

臺灣二〇〇三年國際科學展覽會

科 別：物理科

作品名稱：毛細管內液體流速之探討及黏度測量方法之創新

得獎獎項：物理科第一名

美國第五十四屆國際科技展覽會

學 校：台北市立麗山高級中學

作 者：鄭雨軒

作者簡介



我自幼在台北成長與求學，且對數理及資訊方面有高度的興趣，因此逐漸朝向這個方向發展；家中雖不算富有但在學習上所需的材料及工具，父母都盡力支持。

在國中時對物理產生了極高的興趣，並且以第一名的成績畢業；高一開始，在物理老師的細心帶領之下，不僅使我深深的對物理著迷，更開始投入有關物理的研究及實驗；希望將來能夠攻讀物理研究所，並在未來的日子，能全心投入物理的研究工作。

Two novel capillary-based fluid viscometers

The viscosity is one of the most important parameters of the fluids. In conventional viscosity experiments, capillary-based viscometers are widely adopted because of their user-ready devices and moderate prices. However, to accurately measure the viscosity, the fluid velocity must be kept constant; otherwise, the fluctuation may cause the serious deviation. Besides, traditional capillary viscometers often require a long time to make the measurement.

This research aims at exploring the capillary fluid mechanics and developing accurate and rapid methods to measure the viscosity. In this study, we developed two creative viscosity-measuring methods, the gravity sloping helical structure and the gradational liquid-level difference, and constructed two cost-effective capillary viscometer prototypes accordingly. The gravity sloping helical structure employs a long helical capillary as the flow channel and utilizes the gravity force to keep the fluid velocity extremely constant. The highlight of this method is that we can see the fluid flow through the capillary directly. On the other hand, the gradational liquid-level difference method uses the pressure sensors to precisely monitor the liquid-level difference, which drives the flow in the capillary, and allows automatic measurement of viscosity.

Compared with computer simulation, the experimental results agreed well with the theoretical values. The gravity sloping helical and gradational liquid-level difference methods achieve 0.5% and 0.8% accuracy respectively. In addition, the automation of viscosity sensing also greatly facilitates the viscosity measurement. Furthermore, these two methods are both valuable for incorporating into educational purpose and industrial application.

毛細管內液體流速之探討 及黏度測量方法之創新

一、研究動機

有一次上實驗課時看到鄰桌的同學正以實驗室的毛細管吸吮一瓶葡萄汁，每當他吞嚥時，毛細管內殘餘的葡萄汁竟然以近似等速的狀態降回果汁瓶裡，這似乎違背了重力加速度的常理，是毛細管的影響嗎？還是葡萄汁特有的現象？這與毛細管插入葡萄汁的深度有關嗎？這一連串的問題皆因升學壓力而無暇深究。

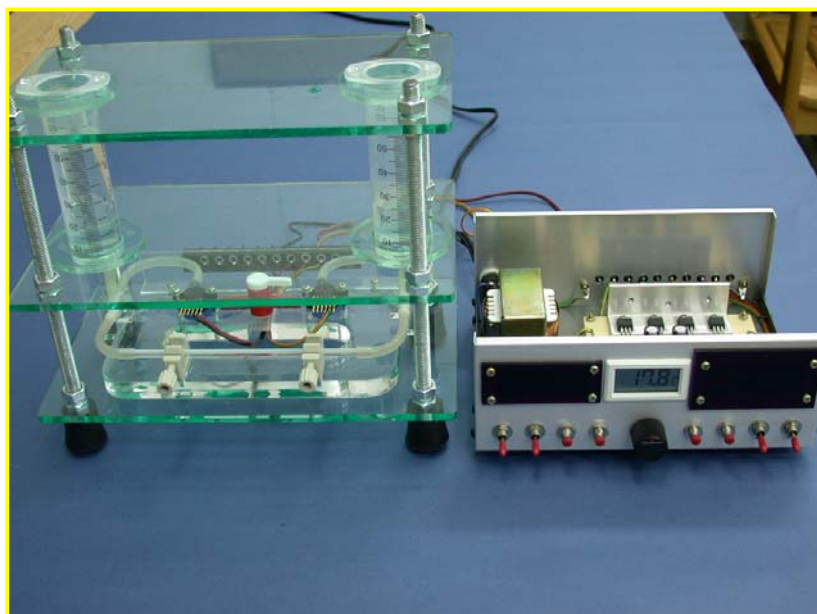
升上高中的那年暑假，我參加了學校舉辦的資優科學營，在物理實驗課中恰好遇到了以毛細管測量液體黏度的實驗，使我有機會深入思索毛細管內液體流速的問題。這個實驗很不好做，要調整兩個定高容器，使水平毛細管兩端產生固定的壓差，讓流經管內的液體為等速的流動。大家手忙腳亂地操作了近三小時，測出來的黏度不僅和老師公布的答案差距甚大，而且各組同學所測得之結果也大相逕庭，不過我們都體驗到了液體黏度對流速的影響。

實驗的誤差為什麼那麼大？扣除人為操作誤差後儀器本身還有多大改進空間？有否更精簡的方法測量黏度？毛細管中液體的流速真是固定的嗎？把毛細管斜置或是垂直架置，流速還會固定嗎？重力不會影響流速嗎？若流速真為固定的，如何控制或改變流速呢？是否可以利用流速來測出液體黏度？

由於我對這個實驗的專注，在學校選修的專題課程中即以此為題目做長期的研究，在老師的指導下，我和同組同學不停地查閱有關書籍及整理資料，漸漸研究清楚原理後定出實驗計畫，並開始購買材料與工具，長期地動手實驗及改進，兩年來我們利用毛細管中液體的等速及不等速流動的特性，發展出了兩種既精簡又準確的液體黏度測量法，以下就是整個研究及創作的過程。

二、研究目的

- (一) 研究液體黏度對毛細管內液體流速的影響
- (二) 詳細討論目前實驗室中毛細管黏度測量法之優缺點
- (三) 研究在垂直毛細管中利用重力測量液體速度及黏度的方法
- (四) 發展自創的重力式傾斜旋轉的毛細管黏度計
- (五) 研究液體內微小深度差之壓力變化的測量法
- (六) 發展自創的連續可變液位差式毛細管黏度計



三、研究器材

(一) 自製完成的器材

1. 傾斜角度連續可調式毛細管支座
2. 重力式傾斜旋轉的毛細管黏度計
3. 微壓力變化的感測器之校正儀
4. 連續可變液位差式毛細管黏度計
5. 自動計時、溫度感測、液位差電壓顯示電路

(二) 廠製成品器材

1. 毛細管黏度實驗儀器(含定高容器、支架、軟管及配件)
2. 直流電源供應器二台
3. 數位電錶二台
4. 走讀式(精確至 10^{-3} mm)顯微鏡一組
5. 微型動力幫浦一台
6. 小型超音波洗淨機一台
7. 大型恆溫箱一台(向生物科借用)

(三) 電子零件類

- | | |
|----------------|------------------|
| 1. 固態薄膜壓力感測晶片 | 2. NPN、PNP 小晶體數個 |
| 3. 計時器 IC 二個 | 4. 穩壓 IC 六個 |
| 5. 電源變壓器二個 | 6. 低偏移運算放大器 5 個 |
| 7. 電阻電容一批 | 8. 四位數字電壓錶頭二個 |
| 9. 白金熱電偶溫度感測貼片 | |

(四) 五金機械類

- | | |
|--------------|--------------|
| 1. 合金三通接頭 | 2. 銅螺絲及鋁螺絲一批 |
| 3. 螺旋級進軸心附軸承 | 4. 儀器用機殼二個 |
| 5. 鋁條一批及散熱器 | |

(五) 玻璃、塑膠材料類

- | | |
|------------|---------------|
| 1. 壓克力材料一批 | 2. 氯仿及特殊粘合劑 |
| 3. 塑膠螺絲一批 | 4. PVC 塑膠針管數支 |
| 5. 各類毛細管一批 | 6. 燒瓶及塑膠接頭一批 |

(六) 電腦軟體

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1. Microsoft Word 2000 | 2. Microsoft Excel 2000 |
| 3. Origin 7.0 | 4. TableCurve 2D V5.0 |

四、文獻探討

(一) 水平毛細管內之液體流速

1. 理想流體

對於不可壓縮、不計黏性的理想流體而言，在水平置放的毛細管中連續流動特性，我們可以引用白努利方程(Bernoulli's equation)來描述，即

$$P + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = C \quad (1)$$

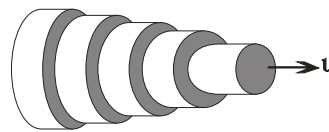
其中 P 是流體壓力， ρ 是密度， v 為流速，而 h 是毛細管中央軸線到基準平面的高度， C 則為一常數，我們檢查上式左邊的三個項目 P ， ρgh ， $\frac{1}{2} \rho v^2$ 的單位全是 (J/m^3) ，為流體每單位體積內之能量，這代表白努利定律可視為流體的機械能守恆定律。



由附圖中我們看出，因 $h_1 = h_2$ ， $v_1 = v_2$ ， $\therefore P_1 = P_2$
即

$$\Delta P = P_1 - P_2 = 0 \quad (2)$$

上式明確表示欲使理想流體在水平毛細管中維持穩定等速流動是不須壓力差的，正如同物體在光滑平面上等速直線運動是不須施加外力的，物體的機械能是守恆的。

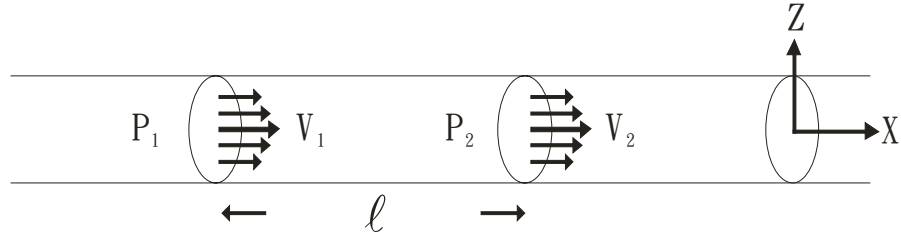


2. 非理想流體

真實的流體因為具有黏性，所以流體（以下專指液體不考慮氣體）流動時不僅與管壁發生摩擦且流體亦因黏性而相互摩擦，在流速不大的情況下會形成如上圖所示的層流，各薄層之間互相以剪應力 τ 作用，所以在層與層之間造成了速度梯度 $\frac{dv}{dz}$ ，牛頓 (Newton) 認為兩者之間有直線的比例關係，即

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dz} \quad (3)$$

其中，比例常數 η 被稱為黏滯係數，凡符合上式的被稱為牛頓流體，常見的流體像水、酒精、丙酮、四氯化碳、甘油等都是。



波塞尼勒(Poiseuille)以研討血管內血液流動為目的，而專門致力於細圓管內液體流速之研究，他在文獻中提出了下列關係式

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{\ell} \frac{\pi r^4}{8\eta} \quad (4)$$

其中 Q 為液體的體積流動率， P_1 、 P_2 各為相距 l 兩截面上的壓力， r 為圓管半徑。

值得注意的是此式(以下稱poiseuille定律)是針對水平細圓管中形成穩定層流(平均流速 v 不變)的條件下所推導而得的，若 V 代表流體體積，則

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{V}{t} = \pi r^2 v$$

將此關係式代入(4)式可以得流體的平均流速為

$$v = \frac{r^2(P_1 - P_2)}{8\eta\ell} \quad (5)$$

上式的物理意義為 在半徑不變之水平細圓管中的牛頓流體，若欲維持固定的流速，則在流動方向上必須保持恆定不變的壓力梯度，即必須保持

$$\frac{P_1 - P_2}{\ell} = \text{非零的常數} \Rightarrow v \text{ 為等速度} \quad (6)$$

這正如同欲使一物體在摩擦係數不變的平面上維持等速度運動時必須施予物體一固定的水平力以與摩擦力平衡的道理一樣。

既然流體在某一點的壓力 P 為流體在該處每單位體積內的壓能，故壓力差 $P_1 - P_2$ 可視為流體於流經該兩點間因黏滯摩擦而造成的能量損失，我們將這個能量損失標誌為 ΔP_{visc} 。

因此對於具有黏性的真實流體在水平細圓管中流動時，白努利定律可以和波塞尼勒定律合併為

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \Delta P_{visc} \quad (7)$$

此式表示流體之總能量守恆(但機械能不守恆，部份能量將因黏滯摩擦而轉成熱能)。

其中 ΔP_{visc} 就代表對抗黏滯阻力，使流速穩定所需的壓力差，同時它亦代表細圓管中的流體流動時每單位體積失去的能量。

因為是研究水平細圓管 $\therefore h_1 = h_2$ ， $v_1 = v_2$ ，但由(6)式知此刻 $P_1 - P_2 \neq 0$ ，再結合(5)式可得

$$\Delta P_{visc} = P_1 - P_2 = \frac{8\eta l v}{r^2} \quad (8)$$

3. 雷諾數

雷諾(Reynolds)曾經做過一連串的實驗，他發現圓管中流體欲形成穩定的層流必須流速低而口徑小，他定義一個無因次的物理量 N_R

$$N_R = \frac{\rho v D}{\eta} \quad (9)$$

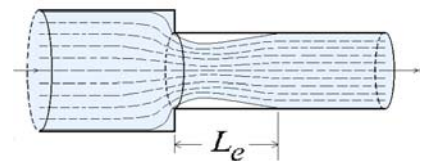
其中 D 為圓管直徑，當 N_R 小於2000時管中液體可以形成穩定層流，而若 $N_R > 4000$ 則必然形成亂流，所以做黏度實驗時(特別是低黏度液體時)，必須盡量降低流速與管徑使雷諾數 $N_R < 2000$ ，以確保管中流體為穩定層流。

4. 接口效應

在容器或粗管與毛細管入口(或出口)接續時因管徑忽然變窄(或變寬)，流體的速度分佈必須進入管口一段距離才能逐漸穩定而形成層流，依中文參考資料(2)可知此段過度長度 L_e 為

$$\frac{L_e}{D} = 0.035 \frac{\rho v D}{\eta} = 0.035 N_R \quad (10)$$

由此式知 L_e 與 D^2 成比例，所以降低管徑就能有效降低此段非穩流的過度長度。另外如果選擇較長(長度 L)的毛細管來做實驗，當 $L \gg L_e$ 時(L 至少需為 L_e 的50倍以上)通常則可以忽略接口效應的影響了。



5. 以水平毛細管測量液體黏度

綜合(4)(5)兩式，我們可以寫出液體的黏度為

$$\eta = \frac{\pi}{8} r^4 \frac{P_1 - P_2}{L} \frac{t}{V} \quad (11)$$

一般物理實驗室中以毛細管測量液體黏度大都是以上式為根據的，由以上各點討論知上式成立的條件必須

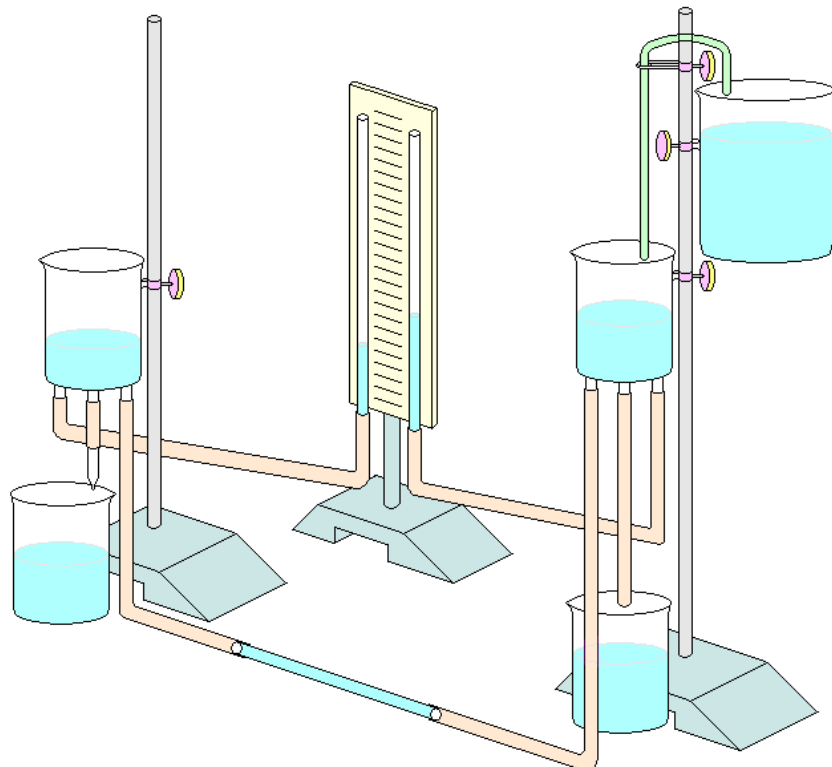
- (1) 液體須為牛頓流體(黏度固定，不可壓縮)
- (2) 層流已形成
- (3) 穩流(流速固定)
- (4) 接口效應可以忽略不計

而為了滿足上列四項條件，器材之選擇及實驗技巧須配合的有

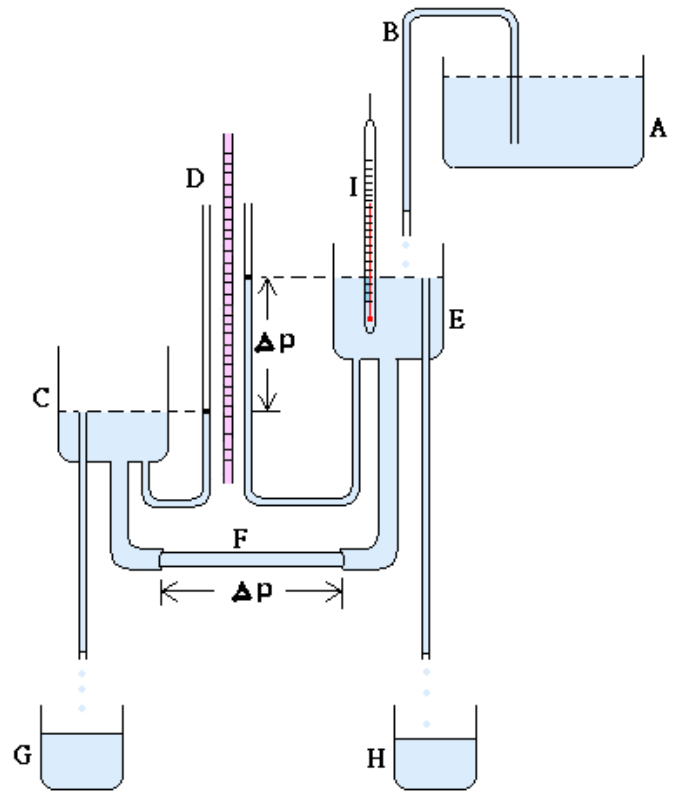
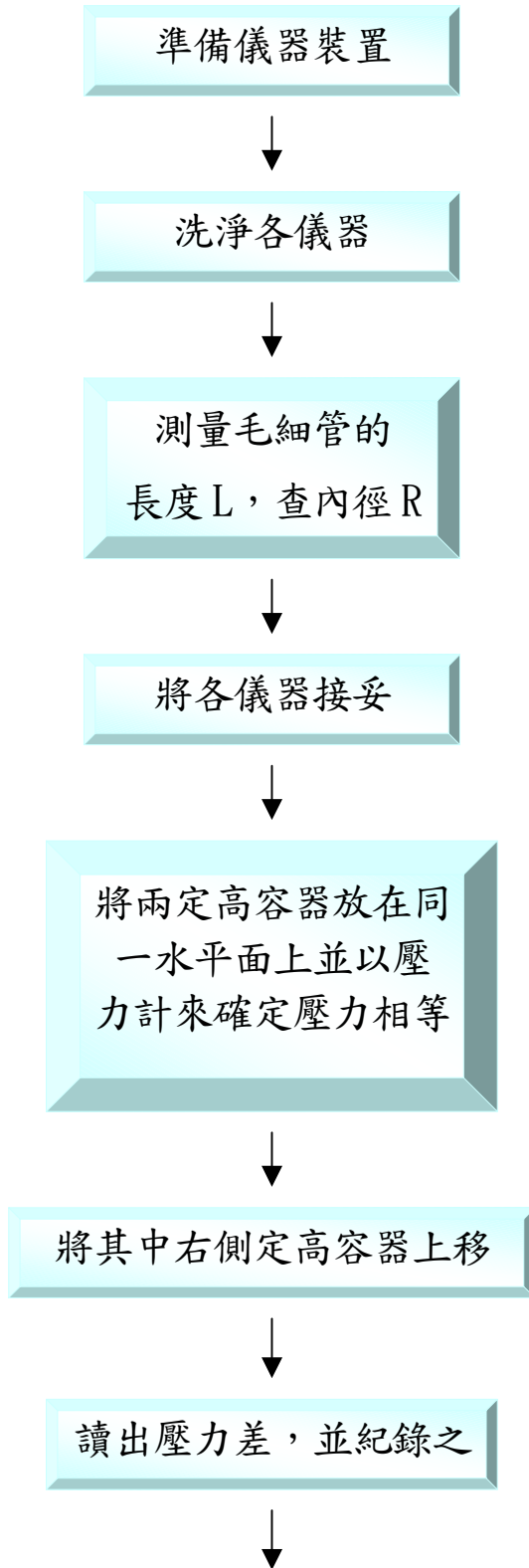
- (1) 減少管徑 r (降低雷諾數 N_R)
- (2) 增長 L (可忽略接口效應)
- (3) 降低壓差 $P_1 - P_2$ (依(5)式可降低流速 v 及雷諾數 N_R)
- (4) 使壓力差 $P_1 - P_2$ 穩定(依(5)式才會有穩定的流速 v)

(二) 毛細管測量液體黏度實驗的回顧與檢討

1. 實驗裝置(附圖及照片)



2. 實驗步驟(流程圖)



A:供水槽 B:虹吸管 C E:左右定高容器 I:溫度計
F:毛細管 D:雙管壓力計 G H:計量燒杯



借出科學營時做過的全套實驗器材 我們又重覆做了許多次

連接橡皮管，注意
不要使管中有氣泡



左起高容器 下為量杯



右起高容器

測量水溫

調整點滴開關，保持
入水量與出水量平衡



雙管壓力計



改良式流量控制器

記錄經過的時間 t

測量水流的總體積



滴管應沿杯緣以免液面波動

帶入公式(11)



供水槽及虹吸管

以不同的壓力差，
重複作三次

關閉水源實驗結束



準備不同長度和不同口徑的毛細管待測

4. 實驗結果與檢討分析

我們曾多次小心地重複做這個實驗，儘量降低人為因素引起的誤差，但實驗數據總是和老師公佈的答案相距頗大，通常 $\pm 20\%$ 的誤差值是常有的事，我們檢討其原因歸納如下

(1)由公式(11) $\eta = \frac{\pi}{8} r^4 \left(\frac{P_1 - P_2}{L} \right) \frac{t}{V}$ 可看出引入誤差的可能因素有

壓力差、毛細管半徑值、液體流量(體積)、毛細管長度、水流時間等，其中每一項因素都要小心處理。

(2)流水時間我們用電子計時器來測量，應該相當準確，而流量則改良以電子秤直讀液體質量再換算成液體體積，原燒杯上的刻度實在太不準了，這樣改進應該可大幅度提升實驗結果的正確度。

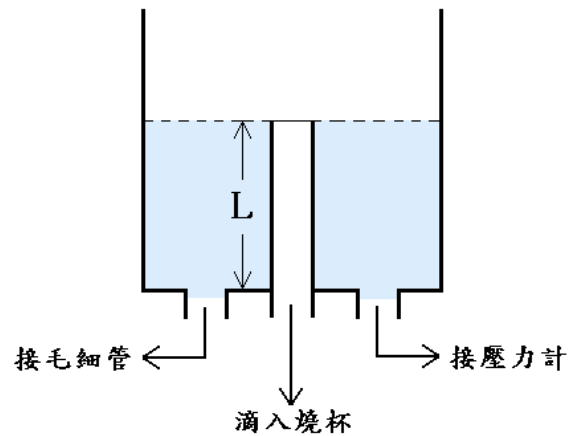


(3)流體流速和毛細管內徑有關，內徑若不均勻，流速將受極大的影響，因為如此細的管子，在(11)式中內徑又以4次

方出現，若其誤差有 2%，那麼對黏度測量將造成 8% 的誤差，最初我們手中有六支不同尺寸的毛細管，其管徑都是儀器廠商提供給老師的，不知道準不準確，當時我們沒有工具可以測量內徑，這可能是誤差偏大的原因之一。

(4) 這個實驗操作時最困難的工作就是要調整點滴開關的裝置，適度地控制入水的速率，使供水量穩定，更重要的是必須小心調整左右定高容器之高度差，使待測液體在兩容器出水口排出的液體流量相近且穩定，不過以降低雷諾數的觀點而言，減小兩容器的高度差對於管中形成穩定層流是較為有利的。

(5) 我們希望兩定高容器中的最高液位可以與出水管口齊平(如右圖)，這樣能使毛細管兩端得到穩定的壓力差，但是事實上

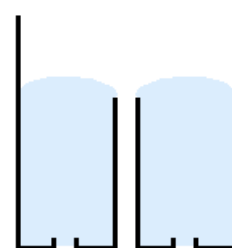
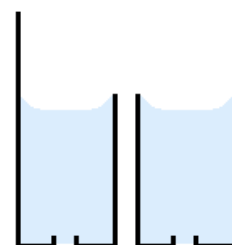
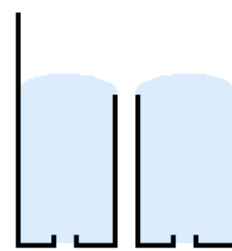


是待測液體在兩容器的出水管口因表面張力的影響，形成高出液面一段距離才忽然流入燒杯，然後液位又下降，又漲高.....，這樣循環的結果使壓力差非常不穩定，情形最壞的是當一邊定高容器液位升至最高，但另一邊卻降至最低，依實驗觀察，液面壓差波動的最大幅度會超過 2mm(左右各1mm)以上，若左右定高容器原先調整液位差

為3cm，那麼上項液位波動幅度造成的壓力誤差將達7% (2mm/30mm)。

(6)定高容器壓力差的波動會即刻反應在毛細管兩端上，這使得管中水流會忽然地加速(壓力差突然加大)，稍後又忽然地減速(壓力差突然變小)，而且液位波動是間歇性不斷地持續作用於毛細管，管中水流根本無法穩定下來！

不要忘記 poiseuille 定理是在流速穩定的條件下推導而得，現在毛細管中流速不斷波動下所測量得的實驗數據當然無法完全符合依據 poiseuille 定理計算所得之理論值！我們認為這是本實驗結構性誤差的來源。



受表面張力影響 出水口液面上升又下降再上升造成壓力不穩現象



定高容器中排水管口四周堆積的液體高度超過 1mm

(三)鉛直毛細管內液體流速之探討

我們假設毛細管內液體已發展成穩定的層流，且每一條流線上的流速是固定的，我們在液柱內考慮任意長 ℓ 、半徑為 z 的一小段液體圓柱，它與毛細管液柱是共軸心的。



若圖中標示 1 之處的液壓為 P_1 ，標示 2 之處液壓為 P_2

小圓柱受到向下的力大小為

$$F_{\downarrow} = P_1(\pi z^2) + \rho(\pi z^2)\ell g \quad (12)$$

若液體是牛頓流體，剪應力為

$$\tau = \frac{F}{A} = -\eta \frac{dv}{dz} \quad (13)$$

小圓柱側表面受到黏滯阻力為

$$\tau A = -\eta \frac{dv}{dz}(2\pi z \ell) \quad (14)$$

小圓柱受到向上的力大小為

$$F_{\uparrow} = P_2(\pi z^2) - 2\pi z \ell \eta \frac{dv}{dz} \quad (15)$$

既然已假設液柱是等速流動，故小圓柱的淨外力為零

$$\sum F_x = F_{\text{下}} - F_{\text{上}} = (P_1 - P_2 + \rho g \ell) \pi z^2 + 2\pi z \ell \eta \frac{dv}{dz} = 0 \quad (16)$$

令 $P_1 - P_2 = \Delta P$ ，化簡上式並將變數分離得

$$dv = \frac{-[\Delta P + \rho g \ell]}{2\eta \ell} z dz \quad (17)$$

分別積分上式左右項得

$$v = \frac{-(\Delta P + \rho g \ell)}{4\eta \ell} z^2 + C \quad (18)$$

積分常數 C 的決定是基於毛細管內壁處 ($z=r$) 薄層的液體流速為零的事實，即

令 $z=r$ 處 $v=0$ ，可求得積分常數

$$C = \frac{\Delta P + \rho g \ell}{4\eta \ell} r^2 \quad (19)$$

故由軸心 ($r=0$) 至管壁 ($r=z$) 的液體流速可表示為

$$v = \frac{\Delta P + \rho g \ell}{4\eta \ell} (r^2 - z^2) \quad (20)$$

上式是拋物線的數學形式，在液柱軸心處流速最大，為

$$v_{(z=0)} = v_{\text{max}} = \frac{\Delta P + \rho g \ell}{4\eta \ell} r^2 \quad (21)$$

由於液柱內是連續流體，每單位時間內通過管柱內任一橫截面的液體總體積是相同的， $Q = \frac{dV}{dt} = \frac{V}{t} = \text{常數}$

現在我們考慮半徑為 Z 至 $Z + dz$ 的環狀截面上的體積流動率 dQ

$$dQ = v(2\pi z) dz = \frac{(\Delta P + \rho g \ell)}{4\eta \ell} (r^2 - z^2) (2\pi z) dz \quad (22)$$

將上式左右分別積分可得液柱橫截面的總體積流動率：

$$\int dQ = \frac{\pi(\Delta P + \rho g \ell)}{2\eta \ell} \int_0^r (r^2 z - z^3) dz \quad (23)$$

即得

$$Q = \frac{\pi r^4 (\Delta P + \rho g \ell)}{8\eta \ell} \quad (24)$$

若將考慮的小段液柱擴大為毛細管內液柱總長只須將上式的 ℓ 改為 L 而 ΔP 就代表毛細管液柱頭尾的總壓差即

$$Q = \frac{\pi r^4 (\Delta P + \rho g L)}{8\eta L} \quad (25)$$

大多數時候，我們較關心的不是軸線上的最大流速，而是液柱的平均流速 v_{av}

$$Q = \frac{dV}{dt} = \pi r^2 v_{av} \quad (26)$$

比較以上兩式可得毛細管內液體的平均流速為

$$v_{av} = \frac{\Delta P + \rho g L}{8\eta L} r^2 \quad (27)$$

由此式可知平均流速為軸心最大流速之半，為方便計算，此後我們仍以符號 v 代表平均流速而捨去 v_{av} 不用。

探討與歸納：

1. 若將毛細管平置，則液柱的重量在液體流動方向沒有分力，以上推導中(12)式的 $\rho g \ell$ 一項即可剔除，那麼(27)式變成

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8\eta L} \quad (28)$$

此即為在科學營實驗時所用的 Hagen-poiseuille 方程

式。而管內平均流速應為

$$v = \frac{r^2 \Delta P}{8\eta L} \quad (29)$$

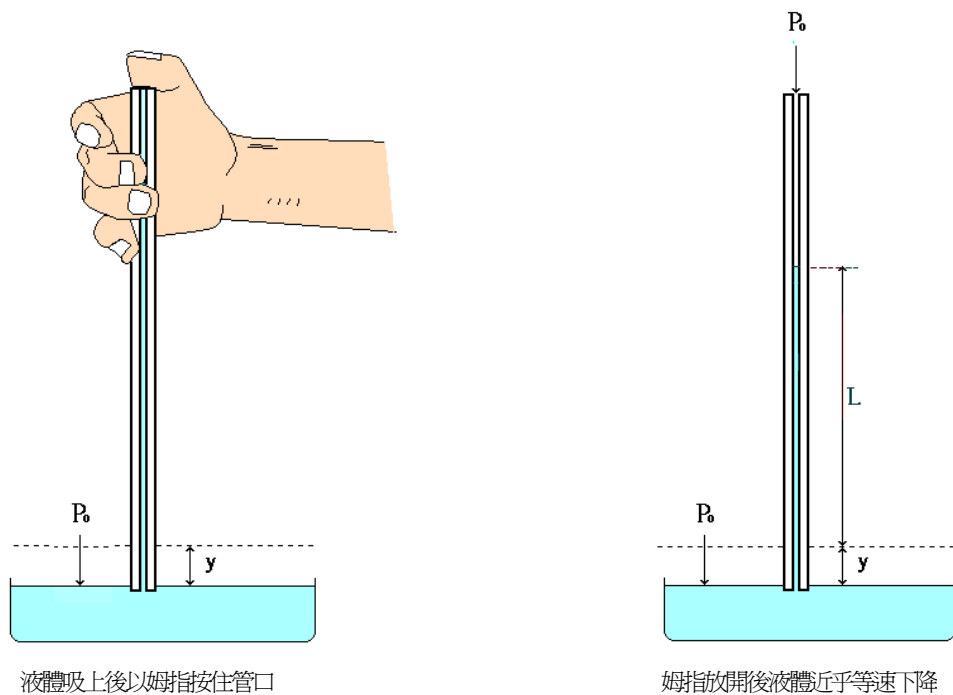
由上式可看出想要有穩定不變的流速，毛細管液柱必須有穩定不變的壓力差 ΔP 才辦得到，這也是前述一般毛細管黏度實驗的重大致命傷及不易克服的困難。

2. 我們若能設法使垂直的毛細管中流動液柱兩端的壓力差為零，即 $\Delta P = 0$ 那麼由(25)式知液柱的平均流速變成

$$v = \frac{\rho g r^2}{8\eta} \quad (30)$$

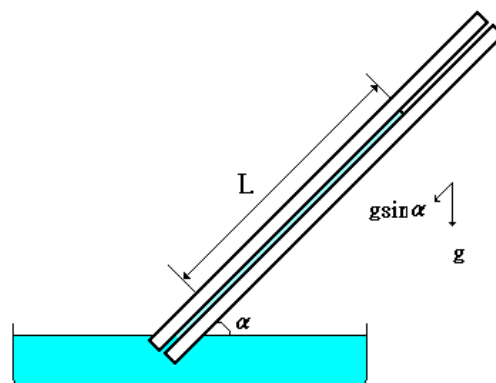
您注意到了嗎？對於固定的管徑及流體而言，上式右側各項皆為常數，如此 v 亦為常數，管中液體是以等速流動的！ v 竟然與 L 無關，即流速與管內尚有多長的液柱無關！太好了！這樣一來我們只須精確地測量液柱流速就可利用(30)式的關係求出液體黏度！再也不必費心於毛細管兩端的壓力差是否穩定了。

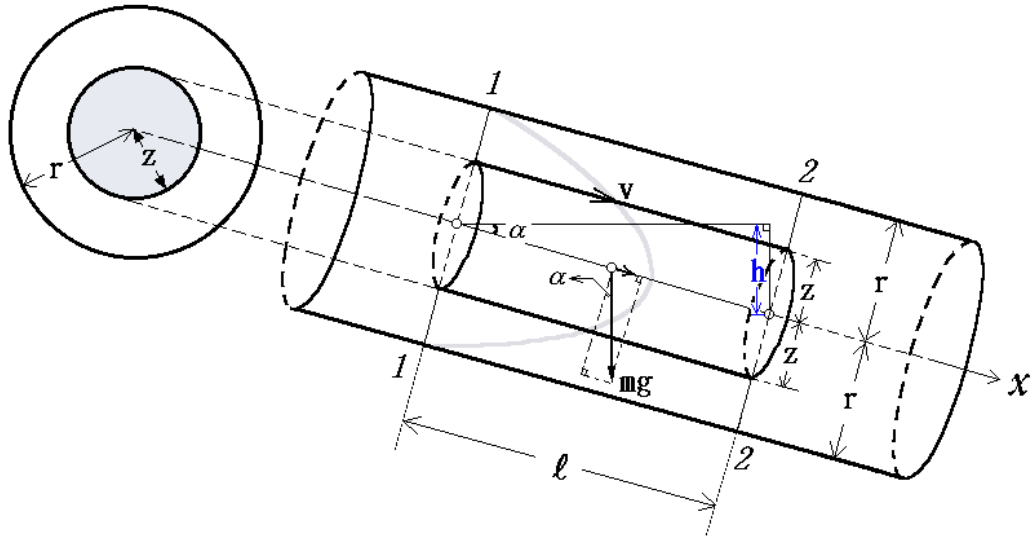
3. 我們可以將液體吸入毛細管至頂端後以姆指壓住頂部管口（如下圖），毛細管底部則微微插入內盛相同液體之廣口淺盤的液面下，當姆指放開後由於液柱頂部及底部壓力皆近乎為大氣壓力，其壓差 $\Delta P \approx 0$ ，故液體只在開始時有短暫之加速，瞬即進入等速流動狀態。



4. 毛細管內液柱因表面張力影響會有一段自然上升的高度 y (即圖中之虛線位置), 當液柱由上而下流至接近此高度時又會逐漸減速至零而停在該定點上。
5. 液柱流動最初的加速期及最末減速期目前都不是我們所關心的, 因為這可以是另一個階段研究的題目, 我們只要能精確地測出等速期間液柱的流速 v (詳見實驗過程) 就可以利用(30)式精準地算出液體的黏度 η , 此刻

$$\eta = \frac{\rho g r^2}{8v} \quad (31)$$





6. 當測量水或酒精這類低黏度液體時，由於流速過快，無法有效地量出流速，我們可以將毛細管斜置如上頁附圖，在斜管中的流速公式的推導，其方法與直管時幾乎完全相同，僅須將重力加速度 g 改成沿斜管方向的分量 $g \sin \alpha$ 即可， α 是斜置時毛細管與水平線之夾角，我們可以推導得斜置毛細管中液體平均流速為

$$v = \frac{\rho g r^2}{8\eta} \sin \alpha \quad (32)$$

只要斜角 α 固定，那麼流速仍然為定值，而液體黏度則為

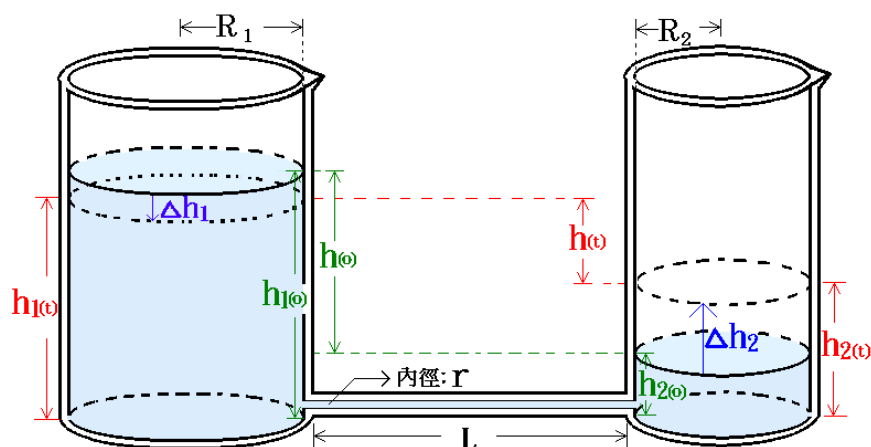
$$\eta = \frac{\rho g r^2}{8v} \sin \alpha \quad (33)$$

在實驗操作時只要逐漸減小傾斜角 α 就可以有效降低流速直到方便測量流速為止，如此一來低黏度液體亦能藉著測量其流速而求出黏度了。

哇塞! ... 酷... 多麼簡單優美的測量方法!

(四)壓力差緩變下的水平毛細管流速

在前述水平毛細管實驗中我們一直致力於調整兩定高容器的液位差並且力求此液位差的穩定而不可得，毛細管兩端壓力差仍然不停地且無規則性地波動著，由於兩定高容器中的出水口的”滴流”狀況始終無法改善，使我們興起捨棄定高容器不用的念頭，我們重新思考新的做法，並且將系統簡化成如下圖的模式。



上圖為半徑各為 R_1 、 R_2 的兩圓柱型容器，內盛裝待測液體，底部以長為 L ，內徑為 r 的水平毛細管互相連通，最初左端液位較右端高出 $h(0)$ ，由於毛細管中液體持續流動使得兩容器的液位差 h 隨著時間而漸小，所以我們可以將其寫成與時間有關的型式

$$h = h(t) = h_1(t) - h_2(t) \quad (34)$$

若毛細管內徑遠小於兩容器之內徑，即 $r \ll R_1$ 、 $r \ll R_2$ ，由流體連續方程式可知兩容器中液體的流速將遠小於毛細管

的流速，因此任取一段短時間來看兩容器的液面，沒有明顯的上升或下降，都是近乎靜止的，如此毛細管兩端的壓力可來自兩容器底部液體的靜壓力，即

$$P_{1(t)} = \rho g h_{1(t)} + P_0$$

$$P_{2(t)} = \rho g h_{2(t)} + P_0$$

式中 P_0 為當時的大氣壓力，而在毛細管兩端將產生一項隨時間緩慢變化的壓力梯度 $G_{(t)}$ ，由(34)式知

$$G_{(t)} = \frac{\rho g h_{(t)}}{L} = \frac{\Delta P_{(t)}}{L} \quad (35)$$

若毛細管半徑十分細小，其中液體流速 v 也甚小，使得其雷諾數能夠充分滿足

$$N_R = \frac{2\rho v r}{\eta} \ll 2000$$

在這樣緩慢的流速(creeping)下，任何一段短時間內毛細管兩端的平均壓力差及管內平均流速幾乎可視為定值，所以 poiseuille 定律可以改寫為(見西文參考資料 2)

$$Q_{(t)} = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \Delta P_{(t)} = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \rho g h_{(t)} \quad (36)$$

上式毛細管中液體體積的流動率 $Q_{(t)}$ 正好等於左定高容器體積的流失率，即

$$Q_{(t)} = -\frac{dV_1}{dt} = -\pi R_1^2 \frac{dh_{1(t)}}{dt} \quad (37)$$

對(34)式微分可得左右兩容器液位差變動率 $\frac{dh_{(t)}}{dt}$ 為

$$\frac{dh_{(t)}}{dt} = \frac{d}{dt} [h_{1(t)} - h_{2(t)}] = \frac{d}{dt} h_{1(t)} - \frac{d}{dt} h_{2(t)} \quad (38)$$

但左右兩容器之液位變動率可以用流體的連續方程式得到

下面的關係式

$$\frac{dh_2}{dt} = -\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) \frac{dh_1}{dt} \quad (39)$$

將上式結果代入(38)式可得

$$\frac{dh_{1(t)}}{dt} = \left(\frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}\right) \frac{dh_{(t)}}{dt} \quad (40)$$

結合(36)(37)(40)三式可得

$$\pi \frac{(R_1 R_2)^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{dh_{(t)}}{dt} = \frac{-\pi r^4}{8\eta L} \rho g h_{(t)} \quad (41)$$

將上式變數分離得

$$\frac{dh_{(t)}}{h_{(t)}} = \frac{-\rho g r^4 (R_1^2 + R_2^2)}{8\eta L (R_1 R_2)^2} dt \quad (42)$$

為了簡化問題，我們可以選用兩個完全相同的容器即

$R_1 = R_2 = R$ ，我們使用積分公式 $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ 對上式積分，並且

令 $h_{(t=0)} = h_{(0)}$ 可得

$$h_{(t)} = h_{(0)} e^{\frac{-\rho g r^4}{4\eta L R^2} t} \quad (43)$$

上式的意義為：當毛細管流速極緩慢時，左右容器的液位差 $h_{(t)}$ 將會由初液位差 $h_{(0)}$ 開始隨著時間的增長呈現指數型衰減的情形，左容器液位逐漸降低而右容器的液位漸升，若 $r \ll R$ 的關係成立，那麼需要相當長(近乎無限長)的時間，兩容器的液位才會趨於一致。

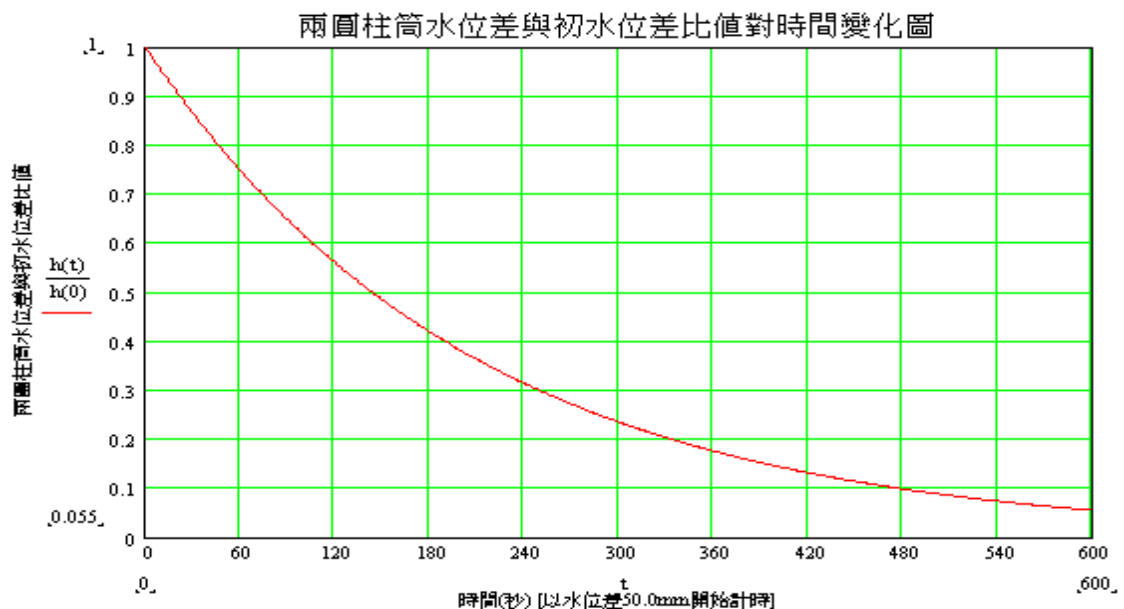
我們若將(43)左右同除 $h_{(0)}$ ，且兩邊同時取 \ln 函數，就可以求得待測液體黏度為

$$\eta = -\left(\frac{\rho g r^4}{4LR^2}\right)(t) / \ln \frac{h(t)}{h(0)} \quad (44)$$

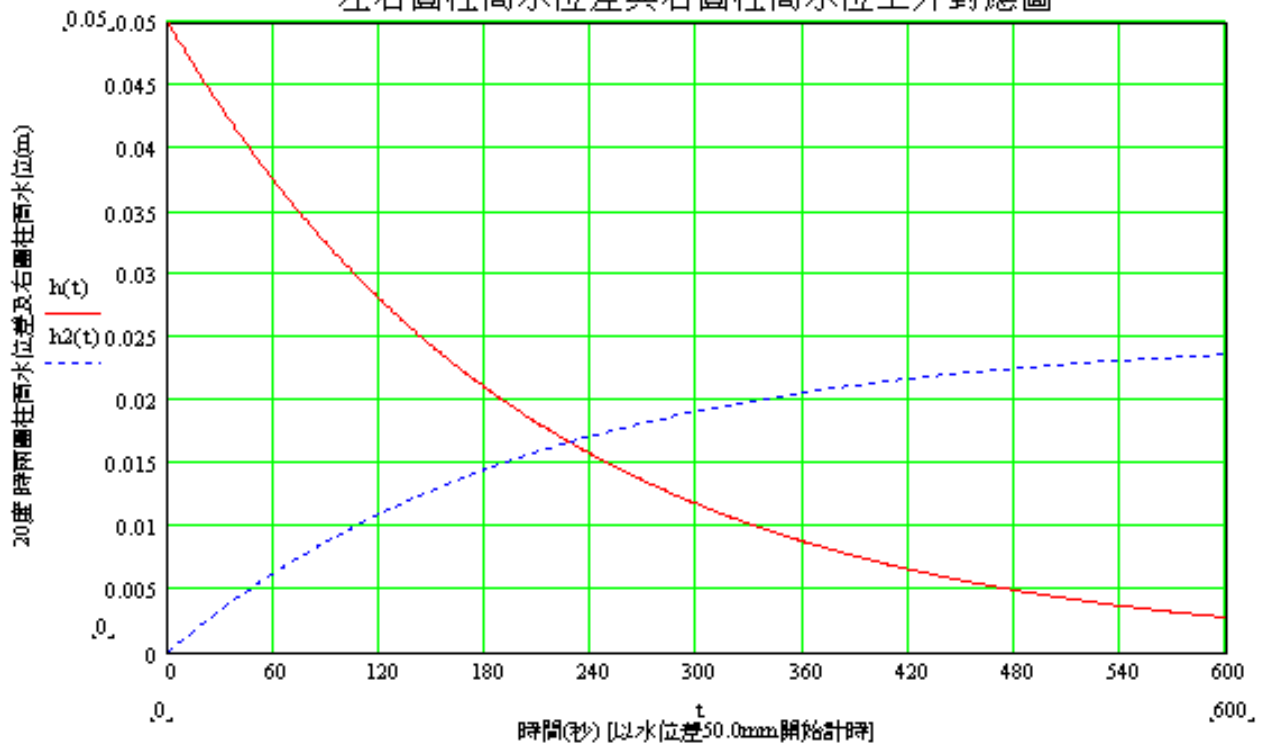
由於毛細管兩端的壓力差(上式之 $h(t)$)變化極為緩慢，完全不會有壓力差波動的問題產生，因此運用 poiseuille 定律計算的理論與所測量之液體黏度可以十分吻合。

我們只要在毛細管開始流通後，任意定一起始時間 $t=0$ ，並紀錄當時的左右液位差 $h(0)$ ，經過一段時間 t 後，再度紀錄當時的液位差 $h(t)$ ，將這兩組數據 $[0, h(0)]$ ， $[t, h(t)]$ 代入(44)式即可精確求得液體黏度了，就這麼簡單！好用吧！從此再也不需供水槽、不需虹吸管、不需點滴流量調整器、不需三個出水口的定高容器、不需底部盛水燒杯、不需總長達2公尺的各式橡皮接管、不需秤液體重量、不需測量體積、不需擔心液位波動的問題.....哇！...酷...！太好用了！

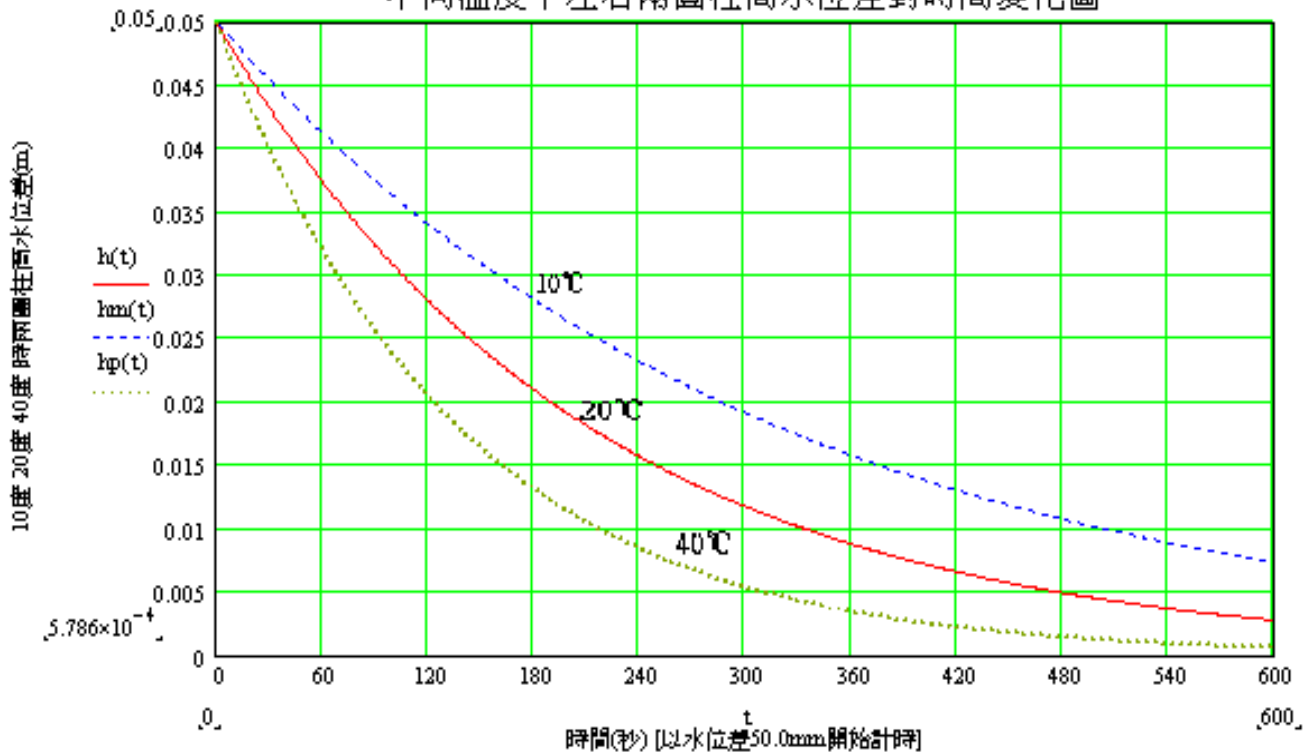
我們用電腦數學程式對(43)、(44)式進行分析及試算，下面我們列出了一些分析結果的理論圖形。



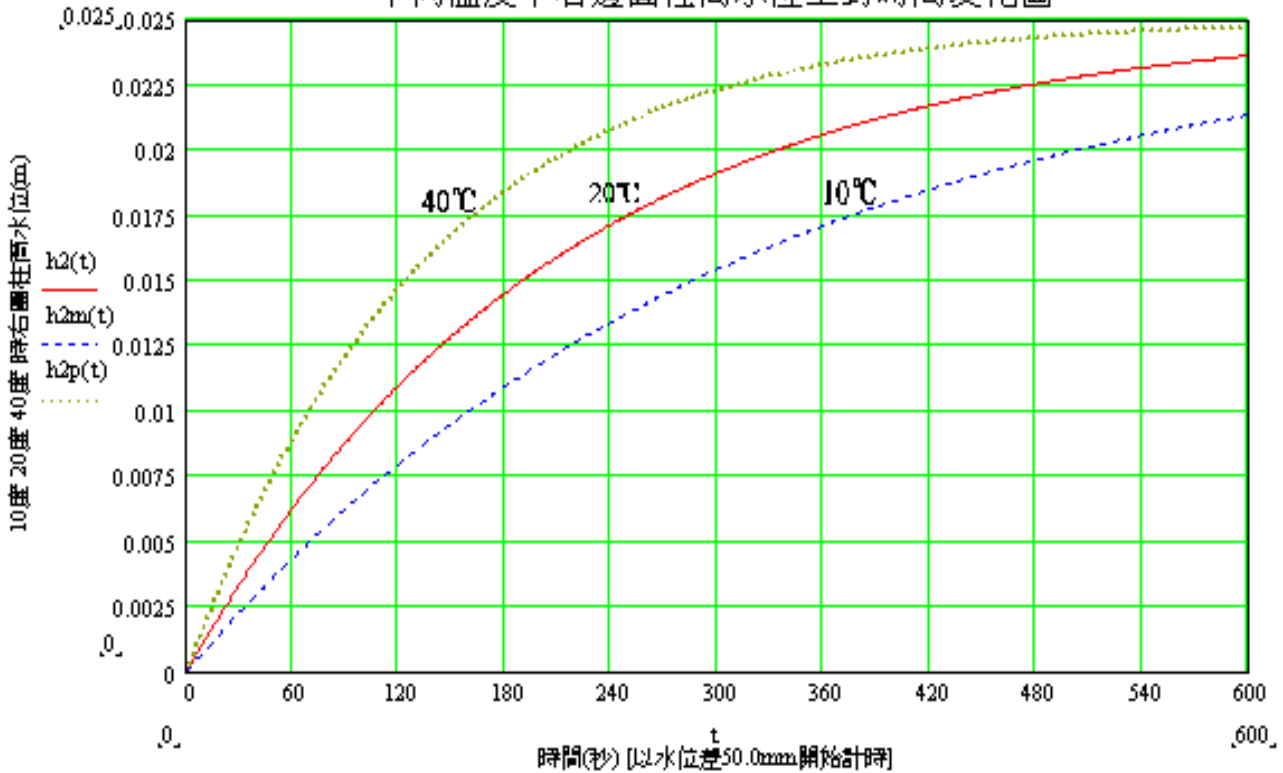
左右圓柱筒水位差與右圓柱筒水位上升對應圖



不同溫度下左右兩圓柱筒水位差對時間變化圖



不同溫度下右邊圓柱筒水位上對時間變化圖



理論圖形之討論

1. 上列圖形都是針對純水來作的，黏度和密度是經由查表所得在該溫度下的公認值，假設實驗用的毛細管長 $L = 15\text{cm}$ 、內半徑 $r = 0.5\text{mm}$ 、而左右圓柱內半徑皆為 $R = 14.40\text{mm}$ 的塑膠針筒為主要器材，最初左容器水位高過右容器 50mm 以上，當開關打開一段時間後，毛細管中漸漸發展出速度變化極為緩慢的層流，在水位差 $h_{(t)} = 50\text{mm}$ 的瞬間開始計時 ($t = 0$)。
2. 第一個圖表示兩容器在開始計時後經 t 時刻之水位差 $h_{(t)}$ ，與計時之初 ($t = 0$) 時的水位差 $h_{(0)}$ 之比，這個曲線呈現指數衰減的特性，在各項器材如上述規格之下大約要十幾分鐘的時間兩容器水位才逐漸拉近，就理論而言需要無限長的時間兩容器的水位才會相等，即 $t = \infty \Rightarrow h_{(t)} \rightarrow 0$ ，由此可見毛細管兩端的壓力差變化非常緩慢，管中水流速度也隨之緩步調整而且越流越慢，這和我們在理論分析時的假設相符。
3. 第二個圖表示兩容器液位差下降和右容器液位上升量之比較，因為兩容器的內半徑完全相同所以右容器液位上升量

$\Delta h_{2(t)}$ 應該是液位差變化量的一半即

$$\Delta h_{2(t)} = [h_{(t)} - h_{(0)}] / 2$$

4. 液體黏度對溫度是非常敏感的，我們將水10℃、20℃、30℃的黏度公認值帶入(44)公式中所繪製的曲線，如上列第3、4兩圖顯示溫度越低黏度就越高，流速因而減緩，那麼水位差 $h_{(t)}$ 要趨於零的時間就會拉長，而右容器液位上升至定點的時間也同樣拉長了，至於黏度與溫度的詳細數學關係我們將在實驗過程中來檢討。

5. 依(44)式液體黏度為

$$\eta = \frac{-\rho g r^4}{4LR^2} t / \ln \frac{h_{(t)}}{h_{(0)}}$$

在特定溫度下 $\frac{-\rho g r^4}{4LR^2}$ 中各項物理量皆為常數，那麼(44)式分母中的 $\ln \frac{h_{(t)}}{h_{(0)}}$ 對時間 t

的關係應該是如右圖所示之一條斜率不變的直線，且

$t / \ln \frac{h_{(t)}}{h_{(0)}}$ 必然是一不變的常數

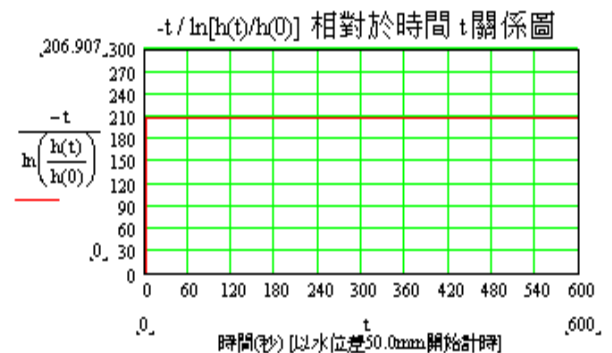
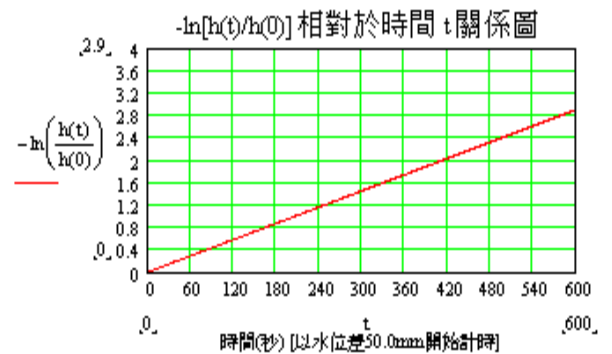
，這樣才可能求出該溫度下的定值黏度 η 。知道這個關係將有助於在實驗過程中對數據的初步檢驗因為我們可以任意取幾組數據來比對，例如

$$(t_0, h_{(0)})、(t_1, h_{(1)})、(t_2, h_{(2)}) \dots$$

若 $t_1 / \ln \frac{h_{(1)}}{h_{(0)}} = t_2 / \ln \frac{h_{(2)}}{h_{(0)}} = \dots = t / \ln \frac{h_{(t)}}{h_{(0)}}$ ，那麼實驗程序應該是

正確無誤的。

6. 與原實驗相比，這個實驗不僅大量簡化了實驗器材和調整手續，大幅度降低了液面波動引起的壓力變化，可以有效減低實驗的誤差，尤其是毛細管流通後的任一時刻都可視為初始時刻 ($t_0 = 0$) 讀取此刻數據 ($t_0, h_{(0)}$)，稍後讀取 ($t, h_{(t)}$) 即可求出黏度，節省了許多實驗所需的時間。



五、實驗器材研製

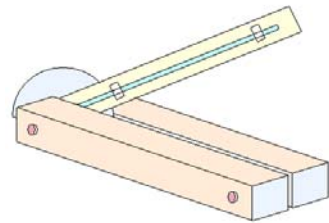
(一) 傾斜角度連續可變式毛細管支座

1. 製作原因

為了觀察在傳統毛細管黏度實驗中，毛細管是否水平對黏度測量值有多大影響，及自創的重力式無壓力差的改良型鉛直毛細管實驗中，為了調整毛細管傾斜度以控制管內液體流速，我們設計製作了兩個方便好用的毛細管支座。

2. 製作原則

- (1) 傳統毛細管黏度實驗用的毛細管長度一般約從20公分到40公分的都有，頭尾則有橡皮軟管與定高容器連接，我們將毛細管及軟管接頭以自黏式環狀固定器黏貼於長



為40cm的塑膠直尺上，支座用二根平行的四角木柱夾住直尺尾端，以長螺絲將木柱兩端鎖緊，要特別小心的是直尺刻度的零點與量角器的座標中央原點及穿過他們的螺絲鎖孔必須在同一直線上，這樣直尺中心線的方位及毛細管的傾斜度便能準確地由量角器上的刻度讀出以方便測量。



- (2) 在重力式無壓力差($\Delta P = 0$)毛細管實驗中，為方便速度測量及減少測量誤差，我們須使用極長的毛細管，這樣可同時增加液柱流動的長度及時間，使速度求值時可以得到較多的有效數字。這麼長的毛細管要去哪裡買呢？我們查遍電話簿與許多廠商連絡，結果得知國

內經營玻璃管的廠商多已停業或是遷廠至大陸，台灣已無自製的毛細管上市，經由業者輾轉介紹，我們找到兩家仍有庫存的工廠，一家在板橋，因離學校較近我們當天下午就去購買了幾支不同規格的毛細管來備用，後來得知這批毛細管原先是生產廉價溫度計用的，經實際測量發現其內徑並不固定，內徑粗細不勻這對於實驗結果影響很大，我們只好前往遠在新竹的另一家廠商尋找，很幸運地他們的毛細管全是德國進口的，內徑公差很低還附上原廠的保證書(見附錄)，特別是廠長熱誠親切地解說，使我們增加了許多有關毛細管的常識，他還親自操刀替我們切割與包裝。



溫度計使用的毛細管



硫酸銅溶液最容易觀測流速



1.7 米的長度快要超過我的身高了

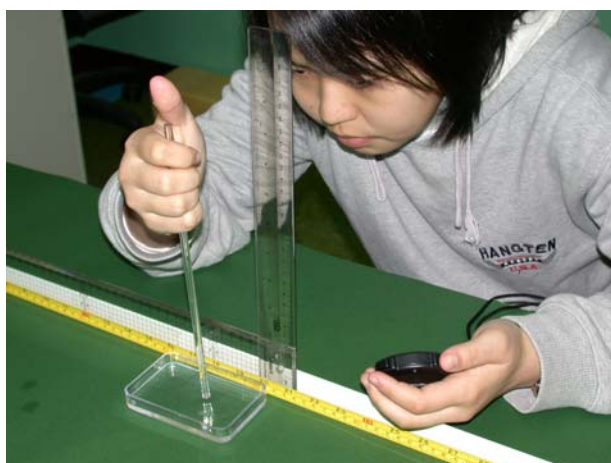


氣壓計或溫度計的毛細管內徑還不夠勻稱



廠長示範切割毛細管專用的切刀(噴液式)

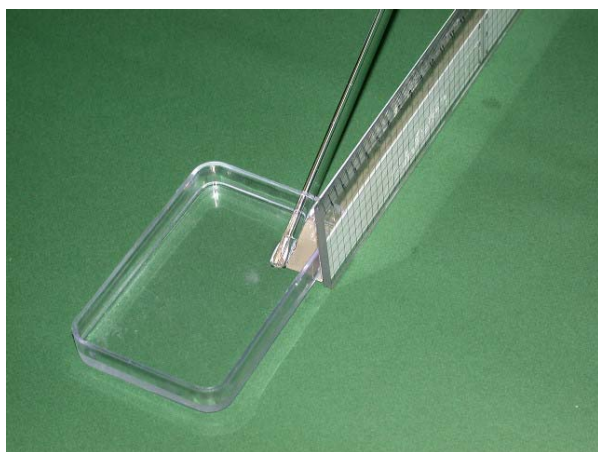
- (3) 由於長度(最長的達到1.7公尺)及重量都增加了好多倍，我們必須加重底座的重量和長度才會穩定，這次材料全部選用金屬製成的，其中能帶動毛細管自由改變傾斜角度的中央橫桿我們用五金行買到的白金長尺，底座也是買現成的U形金屬槽回來加工，以另一支直尺使其垂直於金屬槽且可在槽內滑動，直尺的功用除可支持毛細管及斜尺重量外，還可利用高度的讀數與其於U形金屬槽內滑動的長度來求出毛細管的傾斜角度。
- (4) 毛細管底部須微微插入廣口淺盤中，使毛細管中待測液體與淺盤液面始終接觸著，淺盤開口面積越大越好，這樣由毛細管流下的液體(通常只有2~3cc)不會使淺盤液面有可察覺的上升。



毛細管太短了，低黏度液體流速不易準確測量



哇! 這支夠長了但不容易架設它



廣口淺盤的液面越大越好，且要和毛細液柱接觸



毛細管傾斜度降低流速果然變慢，可以準確測量流速

(二) 自創的重力式傾斜旋轉的毛細管黏度計

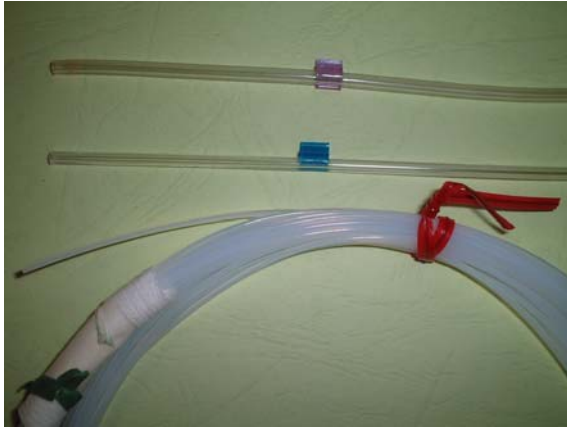
1. 製作原因

經多次改進，上述長毛細管配合傾斜角度連續可變式支座已經可以非常有效地控制及測量毛細管中待測液體的流速，進而準確地求出待測液體的黏度，但是實際使用及操作時發生許多麻煩與困擾，整個機座實在太大了，放在實驗桌上將毛細管垂直上舉時會觸到日光燈和電風扇，測量者也必須站到桌上才能觀察與記錄毛細管內液柱的高度，若將毛細管傾斜來做實驗，U形底座仍佔據整個實驗台的長度，這項要命的缺點使我們在實測過程中不慎弄斷了3根毛細管！真是心痛極了！幸好所測液體不是水銀，否則後果將…所以一定要設法改進它。

我們在一起討論許多次，大家都認為若能將毛細管旋轉起來，像是旋轉式樓梯一樣向上盤旋就可以大為減少器材體積，提高空間使用率，更重要的是方便於測量與操作，我們將朝這個方向改進。

2. 製作過程

- (1) 玻璃毛細管要用燒的才有辦法彎曲，玻璃師傅告訴我們說，燒的時候雖然玻璃因變軟而可彎曲，但是無法保證每一點的彎度都均勻，尤其是毛細管內徑可能在加工過程而變形，所以我們只好放棄使用玻璃毛細管。
- (2) 我們在太原路一帶找到了兩種PE塑膠軟管，內徑大約都在1mm以下，本來想用此取代玻璃成為向上盤旋的毛細管，但是沒有廠商能提供內徑的正確值，同時經實際使用發現其極易變形，稍加拉力即伸長變細，只得放棄不用。
- (3) 我們不斷地上網查詢，發現許多化工實驗室在做氣相層析時所用的軟質毛細管常都是鐵弗隆管或是TYGON管，經詢問代理商得知這兩種軟質毛細管抗張力都很強，不易伸長變細，不僅有我們所要的幾種規格而且還附國外的保證單，我們就訂購了數盒備用。
- (4) 有了軟質毛細管後我們面臨要如何纏繞它們的問題，最初我們將毛細管繞在保特瓶上，後因保特瓶太軟易變形而改成玻璃酒瓶，其中繞線的間距是以米達尺和奇異筆在酒瓶外側每隔相等距離畫上記號，然後將毛細管依記



鐵弗隆毛細管質優不易變形，但是透明度稍差



TYGON 管耐酸鹼也耐高溫及張力，透明度高又容易加工

號位置逐層向上纏繞，每纏繞2圈即貼一截透明膠帶以免鬆脫，但是因為軟質毛細管的外緣相當的光滑而且是圓形的，實在不容易完全照著預定的記號固定，這個問題很嚴重，它直接影響毛細管的傾斜上升角度和其中待測液體的流速，必須設法再改良。

- (5) 因為學長父親的工廠有一台老舊的車床，我們商議是否可利用車床來切刻毛細管路徑的牙軌，我們到壓克力招牌店購買了幾段長為三十餘公分、外徑約十公分、厚度5 mm的空心圓柱，再攜往工廠去攻牙，經學長父親的指導，我們逐漸能領悟操作車床的技巧，經過一個下午的練習最後終能攻出美觀正確的牙軌。



將空心圓柱亞克力定位好，再調整車刀的傾斜角度



每一英寸內要攻幾條牙軌由 A,B 兩把手及圓孔調整

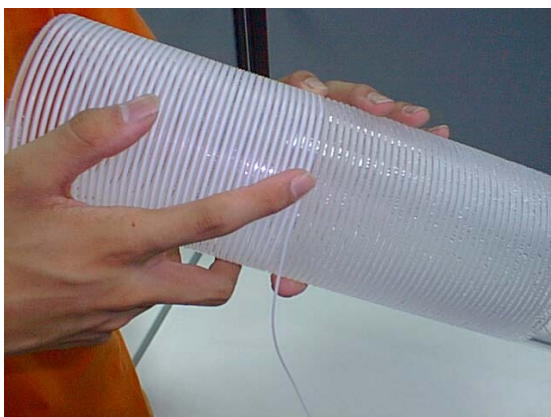


右上角圓柱邊緣的車刀已沾滿了切割牙軌碎屑



車完兩個了，水平進刀與垂直進刀要交互運用

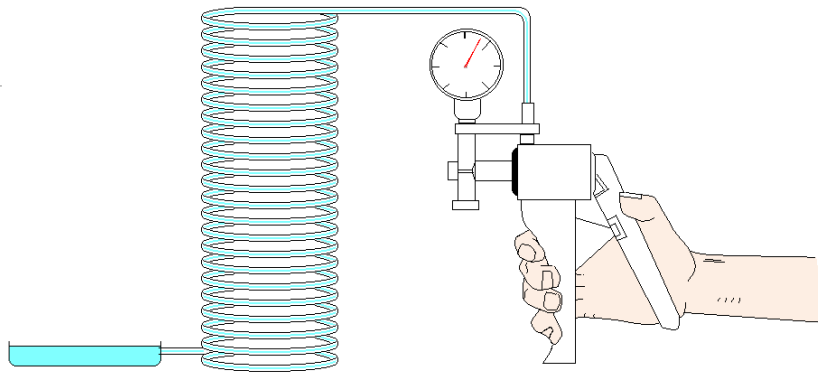
- (6) 我們用車床一口氣攻了四支壓克力空心圓柱，牙軌間距分別為3mm、5mm、8mm、12mm，牙槽的深度都是2.5mm，因為我們最常用的TYGON毛細管內徑規格是1.140mm，須小心預估TYGON毛細管嵌入牙槽的深度及計算毛細管中軸線到空心圓柱的中軸線之距離，它是毛細管內待測液體旋轉前進的實際半徑。
- (7) 纏繞軟質毛細管時我們先將第一圈管子在入牙處以透明膠帶固定，然後順著牙槽開始向上纏繞，有了牙槽引導纏繞的工作變成非常輕鬆，完全沒有滑線與脫位現象，一口氣繞到空心圓柱的頂端才在牙槽出口處以透明膠帶固定。



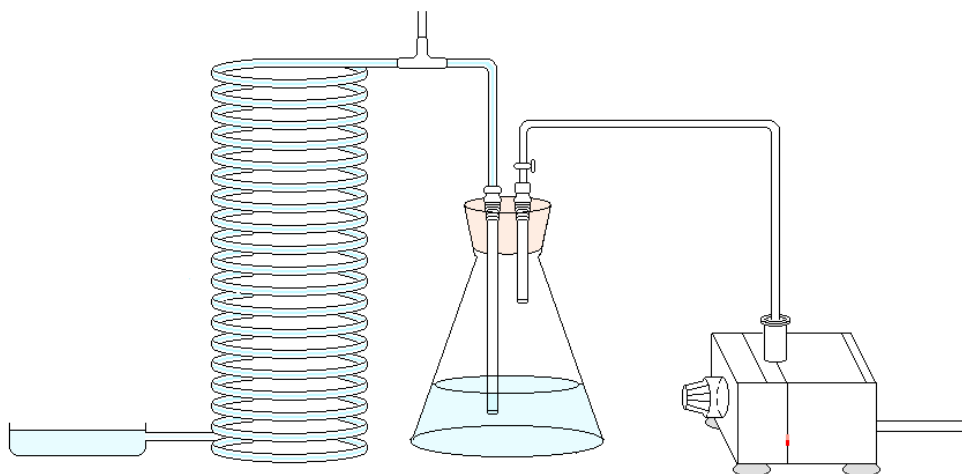
順著牙軌向上盤旋 長15公尺的毛細管一氣呵成



毛細管太長用嘴吸不動了 找出手動式吸氣器才夠力



- (8) TYGON毛細管其底部引出的餘管與廣口淺盤連通，淺盤邊緣以細鑽針鑽一小孔其大小正好容毛細管穿過，這樣可以保持毛細管與淺盤液面在同一水位上，毛細管內液柱頂部及底部壓力皆近乎為大氣壓力，而且淺盤開口面積是毛細管截面積的數百倍，這樣由毛細管流下的液體(通常只有幾cc)不會使淺盤液面有可察覺的上升，毛細管兩端的壓力差始終維持 $\Delta P \approx 0$ ，完全符合(31)式的要求。
- (9) 長達15公尺的TYGON毛細管，無法再用嘴來吸氣了，我們向老師借了一支原用於麥克森干涉實驗的手動抽氣機，將圓柱頂端毛細管出口接往手動抽氣機的入口，每當待測液由淺盤經由TYGON毛細管吸至圓柱頂端，此時放開抽氣機閥門，可以看到液柱在毛細管內緩緩下降的優美畫面。
- (10) 使用一段時間後，有一次用力過大不慎把待測液體抽入了手動抽氣機內使得抽氣機打滑失效了，真是懊惱不已，為了避免再度發生此種現象，我們加裝了一個緩衝

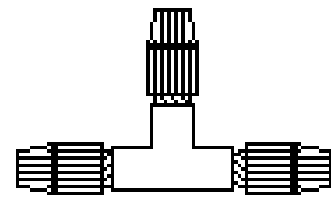


瓶，並且改用了電動抽氣機，倘若抽上來的液體超過圓柱頂端，多出來的液體將流入緩衝瓶內而不會流入抽氣機內。

- (11) 電動抽氣機並沒有放氣閥門，圓柱頂端毛細管出口處必需有閥門裝置，而且還必須是兩段式三通的閥門，我們在公館附近的思必可買到了幾個，當其閥門閉鎖時毛細管接通緩衝瓶而電動抽氣機可以進行抽氣，但是當閥門開啟時毛細管將與大氣接通，液柱將在毛細管內緩緩下降，可以開始測量液柱之流速了。
- (12) 電動抽氣機是由熱帶魚打氣機改裝的，只要將內部的活塞連桿撥到相反位置即可，但是抽氣能力要多大的我們並沒有經驗，太大或太小都不合適，我們到熱帶魚店買了四種來試用，最後選定了其中一種。



二向三通毛細管止流閥 在公館的思必可買到了



二向三通毛細管止流閥



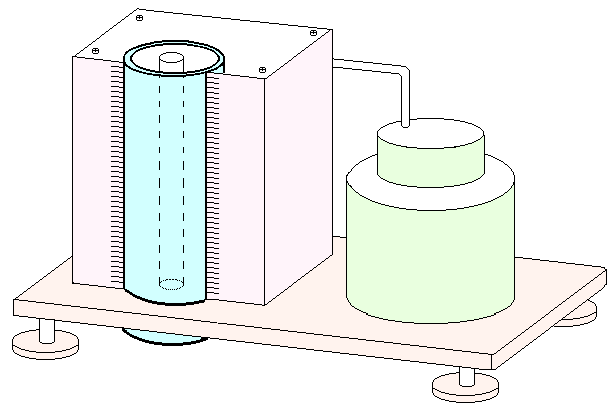
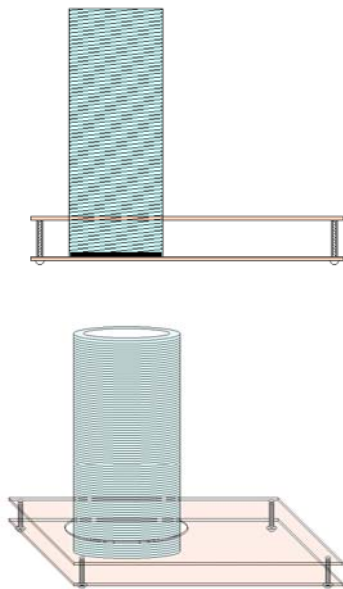
那一個抽氣機的速度最適中呢？試用看看



抽氣力量過大的 連三通止流閥都脫位漏水了

(13) 鐵弗隆毛細管因透明度較差我們捨棄不用，TYGON毛細管透明度雖良好但是要看清楚如此狹窄管徑中的細小液柱還是很費眼力，因此我們在纏繞TYGON毛細管的中空圓柱內裝置了一支日光燈管，由內往外透出的強光使得毛細管中任何細微的透明液柱之流動都無所遁形。

(14) 為了安置以上各項器材及附件，我們用壓克力製做了一個底座來承載它們，把廣口淺盤及日光燈和安定器都置入底座和箱體內，TYGON毛細管正面部分露在箱體前側，兩旁粘貼尺規以方便測量，緩衝瓶及抽氣機都以疊置方式置於毛細管右方，中間加設計時器以記錄毛細管徑中的液柱每流動一圈所需的時間，相當好看又實用。



用壓克力製作箱體與底座，在工藝教室砂磨過程



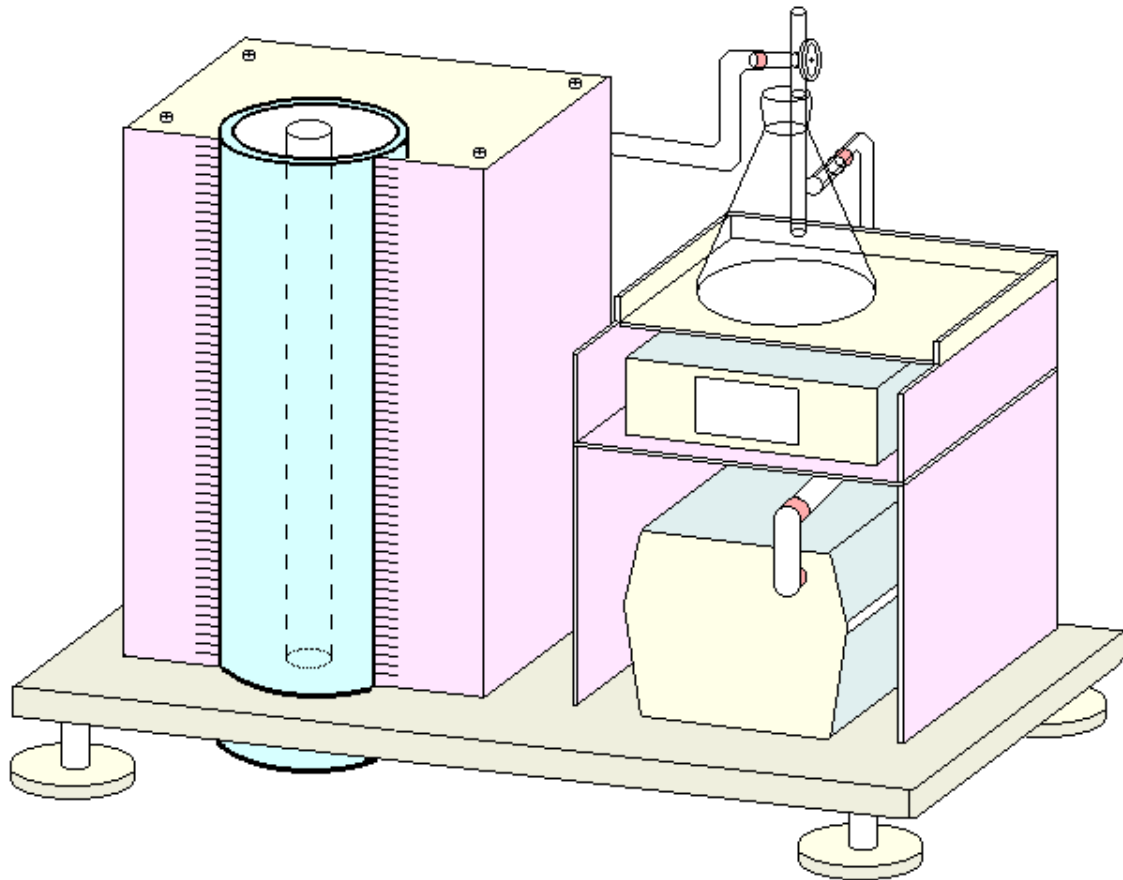
圓柱內置入日光燈，投射出強光可清楚觀察液柱流動



底座完成了，牙軌間距選用 5mm 的測低黏度液體很合適



測高黏度液體如甘油時，牙軌間距選用 12mm 的較為恰當



(三) 微壓力感測器之運用及其校正儀製作

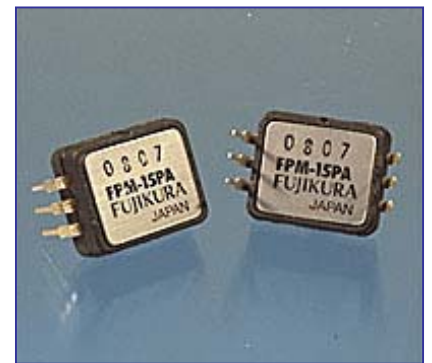
1. 製作原因

上述傾斜旋轉式毛細管黏度計測量管內液體流速十分準確，因為傾斜角很小所以流速很慢，液體流經的路徑長而所費的時間更長，這樣計算流速時可以得到較高的有效數字，因此液體流速準確度極高。但是我們使用一段時間後卻是漸漸覺得使用不便，原因有二：

- (1) 毛細管太長了，每次測量不同液體前的清洗工作都極為費時又費力。
- (2) 以碼表測量液柱每圈所需的時間並記錄結果是相當費眼力的，是否可以設法用感測器來自動記錄流過的圈數或下降的高度(即液位下降的深度)呢？

2. 製作過程

- (1) 想要感測液體深度我們曾考慮過使用超音波液位探知器，或是雷射干涉術來測量液面的位移，但是都因為系統太過複雜或是裝置加工困難而作罷。
- (2) 我們在網路上看到一種潛水手錶，內部配置有壓力感測晶片，潛水者配戴此種錶即可藉由水壓的變化而知道自己潛入水中的深度。
- (3) 我們開始全力收集有關資料，想知道此種晶片的特性和用法，到各處電子零件商場詢問及打探。在臺灣用過此類壓力感測晶片的人大概不多，一般電子零件商家老闆都沒聽過它們，圖書館內也找不到中文的介紹或文獻資料，本頁的附圖都是在網路上看到的。



- (4) 有一次同學因聚餐路過天津街的海利電子，沒想到在那兒買到了踏破鐵鞋無覓處的壓力感測晶片，真是欣喜若狂。這種晶片分為附氣嘴的及無氣嘴的兩種外型，前後都開有兩個小孔，藉著兩孔之間的壓力差使內部橫隔的半導體薄膜產生形變，再由形變轉換成輸出電壓。

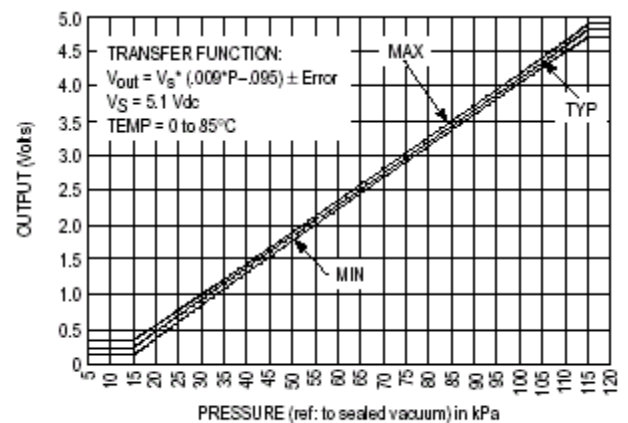
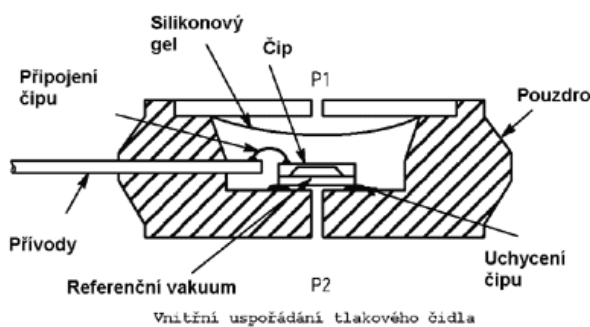
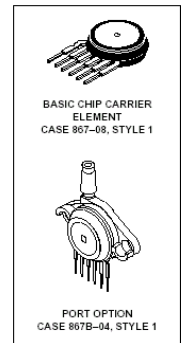
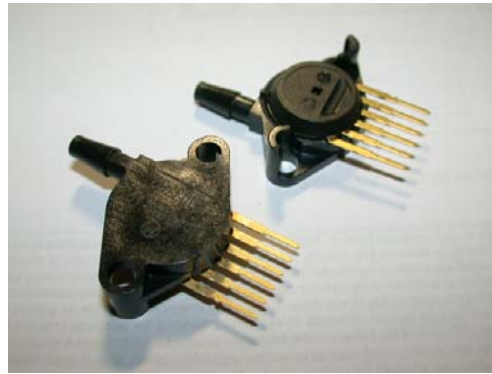
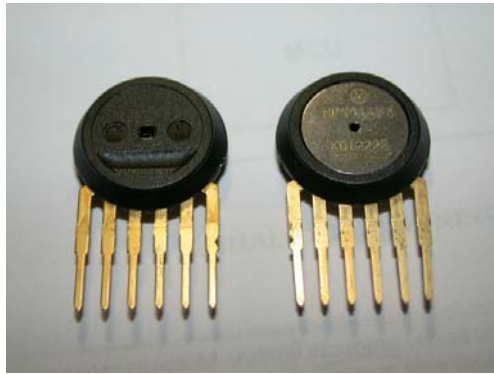
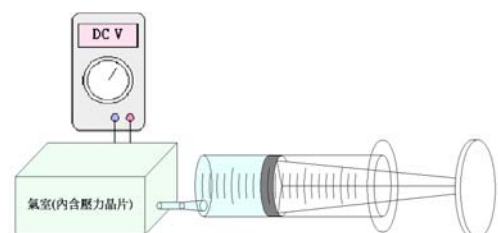


Figure 4. Output versus Absolute Pressure

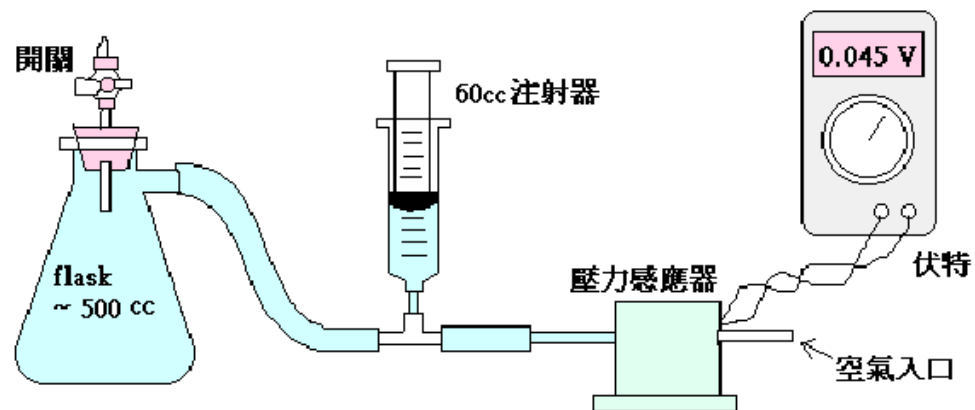
- (5) 壓力晶片的原理並不難，但我們一定要能掌握其特性規格，才可能精確使用它們。我們購得的兩種編號分別為MPX4115及MPX5010，前者靈敏度較低(即上圖Fig4)是用來做氣壓計的，後者靈敏度較高可以用來測量液位的微量變化，但是在使用這些晶片之前必須先對晶片本身進行一些基本的測量或校準。

- (6) 我們對壓力晶片並不熟悉，為了瞭解其壓力對電壓的關係，最初我們以針筒和軟管直接施加氣壓灌入晶片氣嘴，並以電錶來測

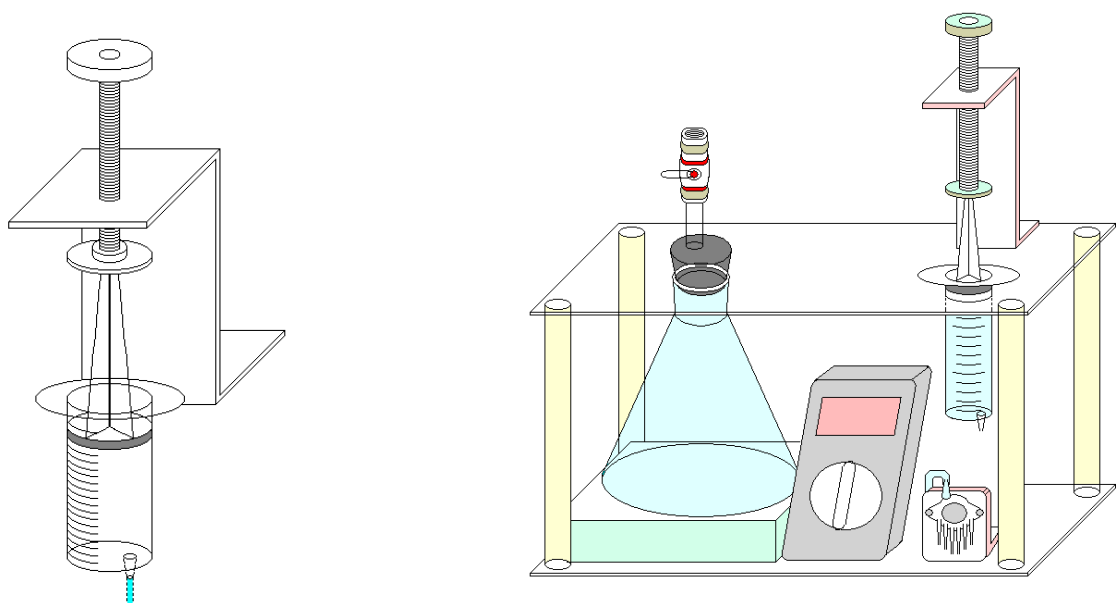


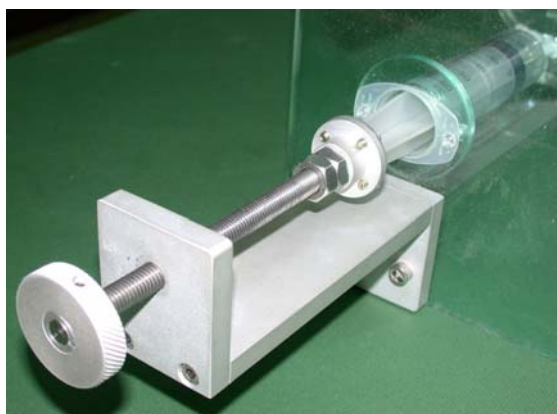
其輸出電壓(電池在方盒內未畫出),但針筒才打入半程筒內氣壓就倍增為兩大氣壓,險些弄壞了壓力晶片。

- (7) 我們把測量的系統加入一500ml的燒瓶來緩衝,與其相連的針筒每壓縮或釋放5ml,總體積只改變了約1%,這樣才能有精細的刻度來量測壓力晶片的輸出電壓與氣體P-V之關係。

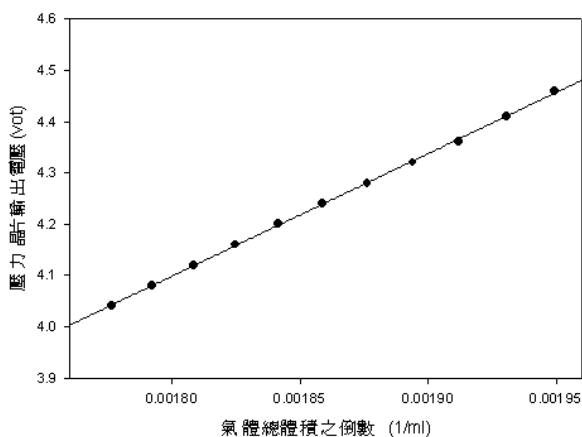
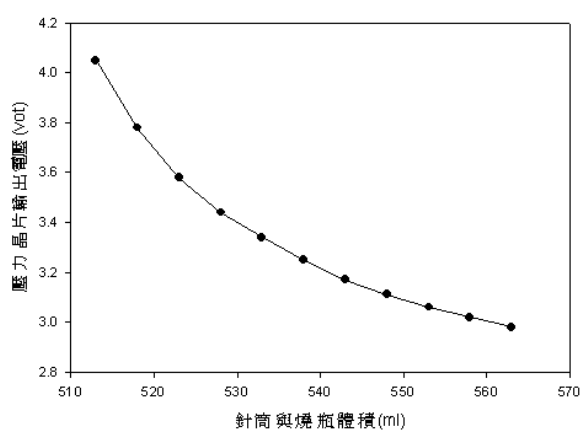


- (8) 上圖在實際操作時因為僅用手對針筒施壓是不容易穩定的,這會反應在電錶讀數不停地跳動著,問題一定要解決,我們試著用一段長螺絲通過舊的附有螺紋之L型金屬的固定支架來帶動針筒,其原理很像螺旋測微器的心軸,螺絲每旋轉一圈將會帶動針筒的活塞進退一個牙距,為了固定金屬支架,我們乾脆把上圖中所有器材都安置到一組自製的壓克力底座上,方便美觀又耐用。





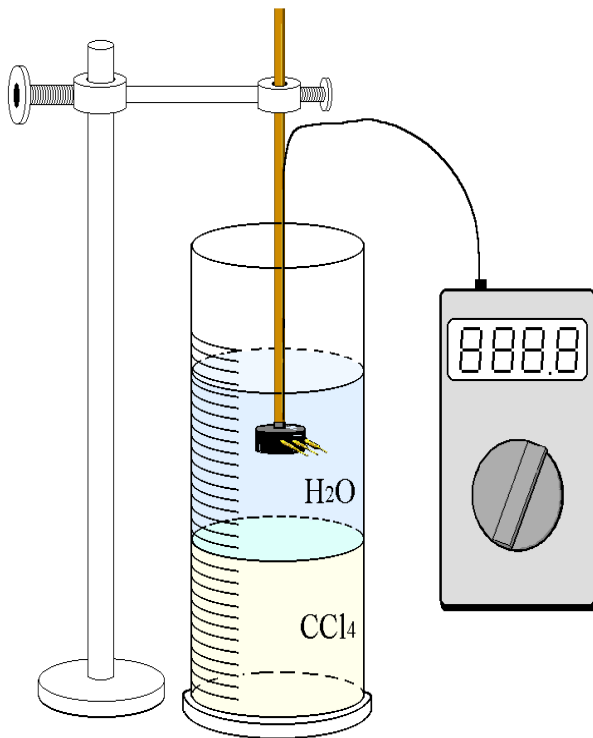
M4115壓力晶片(20°C)



- (9) 我們操作上述器材時特別注意到理想氣體的等溫壓縮過程，當轉動螺旋軸壓迫針筒的活塞前進時，我們已經對針筒內氣體做了功，氣體的內能和溫度都會微幅上升，但活塞每推進一固定距離(5ml)就暫停待測，等燒瓶與實驗室恆溫環境達成了熱平衡，此時數位電錶的讀數(壓力晶片之輸出)不再改變，我們記錄完此電壓後再推進下一位置待測，仍然等溫度達室溫而電錶讀數不再改變… 理想氣體等溫壓縮時必遵守 $PV = K$ ，或是 $P \propto \frac{1}{V}$ ，

比較上頁實測過的數據和圖形，我們可以確定壓力晶片 MPX4115 的輸出轉換特性是線性的。

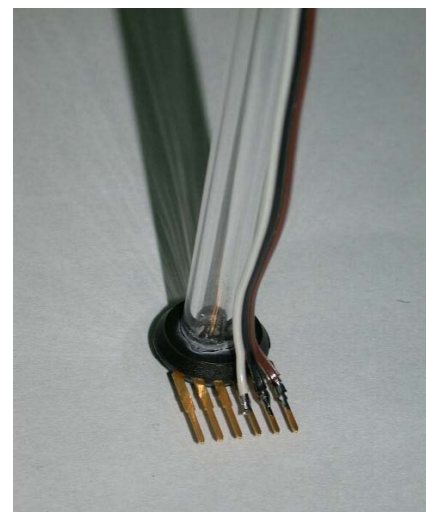
- (10) MPX5010 的靈敏度更高，我們要用它來測量液位的微量變化，但是在使用之前還是必須先對晶片本身進行一些基本的測量或校準。我們先將晶片接腳用彩虹線焊妥，分別為電源線、公共地線和輸出線共三條，再取一支中空的壓克力細長圓柱，柱口正面對準 MPX5010 壓力晶片的上端出口的小孔，以強力膠將兩者黏住以防漏氣。
- (11) 現在壓力晶片的上端出口經由中空圓柱通往大氣，我們用支架調整圓柱的高度，使晶片浸入附刻度的圓柱狀水槽中，壓力晶片底部的小孔承受大氣壓力及水的壓力，所以上下兩孔的壓力差其實就是水壓差，這個水壓差將轉換成晶片的輸出電壓，下圖即為我們實驗壓力晶片浸入水槽中水面的深度和晶片輸出電壓的關係。



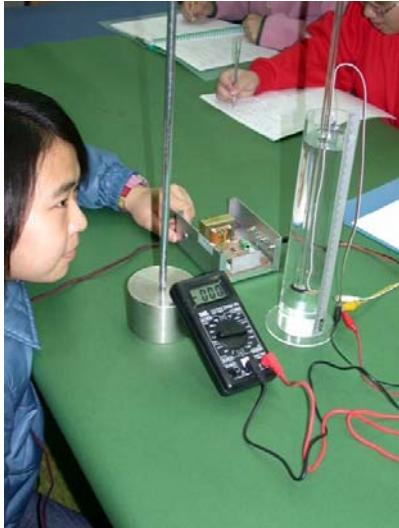
調整壓力晶片浸入深度 每 1cm 記錄一次輸出電壓



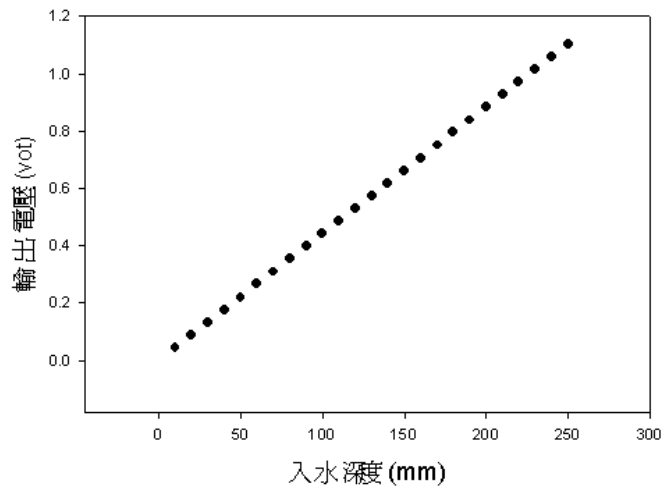
晶片接腳用彩虹線焊妥晶片上方小孔對正圓柱



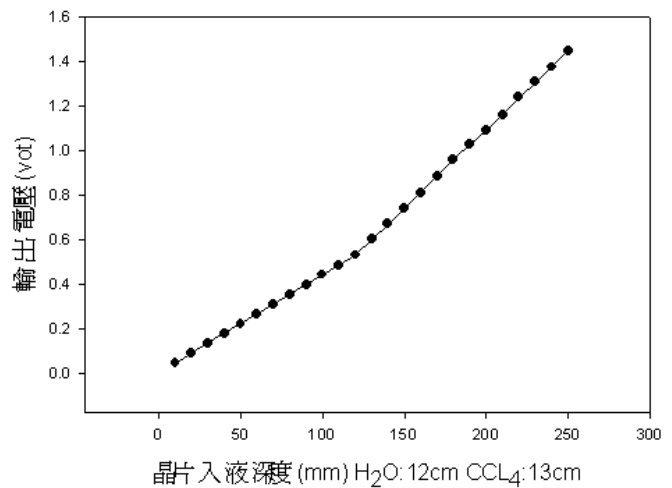
中空圓柱和晶片對正黏牢引出電線



MPX5100入水深度對應輸出電壓圖



MPX5110在H₂O及CCl₄雙層液中輸出特性



(12) 右圖上方為實測MPX5010壓力晶片在20°C純水中的輸出轉換特性，其極高的線性度遠超過我們的預期，依據原廠公佈資料顯示MPX5010的轉換特性為 $4.41(mv/mmH_2O)$ ，這與我們所測得的各點數據相差都不到1%，實在是優異的感測零件，所以我們可以用它來測量液位的微量變化，若將它固定在水底，那麼液位微幅的升高或降低都能立即反應在其輸出電壓上，只要將輸出接往電壓放大器，並且調整放大倍數便能以我們希望的物理量之形式(液位高)和量值顯示在數位電壓錶的顯示幕上。

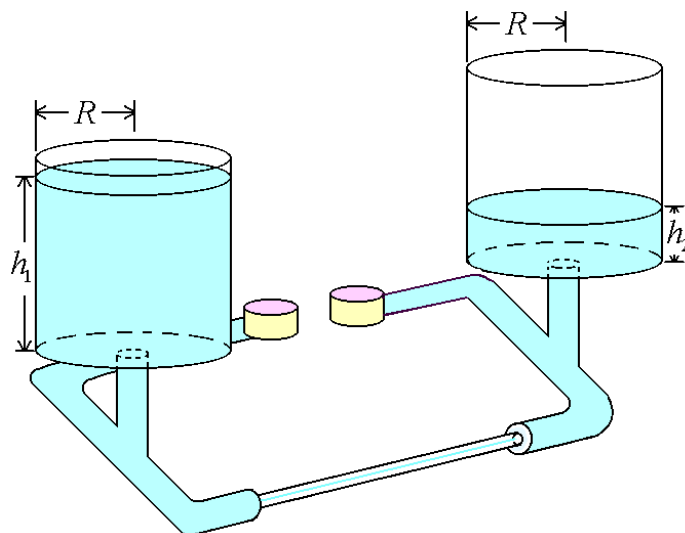
(四) 創新的連續可變液位差式毛細管黏度計之製作

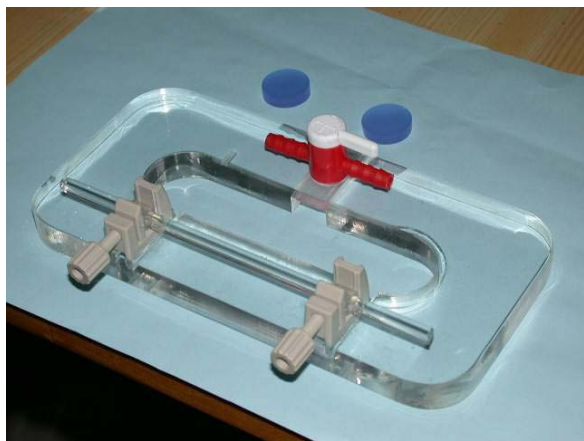
1. 製作原因

前面討論過液位差緩變式毛細管黏度計可以免除在傳統毛細管黏度實驗中必需用到的供水槽、虹吸管、點滴流量調整器、兩定高容器、底部盛水燒杯及總長達2公尺的各段橡皮接管。基本上我們自創的改良型毛細管黏度計只需兩個完全相同的容器及底部相連通的毛細管即可，我們記錄兩容器的初始液位差及一段時間後的末液位差就可以求出黏度。液位差要怎麼看呢？要在同一時間看清楚左右各自的液位同時還要相減是不容易的，因為左降右升兩邊的液位都隨時間緩慢變化著，我們考慮引用前面討論過的壓力晶片來感測任一時刻容器內的液位高，並且運用差動減法電路可以即時地求出任一時刻兩容器的液位差。

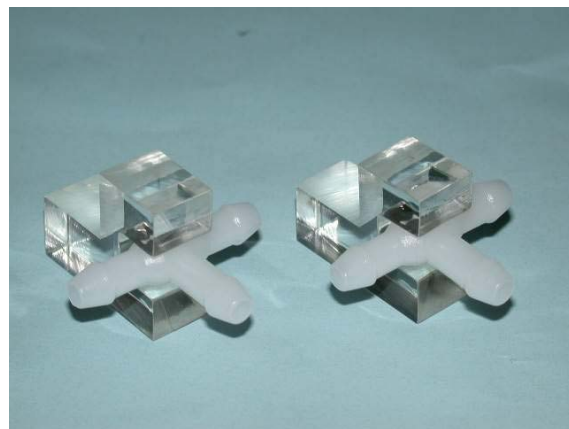
2. 製作原則

- (1) 經過大家討論，左右兩容器我們選用一般醫療用的60ml注射針筒，因為刻度明確而半徑完全相等，不僅可以滿足(42)式中的化簡過程，而且在裝配到亞克力機台上的孔位時，鑽孔的絞刀也只需一種尺寸。
- (2) 其實兩容器的液位差就是底部相連通之毛細管兩端的壓力差 ΔP ，它也是克服黏滯阻力維持穩定流速的原動力，兩個壓力晶片一定要裝在毛細管入口處及出口處的同一直平面上，晶片的氣嘴以矽膠軟管與毛細管端口及針筒出口互相連通，兩晶片各自將感應到的左右液位轉換成電壓再傳送到差動減法電路去計算液位差。





毛細管兩端須與壓力晶片共平面 這是共面平台



針筒出口與毛細管及壓力晶片互接的三通連管



國中生活科技課中所學的功夫現在都用上了



壓克力底座鎖上外接線排預備連結晶片與外電路

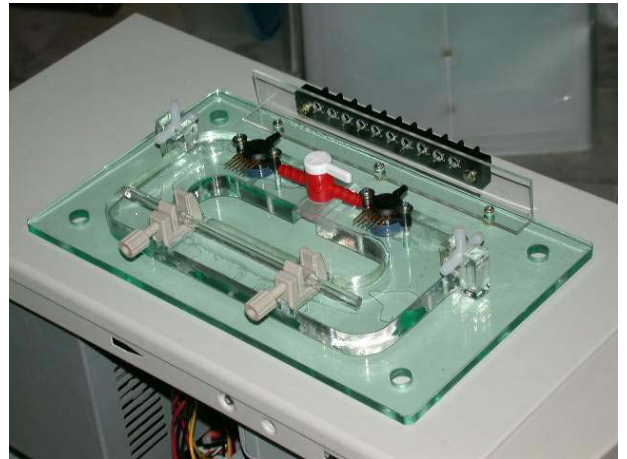
- (3) 玻璃毛細管的外徑為6.5mm，所以矽膠軟管的內徑必須略小於6.5mm才能緊密接合，為了盡量降低雷諾數 N_R 以發展穩定層流，我們使用的毛細管內徑多在0.5mm以下，約為矽膠軟管內徑的十幾分之一，而內截面積更小於矽膠軟管的百倍以上，兩者相較下矽膠軟管內的液體可視為靜止不動的，所以毛細管兩端壓力差視為左右容器液面至毛細管口的靜壓差是相當良好的近似。
- (4) 液體黏度對溫度是相當敏感的，在傳統毛細管黏度實驗中溫度計須分別測量兩定高容器內的液溫後再求平均值，相當地麻煩且不可信，我們使用一種白金的熱電偶貼片，將其貼在毛細管正中央，這樣可以直接測得在其中流動的液體溫度，還可將熱電偶引線外接至數位溫度計顯示其正確的溫度值。
- (5) 我們估計過全部的外接電線數目共有8條，每個壓力晶

片各有三條引線，熱電偶則有2條引線，所以我們買了一組接線排座將其固定在亞克力底座後端，等待與外電路連線。

- (6) 毛細管裝在共面平台的前方，其兩端有一對塑膠製的固定夾可以微調毛細管的高度使其與壓力晶片等高，這個微調手續非常重要，使壓力晶片能真正反應毛細管兩端的壓力。
- (7) 我們將調整完成的平台裝入亞克力組成的三層支座內，兩個針筒用塑膠螺絲固定並將矽膠軟管接妥，然後在左邊針筒內倒入去離子純水，觀察是否有漏水情形並且可以看到左、右液面緩慢上升及下降的狀況。



塑膠製的固定夾可以微調毛細管的高度



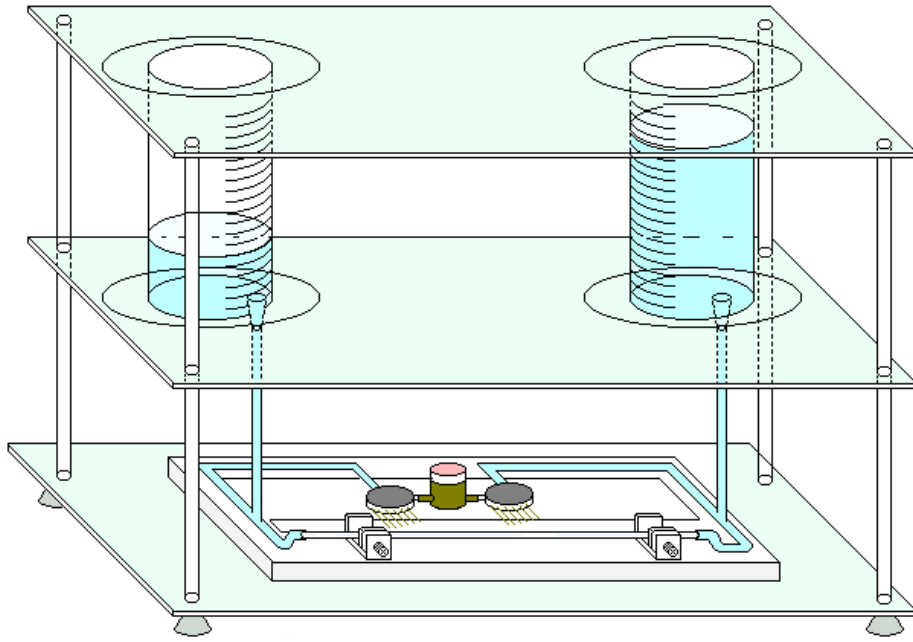
毛細管、壓力晶片、三通管及接線排架都安裝妥當了



製作黏度計的三層支座之主體結構



左右兩針筒用塑膠螺絲固定，快完成了



連續可變液位差式毛細管黏度計整體結構設計圖



從構想、設計、找材料、實作、改良到完成，好長好苦好有意義的一年

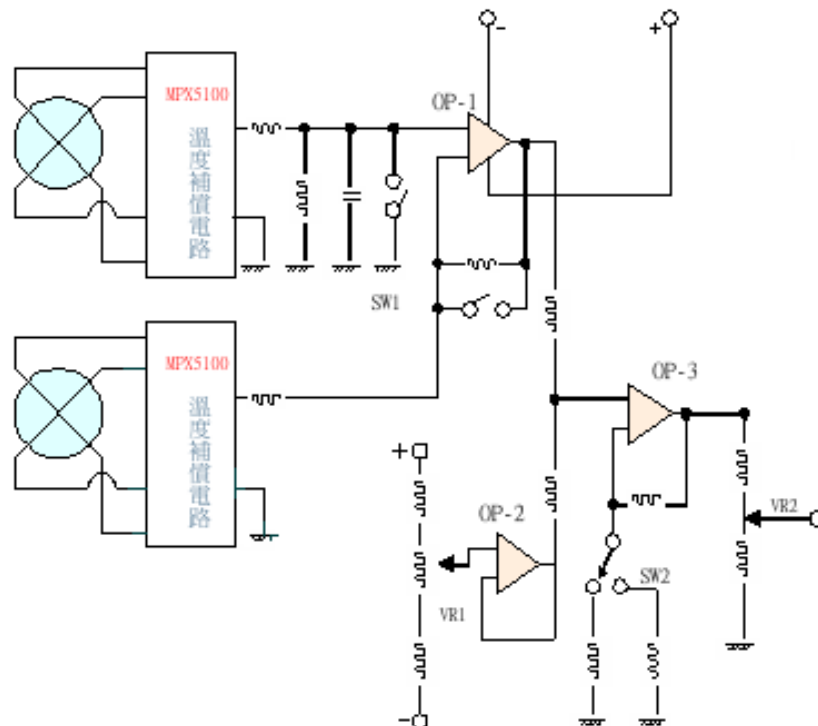
(五) 液位差電壓顯示電路及自動計時電路製作

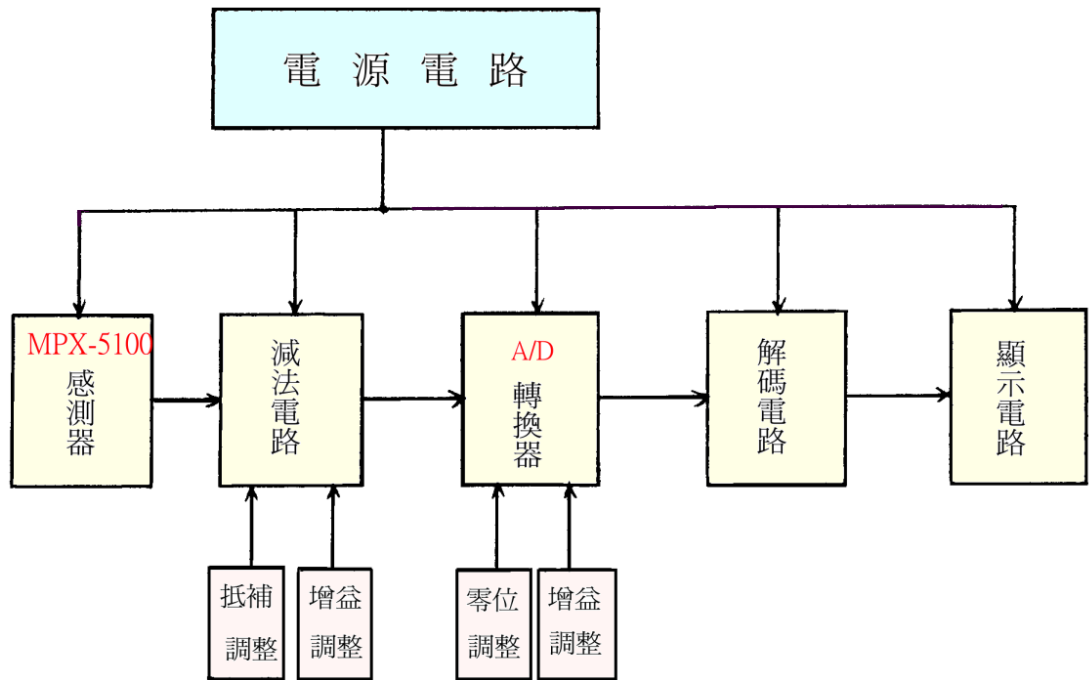
1. 製作原因

其實若兩個針筒上的刻度清楚，只要加一個碼表就可以使用前面討論過的液位差緩變式毛細管黏度計來測黏度了。但為了更準確及方便測量液位差以求黏度，我們都認為有必要加上液位差電壓顯示電路及自動計時電路。

2. 電路概述

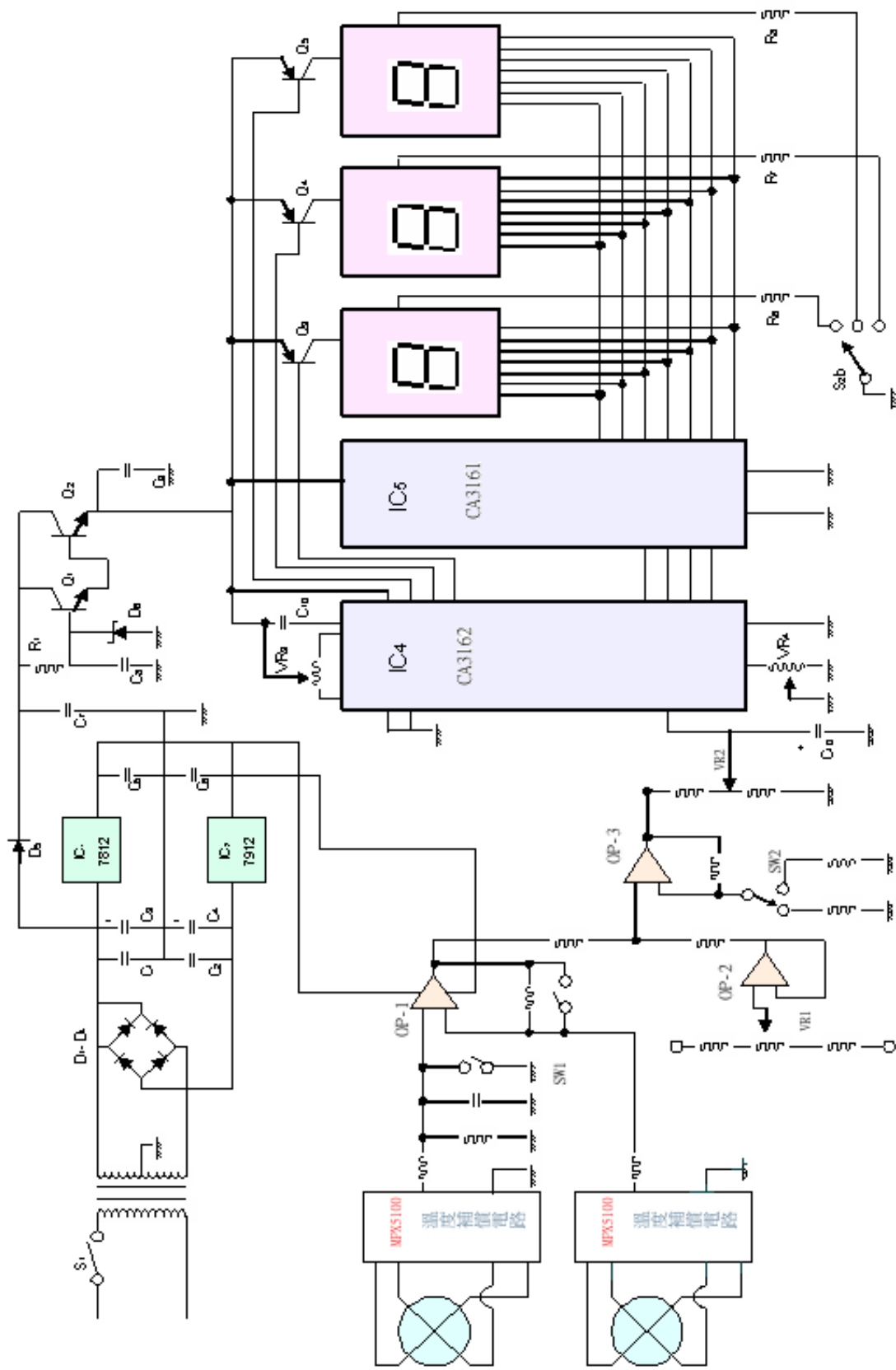
- (1) 壓力晶片MPX5010內部已附有2級放大器及溫度補償電路，外接的電路可以非常精簡，不過左右各用一個晶片感測液位，所以其輸出需要先進入減法電路求差。
- (2) 運算放大器有兩個輸入端，是利用差動放大的原理，我們正好可以將兩個壓力晶片感測的電壓輸送到運算放大器的兩個輸入端可得到信號相減的結果，利用回授電阻及後續的放大器控制總放大倍數，使由數位電路顯示的數值能以液位差的大小(mm)來表現。
- (3) 我們雖已採用低雜音、低偏置(off-set)的運算放大器，依據經驗即使輸入信號為零其輸出仍有非零電壓，為了在兩針筒液位相等時能有零的讀數，我們裝了抵補調整(OP-2、VR₁)以消除運算放大器的微小偏置。

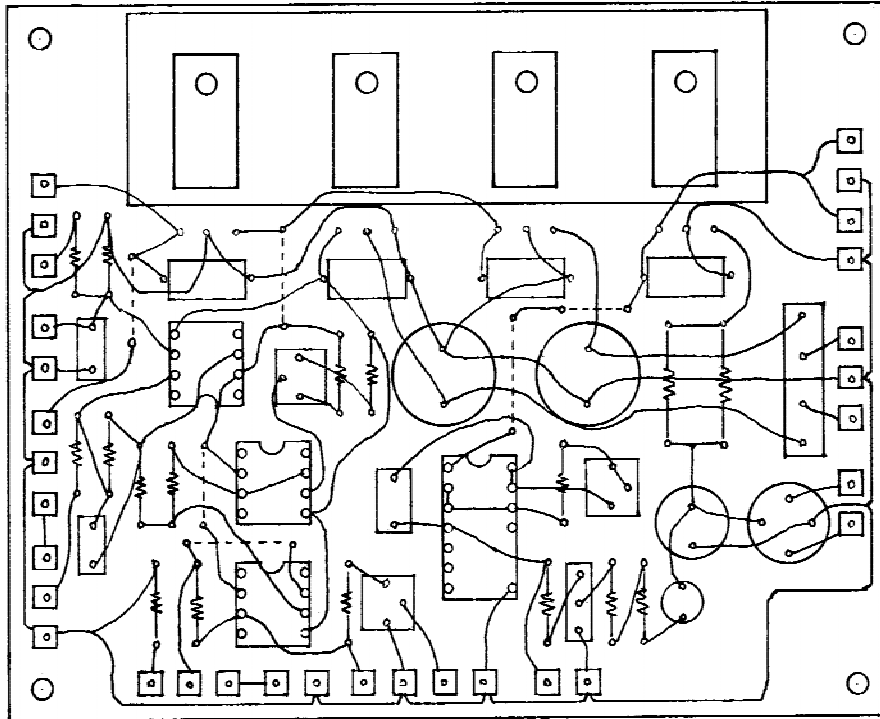




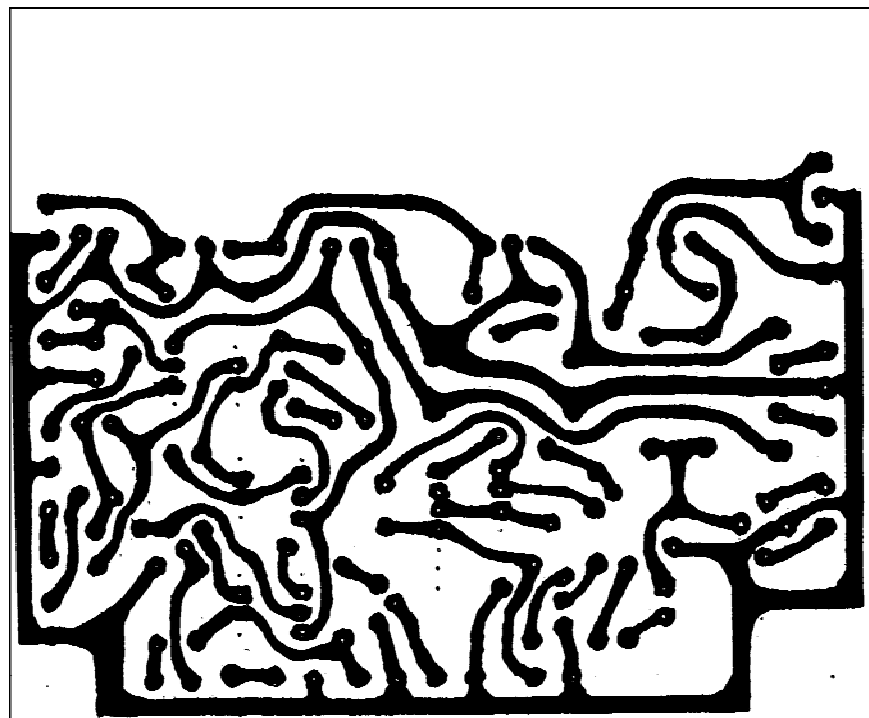
- (4) 為了認讀方便及減少誤差，我們用數字錶頭來顯示結果，在許多種數字顯示之推動IC中我們選擇CA3161E及CA3162E，因其外接電路最簡單，特性穩定而調整容易。其中CA3162E是類比對數位轉換器(A/D converter)，可將類比的電壓輸入轉成 BCD之數字信號輸出，而CA3161E則可將 BCD數字信號經解碼電路直接輸出推動顯示器，它們使用之電壓皆為標準5伏特。
- (5) 上面方塊圖指出這次實驗的電路分成六個部分，即感測器、減法電路、A/D轉換部分、解碼及推動顯示部分、最後是電源電路。這些電路我們曾分別在麵包板上試驗，經多次修改及實測才確定做法，特別要謝謝電子研究社的社長及物理老師的指導與協助。
- (6) 整合以上電路主要的工作項目為
- a. 設計電路板圖線。
 - b. 酸洗電路板。
 - c. 機殼加工處理。
 - d. 焊接零件、配線。
 - e. 調整與校正。

我們邊學邊做，曾經遇到過許多困難，但也都一一設法解決，下面我們將部分工作流程以照片及圖形呈現出來。

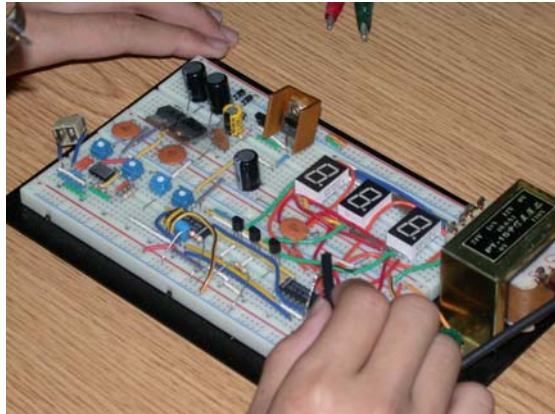




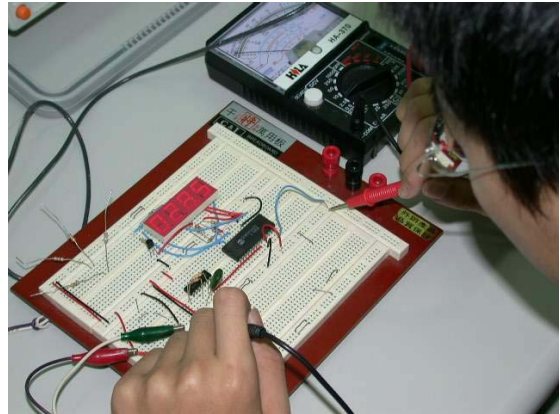
麵包板實驗成功的電路移植到此，零件的位置、大小、走線先於方格紙上設計好



用油性奇異筆在PC板上畫上走線圖，再投入 FeCl_2 去酸洗 完成後鑽孔待焊



在麵包板插上 A/D 轉換及解碼電路檢驗其動作



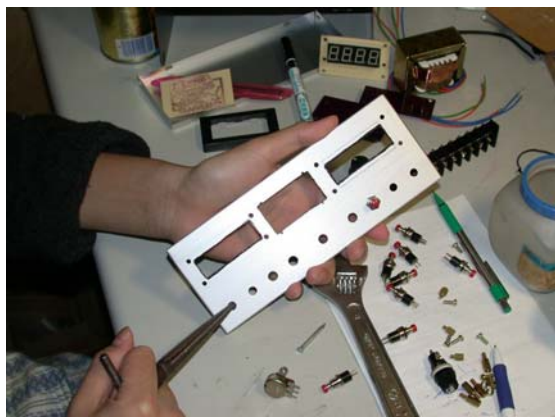
計時器電路是用一般電子鐘內最常使用的 counter



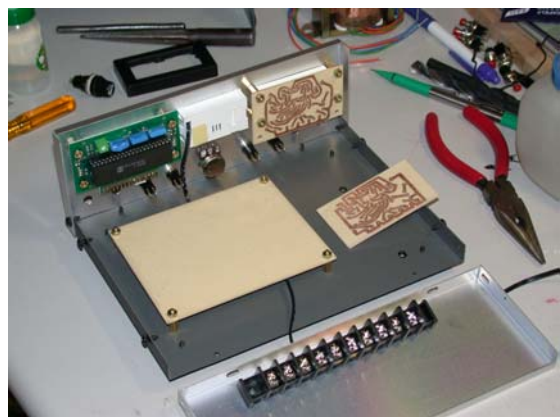
依原設計圖用奇異筆在 PC 板上畫電路走線圖



機殼面板用斜口鉗及銼刀處理矩形方孔

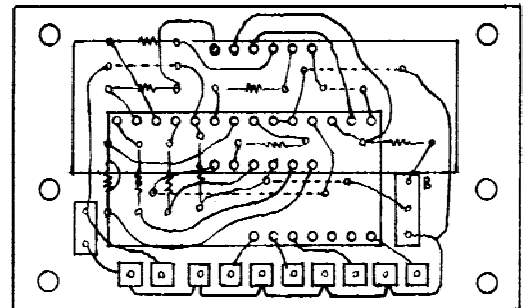
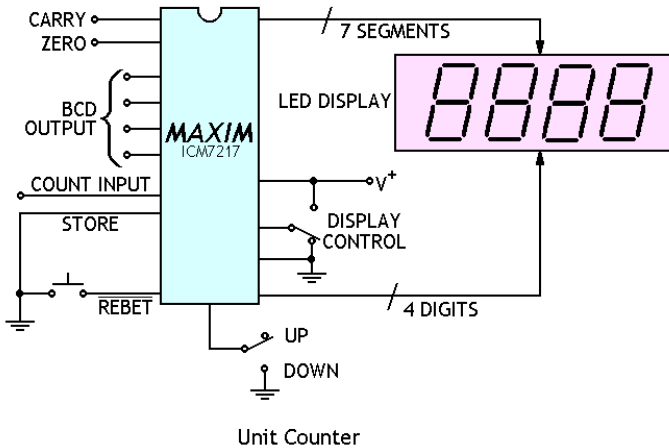


用電鑽鑽大的孔位再用擴孔器加大至零件能鎖入

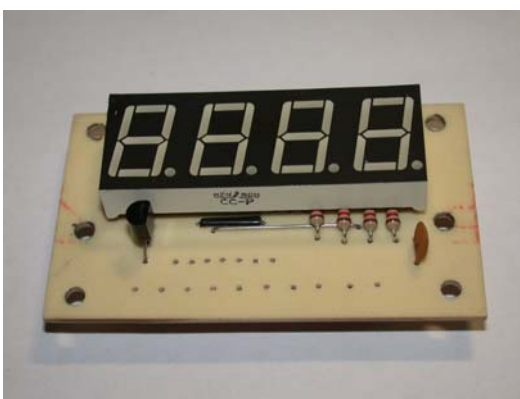
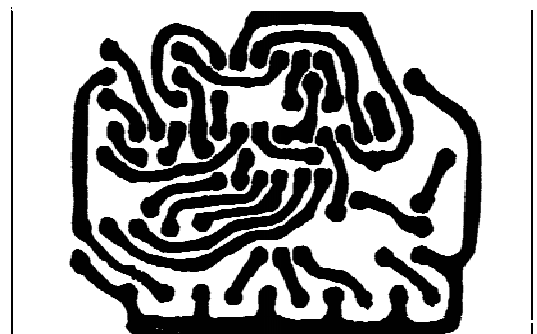


計時器、熱電偶溫度顯示及液位差的顯示都裝上了

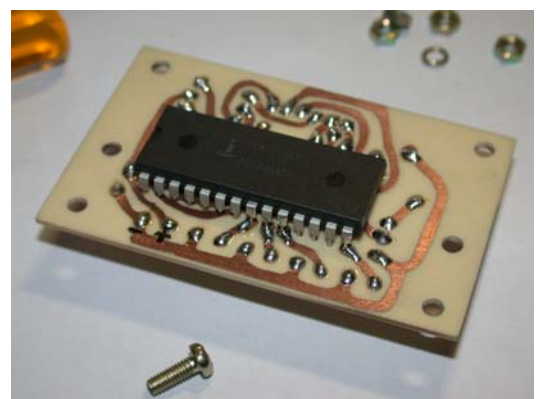
(7) 要測量流速就一定須要測量時間，這次實驗中的兩個主角：重力式傾斜旋轉的毛細管黏度計及連續可變液位差式毛細管黏度計都需要能即時顯示液體流經的時間，並且要能與左右針筒的液位差同步顯示的計時器(TIMER)。收集網站資料後我們決定使用最常見也最易購得的計時用積體電路ICM7217，因為外接零件最少，所以它被大量用在一般的電子時鐘內。



液位差壓力晶片輸出須與計時器同步顯示



四位數連體的數字顯示器外接僅需幾個電阻



ICM7217 數字顯示器驅動器焊在 PC 板反面

六、實驗過程

實驗一 測量純水在傾斜玻璃長毛細管中的流速

(一) 實驗步驟

1. 徹底清潔毛細管

因為毛細管長達1.7米，要清潔它們相當地麻煩，我們使用比毛細管外徑較粗的橡皮管套住毛細管，然後接通打水幫浦將幫浦壓力表指針調整至2Kg左右，分別以清水及丙酮灌注清洗，最後再以待測液(二度去離子純水)灌注清洗一遍待用。

2. 檢驗毛細管內徑是否均勻

雖然由新竹購入的毛細管皆有原廠的規格及國外保證書，我們還是每支都灌入一段約15cm去離子純水，將毛細管略為傾斜詳細觀察水柱流動時其長度是否完全相同。

3. 調整毛細管支座

將前述自己設計的金屬製傾斜角度連續可調式毛細管支座安置於實驗桌上，毛細管支座的底座、滑軌上的直立支桿及毛細管斜桿上都黏貼有對齊的尺規，可利用邊長的關係求出對應的傾斜角，我們先將其調整至 5° 待測。

4. 微調設於毛細管支座底部之廣口水盤的高度，並緩緩倒入二度去離子純水，直至毛細管底部恰好微觸及水面為止。

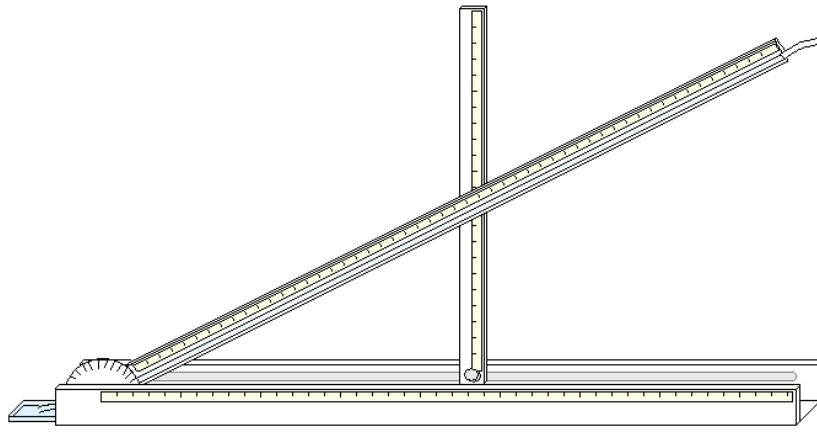
5. 將實驗室的微電腦空調設定在 20°C 恆溫。

6. 將毛細管頂端出口接往手動抽氣機的入口，每當待測純水由淺盤經由毛細管吸至頂端的定點(尺規上預先畫上記號)，此時將碼表歸零並且放開抽氣機閥門，可以看到液柱在毛細管內緩緩地下降，觀察並記錄水柱每經流動10cm所費的時間。

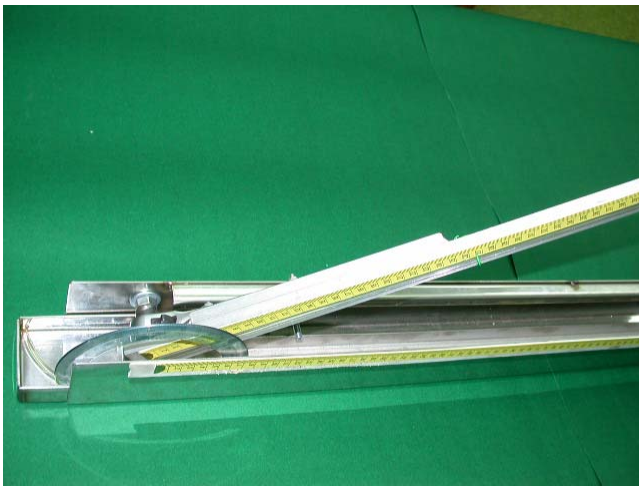
7. 將傾斜角度每次增加 2.5° 重複以上實驗並記錄之。

8. 更換不同內徑的毛細管重複以上實驗並記錄之。

9. 使用手動抽氣機將水柱吸上一小段後隨即將底部水盤挪開，當此小段水柱被吸至頂端的定點(尺規上預先畫上記號)，此時將碼表歸零並且放開抽氣機閥門，觀察並記錄此小段水柱每流動10cm所費的時間。



用不銹鋼及鉛條製成可斜角度連續可調式毛細管支座設圖



可滑動及微調高度的廣口淺水盤置於毛細管支座尾端



用手握式抽氣機將水柱吸至頂端定點才放開閥門



利用直角三角形邊長比可精確求得毛細管的傾斜角



整個機台基座長度將近2公尺 佔滿實驗桌全長

(二) 實驗結果列表

表一. 純水在傾斜玻璃長毛細管中的流速

溫度 $T=20^{\circ}\text{C}$ 內徑 $r=0.500\text{mm}$ 長度 $L=165\text{cm}$ 傾斜角 $\alpha=5^{\circ}$

液柱移動長 (10^{-3}m)	抵達時刻 (sec)	兩點間時差 (sec)	兩點間平均流速 (10^{-3}m/s)	等速段平均流速 (10^{-3}m/s)
0.0	0.0			
		4.2	23.8	
100.0	4.2			
		3.8	26.3	
200.0	8.0			
		3.8	26.3	
300.0	11.8			
		3.8	26.3	
400.0	15.6			
		3.8	26.3	
500.0	19.4			
		3.8	26.3	
600.0	23.2			
		3.8	26.3	
700.0	27.0			
		3.8	26.3	
800.0	30.8			
		3.8	26.3	
900.0	34.6			
		3.9	25.6	
1000.0	38.5			
		4.2	23.8	
1100.0	42.7			
		4.5	22.2	
1200.0	47.2			
		6.6	15.2	
1300.0	53.8			
		13.1	7.6	
1400.0	66.9			

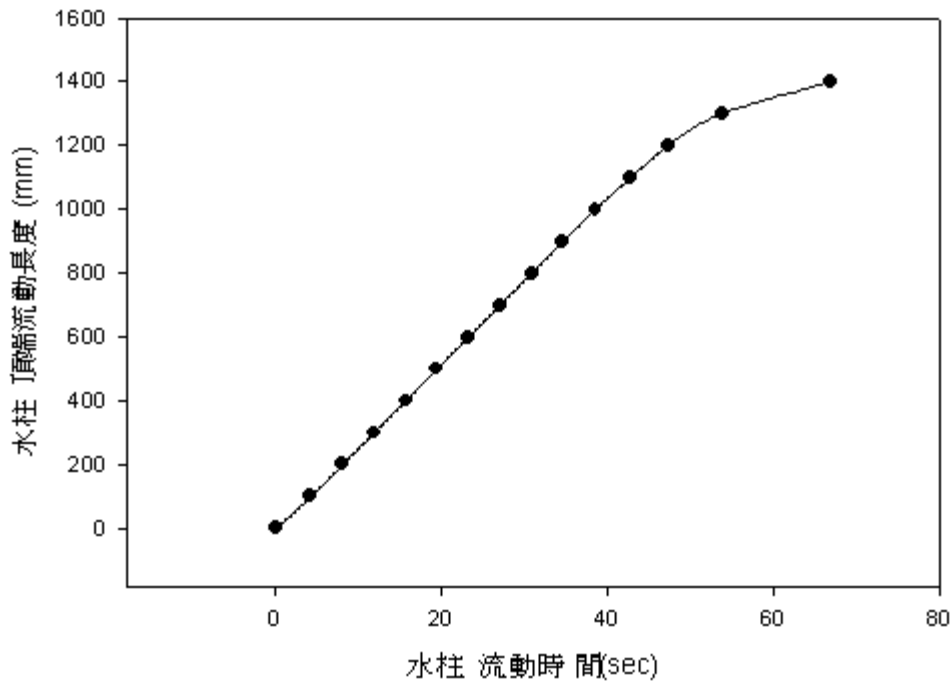
$$v = \frac{900.0 - 100.0}{34.6 - 4.2}$$

$$v = 26.3$$

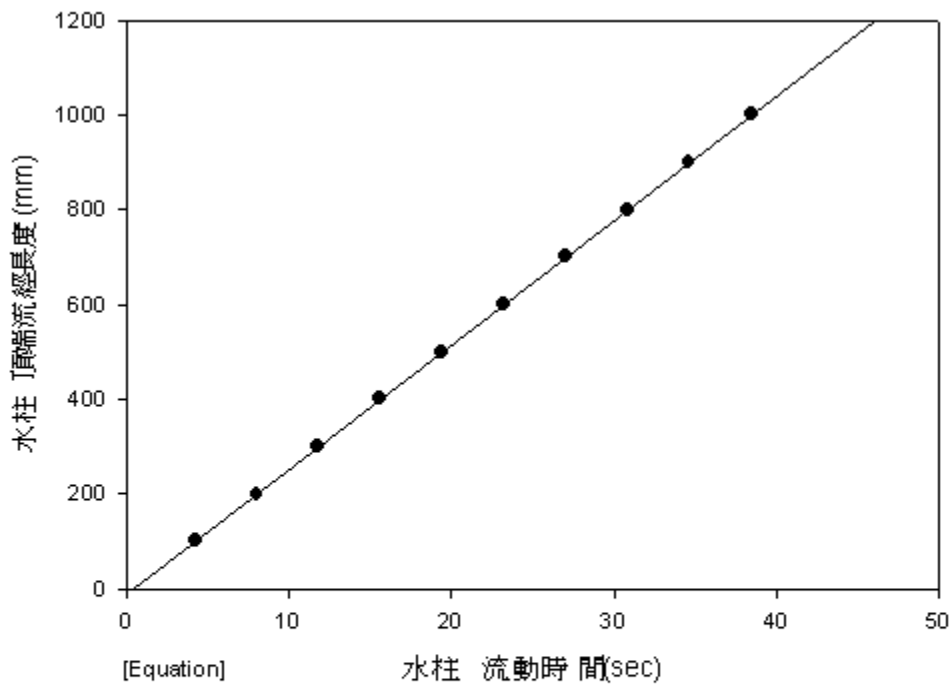
表二. 一段純水柱在傾斜玻璃長毛細管中的流速

溫度T=20°C		內徑r=0.500mm 長度L=165cm		傾斜角 $\alpha=5^\circ$		水柱長=10.0cm	
液柱移動長 (10^{-3}m)	抵達時刻 (sec)	兩點間時差 (sec)	兩點間平均流速 (10^{-3}m/s)	等速段平均流速 (10^{-3}m/s)			
0.0	0.0						
100.0	4.3	4.3	23.3				
		3.8	26.3				
200.0	8.1	3.8	26.3	$v = \frac{900.0 - 200.0}{34.6 - 8.1}$ $v = 26.4$			
300.0	11.9	3.8	26.3				
400.0	15.7	3.8	26.3				
500.0	19.5	3.8	26.3				
600.0	23.2	3.7	27.0				
700.0	27.0	3.8	26.3				
800.0	30.8	3.8	26.3				
900.0	34.6	3.8	26.3				
		3.9	25.6				
1000.0	38.5	4.3	23.3				
1100.0	42.8	5.2	19.2				
1200.0	48.0	5.9	16.9				
1300.0	53.9	13.1	7.6				
1400.0	67.0						

純水在傾斜玻璃長毛細管中的流動



等速流動區段線性擬合



[Equation]
 $f=y_0+a*x$
 fit f to y
 tolerance=0.000100
 stepsize=100
 iterations=100

R = 0.99999726 Rsqr = 0.99999452 Adj R sqr = 0.99999384
 Standard Error of Estimate = 0.7517

Coefficient Std. Error t P
 y_0 -9.9826 0.5208 -19.1673 <0.0001
 a 26.2779 0.0217 1208.3941 <0.0001

表三. 純水柱在傾斜度不同玻璃長毛細管中的流速

溫度 $T=20^{\circ}\text{C}$ 內徑 $r=0.500\text{mm}$ 長度 $L=165\text{cm}$ $g=9.797\text{m/s}^2$ $\rho=998.23\text{kg/m}^3$

毛細管傾角 (度)	等速段平均流速 (10^{-3}m/s)	換算黏度 (10^{-3}Ns/m^2)	雷諾數	黏度公認值 (10^{-3}Ns/m^2)	誤差 %
5.0	26.3	1.01	26.1	1.0046	0.84
7.5	38.7	1.03	38.5		2.64
10.0	50.7	1.05	50.4		4.23
12.5	62.5	1.06	62.1		5.38

(三) 實驗結果討論

1. 和理論分析的預測相符，當手動抽氣機將水柱吸至頂端的定點然後放開抽氣機閥門，水柱會迅即加速至終端速度，由表一數據可看出加速期間非常短暫，水柱大多是僅加速流動幾公分即開始等速流動。
2. 水柱流動至大約整支毛細管的最後三分之一長度時，即開始逐漸減速，越接近毛細管尾端減速度的值越大，待水柱停止不再流動後，水柱頂端到水盤底部的高度差與課本公式

$$y = \frac{2T \cos \alpha}{\rho g r}$$

所求出的高度甚為接近，不過實測值都略微低於理論所預測的高度。

3. 水柱加速與減速的理論分析遠較等速段落深奧，也非常地有趣，它可以是另外的一個專題研究的題目。
4. 等速段的流程相當長，約佔毛細管長度的三分之二，但在此期間流速相當的穩定，測量多次所得的結果都一致，且與(32)式計算值相符，這表示(32)式中

$$v = \frac{\rho g r^2}{8\eta} \sin \alpha$$

上式當毛細管內水柱兩端無壓力差且式子右邊各項物

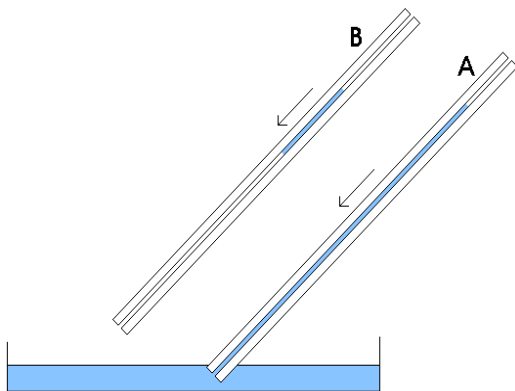
理量皆不變時，水柱流速確為定值，與當時水柱的剩餘長度無關，此時毛細管中水柱受到的黏滯阻力完全被其自身的重力所平衡，水柱呈現等速流動狀態。

5. 我們試過在手動抽氣機吸一小段水後，即將底部水盤移開，將此小段水柱吸至頂端的定點時放開抽氣機閥門，此小段水柱也會迅即加速至終端速度，由表二數據可看出小段水柱的流動速度與之前整段水柱微插入水盤的流動速度幾乎完全相同，且與小段水柱自身的長度無關，這應該是水柱兩端無氣壓差的緣故，完全符合(25)至(30)式中 $\Delta P=0$ 的情形。
6. 不論水柱多長，當毛細管底部脫離水盤而水柱在尾端管口呈現滴流狀態時水柱流速開始變成不穩定，因為水的表面張力會在液滴逐漸形成時使水柱減速，卻又在破裂滴下的瞬間牽引水柱使其加速。
7. 利用表一的數據我們將等速段的水柱流速求出後即可代入(33)式

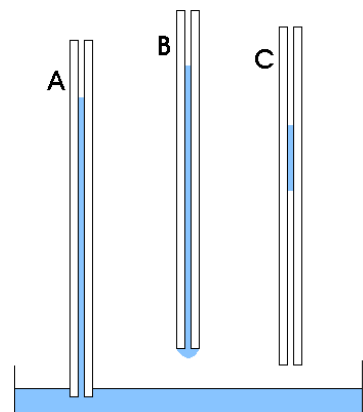
$$\eta = \frac{\rho g r^2}{8v} \sin \alpha$$

來求待測純水的黏度了。

8. 由表三中我們可發現毛細管傾斜角越小所測黏度的誤差也就越小，這可能是水的黏度小故流速較大，而降低傾斜角可減低流速，於讀取碼表及尺規時會有較充裕的反應時間，減少了讀取數據時的誤差，表三中傾斜角為 5° 時，二度去離子純水黏度的求測值與資料書中同溫純水的公認值相差僅約1%，可算是很精確了。



實測發現 A 與 B 兩管水柱流速幾乎相同



A、C 兩管流速相等但與 B 管不等

實驗二 用自創的傾斜旋轉的毛細管測量純水的流速

(一) 實驗步驟

1. 內徑1.140mm的TYGON毛細管每一盒內長度有30米，我們先將它繞在前述已曾車過牙、間距為5mm的的壓克力中空圓柱上，共有60圈牙軌加上圓柱頭尾預留10cm接線，繞完後再卸下毛細管，用米尺丈量得到全長為18.6721米，換算每圈毛細管的長度為30.787cm。
2. 毛細管每旋轉一圈即上升5mm高度，利用三角的幾何關係我們可求得毛細管的傾斜角為 0.93° 。
3. 毛細管繞至壓克力中空圓柱頂端出口處，引出毛細管並且連接至三通開關，由此再與抽氣機連通。
4. 微調設於毛細管支座底部之廣口水盤的高度，緩緩倒入二度去離子純水，直至毛細管底部恰好微觸及水面為止。
5. 將實驗室的微電腦空調設定在 20°C 恆溫。
6. 啟動抽氣機的電源，每當待測純水由淺盤經由毛細管吸至頂端的定點(我們在每一圈毛細管正前方標以圈次記號)，此時將碼表歸零並且反轉三通開關的方向，使毛細管頂端與大氣連通，可以看到液柱在毛細管內緩緩地下降，觀察並記錄水柱每經流動一圈所費的時間。
7. 抽氣機將水柱吸上一小段後隨即將底部水盤挪開，當此小段水柱被吸至頂端的定點，此時將碼表歸零並且反轉三通開關的方向，使毛細管頂端與大氣連通，可以看到小段水柱在毛細管內緩緩地下降，觀察並記錄小段水柱每經流動一圈所費的時間。
8. 將整組設備移到樓上生物科的恆溫箱去測量溫度對流速及黏度的影響。



溫度可微電腦控制，正設定恆溫箱的溫度中



將整組旋轉毛細管黏度計安置於恆溫箱內

(二) 實驗結果列表

表四. 純水在旋轉傾斜TAGON毛細管中的流速

溫度 $T=20^{\circ}\text{C}$ 內徑 $D=1.140\text{mm}$ 傾角 $\alpha=0.93^{\circ}$ 32圈周長 $=9.8518\text{m}$ 黏度公認值 $=1.0046\text{g}\cdot\text{s}/\text{m}^2$

圈數序號	抵達時刻 (sec)	該圈耗時 (sec)	等速段平均流速 (10^{-3}m/s)	黏度計計算值 ($10^{-3}\text{Ns}/\text{m}^2$)	誤差 %
1	0.0				
2	50.1	50.1			
3	98.2	48.1			
4	146.4	48.2			
5	194.5	48.1			
6	242.7	48.2			
7	290.9	48.2			
8	339.0	48.1			
9	387.2	48.2			
10	435.3	48.1			
11	483.3	48.0			
12	531.4	48.1			
13	579.4	48.0			
14	627.4	48.0			
15	675.5	48.1			
16	723.7	48.2			
17	771.7	48.0			
18	819.7	48.0			
19	867.8	48.1			
20	915.8	48.0			
21	963.8	48.0			
22	1011.9	48.1			
23	1059.9	48.0			
24	1107.9	48.0			
25	1156.1	48.2			
26	1204.2	48.1			
27	1252.2	48.0			
28	1300.2	48.0			
29	1348.4	48.2			
30	1396.7	48.3			
31	1444.9	48.2			
32	1493.2	48.3			
33	1541.5	48.3			
34	1589.9	48.4			
35	1638.7	48.8			
36	1688.0	49.3			

$$v = \frac{9851.84}{1589.9 - 50.1}$$

$$v = 6.3981$$

$$\eta = 1.008$$

37	1738.0	50.0
38	1788.4	50.4
39	1839.6	51.2
40	1891.6	52.0
41	1943.8	52.2
42	1996.2	52.4
43	2048.8	52.6
44	2101.8	53.0
45	2155.9	54.1
46	2211.2	55.3
47	2267.6	56.4
48	2325.6	58.0
49	2384.9	59.3
50	2446.9	62.0
51	2510.4	63.5
52	2576.4	66.0
53	2647.8	71.4
54	2729.0	81.2
55	2823.5	94.5
56	2931.5	108.0
57	3101.2	169.7
58	不再流動	不再流動
59		
60		

(續表四測量資料)



黏度計中央日光燈使流速觀測清晰

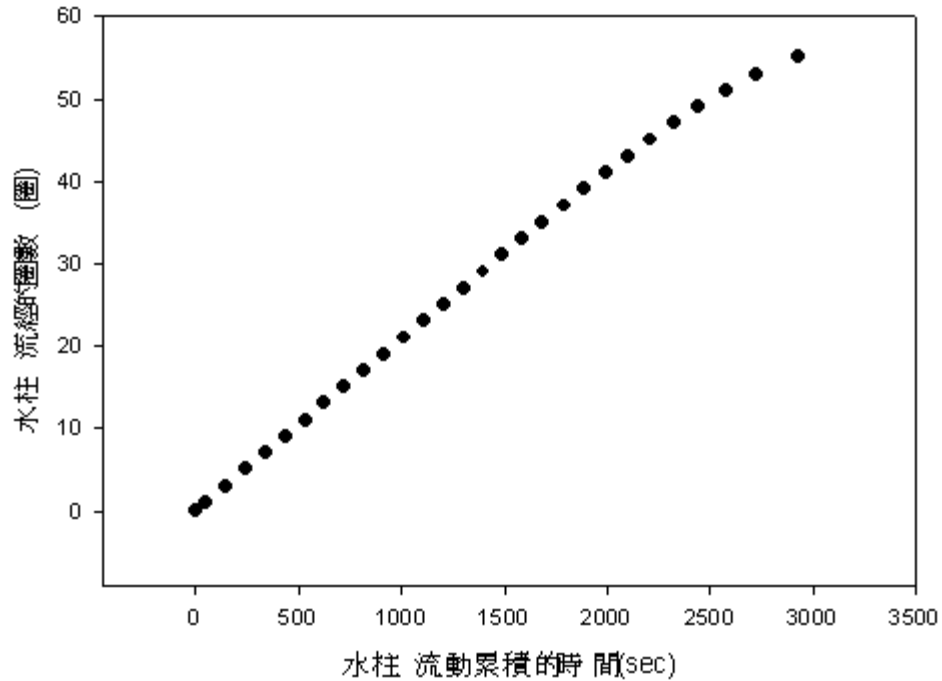


用針筒手動壓縮式灌入液體至毛細管

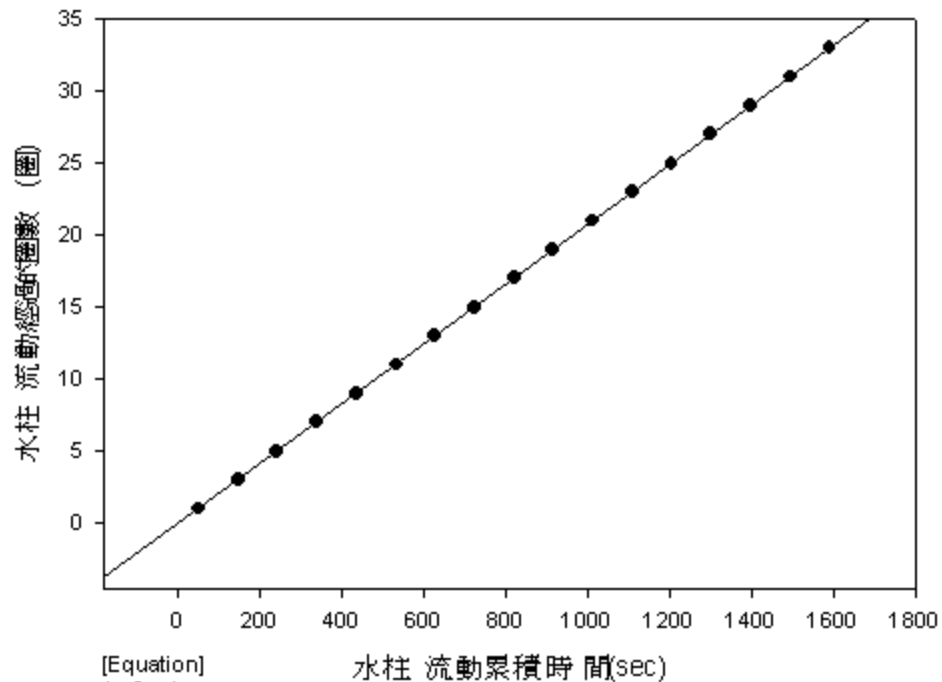


用電動幫浦壓縮式灌入液體至毛細管

純水在旋轉(TAGON)毛細管中流動圈數 對時間關係



水柱等速流動區段線性擬合圖



[Equation]
 $f=y_0+a*x$
 fit f to y
 tolerance=0.000100
 stepsize=100
 iterations=100

R = 0.99999984 Rsq = 0.99999967 Adj R sq = 0.99999965
 Standard Error of Estimate = 0.0060

Coefficient Std. Error t P
 y0 -0.0455 0.0029 -15.6160 <0.0001
 a 0.0208 0.0000 6744.5446 <0.0001

(三) 實驗結果討論

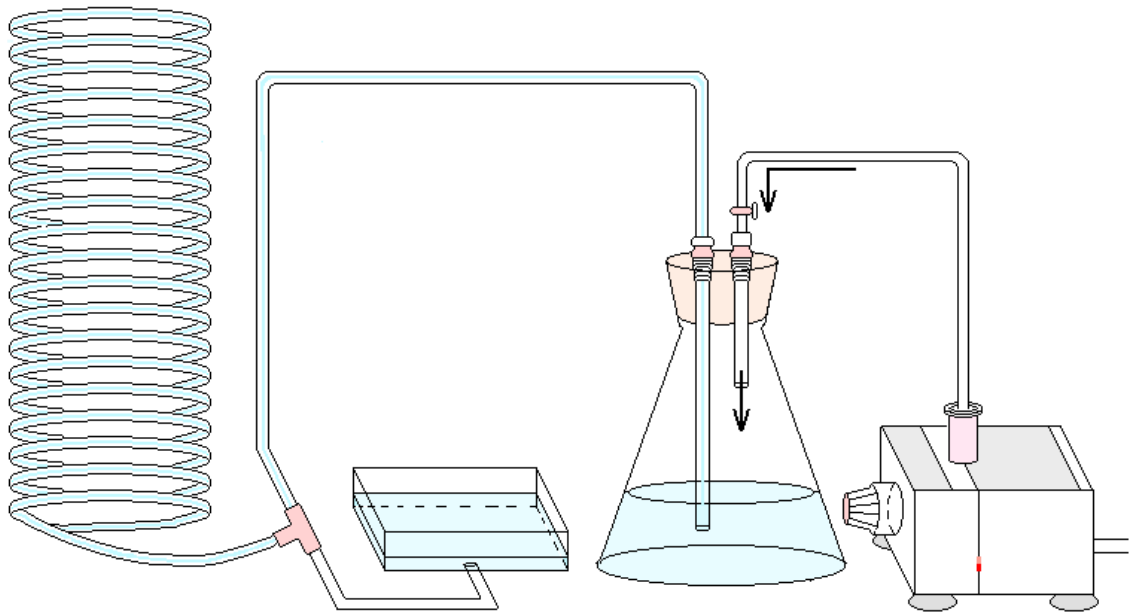
1. 和玻璃長毛細管的實驗結果相同，當抽氣機將水柱吸至頂端的定點，然後放開抽氣機閥門，水柱會迅即加速至終端速度，由表四數據可看出加速期間非常短暫，水柱大多是僅加速流動幾公分即開始等速流動。
2. 水柱流動至大約整支毛細管最後三分之一(第37圈)長度時即開始逐漸減速，越接近毛細管尾端減速度的值越大，如此直到水柱停止不再流動。為何加速區段甚短而水柱減速卻既長又久，極為耐人尋味。
3. 旋轉毛細管的傾斜角甚小，僅有 0.93° ，所以水柱流速緩慢而優雅，我們有充分的觀察與記錄的時間，使人為的誤讀大為減低，流速求測極為準確。
4. 等速段的流程相當長，約佔毛細管長度的三分之二，但在此期間流速相當的穩定，測量多次所得的結果都一致，恆溫時水柱流速確為定值，與當時水柱的剩餘長度無關，我們將所測得的水柱流速代入(33)式

$$\eta = \frac{\rho g r^2}{8v} \sin \alpha$$

由表四可看出 20°C 純水黏度求得的數據與公認值相比僅有0.34%的差距!準確度相當高!

5. 由於採用旋轉式設計，儀器體積大為縮減，可以將整組毛細管放入恆溫箱內來完成實驗。液體黏度受溫度的影響極為明顯，這一方面的研究我們後面還會再提出討論。
6. 本儀器有極佳的設計，當其中央內藏的日光燈點亮時，毛細管內的水柱清晰可見，不需再加放大鏡即可輕易認讀數據，連恆溫箱關閉箱門時都能由窗口清楚觀測到水柱的位置。本儀器可成為優良的輔助教具，不僅可以觀察到毛細管中緩緩流動的水柱，還能精密求測液體黏度，是個簡單實用的黏度計。
7. 最後的改良：
當抽氣機抽取水柱時，常常會使水柱斷成數截，截與截中間夾著一些小氣泡，水柱回流時這些小氣泡形成

阻力使水柱流速減慢，一旦產生了氣泡實驗就必須重來，要等水柱及氣泡全部流回水盤才能再度開啟幫浦電源重新再抽水，這個現象十分惱人必須解決。經過我們一再地試驗及討論加上老師的建議，我們將原本由頂端抽水的動作改成由毛細管底部施壓灌水，當然三通開關必須換裝到下方，與加壓幫浦及廣口水盤接通，如此改機完成後經長期使用不曾再出現產生氣泡的現象，只有見到純淨的水柱在毛細管中流動。



吸氣幫浦改成打氣幫浦，氣流進入壓力瓶內再流入毛細管中可得到無氣泡的純淨水柱



將三通開關移至毛細管底端出口，吸氣抽水改成壓氣灌水



手動式或電動式幫浦都改成壓氣灌水 可避免產生氣泡

實驗三 用自創的液位差式毛細管黏度計測量液體黏度

(三) 實驗步驟

1. 測量毛細管內徑。
 - (1)取出購自新竹，附有原廠規格保證的毛細管數支。
 - (2)向老師借得走讀顯微鏡一台，小心測量毛細管內徑，精確度可測至 10^{-3} mm。
2. 測量毛細管長度。
3. 徹底清潔毛細管
 - (1)將毛細管投入沸水中煮約十分鐘，徹底去除毛細管內外油污。
 - (2)在超音波洗淨機中加入丙酮，毛細管置入後開啟洗淨機電源，清洗約十餘分鐘後取出用熱風吹乾。
 - (3)將完成上項工作之毛細管浸泡在待測液體中備用，我們使用的待測液有二度去離子純水、四氯化碳及委託化工材料行代購的CANNON標準黏度試劑。
4. 將毛細管安置於支座底部平台，以矽膠軟管連通全新拆封的左右針筒，以游標尺測其內徑，微調毛細管座的水平高度至水平儀氣泡歸零。
5. 將自黏式熱電偶貼片黏貼於毛細管正中央，接妥壓力晶片和熱電偶至顯示電路及放大器的連線。
6. 將實驗室的微電腦空調設定在 20°C 恆溫。
7. 將待測去離子純水緩緩灌入左側針筒至滿水位(約70cc)，數分鐘後待右針筒水位上升至約10cc，開啟顯示電路的電源，將計時器歸零，開始讀取左右針筒的液位差，每



不同內徑的毛細管，分批加以清潔處理



沸水中取出的毛細管投入超音波洗淨機中清洗



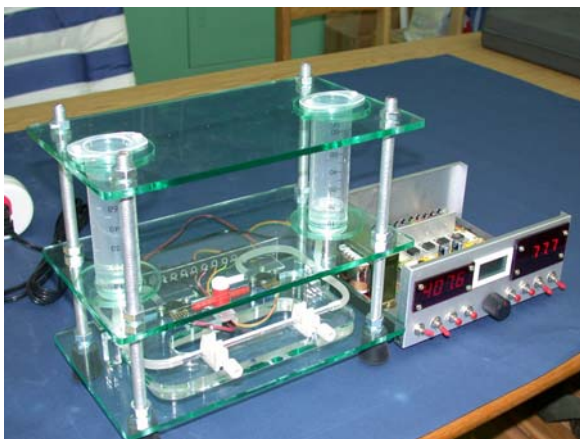
向老師借得走讀顯微鏡一台，可以測至 10^{-3} mm



毛細管內徑是否準確，影響結果很大，須極小心測量

隔50秒讀取一次並記錄液位差讀數。

8. 以純水而言，大約一小時後雙針筒液位漸趨一致，將這期間記錄的60組數據輸入至分析程式中進行線性迴歸及曲線擬合的工作，由擬合所得之常數可直接得到受測純水之黏度。
9. 將整組設備移到樓上生物科的恆溫箱去測量溫度對流速及黏度的影響，記錄所得數據，再將數據輸入至分析程式中進行線性迴歸及曲線擬合的工作。
10. 將用過的針筒及矽膠管拋棄，使用全新拆封的新針筒及矽膠軟管，將上述已清潔待用的毛細管接妥後，取出L.C試劑級的四氯化碳緩緩灌入左側針筒至滿水位，重複以上各項測量工作。
11. 使用CANNON N1.0標準黏度試劑，重複以上各項測量工作。



左右針筒的液位差及流通時間都可直接讀出並記錄之



整組儀器移入恆溫箱中實驗，可自由設定環境溫度

(四) 實驗結果列表

表五. 純水在雙針筒中水位差對時間的關係

溫度 $T=20^{\circ}\text{C}$ 毛細管內徑 $r=0.305\text{mm}$ 毛細管長度 $L=15.00\text{cm}$ 針筒內直徑 $R=2.880\text{cm}$

毛細管流通時間 (sec)	雙針筒中水位差 (meter)	毛細管流通時間 (sec)	雙針筒中水位差 (meter)
0	0.0632	1550	0.0225
50	0.0611	1600	0.0218
100	0.0591	1650	0.0209
150	0.0571	1700	0.0201
200	0.0552	1750	0.0195
250	0.0533	1800	0.0189
300	0.0516	1850	0.0181
350	0.0499	1900	0.0174
400	0.0483	1950	0.017
450	0.0467	2000	0.0164
500	0.0452	2050	0.0157
550	0.0437	2100	0.0154
600	0.0422	2150	0.0148
650	0.0407	2200	0.0144
700	0.0394	2250	0.0139
750	0.0382	2300	0.0136
800	0.0369	2350	0.013
850	0.0355	2400	0.0126
900	0.0346	2450	0.0124
950	0.0333	2500	0.0118
1000	0.0325	2550	0.0115
1050	0.031	2600	0.0108
1100	0.0302	2650	0.0107
1150	0.0293	2700	0.0105
1200	0.0283	2750	0.0101
1250	0.0275	2800	0.0095
1300	0.0264	2850	0.0092
1350	0.0255	2900	0.009
1400	0.0245	2950	0.0088
1450	0.0236	3000	0.0086
1500	0.0231		

實驗結果曲線繪圖 b:(純水 0-900 秒)

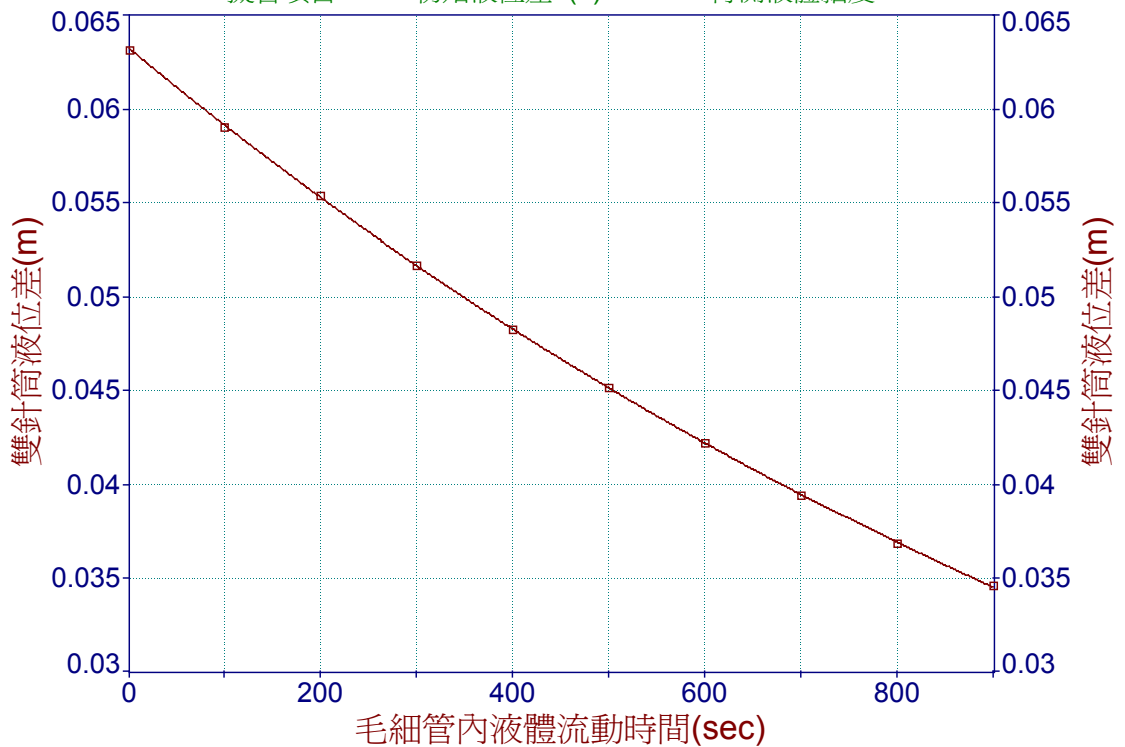
定溫下雙針筒液位差對毛細管流通時間曲線

$$h(t)=h(0)\exp(-Dgr^4/4VLR^2)t$$

溫度:20C 試液:去離子純水 密度D:998.23(kg/m³) 毛細管長L=15.00cm

毛細管內徑r=0.305mm 針筒半徑R=1.440cm 黏度:V

擬合項目 a=初始液位差h(0) b=待測液體黏度V



Rank 1 Eqn 8001 $\hat{h}(t)=b000-43(a,b)$

r ² Coef Det	DF Adj r ²	Fit Std Err	F-value
0.9999587490	0.9999469630	6.578954e-05	193926.58530

Parm	Value	Std Error	t-value	95% Confidence Limits	P> t
a	0.063242625	4.33614e-05	1458.500948	0.063142633 0.063342616	0.00000
b	0.001011071	2.34796e-06	430.6172696	0.001005657 0.001016486	0.00000

Date	Time	File Source
Apr 13, 2002	9:44:27 PM	f:\h\p\p1\tablecur\20\p\p000-43\p1\p1

實驗結果曲線繪圖 c : (純水 500-1400 秒)

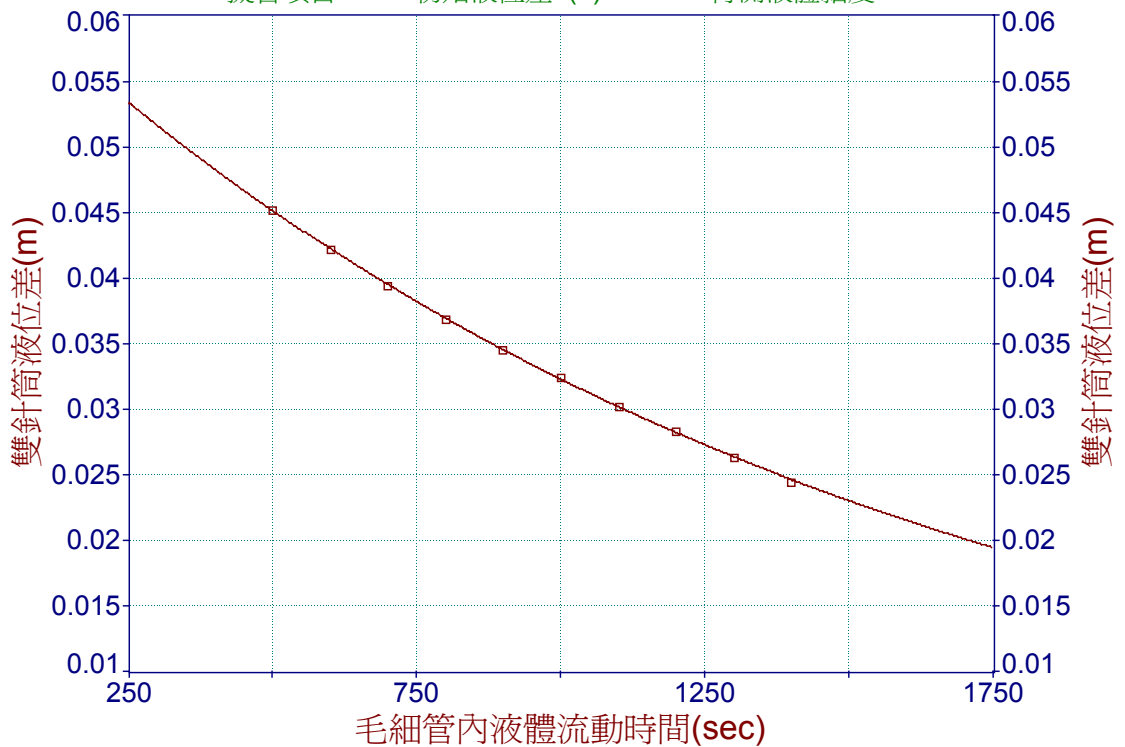
定溫下雙針筒液位差對毛細管流通時間曲線

$$h(t) = h(0) \exp(-Dgr^4/4VLR^2)t$$

溫度:20C 試液:去離子純水 密度D:998.23(kg/m³) 毛細管長L=15.00cm

毛細管內徑r=0.305mm 針筒半徑R=1.440cm 黏度:V

擬合項目 a=初始液位差h(0) b=待測液體黏度V



Rank 1 Eqn 8001 $\hat{A} \hat{u}^b P000-43(a,b)$

r ² Coef Det	DF Adj r ²	Fit Std Err	F-value
0.9997672725	0.9997007789	0.0001115571	34366.967677

Parm	Value	Std Error	t-value	95% Confidence Limits	P> t
a	0.063203218	0.000207567	304.4961001	0.062724569 0.063681867	0.00000
b	0.001013000	5.59121e-06	181.1772086	0.001000107 0.001025893	0.00000

Date	Time	File Source
Apr 13, 2002	9:58:31 PM	f:\h\k-x-p\é\ç\tablecur\20\k-x-Å\ø\ó\Å\ù\p\¼

實驗結果列表(續)

表六. 雙針筒中的液位差對時間之關係

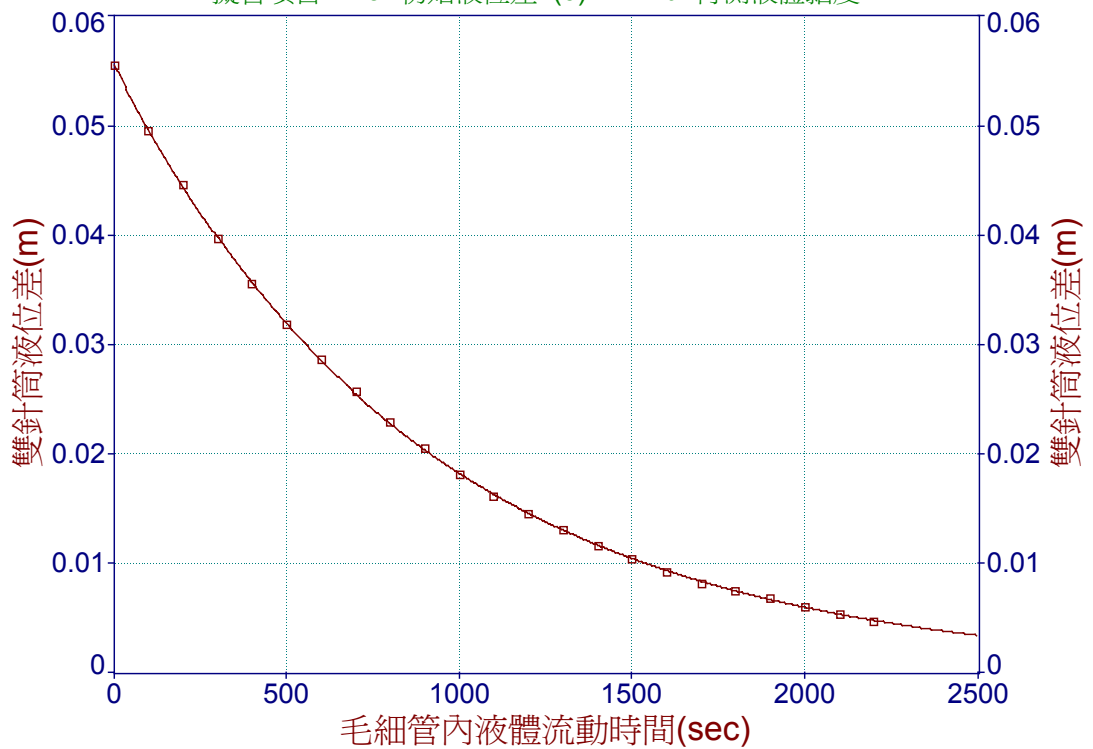
溫度 $T=20^{\circ}\text{C}$ 毛細管內徑 $r=0.305\text{mm}$ 毛細管長度 $L=15.00\text{cm}$ 針筒內直徑 $R=2.880\text{cm}$

四氯化炭(CCL_4)		標準試液 (CANNON N1.0)	
毛細管流通時間 (sec)	雙針筒中液位差 (meter)	毛細管流通時間 (sec)	雙針筒中液位差 (meter)
0	0.0556	0	0.045
100	0.0496	200	0.0404
200	0.0446	400	0.0364
300	0.0397	600	0.0328
400	0.0356	800	0.0296
500	0.0319	1000	0.0265
600	0.0287	1200	0.0238
700	0.0258	1400	0.0213
800	0.023	1600	0.0191
900	0.0205	1800	0.0173
1000	0.0182	2000	0.0155
1100	0.0162	2200	0.0141
1200	0.0146	2400	0.0127
1300	0.0131	2600	0.0115
1400	0.0117	2800	0.0102
1500	0.0104		
1600	0.0093		
1700	0.0082		
1800	0.0075		
1900	0.0068		
2000	0.0061		
2100	0.0054		
2200	0.0047		

實驗結果曲線繪圖 d: (四氯化碳 0-2200 秒)

定溫下雙針筒液位差對毛細管流通時間曲線
 $h(t)=h(0)\exp(-Dgr^4/4VLR^2)t$

溫度:20C 試液:四氯化炭液 密度D:1595(kg/m³) 毛細管長L=15.00cm
 毛細管內徑r=0.304mm 針筒半徑R=1.440cm 黏度:V
 擬合項目 a=初始液位差h(0) b=待測液體黏度V



Rank 1 Eqn 8001 $\hat{A} \hat{u}^b P000-43(a,b)$

r ² Coef Det	DF Adj r ²	Fit Std Err	F-value
0.9999419313	0.9999361244	0.0001186176	361619.56603

Parm	Value	Std Error	t-value	95% Confidence Limits	P> t
a	0.055595871	7.29979e-05	761.6090389	0.055444063 0.055747678	0.00000
b	0.000964987	2.01606e-06	478.6507465	0.000960795 0.000969180	0.00000

Date	Time	File Source
Apr 13, 2002	7:28:31 PM	f:\h\k-x-p\é\tablecurv\20\cc4C6\hat{u}^b\%

實驗結果曲線繪圖 e : (CANNON N1.0 標準試劑 0-2800 秒)

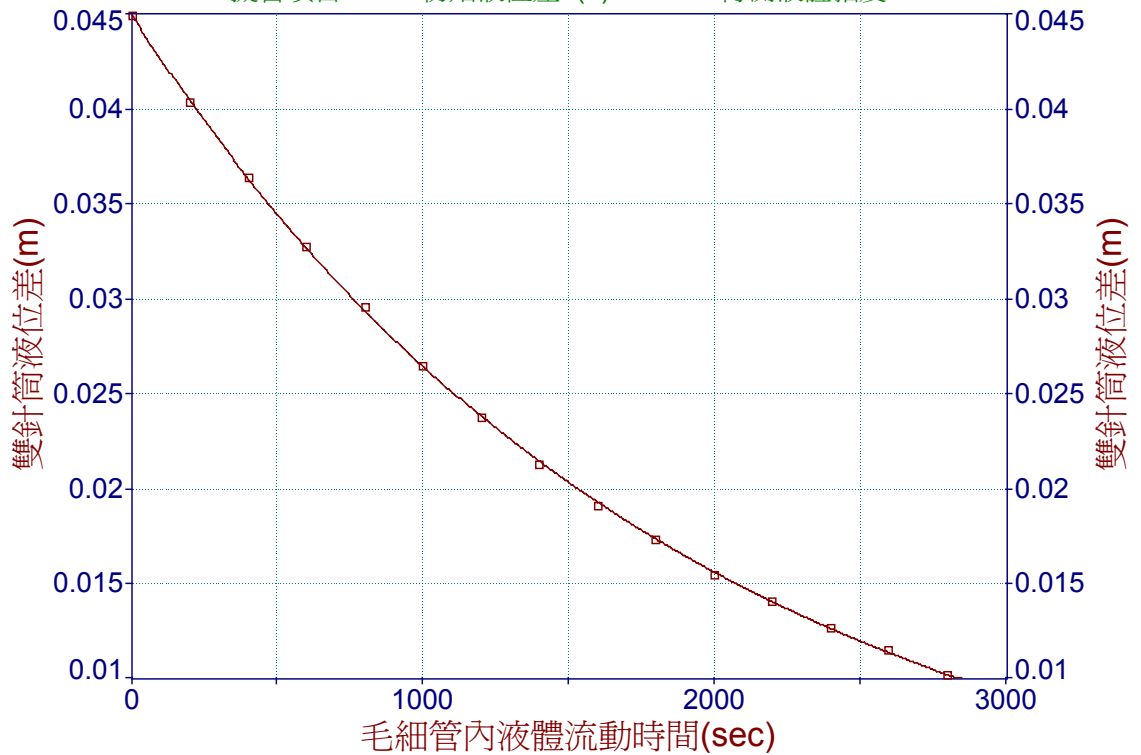
定溫下雙針筒液位差對毛細管流通時間曲線

$$h(t) = h(0) \exp(-Dgr^4/4VLR^2t)$$

溫度:20C 試液:CANNON N1.0試劑 密度D:730.5(kg/m³) 毛細管長L=15.00cm

毛細管內徑r=0.304mm 針筒半徑R=1.440cm 黏度:V

擬合項目 a=初始液位差h(0) b=待測液體黏度V



Rank 1 Eqn 8001 $\hat{A} \hat{u}^b P000-43(a,b)$

r ² Coef Det	DF Adj r ²	Fit Std Err	F-value
0.9999262329	0.9999139384	9.817821e-05	176217.35281

Parm	Value	Std Error	t-value	95% Confidence Limits	P> t
a	0.044987939	6.30893e-05	713.0835785	0.044851643 0.045124235	0.00000
b	0.000927622	2.4636e-06	376.5301321	0.000922299 0.000932944	0.00000

Date	Time	File Source
Apr 13, 2002	8:57:16 PM	f:\h\k-x-p\tablecurv\20\kxn1-0_0%4-0óÁ

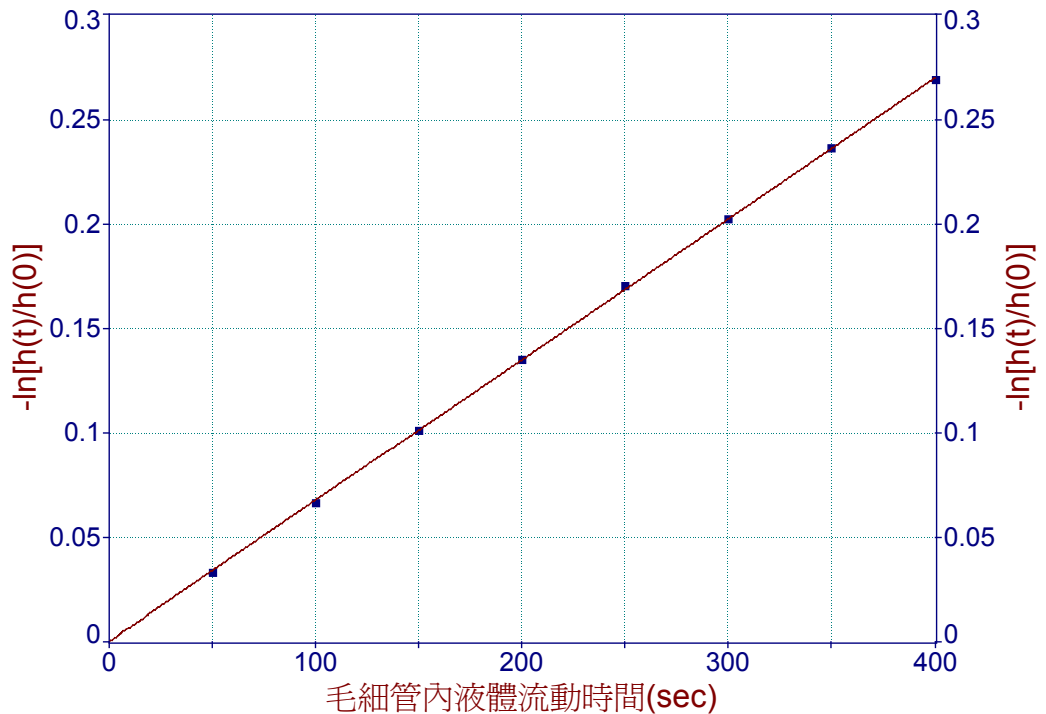
表七. 純水在雙針筒中液位差及求黏度對應關係

流通時間 (sec)	液位差 h(t)	雙針筒內徑 R=1.140cm	毛細管長度 L=15.00cm	毛細管內徑 r=0.305mm	理論黏度 $\eta = 1.0046 \times 10^{-3}$	百分誤差
50	0.0611				0.00101	0.54%
100	0.0591				0.00101	0.54%
150	0.0571				0.00101	0.54%
200	0.0552				0.00101	0.54%
250	0.0533				0.00100	-0.46%
300	0.0516				0.00101	0.54%
350	0.0499				0.00101	0.54%
400	0.0483				0.00101	0.54%

液位差之比的對數值對毛細管流通時間關係曲線

$$-\ln[h(t)/h(0)] = a + bt$$

溫度:20C 試液:去離子純水 密度D:998.23(kg/m³) 毛細管長L=15.00cm
 毛細管內徑r=0.305mm 針筒半徑R=1.440cm 初始液位差h(0)=63.2mm



Parm	Value	Std Error	t-value	95% Confidence Limits	P> t
a	0.000367857	0.000642436	0.572596909	-0.00120413 0.001939843	0.58772
b	0.000673976	2.54443e-06	264.8832247	0.000667750 0.000680202	0.00000

(三) 實驗結果討論

1. 因為毛細管流速甚緩，我們每隔50秒讀取一次液位差，在一小時內可得純水記錄60餘組，對數據進行線性迴歸及曲線擬合時我們將擬合的範圍分成三個區段，即0~3000秒取樣間隔50秒，0~900秒取樣間隔100秒，500~1400秒取樣間隔100秒，數據擬合的對象是(43)式

$$h_{(t)} = h_{(0)} e^{\frac{-\rho g r^4}{4\eta L R^2} t}$$

由擬合所得之常數可直接得到受測純水之黏度 η 。

2. 三個區段的起測點不同、總時間長度不同、取樣間隔也不相同，但所測得黏度分別為0.001011、0.001011、0.001013，這和同溫純水黏度的公認值0.001005(Ns/m²)值相比僅有不到0.8%的差距!準確度相當高!換句話說，在毛細管流通後的任一時刻都可以當成起測點，而且測量時間不用很長，只須測量幾分鐘就有足夠的數據估算黏度了。
3. 圖d中四氯化碳的測量值 $\eta=0.0009650$ ，僅較公認值低了0.4%，而圖f中CANNON N1.0的測量值與此種標準試液玻璃瓶上的標示值相差更低於0.2%，由此可看出液位差連續緩變式毛細管黏度測量法的誤差相當的低。
4. 表七資料顯示，液位差之比的對數值 $-\ln[h_{(t)}/h_{(0)}]$ 與毛細管流通時間 t 成正比的，所以開始測量後只須記錄起點與終點的液位差 $h_{(0)}$ 、 $h_{(t)}$ 及經過的時間 t ，即可由(44)式

$$\eta = \frac{-\rho g r^4}{4LR^2} t / \ln \frac{h_{(t)}}{h_{(0)}}$$

求得黏度值，表七數據顯示，即使測量時距 t 低至50秒，測量誤差也不超過0.6%，非常節省實驗時間，也不一定要用電腦程式擬合，只需兩組數據由(44)式簡單計算即可求得待測液體之黏度，方便又正確。

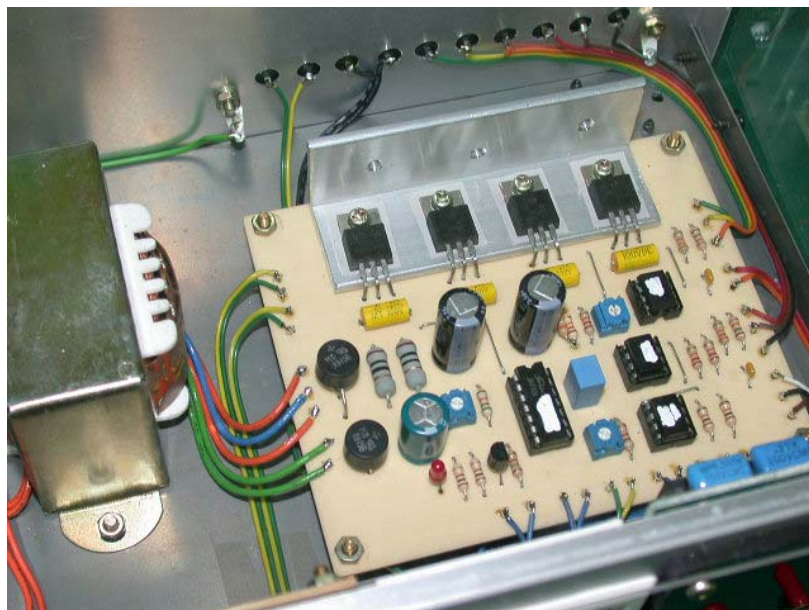
5. 毛細管的清潔工作絕不能省，微小的斑點或油污都會影響毛細管中液體流速，我們發現若直接使用購入的毛細管進行實驗，誤差最大可增加5%。
6. 如果有更精準的儀器測量毛細管內徑 r ，必能進一步降低實驗誤差，因為它是以四次方呈現於(44)式的，佔了極大的權值，目前我們測量的黏度僅有4位有效數字就

是受限於毛細管內徑 r 的精確度。

7. 黏度標準液(Viscosity Standard)不容易買到，我們是委託化工行代購的，共買了四種不同黏度的標準液，雖然不知其成份，但其瓶上印有溫度及對應的黏度和密度值，用來校正我們的黏度計是非常有幫助的，尤其是壓力晶片顯式電路中，欲調整放大器的放大倍數時，能用黏度標準液來校正實驗值是方便而正確的。



委託化工行代購的四種不同黏度的標準黏度試液



與壓力晶片接續的放大器的倍率調整是以標準黏度試液為準的

實驗四 測量溫度對液體黏度的影響

(一) 實驗原理

1. 迄至目前為止，在所有推求牛頓流體的黏度相對於溫度變化的方程式中，最有名也最常為人們採用的有二：其一為 H. Helmholtz 提出的，另一則是 Andrade 所提出的，兩人之方程式一直為科學界所公認是最普適性的。

(1) Helmholtz 方程式：

$$\eta = \frac{a}{1+b \cdot t+c \cdot t^2} \quad (46)$$

上式中 t 為攝氏溫度而 a, b, c 皆為實驗常數。

(2) Andrade 方程式：

$$\eta = D \cdot \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (47)$$

若將上式兩端取對數，整理可得

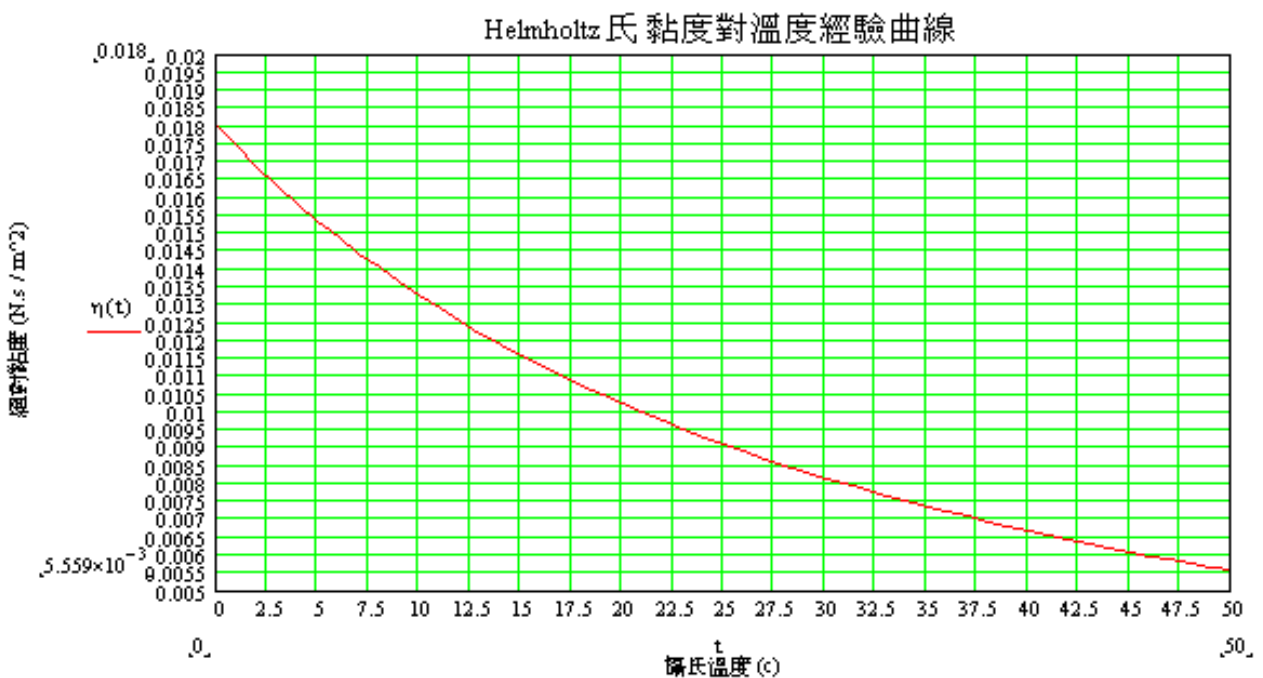
$$\ln \eta = A + B \cdot \left(\frac{1}{T}\right) \quad (48)$$

上兩式中 T 為絕對溫度而 A, B 皆為實驗常數。

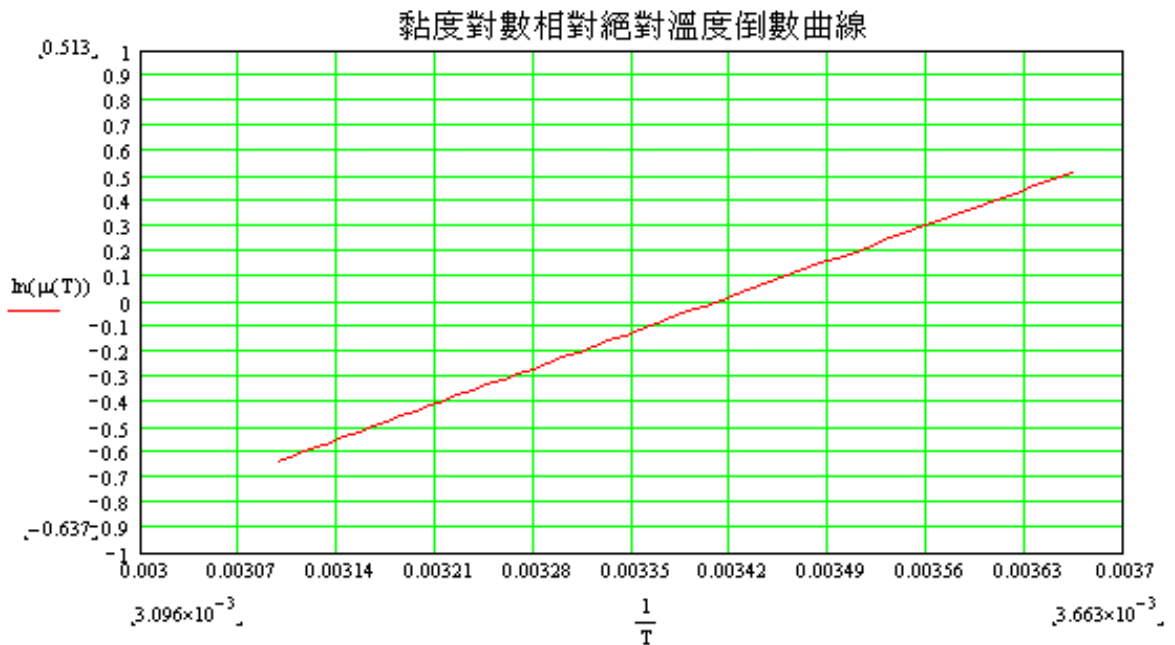
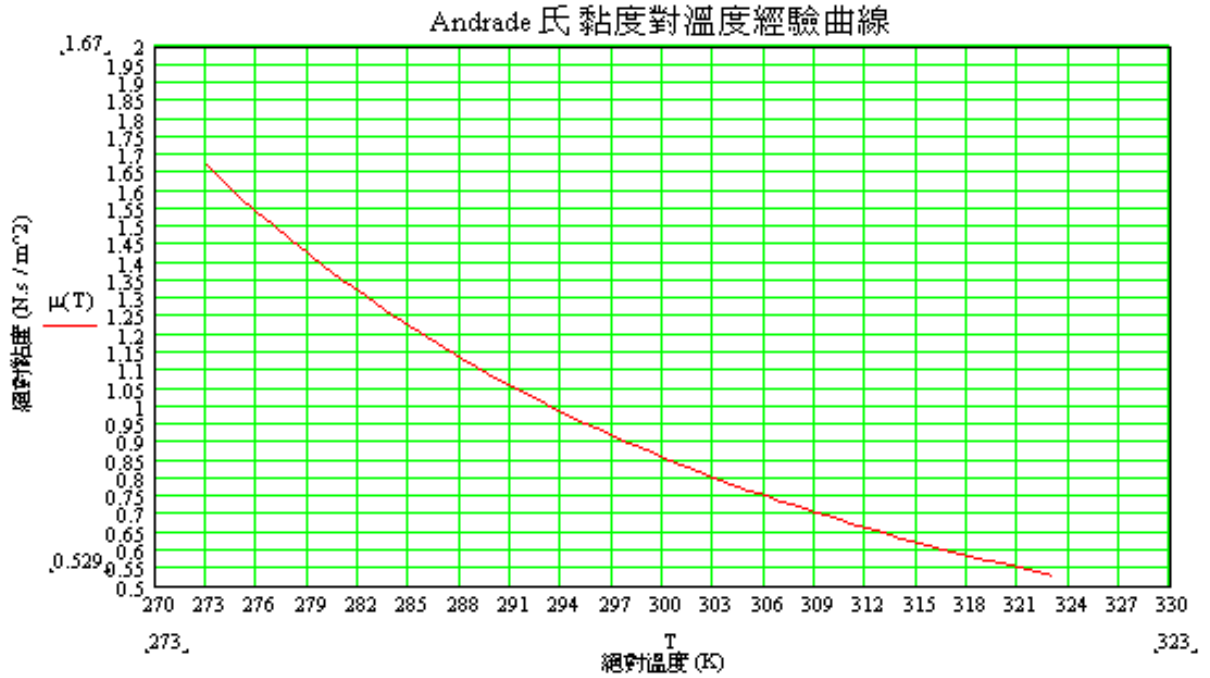
2. 繪製液體黏度對溫度關係的理論圖形。

(1) Helmholtz 方程式：

依前人經驗 $a=0.01779$ ， $b=0.03368$ ， $c=0.000221$



(2) Andrade方程式：
 依前人之經驗，常數為
 $D=0.0009915$ ， $B=2028.08$



(二) 實驗步驟

1. 各項實驗工作與實驗(三)完全相同。
2. 恆溫箱溫度由 $10^{\circ}C$ 逐步調節至 $40^{\circ}C$ ，每隔 $5^{\circ}C$ 實驗一次。

(三).實驗結果曲線繪圖 f: (Helmholtz 擬合方程式)

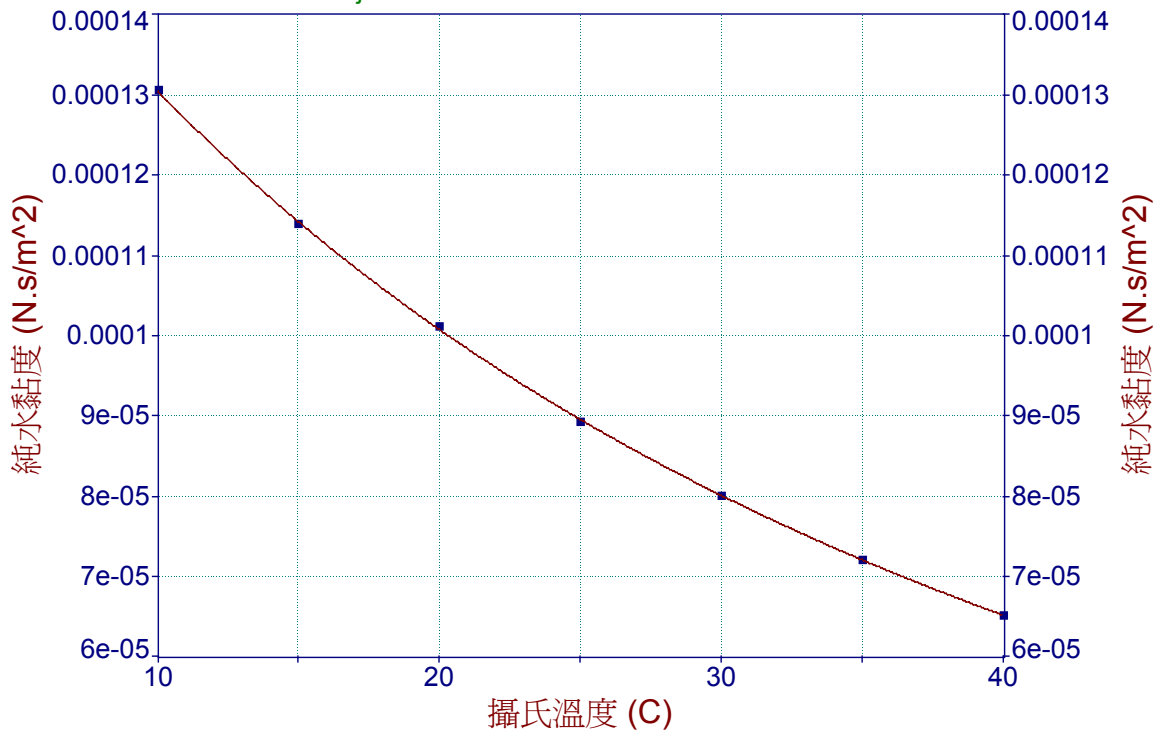
二度去離子純水黏度對溫度之關係圖

擬合方程式 $V=a/(1+bt+ct^2)$

以Helmholtz法擬合 a, b, c 皆為擬合常數

V=黏度 a=攝氏零度時純水黏度

$r^2=0.99993382$ DF Adj $r^2=0.99986764$ FitStdErr=2.338981e-07 Fstat=30218.213



Rank 1 Eqn 8001 (a,b,c)

r^2 Coef Det	DF Adj r^2	Fit Std Err	F-value
0.9999338191	0.9998676383	2.338981e-07	30218.212927

Parm	Value	Std Error	t-value	95% Confidence Limits	P> t
a	0.000175442	1.59207e-06	110.1978234	0.000171022 0.000179863	0.00000
b	0.031749170	0.001249460	25.41030541	0.028280112 0.035218228	0.00001
c	0.000261814	1.98615e-05	13.18197319	0.000206669 0.000316958	0.00019

Date	Time	File Source
Apr 17, 2002	1:05:29 AM	f:\h\p\tablecur\pka.xls

實驗結果曲線繪圖 g : (Andrade 擬合方程式)

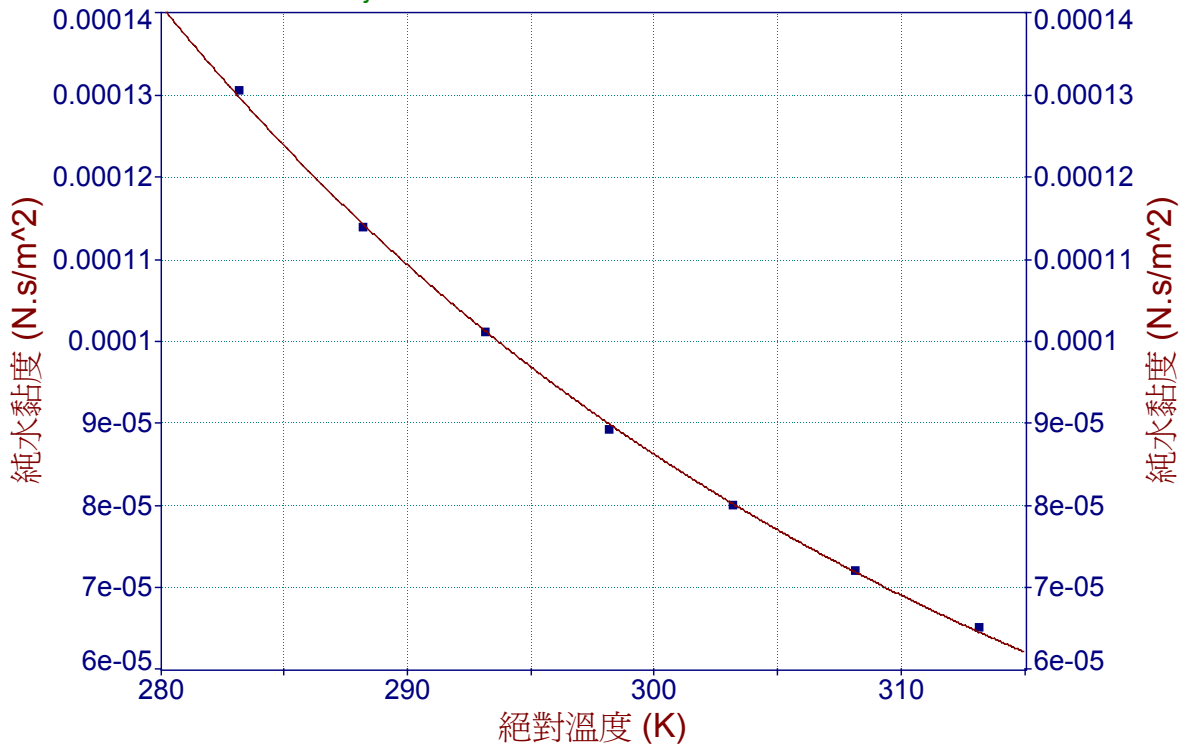
二度去離子純水黏度對溫度之關係圖

擬合方程式 $V=a*\exp(b/T)$

以Andrade法擬合 a, b, 皆為擬合常數

V=黏度 T=絕對溫度

$r^2=0.99993382$ DF Adj $r^2=0.99986764$ FitStdErr= $2.338981e-07$ Fstat= 30218.213



Rank 1 Eqn 8001 (a,b)

r^2 Coef Det	DF Adj r^2	Fit Std Err	F-value
0.9995401428	0.9993102143	5.514637e-07	10867.941423

Parm	Value	Std Error	t-value	95% Confidence Limits	P> t
a	8.84223e-08	6.11334e-09	14.46382519	7.27074e-08 1.04137e-07	0.00003
b	2065.020791	20.27135640	101.8689006	2012.911610 2117.129971	0.00000

Date	Time	File Source
Apr 17, 2002	1:29:28 AM	f:\h\k-x-p\tablecur\pka.xls

實驗結果曲線繪圖 h: (Andrade 擬合方程式)

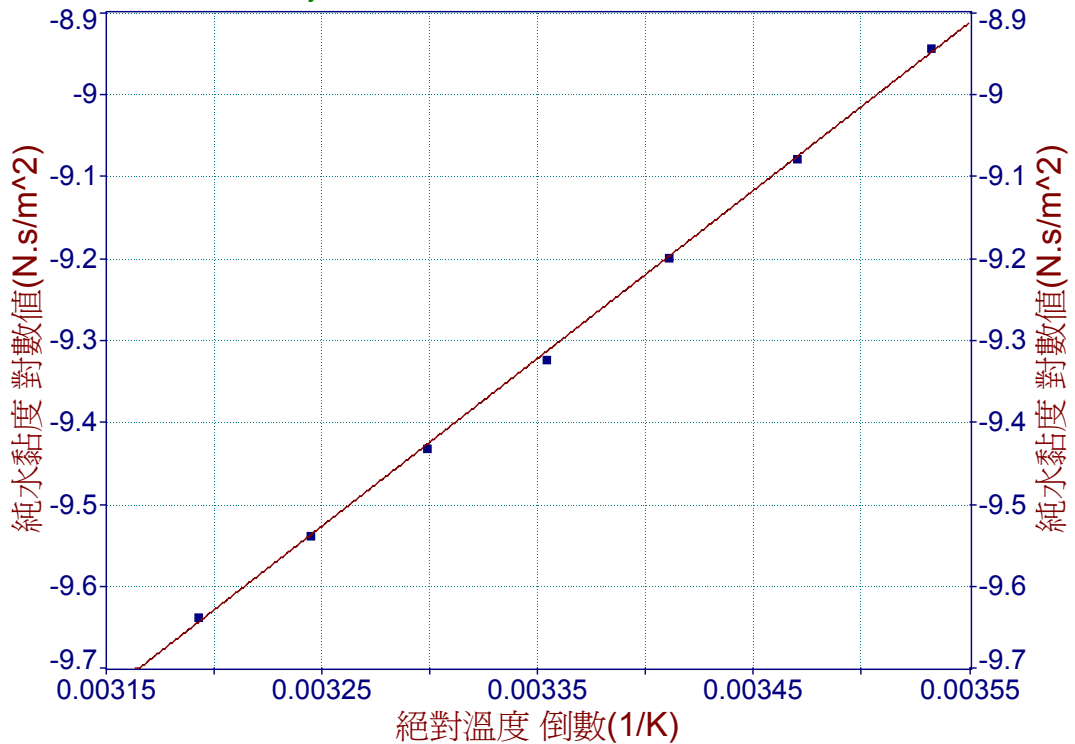
二度去離子純水黏度對溫度之關係圖

擬合方程式 $\ln V = a - b \cdot (1/T)$

以Andrade法擬合 a, b, 皆為擬合常數

$\ln V$ =黏度對數值 $1/T$ =絕對溫度的倒數

$r^2=0.99993382$ DF Adj $r^2=0.99986764$ FitStdErr=2.338981e-07 Fstat=30218.213



Rank 1 Eqn 8001 (a,b)

r^2 Coef Det	DF Adj r^2	Fit Std Err	F-value
0.9995115957	0.9992673936	0.0060406961	10232.420393

Parm	Value	Std Error	t-value	95% Confidence Limits	P> t
a	-16.1795973	0.067981321	-238.000630	-16.3543488 -16.0048457	0.00000
b	2046.868664	20.23488727	101.1554271	1994.853230 2098.884098	0.00000

Date	Time	File Source
Apr 17, 2002	1:56:38 AM	f:\h\k-x-p\tablecur\pka.xls

七. 結論

- (一) 這個實驗最初起因於觀察毛細管中葡萄汁下降的速度，想探求毛細管中液體流動是否可能為等速，好奇心驅使我們展開了長達一年的研究，由測量毛細管中液體流速開始進而設法精確控制流速，最後發展出新的液體黏度測量方法。
- (二) 要克服黏滯力使毛細管中液柱等速流動是需要外加驅動源的，這個驅動源依(27)式

$$v_{av} = \frac{\Delta P + \rho g L}{8\eta L} r^2$$

為上式分子中的毛細管兩端的壓力差 Δp 及 $\rho g L$ ，我們透過巧妙的設計，使 $\Delta P \approx 0$ ，毛細管中液柱流速變成(30)式

$$v_{av} = \frac{\rho g r^2}{8\eta}$$

上式右側各物理量於定溫下皆為常數，左側流速確實為定值！

- (三) 為了精確測量流速，我們使用軟質毛細管設計了重力式傾斜旋轉的毛細管黏度計，這使得液柱流程擴大而流速減緩，不僅增加了流速測量的精確度，更有效地縮減實驗器材的佔用體積，使測量工作更為快速方便，我們測得毛細管中液體的流速確實如(30)式中理論預期的相符。
- (四) 液體流速既可精確測量，那麼我們可反過來利用(33)式

$$\eta = \frac{\rho g r^2}{8v} \sin \alpha$$

來求出待測液體的黏度了，非常簡單優異的測量方法！

- (五) 在科學營中我們曾用實驗教材中的方法測量液體黏度，此法不僅器材數量極多，清洗及組合不便外，其引用的理論(28)式

$$Q = \frac{\pi^4 \Delta P}{8\eta L}$$

因為左右定高容器排水孔受到液體表面張力影響使 ΔP 無法穩定下來，致使實驗誤差偏高且難以改進。

- (六) 若我們仍然使用左右兩個容器(針筒)，但容許兩容器內液壓差 ΔP 十分緩慢地變化，這樣可推求兩容器的液位差為(43)式

$$h_{(t)} = h_{(0)} e^{\frac{-\rho g r^4}{4\eta L R^2} t}$$

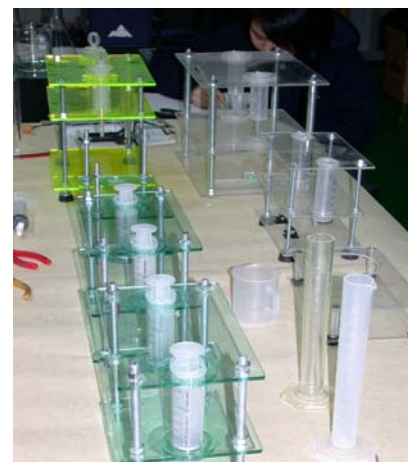
我們發現實驗數據與上式有相當良好的擬合，誤差非常的低，

利用此式及實驗數據可以精確地計算出液體黏度，液位差連續緩變的構想及理論式(43)之意義，或許在學術上可以有應用及推廣的價值。

- (七)使用兩個壓力晶片同時測量左右液位深度是個極佳的設計，配合減法電路可即時而精確地讀出左右容器液位差，這比一般使用超音波反射法或雷射測距法測量液位深度精簡許多。
- (八)液體黏度受到溫度影響很大。溫度變化偏離常溫不多時，我們建議使用 Helmholtz 方程式來預測黏度，根據實驗四的結果可以看出，與數據擬合時它比 Andrade 方程式有較小的偏差。
- (九)為了比對實驗值的正確性，我們向學長父親的工廠借得一台馬達驅動旋轉黏度計來測量液體黏度，無論純水或標準試液的測量值，其誤差都較我們自製的兩種黏度計高出三倍之多，經過多次比對都是如此，我們對自己設計的方法有充分的信心。
- (十)重力式傾斜旋轉的毛細管黏度計要用到十幾公尺軟質的毛細管，因為管子太長清洗不便，所以較適於只測量單一類型的液體黏度，不過本儀器可成為優良的輔助教具，可以讓同學觀察到毛細管中水柱緩緩等速流動的情形。液位差緩變式毛細管黏度計則完全沒有清洗的困難，針筒及數公分的軟管價格都非常低廉，可以發展成可棄式的設計，測量液體黏度將會變成方便而愉快的工作。由於實驗數據準確加上前面所述的優點，老師一口氣要我們再完成八套相同的黏度計，用以充實實驗室陣容，今年暑假舉辦的科學營，學弟學妹們有好儀器可用了。



借得的馬達驅動黏度計測量黏度，好與我們的數據比對



要我們完成八套黏度計，老師你好狠!

八、參考資料

(一)中文資料

1. 褚德三等編 物質科學物理篇下冊 龍騰文化事業出版 第 10 章 1992 年版。
2. 王石安編著 應用流體力學 臺灣中華書局印行 第 1 至 5 章 1982 年版。
3. 張世鄉等編譯 流體力學第五版 全華科技圖書公司出版 第 2、3、6、8 章 1991 年 8 月版
4. 普通物理實驗 大海文化出版事業公司印行 實驗九 黏滯係數 p41。
5. 陳炳陽編著 電子儀表上冊 全友圖書公司出版 第 1、2、9 章 1983 年 6 月版。
6. 陳文華編譯 實用電子電路第二冊 全華科技圖書公司出版 第 8 章 1977 年 6 月版。

(二)西文資料

- 1.M.Nelkon , J.M.Ogborn Advanced Level Practical Physics, Fourth Edition Heinemann Educational Books London p36 (1978).
- 2.Franz Rosenberger,J.Iwan,D.Alexander,andWei-qing Jin, Gravimetric capillary method for kinematic viscosity measurements, Rev. Sci. Instrum, 63(9),4196, (1992)
- 3.Kuzman Raznjevic, Hand Book of Thermodynamic Tables and charts(1985)

(三)網站資料

1. <http://grad.math.arizona.edu/~walton/biomath/physcond.htm>
2. <http://www.cec.uchile.cl/cinetica/papers/rc95.html>
3. <http://www.urm.edu/~jstoffer/MW/HagPoi.html>
4. <http://www.treasure-troves.com/physucs/LaminarFlow.html>
5. <http://www.phys.Virginia.edu/class/311/notes/fluids2/node6.html>

評語

實驗設計、儀器製作均極用心，能注意到每個小細節，學生對問題的掌握相當精準深入。

Two novel capillary-based fluid viscometers

CHENG, Yu-hsuan

Taipei Municipal Li Shan Senior High School

I. Introduction

Viscosity is one of the most important parameters of the fluid. There are hundreds of methods to measure it.¹⁻² The rotational, capillary and mass are the major types of viscometer structures that are widely used at the laboratory. However, we have to use more traditional method to measure viscosity at school.³⁻⁴ This method not only requires a long time to take the measurement, but also leads to serious experimental deviation because of its misconception (see Fig. 1). This misconception causes the fluctuation of pressure difference, which is caused by surface tension. Furthermore, the deviation can be reduced if the flow velocity keeps constant. Therefore, developing more accurate and rapid measuring methods, and setting up cost-effective devices becomes an important issue of my study. In this study, the equations of viscosity based on geometry and fluid mechanics have been derived. Also, I have designed and developed two novel viscosity-measuring methods, and constructed two viscometers accordingly. In order to check the performance of my designed viscometers, the temperature-dependence of viscosity have also been explored.

II. Theoretical Formulation

In this study, all the fluids are Newtonian fluid and Reynolds number is less than 2000 so that the fluid, which flows through the capillary, will develop into the laminar fluid.⁵ The definition of Reynolds number (N_R) is expressed as follows:

$$N_R = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta} \quad (1)$$

Where ρ : density, \bar{v} : average flow velocity, D : diameter, η : viscosity

A. Horizontal Capillary Structure

The equation of viscosity is derived from Poiseuille's formula and expressed as the following:⁵

$$Q = \frac{\Delta P \cdot \pi r^4}{8\eta L} \quad (2)$$

Where Q : flow rate, L : length of capillary, r : radius of capillary, ΔP : pressure difference at two ends of capillary

Eq. (2) is often used by traditional viscosity measuring method (shown in Fig. 1). The η is an unknown variable, which can be calculated by measuring Q .

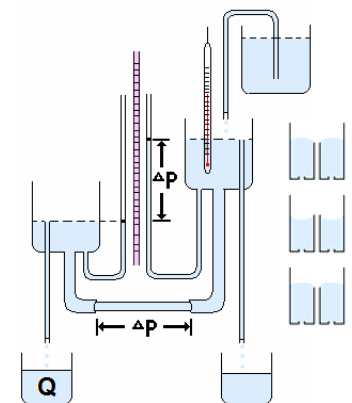


Fig.1. Traditional structure and the misconception of viscometer

B. Vertical Capillary Structure

The design concept of vertical capillary structure is shown in Fig. 2. The average velocity of liquid that flows through the capillary is derived from geometrical methods and fluid mechanics. The equation is shown as the following:

$$\bar{v} = \frac{(\Delta P + \rho g L)}{8\eta L} r^2 \quad (3)$$

where g : gravity of the earth

Let $\Delta P = 0$ and reduce L

$$\bar{v} = \frac{\rho g r^2}{8\eta} \quad (4)$$

Checking Eq. (4), the flow velocity is constant. In order to reduce the error, the capillary is sloped with the horizontal axis (x-axis) at angle α . Then the factor $\sin \alpha$ is multiplied to Eq. (4) and viscosity can be obtained by the following equation:

$$\eta = \frac{\rho g r^2}{8\bar{v}} \cdot \sin \alpha \quad (5)$$

If we tilt the capillary at an angle α and circle it around the pillar, the average velocity can be written as the following:

$$\bar{v} = \frac{N \times D}{T} \quad (6)$$

where N : number of layers, D : the length of a layer, and T : the total flow time

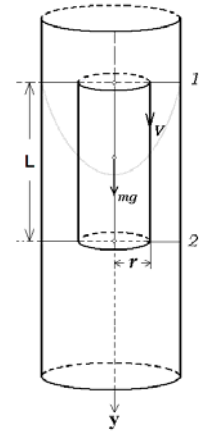


Fig.2. Schematics of vertical capillary structure

C. Gradational Liquid-level Difference Configuration

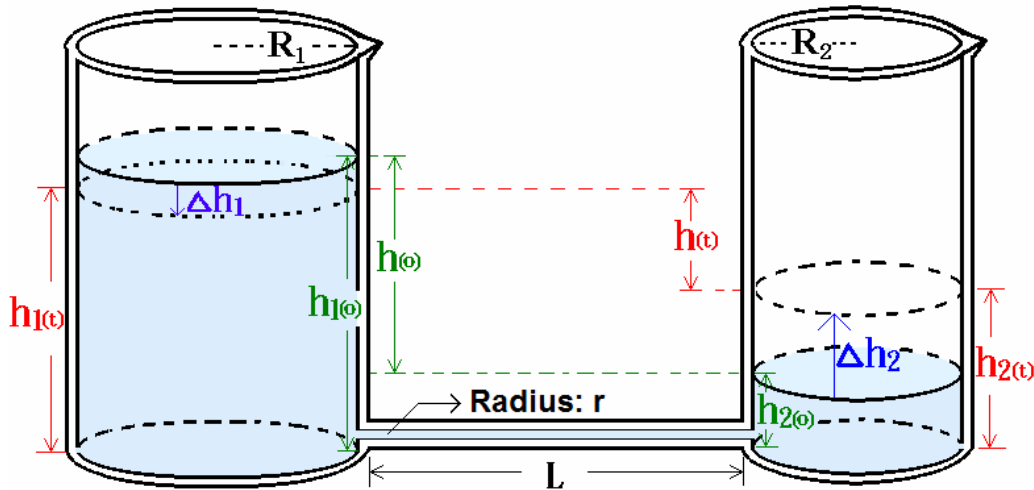


Fig.3. Schematics of gradational liquid-level difference

The experimental apparatus of the gradational liquid-level difference viscositic method is shown in Fig.3. Two liquid containers with radius R_1 and R_2 are linked by the capillary with an inner radius of r at the bottom.

If $R_1, R_2 \gg r$, the pressure of the container at the bottom can be taken as the static pressure so that the flow velocity will develop into constant velocity. Therefore, the volume-decreasing rate is equal to the flow rate of capillary.

$$Q_{(t)} = -\frac{dV_1}{dt} = -\pi R_1^2 \frac{dh_{1(t)}}{dt} \quad (7)$$

$$Q_{(t)} = \frac{\pi r^4}{8\eta\ell} \Delta P_{(t)} = \frac{\pi r^4}{8\eta\ell} \rho g h_{(t)} \quad (8)$$

where $h_{1(t)}, h_{2(t)}$: liquid height of containers $h_{(t)}, \Delta P_{(t)}$: time-dependent liquid-level difference and pressure difference between two ends of capillary.

The volume-decreasing rate of left container is equal to the volume-increasing rate of the right container, and is displayed as the following:

$$\frac{dh_{1(t)}}{dt} = \left(\frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{dh_{(t)}}{dt} \quad (9)$$

Combine Eqs. (7), (8) and (9)

$$\pi \frac{(R_1 R_2)^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{dh_{(t)}}{dt} = \frac{-\pi r^4}{8\eta L} \rho g h_{(t)} \quad (10)$$

We can deduce Eq. (10)

$$\frac{dh_{(t)}}{h_{(t)}} = \frac{-\rho g r^4 (R_1^2 + R_2^2)}{8\eta L (R_1 R_2)^2} dt \quad (11)$$

Two liquid containers with radius R_1 and R_2 equal R to reduce the variables, and perform an indefinite integration from Eq. (11); and then apply the initial condition $h = h_{(0)}$ at $t = 0$. The equation of relative liquid-level difference in two containers can be expressed as follows:

$$h_{(t)} = h_{(0)} e^{\frac{-\rho g r^4}{4\eta L R^2} t} \quad (12)$$

Thus, the equation of relative liquid-level difference in terms of time t and relative liquid-level difference as well as measurement parameters is expressed as the following:

$$\ln \frac{h_{(t)}}{h_{(0)}} = -\frac{\rho g r^4}{4\eta L R^2} \cdot t \quad (13)$$

Eq. (13) is a linear equation. The slope c of the linear plot is:

$$c = -\frac{\rho g r^4}{4\eta L R^2} \quad (14)$$

Eq. (14) means that viscosity can be obtained by slope c .

III.Design and Development of Viscometers

A. GSHC viscositic Method

I designed the structure of Gravity Sloping Helical Capillary Viscometer (referred to as the hereafter GSHC viscometer) based on Eq. (5), and constructed the viscometer as shown in Fig. 4.

1. The flow channel is made by using an extremely long, but soft capillary at low sloping angle encircling a transparent pillar cut on a lathe.
2. The capillary is connected to the pump and the container. Its flow is directed by the switch valve, which sends the fluid to either one or the other.
3. Utilize the pump to fill the capillary with liquid.
4. The capillary is put into the container under the surface of the liquid.
5. Erlenmeyer flask connects the capillary and pump, which can avoid the liquid from regorging into the pump.
6. A fluorescent lamp is set up in the central pillar to make the liquid head clearly visible.
7. Set these devices in the framework and setup a timer on it.
8. The GSH capillary viscometer has been completed and shown in Photo.1.

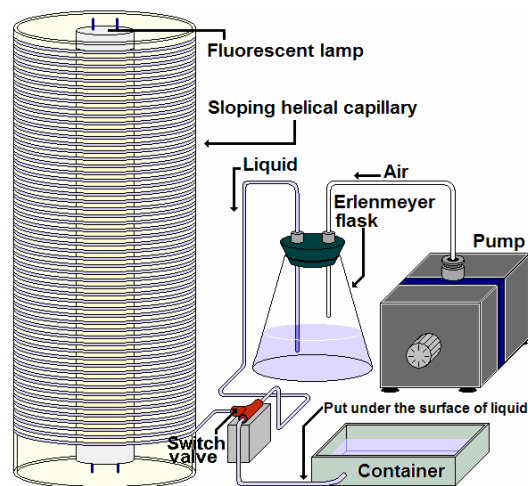


Fig. 4. Concept of gravity sloping helical capillary



Photo. 1. Gravity sloping helical capillary viscometer

B. GLDC viscositic Method

Design the structure of Gradational Liquid-level Difference Capillary Viscometer (referred to hereafter as the GLDCviscometer) based on Eq. (13), and construct the viscometer as shown on Fig. 5.

1. Two exactly same transparent containers, A and B, are connected with a capillary and linked horizontally at the bottom.

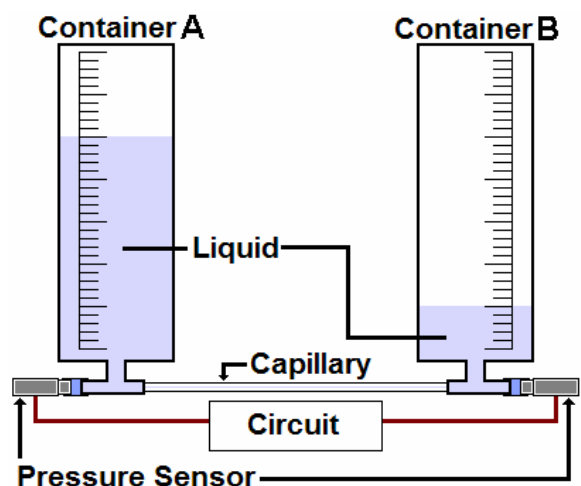


Fig. 5. Concept of gradational liquid-level difference capillary method

2. Use highly sensitive pressure sensors to detect pressure difference between both ends of the capillary
 3. Stabilize the two containers and pressure sensors in the framework.
 4. Design the circuit to measure liquid-level difference (shown in Fig. 6).
 5. Setup the timer, temperature and liquid-level difference displays.
 6. Connect pressure sensors to the circuit.
 7. The GLDC viscometer has been completed and shown in Photo.2.
- The advantage of this method is that it just uses only two pressure sensors and simple circuit to detect the pressure difference, and then transform the pressure difference into liquid-level difference.

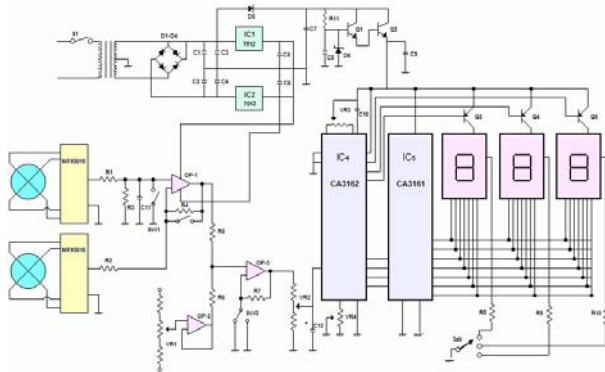


Fig. 6. Schematic circuit diagram of liquid-level

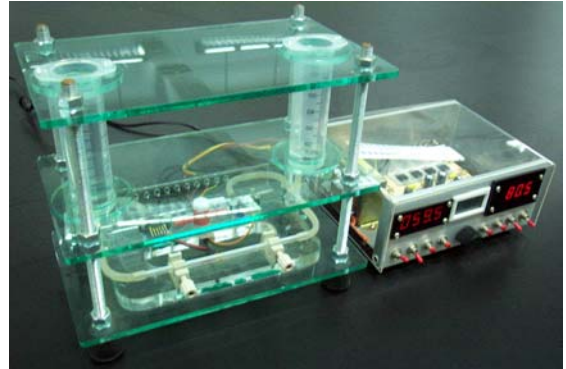


Photo. 2. Gradational liquid-level difference capillary viscometer

IV. Experiment Procedures

A. Sample Preparation

Deionized water and three kinds of standard test liquids, Cannon N1, N4 and N8 are employed to characterize and verify the effectiveness of GSHC and GLDC viscometers.

B. GSHC Viscometer

All device mentioned at following are shown in Fig. 7.

1. Fill the container with liquid.
2. Turn off the faucet and connect the capillary to the pump.
3. Turn on the fluorescent lamp and pump.
4. Turn off the pump after the capillary is filled with the liquid.
5. Connect the capillary to the container that makes the both ends of the liquid to contact the atmosphere simultaneously.
6. Start to measure the period of time it takes for the fluid to go from layer to layer.
7. Calculate viscosity.

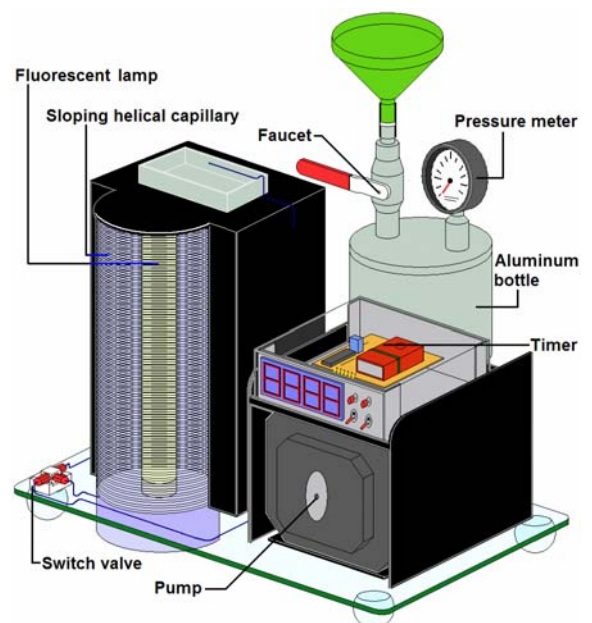


Fig. 7. Gravity sloping helical capillary viscometer

C. GLDC Viscometer

Before starting the experiment, the circuit has to be calibrated with the standard test liquid, which can make the experiment more precise.

1. Fill the liquid into the left container until the height of the liquid is much higher than that of the right (see the Fig. 8).
2. Turn on the detector and record the liquid-level difference, temperature and time.
3. Calculate viscosity.

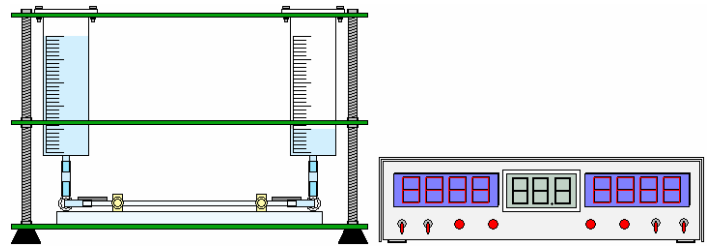


Fig. 8. Gradational liquid-level difference capillary viscometer

V. Results and Discussion

A. Verify GSHC Viscometer

Fig. 9 displays the period of time it takes for water to flow from layer to layer under the condition of $\Delta P = 0$. We can find that when $t = 1800 \sim 3000(s)$ the flow velocity decreases slowly until it stops at the height of capillarity. Therefore, I utilized the section of constant velocity when $t = 0 \sim 1800(s)$ to simplify the theory and experiment. The slope, that is average flow velocity, can be determined from linear fitting method and the value is $6.3889(mm/s)$, and standard error is $2.348 \times 10^{-2}(mm/s)$ fitted. The value of parameters and result are shown in Table. 1.

Compared to the published reference value, the max error of this method is less than 0.34%. This viscometer not only measures viscosity precisely, but also allows the operator to observe the action of fluid in the capillary clearly. Therefore, GSHC viscometer is suitable for experimental and educational uses.

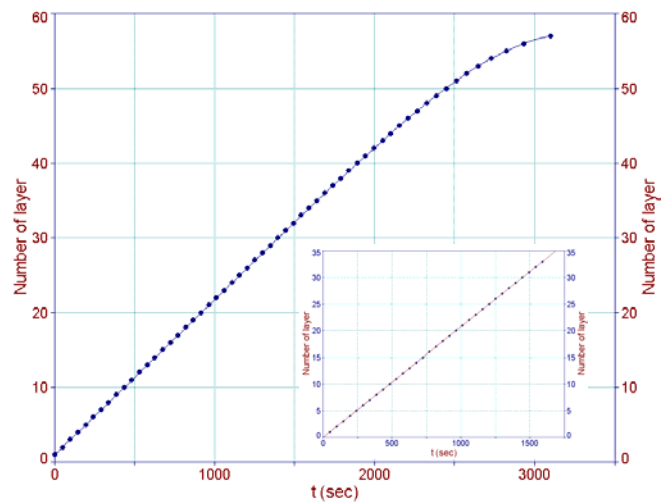


Fig. 9. Measuring result of water; Inset: constant velocity section (0~1800)

Table.1. Value of parameters and measuring result of water, and fluid takes 1539.8(sec) flow through 32 layers.

Temperature($^{\circ}C$)	20	Radius of capillary(mm)	0.57
Gravity(m/s^2)	9.797	Length of 32 layers(m)	9.8518
Density(Kg/L)	998.23	Sloping angle	0.93°
Published viscosity ($10^3 \times N \cdot s/m^2$)	1.0046		
Average measuring viscosity ($10^3 \times N \cdot s/m^2$)	1.008		
Error(%)	0.34		

B. Verify GLDC Viscometer

Fig. 10 displays the time-dependent gradational liquid-level difference curve of water, and the gradational liquid-level difference is decreasing in exponential time. We can also turn the curve into the linear plot by Eq. (13). Fig. 11 shows the time-dependent gradational liquid-level difference curve of liquids, S2, S3 and S4. And fitted parameters results of viscosity summered in Table.2.

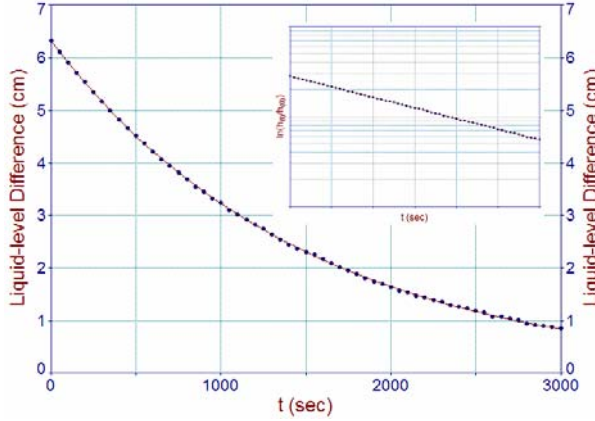


Fig. 10. Gradational liquid-level difference curve of water;
Inset: linear plot, which is obtained by Eq. (13)

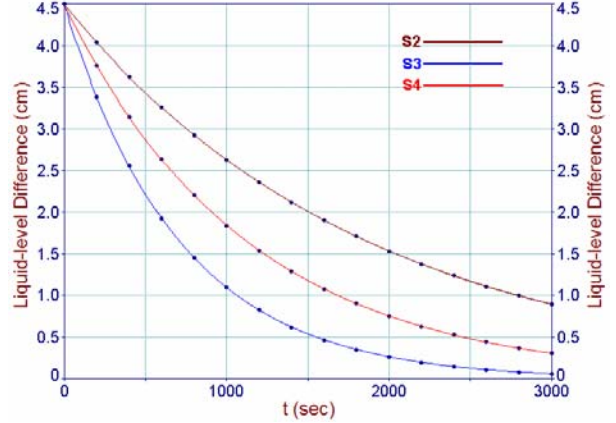


Fig. 11. Gradational liquid-level difference curve of Cannon N.1, N4 and N8

In order to understand whether the measuring time impacts on error, I compared the viscosity that is calculated at different measuring times. The errors are all less than 0.54%, and the $\ln[h(t)/h(0)]$ is directly proportional with t so that viscosity can also be calculated by Eq. (13).

Table. 2. Measuring result with liquids

$T=20^{\circ}\text{C}$ $h(0)=6.32\text{cm}$ $R=1.140\text{cm}$ $L=15.00$ $r=0.305$ $g=9.797\text{m/s}^2$

No.	Sample	$\eta_m \times 10^{-4}$ ($N \cdot s / m^2$)	$\eta_r \times 10^{-4}$ ($N \cdot s / m^2$)	Density (Kg / L^3)	Error (%)
S1	Deionized water	10.1	10.046	998.23	0.54
S2	Cannon N1	9.27	9.273	730.5	0.3
S3	Cannon N4	3.23	3.225	668.1	0.2
S4	Cannon N8	6.62	6.625	866.4	0.1

Note: η_m and η_r are measuring and reference viscosity, respectively.

The maximal error of GLDC viscometer is less than 0.54%. We can find that the largest effect on error is the radius of capillary by checking Eq. (13). If we can measure the radius of capillary more precisely, and take more effective number of digit of that, the error of GLDC viscometer can be reduced. This method offers a simple and rapid measurement of viscosity for industrial application because of its easy to use and simple structure.

C. Temperature Effect on Viscosity

Normally, the effects of temperature on viscosity are described by Helmholtz's and Andrade's equation.⁶ Equations are shown as the following:

A. Helmholtz's Equation

$$\eta = \frac{a}{1 + bT + cT^2} \quad (15)$$

where a is viscosity at 0°C , b and c are constants which are decided by experiment, and T is Celsius temperature.

B. Andrade's Equation

$$\eta = D \cdot \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (16)$$

where B and D are constants that are decided by experiment, and T is absolute temperature.

By using water as the fluid, two viscometers could be verified by Eqs. (15) and (16).

Fig. 12 displays the change of viscosity with temperature, which is described by Helmholtz's Equation. The constants that were obtained by fitting with experimental result are $a=1.754 \times 10^{-3} \text{ (N}\cdot\text{s/m}^2\text{)}$, $b=3.175 \times 10^{-2} \text{ (}^\circ\text{C}^{-1}\text{)}$ and $c=2.618 \times 10^{-4} \text{ (}^\circ\text{C}^{-2}\text{)}$, and the fitting standard error is $2.339 \times 10^{-7} \text{ (N}\cdot\text{s/m}^2\text{)}$.

Fig. 13 (a) plots the change of viscosity with temperature, which is described by Andrade's equation. The constants that were obtained by fitting measurement are $B=2065.0208 \text{ (K)}$ and $D=8.842 \times 10^{-8} \text{ (N}\cdot\text{s/m}^2\text{)}$, and the fitting standard error is $5.511 \times 10^{-7} \text{ (N}\cdot\text{s/m}^2\text{)}$. Fig. 13 (b) is the linear equation, which is derived from Eq. (16), and the fitting standard error is $6.004 \times 10^{-3} \text{ (N}\cdot\text{s/m}^2\text{)}$.

The η measured by developed viscometers are close to the value which can be calculated by Eqs. (15) and (16). But I found that the Helmholtz's equation is more accurate than Andrade's equation under room temperature.

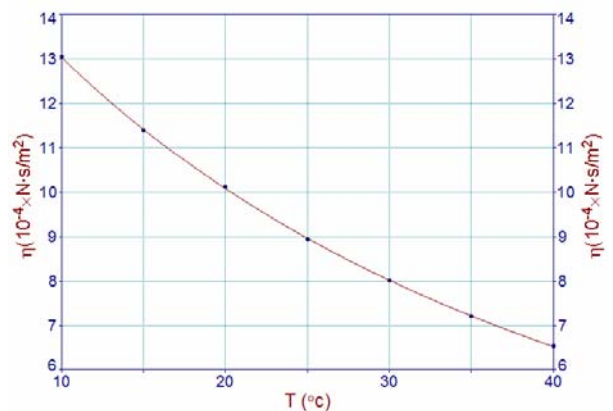


Fig. 12. A plot of viscosity η in respect to temperature T and fitted with Helmholtz's equation

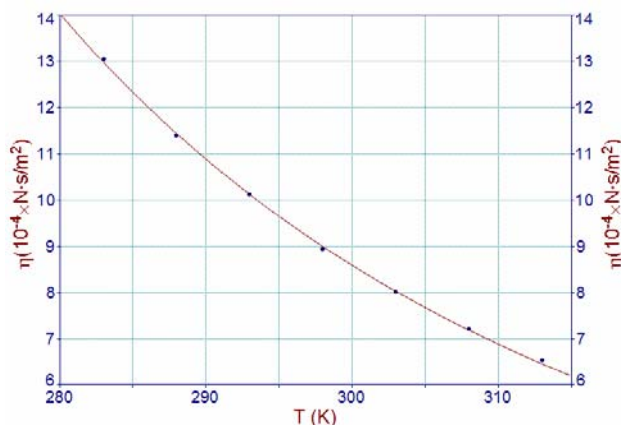


Fig. 13(a). A plot of viscosity η in respect to temperature T and fitted with Andrade's equation

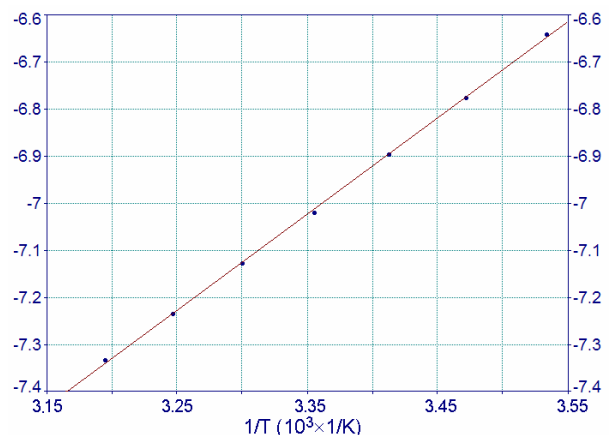


Fig. 13(b). Linear plot, which is derived from Andrade's equation and fitted with the same equation

VI. Conclusion

In this study, two novel viscosity measuring methods and two viscometers, GSHC viscometer and GLDC viscometer, have been developed. The effectiveness of two viscometers has been demonstrated by standard test liquid, and 0.34% and 0.54% accuracy have been obtained respectively. Two models of Helmholtz's and Andrade's equation have been employed to test the viscometers and investigate the temperature effect of viscosity. The temperature-dependence of viscosity is more useful to correct the viscosity precisely when environmental temperature changes. GSHC viscometer is suited for educational uses, and GLDC viscometer is suited for industrial application.

References

1. J. Hellemans, P. Forrez, and R. De Wilde, Am. J. Phys. **48(3)**, 255, March 1980.
2. Z Priel, J. Phys. E: Sci. Instrum. **13**, 778, 1980.
3. F. Rosenberger, J. Iwan, D. Alexander, and W. Q. Jin, Rev. Sci. Instrum. **63(9)**, 4196, 1992.
4. S. Shin, S. W. Lee, and D. Y. Keum, Rev. Sci. Instrum. **72(7)**, 3127, 2001.
5. S. S. Jhang, etc. *Introduction to Fluid Mechanics*, Ch-Wa Publisher Co. 1982.
6. S. Y. Wang, *Application Fluid Mechanics*, Jhong-Wa Publisher Co., Taipei, 1976.