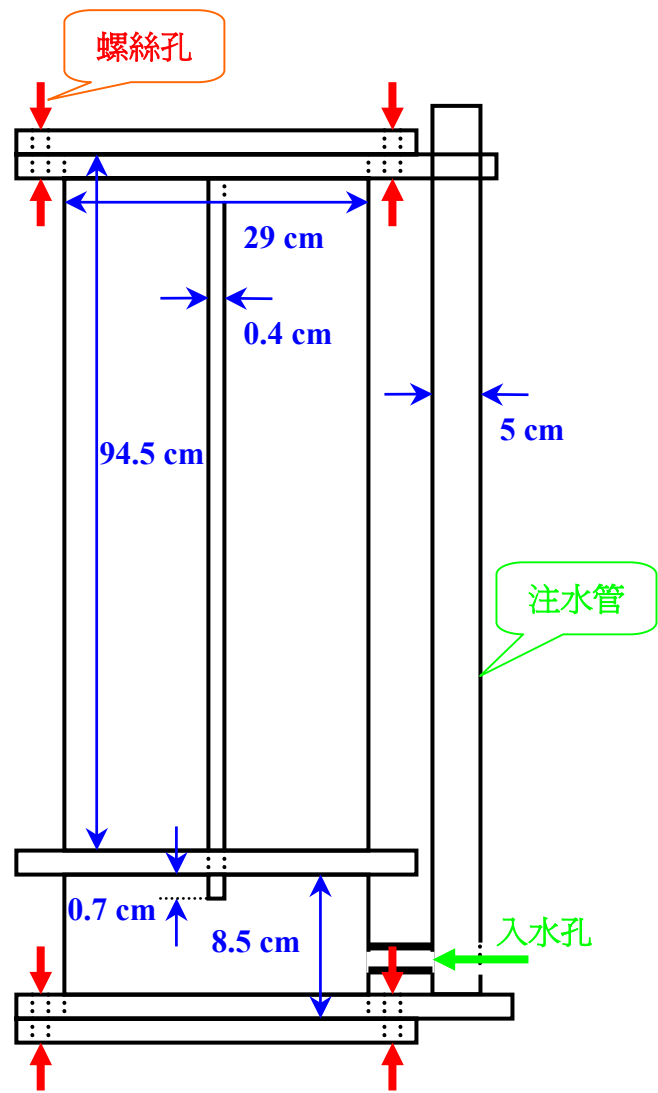
$$x = \frac{T_1 \cdot (x_0 - \Delta P) + \Delta T \cdot (P_1 + l)}{(T_1 + \Delta T)} \dots\dots(23)$$

(圖十三)即是將(圖十)、(圖十一)與(圖十二)經過壓力差校準與溫度校準後的分析圖。

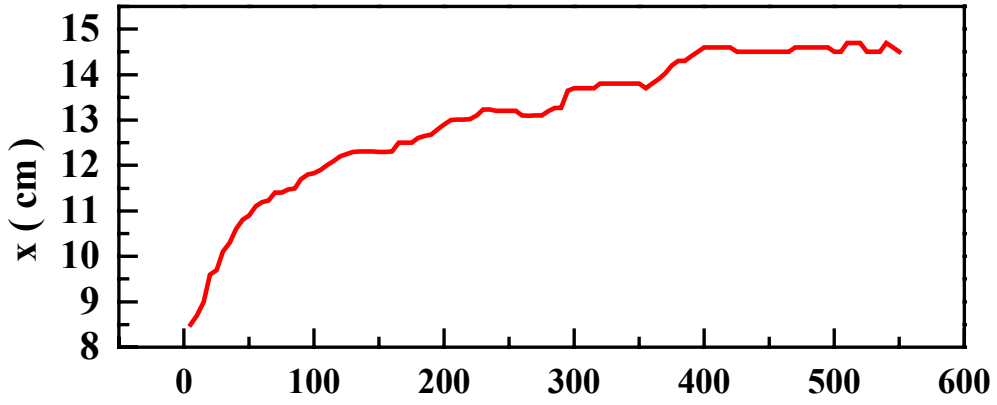
(圖十三)(a)為二月一日的數據分析圖；當大氣壓力 $P_1 = 1040.4 \text{ gw/cm}^2$ 水氣壓計內細管液面高度變化大約在 $7.5 \text{ cm} \sim 8.5 \text{ cm}$ ，液面上下變動範圍約為 1 cm 。(圖十三)(b)為二月二日的數據分析圖；當大氣壓力 $P_1 = 1045.704 \text{ gw/cm}^2$ 水氣壓計內細管液面高度變化大約在 $8.75 \text{ cm} \sim 10.25 \text{ cm}$ ，液面上下變動範圍約為 1.5 cm 。(圖十三)(c)為二月四日的數據分析圖；當大氣壓力 $P_1 = 1043.936 \text{ gw/cm}^2$ 水氣壓計內細管液面高度變化大約在 $7.5 \text{ cm} \sim 9.0 \text{ cm}$ ，液面上下變動範圍約為 1.5 cm 。

4、討論

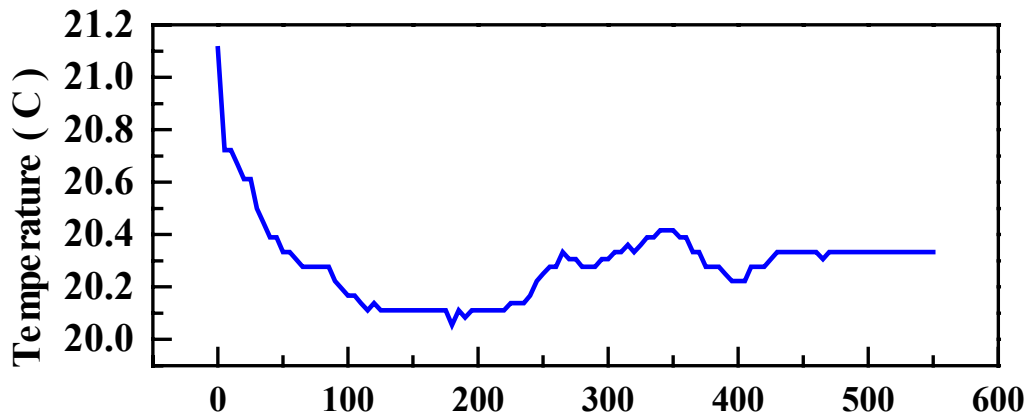
- (1) (圖十三)中(a)、(b)、(c)三圖上下震盪的範圍大約 $1 \text{ cm} \sim 1.5 \text{ cm}$ 。圖(a) $P_1 = 1040.4 \text{ gw/cm}^2$ 震盪位置約在 7.8 cm 處、圖(b) $P_1 = 1045.704 \text{ gw/cm}^2$ 震盪位置約在 9.5 cm 處、圖(c) $P_1 = 1043.936 \text{ gw/cm}^2$ 震盪位置約在 8.25 cm 處。與理論誤差過大因此無法做有效的標準校準。
- (2) 由於溫度與大氣壓力的變化對液面高度的影響極為顯著，因此(圖十三)中(a)、(b)、(c)三圖圖形的震盪主要應來自溫度量測與水銀氣壓計量測的誤差所造成。



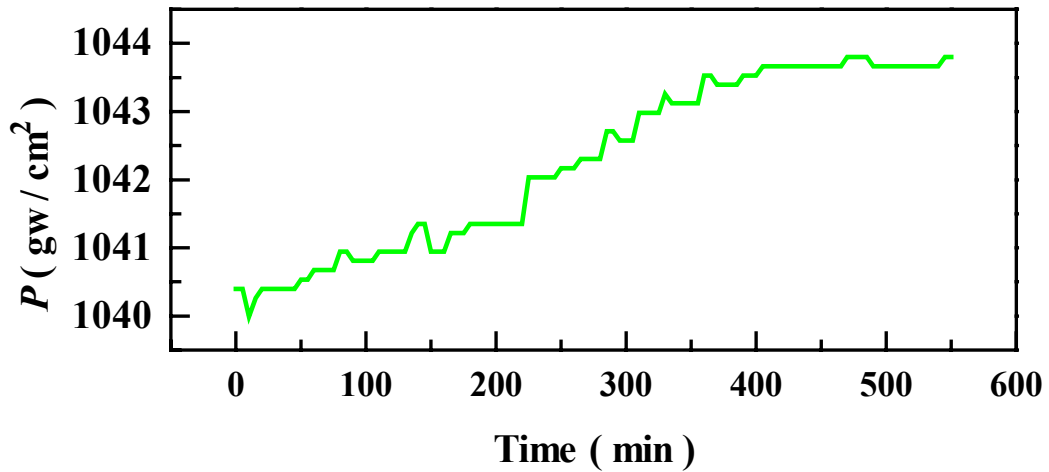
(圖九) 環保二號水氣壓計



(a) 細管內液面高度 x 隨時間變化關係圖

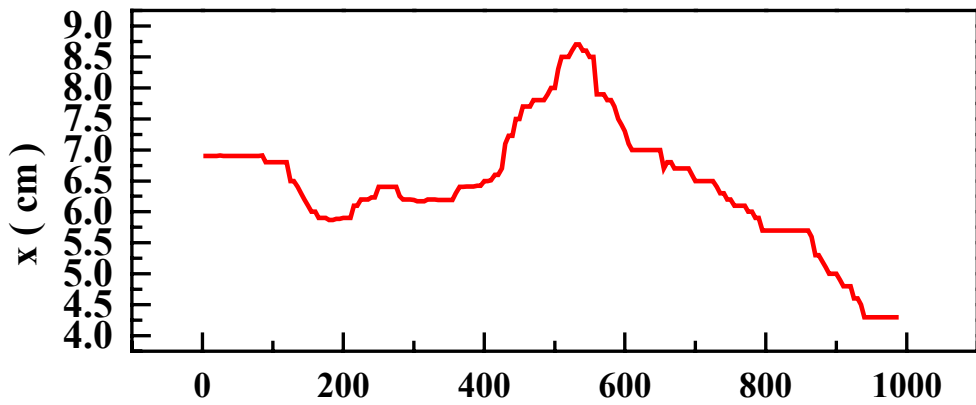


(b) 溫度隨時間變化關係圖

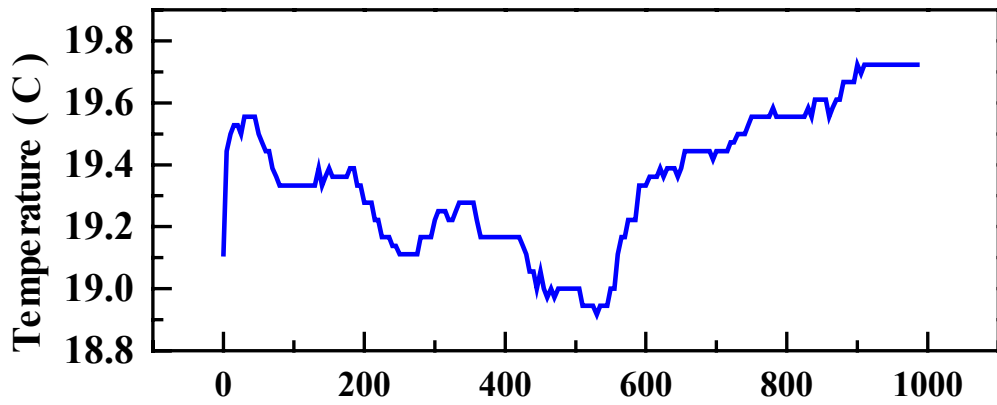


(c) 氣壓隨時間變化關係圖

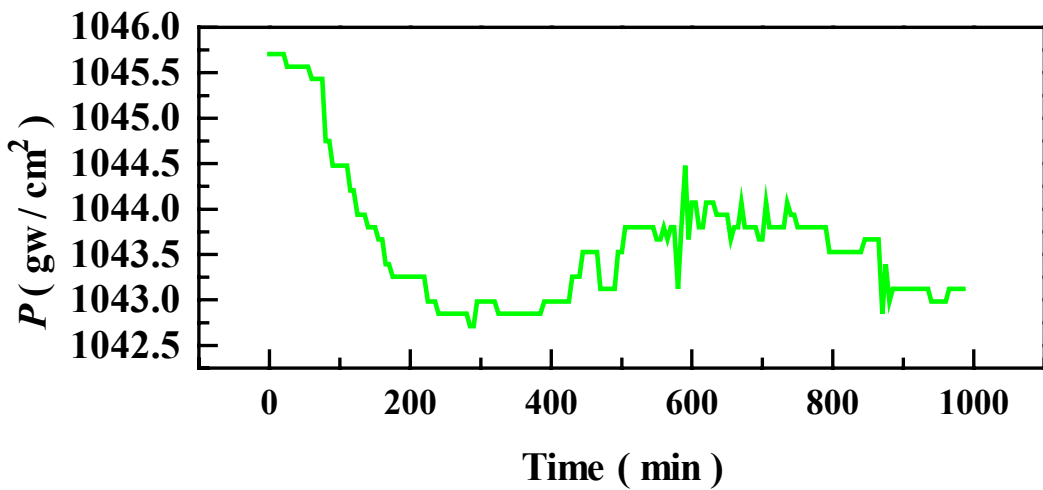
(圖十) 原始實驗數據



(a) 細管內液面高度 x 隨時間變化關係圖

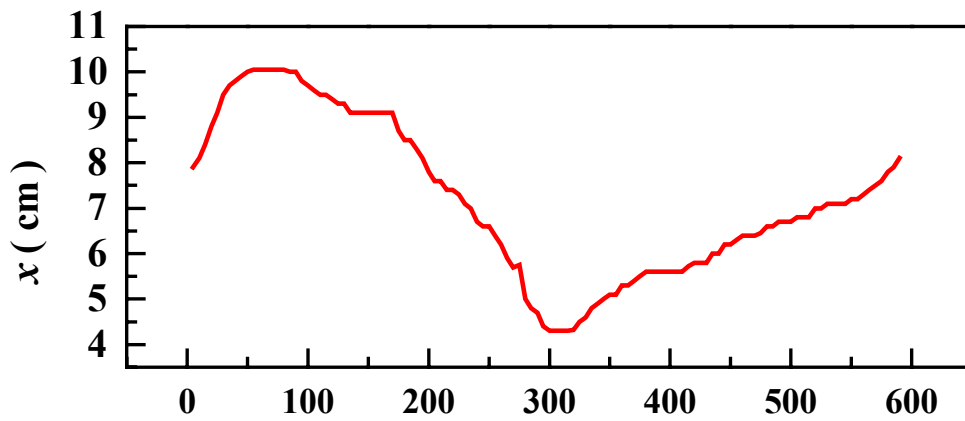


(b) 溫度隨時間變化關係圖

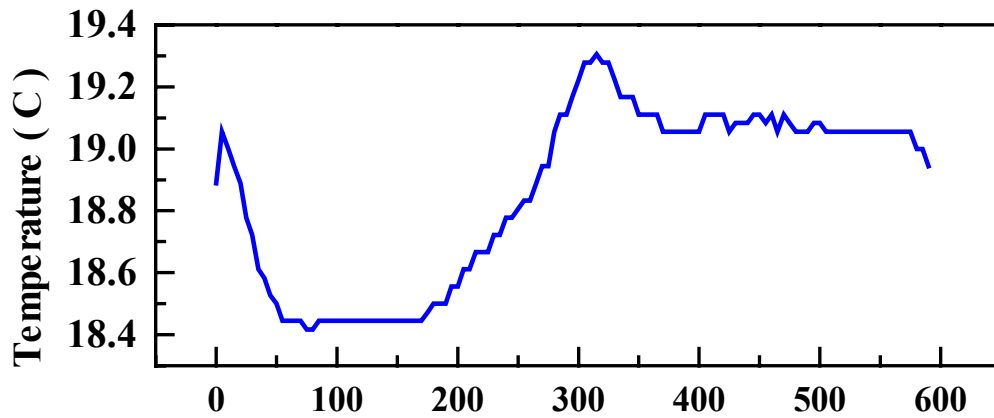


(c) 氣壓隨時間變化關係圖

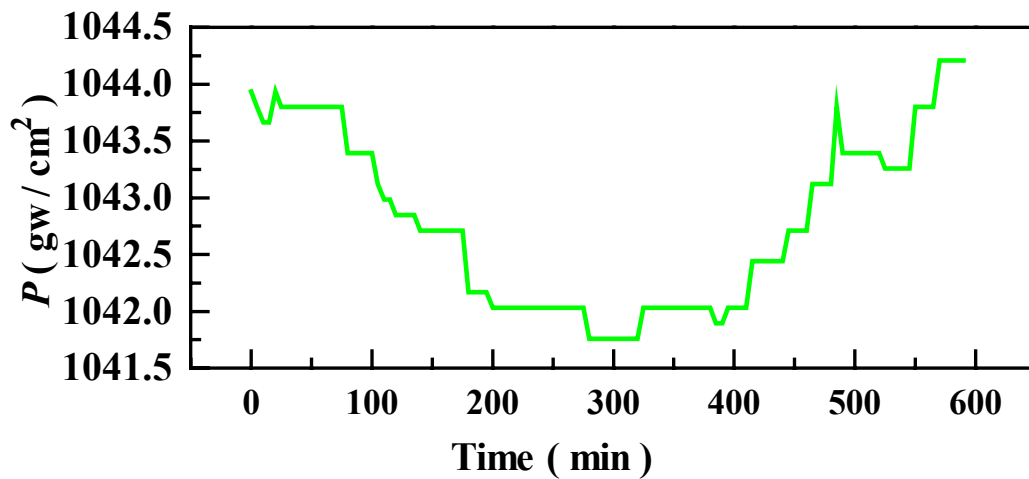
(圖十一) 原始實驗數據



(a) 細管內液面高度 x 隨時間變化關係圖

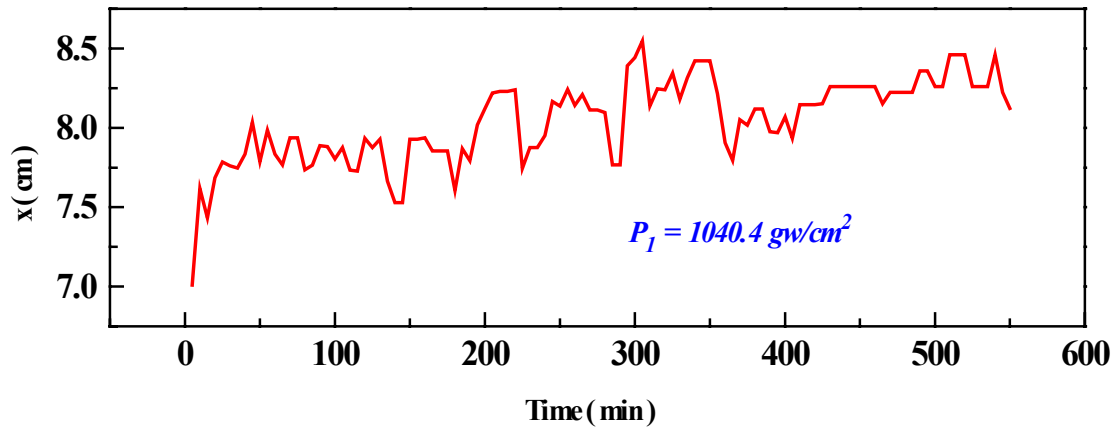


(b) 溫度隨時間變化關係圖

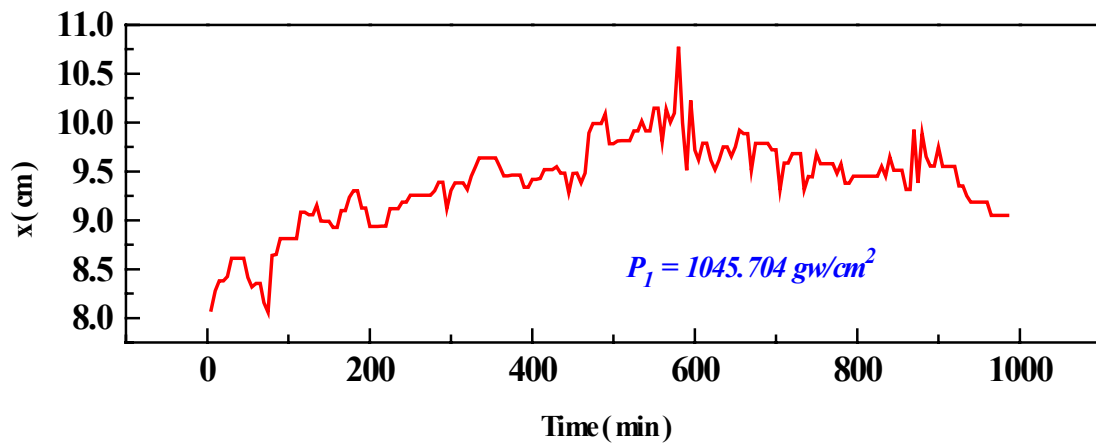


(c) 氣壓隨時間變化關係圖

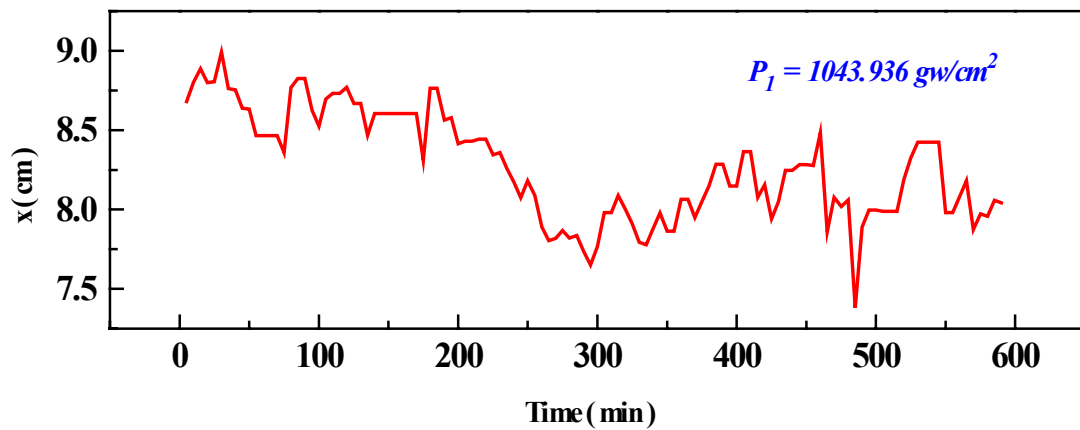
(圖十二) 原始實驗數據



(a) (圖十) 之校準分析圖



(b) (圖十一) 之校準分析圖



(c) (圖十二) 之校準分析圖

(圖十三) 壓力差校準與溫度校準分析圖

- (3) (圖十三)中(a)、(b)、(c)三圖圖形震盪位置與理論誤差過大，主要應來自儀器設計與操作上對 V_A 與 V_B 無法做穩定的控制有關。
- (4) 環保二號水氣壓計目前雖無法做有效的標準校準，但配合水銀氣壓計的使用可觀測到微小氣壓之變化。
- (5) 在儀器設計修改後使 V_A 與 V_B 能做有效的控制，再者對於空氣柱內氣體溫度量測方式與水銀氣壓計測量誤差的改進後，相信標準校準是能達成的。

5、驗證實驗

為檢驗此氣壓計的實用性與誤差，於二月五日進行驗證實驗。(圖十四)為二月五日之數據分析。(圖十四)(a)為細管內液面高度隨時間變化關係圖，(圖十四)(b)乃經過壓力差校準與溫度校準後的分析圖。(圖十四)(c)為氣壓隨時間變化關係圖。由圖知經校準後，當大氣壓力 $P_1 = 1043.12 \text{ gw/cm}^2$ 水氣壓計內細管液面高度變化大約在 $8.4 \text{ cm} \sim 9.0 \text{ cm}$ ，液面上下變動範圍約為 0.6 cm 。

將儀器靜置二天，於二月七日繼續量測實驗數據。(圖十五)為二月七日之數據分析。(圖十五)(a)為細管內液面高度隨時間變化關係圖，(圖十四)(b)為溫度隨時間變化關係圖。(圖十四)(c)為氣壓隨時間變化關係圖。由(23)式 $x = \frac{T_1 \cdot (x_0 - \Delta P) + \Delta T \cdot (P_1 + l)}{(T_1 + \Delta T)}$ 移項可得

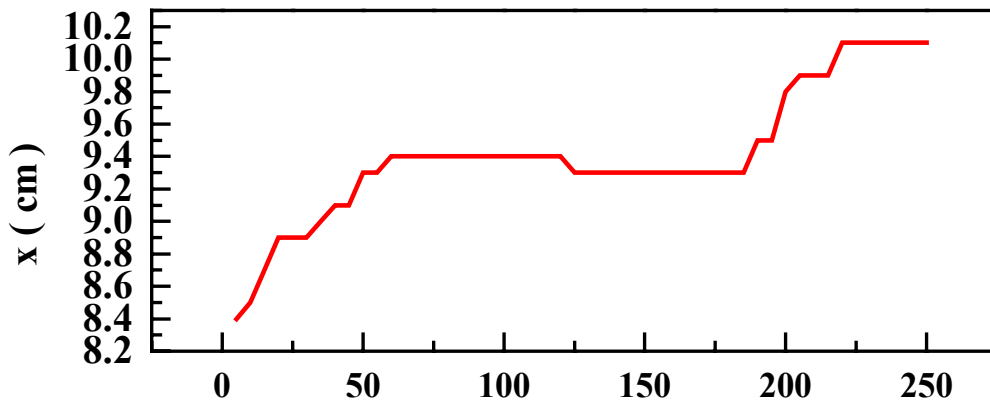
$$\Delta P = x_0 - \frac{x \cdot (T_1 + \Delta T) - \Delta T \cdot (P_1 + l)}{T_1} \dots\dots(24)$$

將(24)式中的 x 值分別以 8.4 、 8.6 、 8.8 、 9.0 等帶入，可得到大氣壓力值為 $P = P_1 + \Delta P$ 。(圖十六)即水氣壓計所量測的大氣壓力值與水銀氣壓計所測得的大氣壓力值的比較圖。由圖形可知水氣壓計所量測的大氣壓力值與水銀氣壓計所測得的大氣壓力值誤差小於 1 gw/cm^2 。

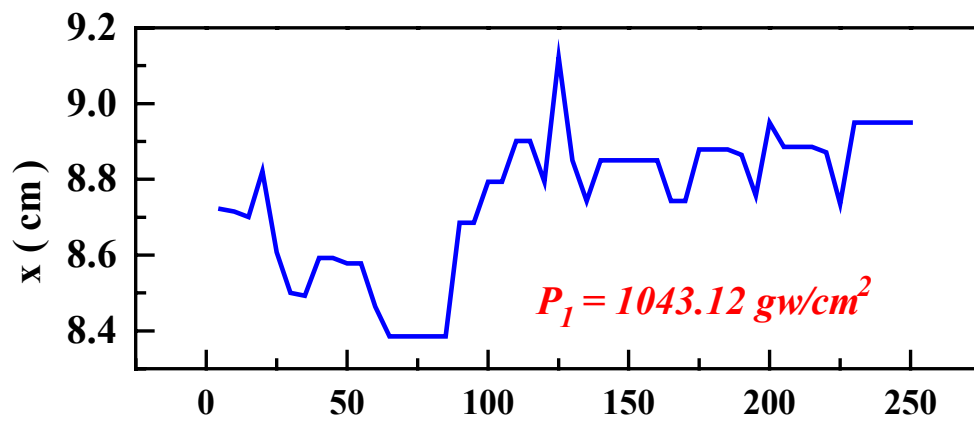
伍、結論與展望

一、結論

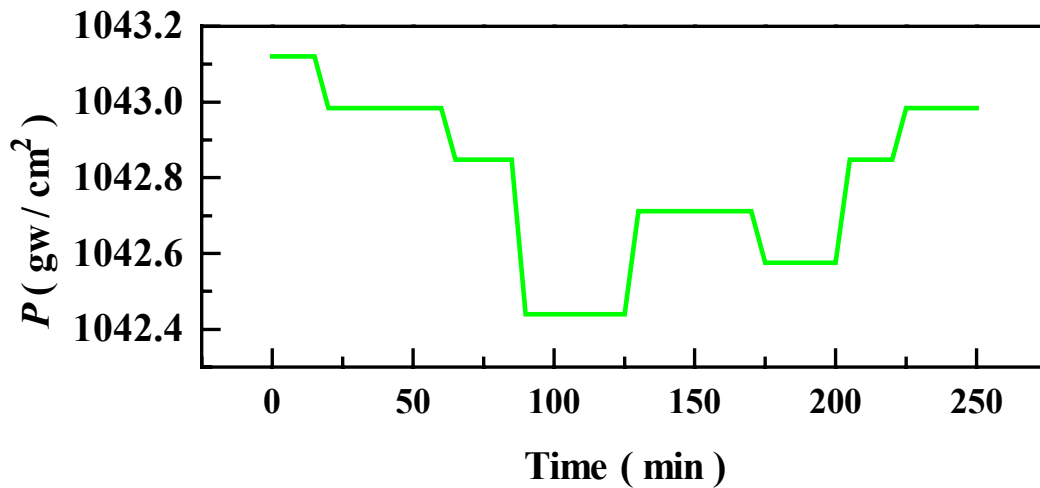
- 1、利用波以耳定律，以電腦計算、模擬，設計出可以取代水銀氣壓計的水氣壓計。以水取代水銀可以減少水銀的使用，減少對環境的破壞，符合環保的理念。
- 2、基礎型空氣柱雖然構造簡單，但若要達到與水銀氣壓計有相同之靈敏度則需 500 cm 以上的管柱長。在操作與實用性上皆不方便。
- 3、在管柱長皆為 100 cm 的情況下，改良一型空氣柱其靈敏度較基礎型為佳。改變改良一型空氣柱 n 值大小，其靈敏度最佳狀況大約為基礎型空氣柱的 $2\sim 3$ 倍，但仍遠不及水銀氣壓計。
- 4、改良二型空氣柱，當 n 值極大時 P_1 與 x 幾乎可視為線性關係。
- 5、改良二型空氣柱 m 值的大小會影響空氣柱的靈敏度。當 m 越大時 $\Delta P/\Delta x$ 越小，靈敏度越大。
- 6、當大氣壓小於 1200 gw/cm^2 ， m 值設為 7 cm ， n 設為 100 。則 P_1 與 x 可簡化為 $P_1 = 1328.28 - 13.29x$ 的線性關係式。



(a) 細管內液面高度 x 隨時間變化關係圖

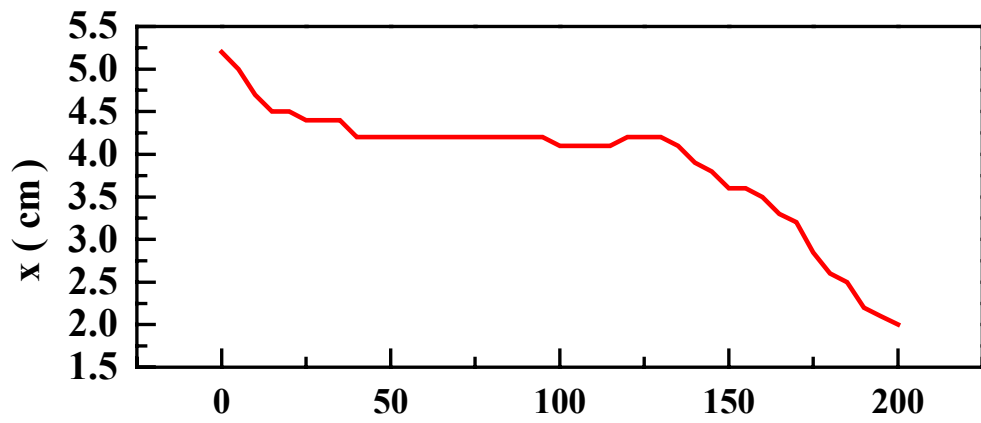


(b) 校準後之液面高度 x 隨時間變化關係

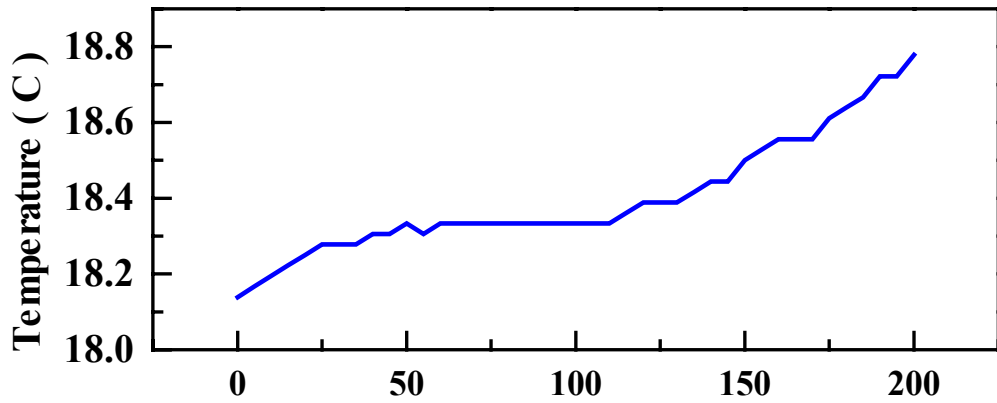


(c) 氣壓隨時間變化關係圖

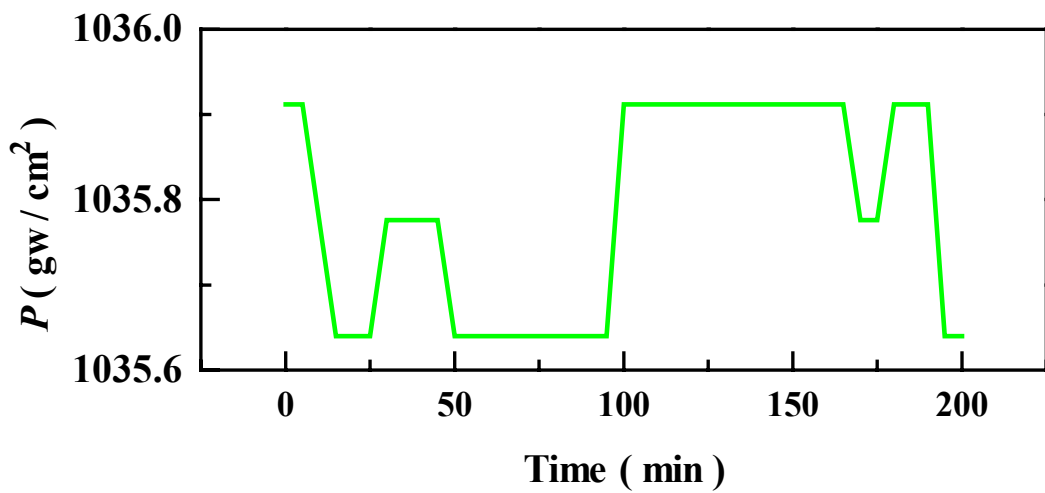
(圖十四) 驗證實驗數據分析



(a) 細管內液面高度 x 隨時間變化關係圖

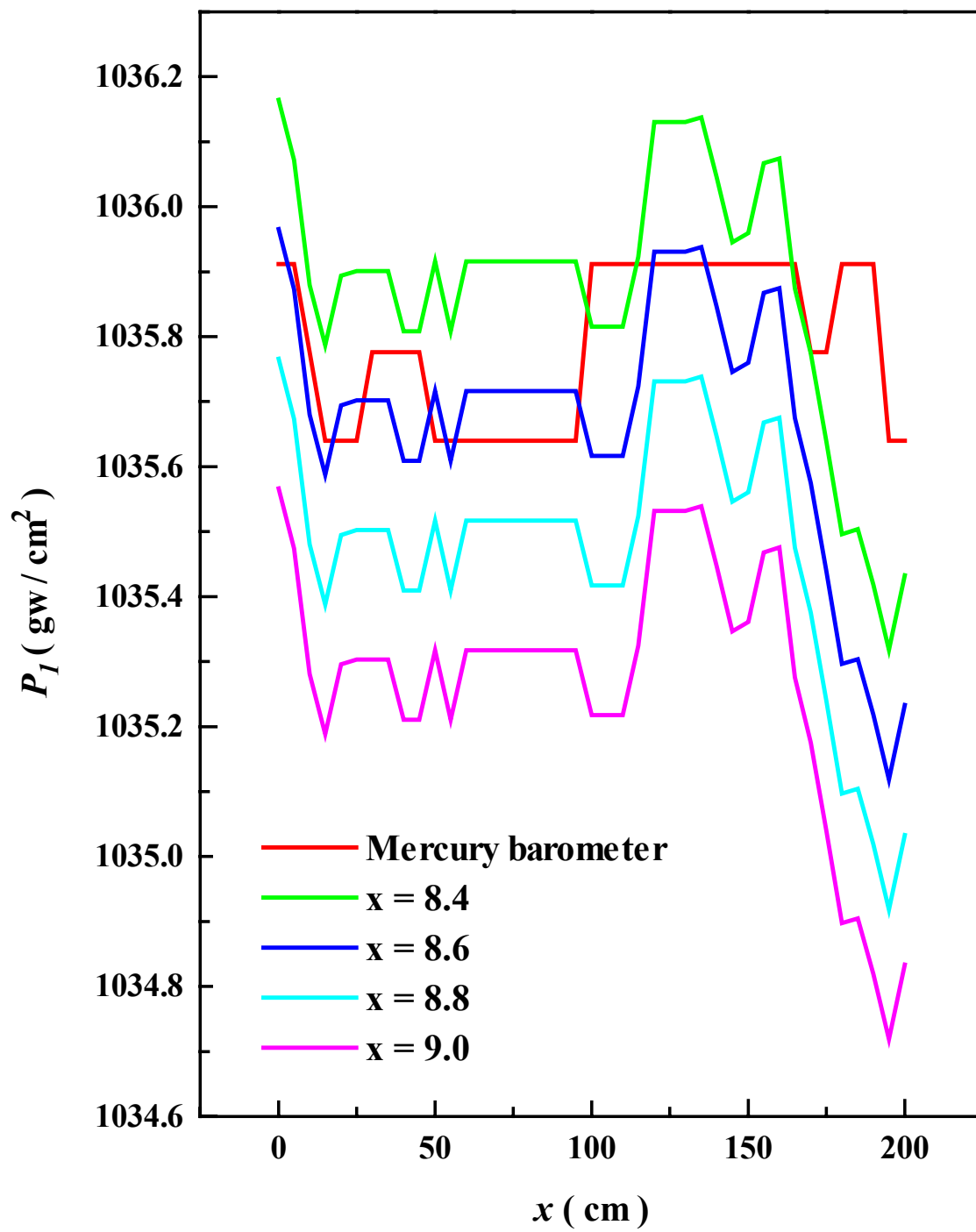


(b) 溫度隨時間變化關係圖



(c) 氣壓隨時間變化關係圖

(圖十五) 驗證實驗數據分析



(圖十六) 驗證實驗數據分析

- 7、就目前所做實驗數據顯示，目前之量測雖無法進行標準校準，但可藉由水銀氣壓計的輔助，觀察到比水銀氣壓計更靈敏的氣壓變化。
- 8、藉由水銀氣壓計的輔助，將實驗數據經由壓力差校準與溫度校準後，所測得大氣壓力與水銀氣壓計間誤差小於 1 gw/cm^2 。

二、展望

- 1、在未來的研究中將繼續致力於空氣柱的設計與改良，使其能符合操作簡單、實驗精準、校準容易等目標，以期能完全取代一般實驗室所普遍使用之水銀氣壓計。
- 2、為能提高水氣壓計的精確度，將繼續在儀器校準上繼續研究，特別是在空氣柱內氣體平均溫度的量測、理想氣體與一般氣體的差異與溼度的影響等。

六、參考資料

1. 褚德三 主編 高級中學物質科學物理篇下 初版 台北 龍騰文化
2. 劉明揚 著 大氣測計學 一版 台北 國立編譯館 p.79 ~ p.122