

# 臺灣二〇〇三年國際科學展覽會

科別：數學科

作品名稱：鋪蓋之研究與探討

得獎獎項：數學科佳作

學校：國立鳳山高級中學

作者：劉家安、陳信昌

## 作者簡介

<劉家安>

我出生於1986年1月6日，父母皆從商；本該為平凡子弟的我，上了高中後，接觸了許多不平凡。

數學是我從小到大一直以來的興趣。高中時考進了數理資優班，幸運地，遇到了一個好老師，他帶著我走進了做科展的道路。這是一個全新的挑戰，因為所有的難關、瓶頸，不像競賽題一樣，最終會有解答，而是要靠我和隊友花了許多心血來突破。

能透過科學來和世界接軌，是很難得的機會，通過了國際科展的第一階段，我們感到萬分的榮幸。不管得獎與否，我們會努力抓住這個機會的！

<陳信安>

我出生在一個溫馨而充滿親情的家庭，我在家中排行第二，姐姐就讀大一，妹妹則在高一。父母親很重視我們的教育，從小學即帶我參加各種才藝班，並利用寒暑假帶我們到外旅遊，正是所謂「讀萬卷書，行萬里路」。在這種父母苦心安排、薰陶之下，使我們增廣見聞並培養多方面的興趣。

## 摘要

本文是利用整數分拆及排容原理研究以  $1 \times 2$  矩形鋪  $m \times n$  矩形的排法邏輯及總排法數，並進一步探討下列兩種情況：雙邊不含缺陷線及至少有一缺陷線的排法數。

## Abstract

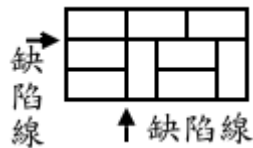
Based on the Apart of Number and the Inclusion- Exclusion principle, this research intends to analyze the logic and final result of permutation by laying an  $1 \times 2$  rectangle over an  $m \times n$  rectangle. From the analysis, this study will go further to explore the possible permutation in the following two situations : when there is no fault line on both sides and when at least one fault line exists.

名稱：鋪蓋之研究與探討

內文：

### 壹、研究動機：

在 921 大地震時，我們發現牆壁上沿著磚塊出現了許多裂痕，這些裂痕有些會貫穿整面牆，有些則否(如圖一)，因此引起我們的好奇心，隨後在我們找尋資料的過程中發現，美國國際科展大會獎第四名(美國大學數學系特別獎)的作品“磚塊堆疊問題之研究與探討”中有討論用  $1 \times 2$  磚塊填滿  $m \times n$  矩形能排出無缺陷線圖形方法數之範圍，但未進一步討論用  $1 \times 2$  磚塊填滿  $m \times n$  矩形之所有方法數，因此，展開了我們一連串的研究之旅。



(圖一)

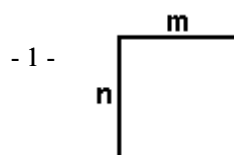
### 貳、研究目的：

- 一、探討用  $2 \times 1$  的矩形填滿  $m \times n$  的矩形的排法邏輯。
- 二、探討用  $2 \times 1$  的矩形填滿  $m \times n$  的矩形的排法數。
- 三、探討用  $2 \times 1$  的矩形填滿  $m \times n$  的矩形中單邊含缺陷線的排法邏輯。
- 四、探討用  $2 \times 1$  的矩形填滿  $m \times n$  的矩形中單邊含缺陷線的排法數。
- 五、探討用  $2 \times 1$  的矩形填滿  $m \times n$  的矩形中雙邊含缺陷線的排法邏輯。
- 六、探討用  $2 \times 1$  的矩形填滿  $m \times n$  的矩形中雙邊含缺陷線的排法數。
- 七、利用 C 語言驗證排法數。

### 參、研究設備及器材：電腦、人腦、紙、筆

### 肆、名詞定義：

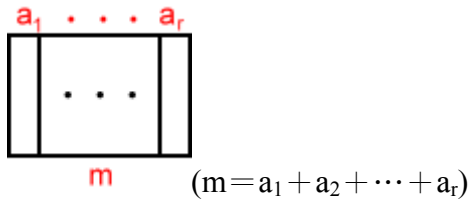
(一)、 $f_m(n)$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) 表示頂邊的長為  $m$ ，旁邊的長為  $n$  的矩形(如圖 1.1)，以固定  $2 \times 1$  的



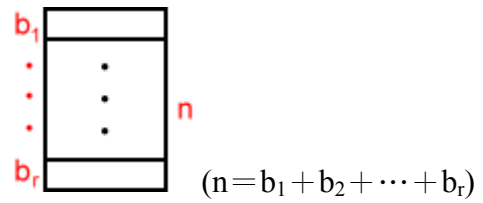
矩形填的總排法數。

(圖 1.1)

(二)、整數拆解：即是將  $m$ 、 $n$  拆解成數個整數相加(如圖 1.2，圖 1.3)。



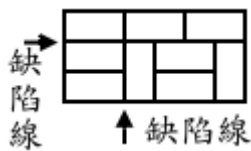
(圖 1.2)



(圖 1.3)

(三)、缺陷線：可以從邊的任一點連到另一邊的一點，所造成的線，我們稱之為缺陷線。(如

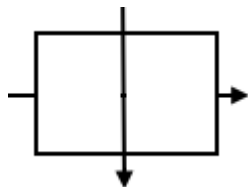
圖 1.4)



(圖 1.4)

(四)、 $k_m(n)$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ )表示邊長為  $m$ 、 $n$  的矩形中單邊不含缺陷線的總排法數，我們令此圖

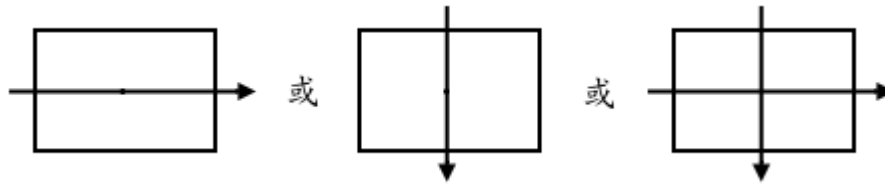
形為特殊形(如圖 1.5)。



(圖 1.5)

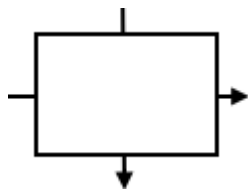
(五)、 $g_m(n)$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ )表示邊長為  $m$ 、 $n$  矩形中雙邊至少含有一條缺陷線的總排法數(如圖

1.6)。



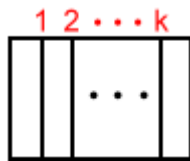
(圖 1.6)

(六)、 $h_m(n)$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) 表示邊長為  $m, n$  的矩形中雙邊不含缺陷線的總排法數，我們令此圖形為特特殊形(如圖 1.7)。



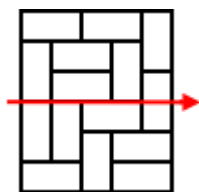
(圖 1.7)

(七)、 $p_m^k(n)$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) 表示邊長為  $m, n$  的矩形中單邊恰有  $k$  條直線的總排法數，且另一邊不含缺陷線(如圖 1.8)。



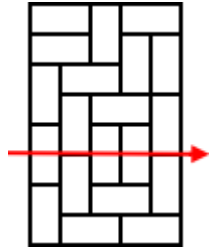
(圖 1.8)

(八)、 $q_m(n)$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) 表示邊長為  $m, n$  的矩形中，還原成  $m \times (n-2)$  及  $m \times 2$  時不會改變到倒數第三條橫線(如圖 1.9)。



(圖 1.9)

(九)、 $r_m(n)$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) 表示邊長為  $m, n$  的矩形中，還原成  $m \times (n-2)$  及  $m \times 2$  時會改變到倒數第三條橫線(如圖 1.10)。

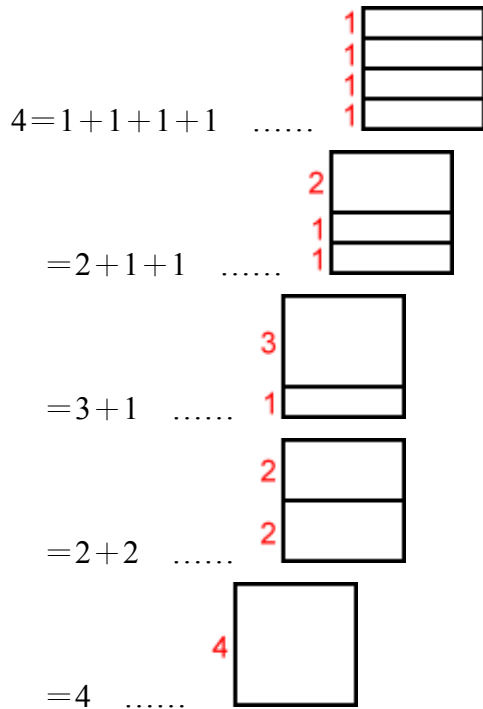


(圖 1.10)

## 伍、研究過程或方法：

### (一)排法邏輯：

我們將全部的排法數，利用邊長整數拆解的手法，以求得所要之數。例：將  $n$  分拆成數個正整數之和，如下：當  $n=4$  時，



### (二)、 $f_1(n)=1$

$$(三)、f_2(n) = \sum \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)!}{x_1! x_2! x_3! \dots x_n!} f_2(1)^{x_1} \times k_2(2)^{x_2} \times k_2(3)^{x_3} \times k_2(4)^{x_4} \times \dots \times k_2(n)^{x_n}$$

而  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = n$ ，且  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  為非負整數。

1、

(1)  $k_2(1) = 1$

(2)  $k_2(n) = 0 (n > 1, n \in \mathbb{N})$

2、

$$(1) \text{當 } n=1 \text{ 時} \quad \Rightarrow 1=1$$

$$\text{所以 } f_2(1)=f_2(1)=1。$$

$$(2) \text{當 } n=2 \text{ 時} \quad \Rightarrow 2=1+1$$

$$=2$$

$$\text{所以 } f_2(2)=f_2(1)^2+k_2(2)=2。$$

$$(3) \text{當 } n=3 \text{ 時} \quad \Rightarrow 3=1+1+1$$

$$=2+1$$

$$=3$$

$$\text{所以 } f_2(3)=f_2(1)^3+\frac{2!}{1!}f_2(1)k_2(2)+k_2(3)=3。$$

令  $n=x_1$  個 1， $x_2$  個 2， $x_3$  個 3，……， $x_n$  個  $(2r+1)$  時，

$$f_2(n)=\sum \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)!}{x_1!x_2!x_3!\cdots x_n!} f_2(1)^{x_1} \times k_2(2)^{x_2} \times k_2(3)^{x_3} \times k_2(4)^{x_4} \times \cdots \times k_2(n)^{x_n}$$

而  $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=n$ ，且  $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$  為非負整數。

### 3、 $f_2(n)$ 的另解

發現：

$$f_2(3)=f_2(2)+f_2(1)$$

$$f_2(4)=f_2(3)+f_2(2)$$

$$f_2(5)=f_2(4)+f_2(3)$$

$$\therefore \begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, & n \geq 3 \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

在這裡我們可以根據我們所看出來的關係式用【特徵方程式】來求出其通式：

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, & n \geq 3 \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{故 } f_2(n) = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow f_2(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right]$$

$$(四) \cdot f_3(r) = \sum \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_r)!}{x_1! x_2! x_3! \dots x_r!} f_3(1)^{x_1} \times k_3(2)^{x_2} \times k_3(3)^{x_3} \times k_3(4)^{x_4} \times \dots \times k_3(r)^{x_r}$$

， $n=2r$ ，而  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + rx_r = r$ ，且  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$  為非負整數。

1、 $k_3(r)$ 表示當  $3 \times n$  時所有特殊形的總排法數， $n=2r, r \in \mathbb{N}, r \geq 1$ 。

當  $n=2$  時，即  $r=1, k_3(1)=3$ 。

當  $n \neq 2$  時，即  $r \neq 1, k_3(n)=2$

2、

$$(1) \text{當 } r=1 \text{ 時} \Rightarrow 1=1$$

所以  $f_3(1) = f_3(1) = 3$ 。

$$(2) \text{當 } r=2 \text{ 時} \Rightarrow 2=1+1$$

$$=2$$

所以  $f_3(2) = f_3(1)^2 + k_3(2) = 11$ 。

$$(3) \text{當 } r=3 \text{ 時} \Rightarrow 3=1+1+1$$

$$=2+1$$

$$=3$$

所以  $f_3(3) = f_3(1)^3 + \frac{2!}{1!} f_3(1)k_3(2) + k_3(3) = 41$ 。

令  $r = x_1$  個 1， $x_2$  個 2， $x_3$  個 3， $\dots$ ， $x_r$  個  $r$  時，

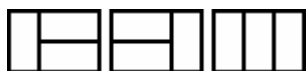
$$f_3(r) = \sum \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_r)!}{x_1! x_2! x_3! \dots x_r!} f_3(1)^{x_1} \times k_3(2)^{x_2} \times k_3(3)^{x_3} \times k_3(4)^{x_4} \times \dots \times k_3(r)^{x_r}$$

， $n=2r(r \in \mathbb{N})$ ，而  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + rx_r = r$ ，且  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$  為非負整數。

3、 $f_3(n)$ 的另解：

令  $n=2r(r \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ ，以  $f_3(n)$ 表示，且  $f_3(0)=1$ 。

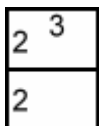
(1)



$\therefore 3 \times 2$  有 3 種排法；

即  $f_3(2) = 3$ 。

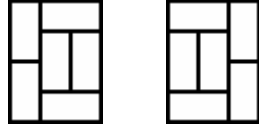
(2)



當  $r=2$ (即  $n=4$ )時，上面  $3 \times 2$  的矩形有  $f_3(2)$ 種排法；

下面  $3 \times 2$  的矩形有 3 種排法；

$$\therefore f_3(2) \times 3 = 9 \text{ 種排法。}$$



但在此圖形中，會出現我們所定義為“特殊形”的存在，  
因此還要再加上兩種（即上圖兩種） $\Rightarrow$ 稱為直跨“ $2k$ ”

$$\text{故 } f_3(4) = 3 f_3(2) + 2 = 11 \text{ 種。}$$

(3)

由(1)、(2)可知

$$f_3(n) = 3 f_3(n-2) + 2 f_3(n-4) + 2 f_3(n-6) + \cdots + 2 f_3(2) + 2 f_3(0)$$

$$\begin{cases} f_3(n) = 3 f_3(n-2) + 2(f_3(n-4) + f_3(n-6) + \cdots + f_3(2) + 1) & \text{--- ①} \\ f_3(n-2) = 3 f_3(n-4) + 2(f_3(n-6) + f_3(n-8) + \cdots + f_3(2) + 1) & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②} \Rightarrow f_3(n) = 4 f_3(n-2) - f_3(n-4)$$

利用已知的關係式，依照  $2 \times n$  的方法，利用【特徵方程式】來求出通式：

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\sqrt{3} + 3}{24}, \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{3} - 3}{6}$$

$$\begin{aligned} f_3(n) = f_3(2r) &= 4 \times \frac{\sqrt{3} + 3}{24} (2 + \sqrt{3})^r - \frac{\sqrt{3} - 3}{6} (2 - \sqrt{3})^r \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} [(1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^r - (1 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^r] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} [(1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^r - (1 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^r] \end{aligned}$$

$$(五) \cdot f_4(n) = \sum \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)!}{x_1! x_2! x_3! \cdots x_n!} f_4(1)^{x_1} \times k_4(2)^{x_2} \times k_4(3)^{x_3} \times k_4(4)^{x_4} \times \cdots \times k_4(n)^{x_n}$$

而  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = n$ ，且  $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$  為非負整數。

1、所以最後的特殊形個數為：

$$(1) \cdot k_4(2) = 4$$

$$(2) \cdot k_4(2r+2) = 3 \quad , \quad r \in \mathbb{N}$$

$$(3) \cdot k_4(2r+1) = 2$$

2、

$$(1) \text{當 } n=1 \text{ 時 } \Rightarrow 1=1$$

$$\text{所以 } f_4(1) = f_4(1) = 1。$$

$$(2) \text{當 } n=2 \text{ 時 } \Rightarrow 2=1+1$$

$$=2$$

$$\text{所以 } f_4(2) = f_4(1)^2 + k_4(2) = 5。$$

$$(3) \text{當 } n=3 \text{ 時 } \Rightarrow 3=1+1+1$$

$$=2+1$$

$$=3$$

$$\text{所以 } f_4(3) = f_4(1)^3 + \frac{2!}{1!} f_4(1)k_4(2) + k_4(3) = 11。$$

令  $n = x_1$  個 1， $x_2$  個 2， $x_3$  個 3， $\cdots$ ， $x_n$  個  $(2r+1)$  時，

$$f_4(n) = \sum \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)!}{x_1! x_2! x_3! \cdots x_n!} f_4(1)^{x_1} \times k_4(2)^{x_2} \times k_4(3)^{x_3} \times k_4(4)^{x_4} \times \cdots \times k_4(n)^{x_n}$$

而  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = n$ ，且  $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$  為非負整數。

3、 $f_4(n)$  的另解：

(1) 當  $n \geq 3$  時

$$n = 2r \quad (r \in \mathbb{N}) \cdots 3 \text{ 種}$$

$$n = 2r - 1 \quad (r \in \mathbb{N}) \cdots 2 \text{ 種}$$

(2) 推廣

∴ 當  $n = 2r \quad (r \in \mathbb{N} \cap \{0\})$  時

$$\begin{array}{l} n-1 \\ \hline f_4(n-1) \\ \hline 1 \end{array} \Rightarrow 1 \times f_4(n-1)$$

$$\begin{array}{l} n-2 \\ \hline f_4(n-2) \\ \hline 2 \\ \hline 4種 \end{array} \Rightarrow 4 \times f_4(n-2)$$

$$\begin{array}{l} n-3 \\ \hline f_4(n-3) \\ \hline 3 \\ \hline 2種 \end{array} \Rightarrow 2 \times f_4(n-3)$$

$$\begin{array}{l} n-4 \\ \hline f_4(n-4) \\ \hline 4 \\ \hline 3種 \end{array} \Rightarrow 3 \times f_4(n-4)$$

$$\text{故 } f_4(n) = f_4(n-1) + 4f_4(n-2) + 2f_4(n-3) + 3f_4(n-4) + \cdots + 2f_4(1) + 3f_4(0)$$

※ $n$  為偶數， $\therefore n-m$  ( $m=1,2,3, \dots, \infty$ ) 為偶數時，前係數為 3 (即  $m$  為偶數)

奇數時，前係數為 2 (即  $m$  為奇數)

$$\text{故} \Rightarrow f_4(n) = f_4(n-1) + 4f_4(n-2) + 2(f_4(n-3) + f_4(n-5) + \cdots + f_4(1)) + 3(f_4(n-4) + f_4(n-6) + \cdots + f_4(0)) \quad \text{--- ①}$$

$$f_4(n-2) = f_4(n-3) + 4f_4(n-4) + 2(f_4(n-5) + f_4(n-7) + \cdots + f_4(1)) + 3(f_4(n-6) + f_4(n-8) + \cdots + f_4(0)) \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \Rightarrow f_4(n) - f_4(n-2) = f_4(n-4) + 4f_4(n-2) + f_4(n-3) - f_4(n-4)$$

$$\Rightarrow f_4(n) = f_4(n-1) + 5f_4(n-2) + f_4(n-3) - f_4(n-4)$$

又、當  $n=2r-1$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) 時

$$f_4(n) = f_4(n-1) + 4f_4(n-2) + 2f_4(n-3) + 3f_4(n-4) + \cdots + 3f_4(1) + 2f_4(0)$$

※ $n$  為奇數， $\therefore n-q$  ( $q=1,2,3, \dots, \infty$ ) 為偶數時，前係數為 2 (即  $q$  為奇數)

奇數時，前係數為 3 (即  $q$  為偶數)

$$\text{故} \Rightarrow f_4(n) = f_4(n-1) + 4 f_4(n-2) + 2 (f_4(n-3) + f_4(n-5) + \dots + f_4(0)) + 3 (f_4(n-4) + 4 f_4(n-6) + \dots + f_4(1)) - \textcircled{3}$$

$$f_4(n-2) = f_4(n-3) + 4 f_4(n-4) + 2 (f_4(n-5) + f_4(n-7) + \dots + f_4(0)) + 3 (f_4(n-6) + f_4(n-8) + \dots + f_4(1)) - \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \Rightarrow f_4(n) - f_4(n-2) = f_4(n-1) + 4 f_4(n-2) + f_4(n-3) - f_4(n-4)$$

$$\Rightarrow f_4(n) = f_4(n-1) + 5 f_4(n-2) + f_4(n-3) - f_4(n-4)$$




$$\therefore \text{規律} \Rightarrow f_4(n) = f_4(n-1) + 5 f_4(n-2) + f_4(n-3) - f_4(n-4) \quad (n \geq 4)$$

(且已求出  $f_4(0) = 1, f_4(1) = 1, f_4(2) = 5, f_4(3) = 11$ )

p.s. 由於通式無法由特徵方程式中得出(因為計算非常的繁雜)，所以無法表現出來，只能以關係式來表真，但是我們還是利用了 Mathematica 4 來跑出我們所要的解。



(六)、由於我們的各個公式中，都有  $f_m(1)$  或  $f_m(2)$ ，所以在此我們先探討第一項的關係：


1、當  $m \in 2k(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ ：

- (1) 當  $m=2$ ， $f_2(1) \Rightarrow 2 \times 1$  
- (2) 當  $m=4$ ， $f_4(1) \Rightarrow 4 \times 1$  
- (3) 當  $m=6$ ， $f_6(1) \Rightarrow 6 \times 1$  


由以上的各種情況可以得知，不管  $m$  為任何的偶數，則排法永遠必為一種，故在此，僅需要對奇數加以討論即可。

2、當  $m \in 2k+1(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ ：

在此視  為一元素，視  為另一元素，再將此兩種元素重新排列組合而成新的圖形。

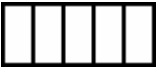

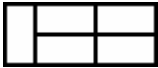
(1) 當  $m=1$ ， $f_1(2) \Rightarrow 1 \times 2$    $\Rightarrow f_1(2) = 1$ 。

在此加以分類：

(2) 當  $m=3$ ， $f_3(2) \Rightarrow 3 \times 2 \Rightarrow$  

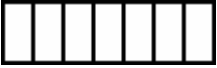


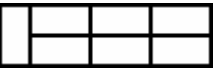
1 種  $\frac{2!}{111!}$  種  $\Rightarrow f_3(2) = 3$ 。

(3) 當  $m=5$ ,  $f_5(2) \Rightarrow 5 \times 2 \Rightarrow$

		
1 種	$\frac{4!}{1!3!}$ 種	$\frac{3!}{2!1!}$ 種


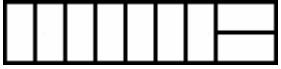

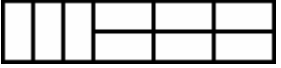
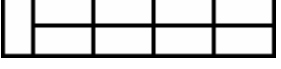
$\Rightarrow f_5(2) = 8$ 。

(4) 當  $m=7$ ,  $f_7(2) \Rightarrow 7 \times 2 \Rightarrow$


	
1 種	$\frac{6!}{1!5!}$ 種
	
$\frac{5!}{2!3!}$ 種	$\frac{4!}{3!1!}$ 種

$\Rightarrow f_7(2) = 21$ 。

(5) 當  $m=9$ ,  $f_9(2) \Rightarrow 9 \times 2 \Rightarrow$

	
1 種	$\frac{8!}{1!7!}$ 種
	
$\frac{7!}{2!5!}$ 種	$\frac{6!}{3!3!}$ 種
	
$\frac{5!}{4!1!}$ 種	$\Rightarrow f_9(2) = 55$ 。

(6) 當  $m=m$ ,  $f_m(2) \Rightarrow m \times 2 (m=2r-1, r \in \mathbb{N})$

	$\Rightarrow 1$ 種
---	-------------------

	$\Rightarrow \frac{(m-1)!}{1!(m-2)!}$ 種	
	$\Rightarrow \frac{(m-2)!}{2!(m-4)!}$ 種	
	$\Rightarrow \frac{(m-3)!}{3!(m-6)!}$ 種	
	$\Rightarrow \frac{(m-4)!}{4!(m-8)!}$ 種	
⋮	⋮	⋮
	$\Rightarrow \frac{\left(\frac{m+3}{2}\right)!}{\left(\frac{m-3}{2}\right)!3!}$ 種	
	$\Rightarrow \frac{\left(\frac{m+1}{2}\right)!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!1!}$ 種	

最後綜合上面所討論的，推廣可以得到一個結論，為：

(7)  $f_m(1) = 1$ ， $m = 2r (r \in \mathbb{N})$ 。

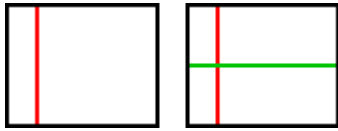
(8)  $f_m(2) = 1 + \sum_{r=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m-r)!}{r!(m-2r)!}$ ， $m = 2r-1 (r \in \mathbb{N})$ 。

因為當  $m \geq 5$  時，會有  $h_m(n)$  的圖形出現，亦會有  $g_m(n)$  的圖形，所以我們分成兩大類來討論，即

$f_m(n) = g_m(n) + h_m(n)$

(七)、 $g_m(n)$  的探討 (即雙邊至少有一條缺陷線存在的情形)：

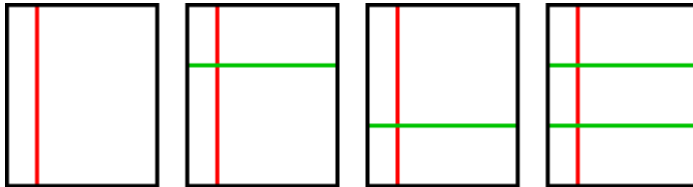
1、第一條直線存在：



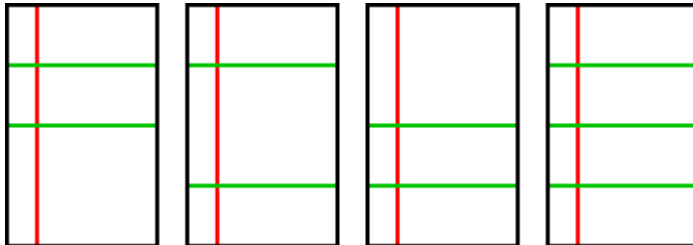
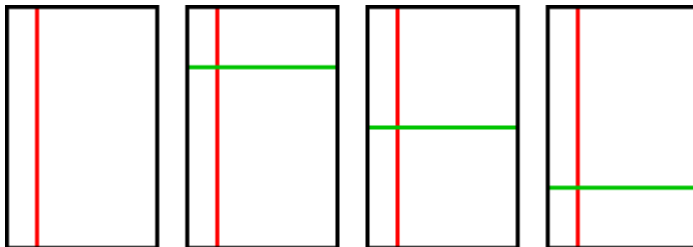
$$f_1(4)f_4(4) - \underbrace{f_1(2)f_4(2)}_{\text{(左圖)}} \underbrace{f_1(2)f_4(2)}_{\text{(右圖)}}$$

(左圖)

(右圖)



$$f_1(6)f_4(6) - [f_1(2)f_4(2)f_1(4)f_4(4) + f_1(4)f_4(4)f_1(2)f_4(2)] + f_1(2)f_4(2)f_1(2)f_4(2)$$



$$f_1(8)f_4(8) - [f_1(2)f_4(2)f_1(6)f_4(6) + f_1(4)f_4(4)f_1(4)f_4(4) + f_1(6)f_4(6)f_1(2)f_4(2)] + [f_1(2)f_4(2)f_1(2)f_4(2)f_1(4)f_4(4) + f_1(2)f_4(2)f_1(4)f_4(4)f_1(2)f_4(2) + f_1(4)f_4(4)f_1(2)f_4(2)f_1(2)f_4(2)] - f_1(2)f_4(2)f_1(2)f_4(2) f_1(2)f_4(2)f_1(2)f_4(2)$$

依照這個方法一直做下去可以推得下列的一般式

$$\sum (-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_4(x_1)f_4(x_2)f_4(x_3)\dots f_4(x_{\frac{n}{2}})$$

且  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{\frac{n}{2}} = n$ ， $f_m(0) = 1$ ， $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{\frac{n}{2}}$  均為非負整數，且  $q$  是當

$x_i$  為最正整數時的  $i$ ， $i$  為最大的值

由以上的情況可以得知，利用線來切割成不同的圖形，再加以計算其排法數，再利用一些

組合的觀念，再把它拼湊出來，接著以下均利用上面的邏輯推導、計算，就可以把  $m \times n$  中至少有一條線貫穿的排法數給求出來。

2、第二條直線存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\dots\dots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_3(x_1)f_3(x_2)f_3(x_3)\dots\dots f_3(x_{\frac{n}{2}})$$

此時的  $q$  與先前的條件相同，以下亦如此。

3、第三條直線存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_4(x_1)f_4(x_2)f_4(x_3)\dots\dots f_4(x_{\frac{n}{2}})$$

4、第四條直線存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\dots\dots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_3(x_1)f_3(x_2)f_3(x_3)\dots\dots f_3(x_{\frac{n}{2}})$$

5、第一、二條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_3(x_1)f_3(x_2)f_3(x_3)\dots\dots f_3(x_{\frac{n}{2}})$$

6、第一、三條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\dots\dots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\dots\dots f_2(x_{\frac{n}{2}})$$

7、第一、四條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_3(x_1)f_3(x_2)f_3(x_3)\dots\dots f_3(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

8、第二、三條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\dots\dots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\dots\dots f_2(x_{\frac{n}{2}})$$

9、第二、四條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\dots\dots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\dots\dots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

10、第三、四條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_3(x_1)f_3(x_2)f_3(x_3)\dots\dots f_3(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

11、第一、二、三條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\dots\dots f_2(x_{\frac{n}{2}})$$

12、第一、二、四條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

$$f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\dots\dots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

13、第一、三、四條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\dots\dots f_2(x_{\frac{n}{2}})$$

$$f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}}) f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

14、第二、三、四條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\dots\dots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

$$f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}}) f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

15、第一、二、三、四條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2) f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

$$f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}}) f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\dots\dots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

16、將以上的公式整理之後即得出： $n$ (至少一條直線存在) $-n$ (至少兩條直線存在) $+n$ (至少三條直線存在) $-n$ (至少四條直線存在)。

17、

(1)但當  $m$  為奇數，總公式： $\sum (-1)^q \sum f_{k_1}(x_1)f_{k_1}(x_2)\dots f_{k_1}(x_{\frac{n}{2}})$

$$f_{k_2}(x_1)f_{k_2}(x_2)\dots f_{k_2}(x_{\frac{n}{2}})f_{k_3}(x_1)f_{k_3}(x_2)\dots f_{k_3}(x_{\frac{n}{2}})f_{k_m}(x_1)f_{k_m}(x_2)\dots f_{k_m}(x_{\frac{n}{2}}) ;$$

$$k_1+k_2+k_3+\dots\dots+k_m=m, x_1+x_2+x_3+\dots\dots+x_{\frac{n}{2}}=n ;$$

$k_1、k_2、k_3\dots\dots、k_m, x_1、x_2、x_3、\dots\dots、x_{\frac{n}{2}}$  均為非負整數；

$k_i \in \mathbb{N}$  時， $i=q$ ， $i$  為最大的值。

(2) $m$  為偶數時，總公式為： $\sum (-1)^q \sum f_{k_1}(x_1)f_{k_1}(x_2)\dots f_{k_1}(x_{\frac{n}{2}})$

$$f_{k_2}(x_1)f_{k_2}(x_2)\dots f_{k_2}\left(x_{\frac{n}{2}}\right)f_{k_3}(x_1)f_{k_3}(x_2)\dots f_{k_3}\left(x_{\frac{n}{2}}\right)f_{k_m}(x_1)f_{k_m}(x_2)\dots f_{k_m}\left(x_{\frac{n}{2}}\right)$$

ㄅ、 $n$  為偶數時：

(ㄅ) $k_1+k_2+k_3+\dots+k_m=m$ ， $k_1、k_2、k_3、\dots、k_m$  至少有一為奇數， $x_1+x_2+x_3+\dots+x_{\frac{n}{2}}=n$ ， $x_1、x_2、x_3、\dots、x_{\frac{n}{2}}$  均為偶數， $k_i \in \mathbb{N}$  時， $i=q$ ， $i$  為最大的值。

(ㄆ) $k_1+k_2+k_3+\dots+k_m=m$ ， $k_1、k_2、k_3、\dots、k_m$  均為偶數時， $x_1+x_2+x_3+\dots+x_{\frac{n}{2}}=n$ ， $x_1、x_2、x_3、\dots、x_{\frac{n}{2}}$  屬於正整數，

$k_i \in \mathbb{N}$  時， $i=q$ ， $i$  為最大的值。

ㄆ、 $n$  為奇數時：

$k_1+k_2+k_3+\dots+k_m=m$ ， $k_1、k_2、k_3、\dots、k_m$  均為偶數時，

$x_1+x_2+x_3+\dots+x_{\frac{n}{2}}=n$ ， $x_1、x_2、x_3、\dots、x_{\frac{n}{2}}$  屬於正整數

$k_i \in \mathbb{N}$  時， $i=q$ ， $i$  為最大的值。

以上幾個討論出來的是  $m \times n$  中至少有一條缺陷線存在的排法數，但在  $m \times n$  中還可能出現雙邊均無法破線的特特殊形，所以令特特殊圖形的總排法數為  $h_m(n)$ ，所以  $m \times n$  的總排法數為上面的一、二項公式加上  $h_m(n)$ 。

## (八)、 $h_m(n)$ 的探討：

1、我們將  $h_m(n)$  分成三大類的總合：

(1)恰有線的總排法數再加上  $m \times 2$  的的圖形，然後利用旋轉的方式來將線阻擋

，即可成為特特殊形的一種，且我們令此圖形的總排法數為  $p_m^k(n)$ 。

(2)利用  $m \times (n-2)$  的特特殊形的總排法數，再加上  $m \times 2$  的圖形，然後一樣利用旋轉的方法來將線阻擋，亦即形成了另一種特特殊形，我們令此圖形的總排法數為  $q_m(n)$ 。

(3)最後再加上以上兩種沒有算到的特特殊形，我們令此種圖形為特特特殊形，並且令此圖形的總排法數為  $r_m(n)$ 。

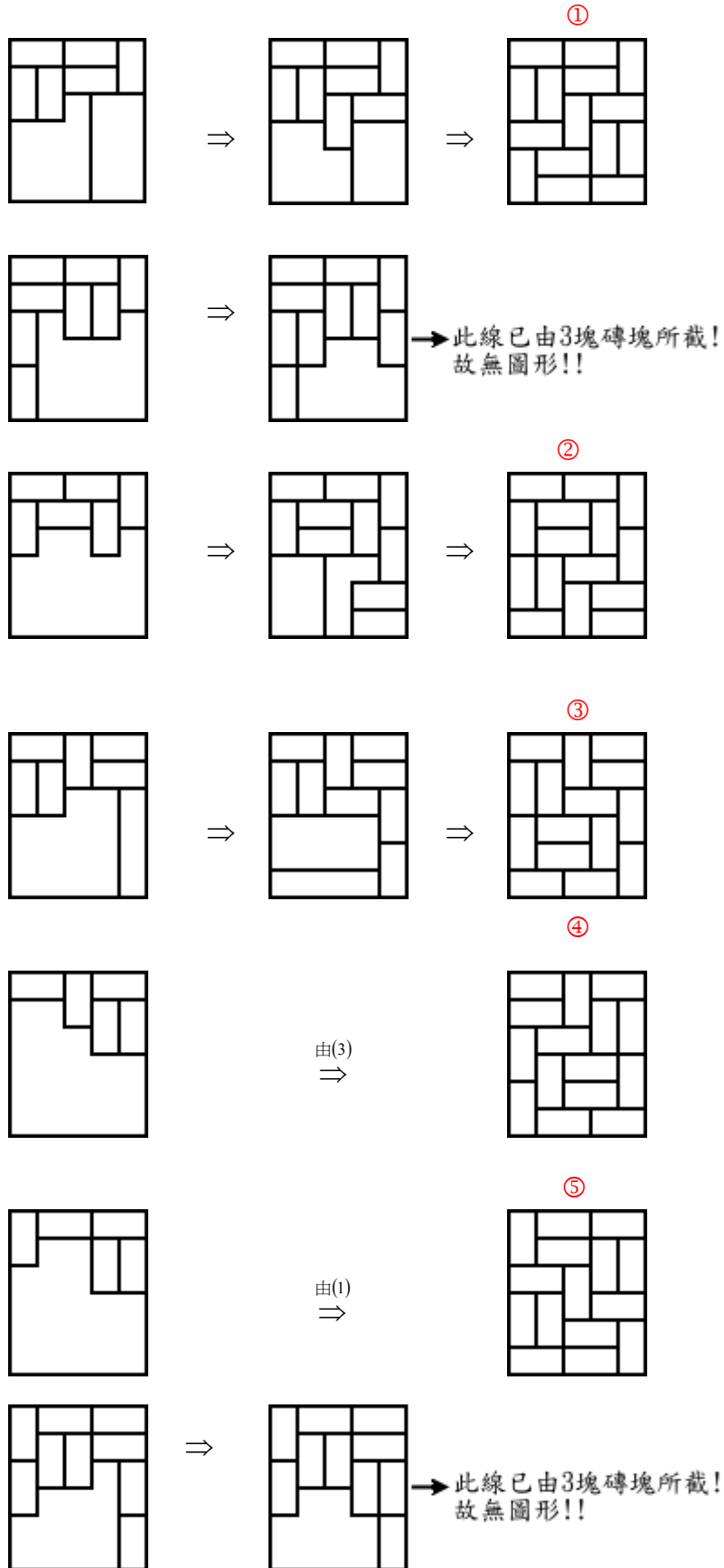
以下將會一一的討論。

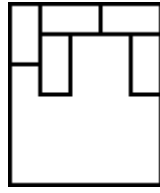
2、看過建中黃偉烈所作的論文中，得知  $5 \times 6$  是(一奇一偶的邊長)最小的特特殊形，

$6 \times 8$  是(兩邊長均為偶數)最小的特特殊圖形。

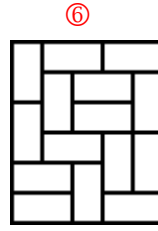
【引理】： $h_5(6)=6$

【證明】：





由(2)  
⇒



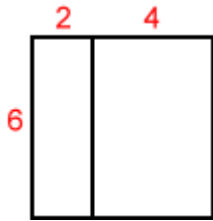
故得證： $h_5(6)=6$

3、 $p_m^k(n)$  在這之中我們發現了只要將  $m$  分成三類就可以把這一類的排法數全部解決：

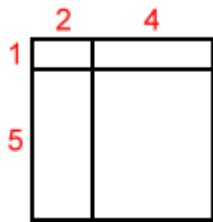
- (1)將  $m$  拆解成全部均為偶數的
- (2)將  $m$  拆解成其中至少有一為奇數的
- (3)將  $m$  拆解成全部均為奇數的

(1)現在先以比較簡單的圖形來推算：

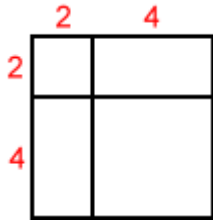
↷、 $6 \times 6$  的圖形：



$$\{[f_2(6)] - [f_1(6)f_1(6)]\} \times \{[f_4(6)] - [f_1(6)f_3(6) + f_2(6)f_2(6) + f_3(6)f_1(6)] + [f_1(6)f_1(6)f_2(6) + f_1(6)f_2(6)f_1(6) + f_2(6)f_1(6)f_1(6)] - [f_1(6)f_1(6)f_1(6)f_1(6)]\}$$



$$\{[f_2(1)f_2(5)]\} \times \{[f_4(1)f_4(5)] - [f_2(1)f_2(5)f_2(1)f_2(5)]\}$$



$$\{[f_2(2)f_2(4)] - [f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)]\} \times \{[f_4(2)f_4(4)] - [f_1(2)f_1(4) f_3(2)f_3(4) + f_2(2)f_2(2)f_2(4)f_2(4) + f_3(2)f_3(4)f_1(2)f_1(4)] + [f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_2(2)f_2(4) + f_1(2)f_1(4) f_2(2)f_2(4)f_1(2)f_1(4) + f_2(2)f_2(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)] - f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2) f_1(4)\}$$

	2	4	
3			
3			

$$\{[f_2(3)f_2(3)]\} \times \{[f_4(3)f_4(3)] - [f_2(3)f_2(3)f_2(3)f_2(3)]\}$$

	2	4	
4			
2			

$$\{[f_2(4)f_2(2)] - [f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)]\} \times \{[f_4(4)f_4(2)] - [f_1(4)f_1(2)f_3(4)f_3(2) + f_2(4)f_2(2)f_2(4)f_2(2) + f_3(4)f_3(2)f_1(4)f_1(2)] + [f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_2(4)f_2(2) + f_1(4)f_1(2)f_2(4)f_2(2)f_1(4)f_1(2) + f_2(4)f_2(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)] - [f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)]\}$$

	2	4	
5			
1			

$$\{[f_2(5)f_2(1)]\} \times \{[f_4(5)f_4(1)] - [f_2(5)f_2(1)f_2(5)f_2(1)]\}$$

	2	4	
1			
1			
4			

$$\{[f_2(1)f_2(1)f_2(4)]\} \times \{[f_4(1)f_4(1)f_4(4)] - [f_2(1)f_2(1)f_2(4)f_2(1)f_2(1)f_2(4)]\}$$

	2	4	
1			
2			
3			

$$\{[f_2(1)f_2(2)f_2(3)]\} \times \{[f_4(1)f_4(2)f_4(3)] - [f_2(1)f_2(2)f_2(3)f_2(1)f_2(2)f_2(3)]\}$$

	2	4	
1			
3			
2			

$$\{[f_2(1)f_2(3)f_2(2)]\} \times \{[f_4(1)f_4(3)f_4(2)] - [f_2(1)f_2(3)f_2(2)f_2(1)f_2(3)f_2(2)]\}$$

	2	4	
1			
4			
1			

$$\{[f_2(1)f_2(4)f_2(1)]\} \times \{[f_4(1)f_4(4)f_4(1)] - [f_2(1)f_2(4)f_2(1)f_2(1)f_2(4)f_2(1)]\}$$

	2	4	
2			
3			
1			

$$\{[f_2(2)f_2(3)f_2(1)]\} \times \{[f_4(2)f_4(3)f_4(1)] - [f_2(2)f_2(3)f_2(1)f_2(2)f_2(3) f_2(1)]\}$$

	2	4	
2			
2			
2			

$$\{[f_2(2)f_2(2)f_2(2)] - [f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)]\} \times \{[f_4(2)f_4(2)f_4(2)] - [f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_3(2)f_3(2)f_3(2) + f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2) + f_3(2)f_3(2)f_3(2)f_1(2)f_1(2) f_1(2)] + [f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2) + f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_1(2) f_1(2)f_1(2) + f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)] - [f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2) f_1(2)f_1(2)f_1(2) f_1(2)f_1(2)f_1(2)]\}$$

	2	4	
2			
1			
3			

$$\{[f_2(2)f_2(1)f_2(3)]\} \times \{[f_4(2)f_4(1)f_4(3)] - [f_2(2)f_2(1)f_2(3)f_2(2)f_2(1) f_2(3)]\}$$

	2	4	
3			
2			
1			

$$\{[f_2(3)f_2(2)f_2(1)]\} \times \{[f_4(3)f_4(2)f_4(1)] - [f_2(3)f_2(2)f_2(1)f_2(3)f_2(2) f_2(1)]\}$$

	2	4	
3			
1			
2			

$$\{[f_2(3)f_2(1)f_2(2)]\} \times \{[f_4(3)f_4(1)f_4(2)] - [f_2(3)f_2(1)f_2(2)f_2(3)f_2(1) f_2(2)]\}$$

	2	4	
4			
1			
1			

$$\{[f_2(4)f_2(1)f_2(1)]\} \times \{[f_4(4)f_4(1)f_4(1)] - [f_2(4)f_2(1)f_2(1)f_2(4)f_2(1) f_2(1)]\}$$

又、依照以上的排法邏輯[(全部的情況) - (至少有一條橫線) + (至少有兩條橫線) - (至少有三條橫線) + ……]繼續算下去的話，就可以推廣，推廣之後可以得到通式：但是此時得到的通式只適用於 6×6 中恰有第二條線的而已，所以在試了不少個之後發現其中

只要控制住  $m$  值，就可以將圖形中不管恰有幾條線時的排法數一一求出，所以修改之後得到的通式為：

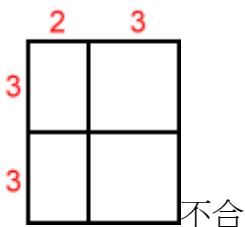
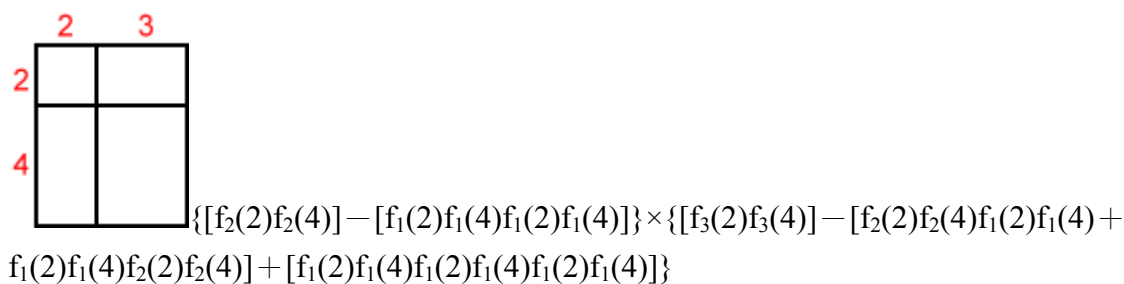
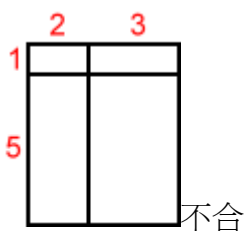
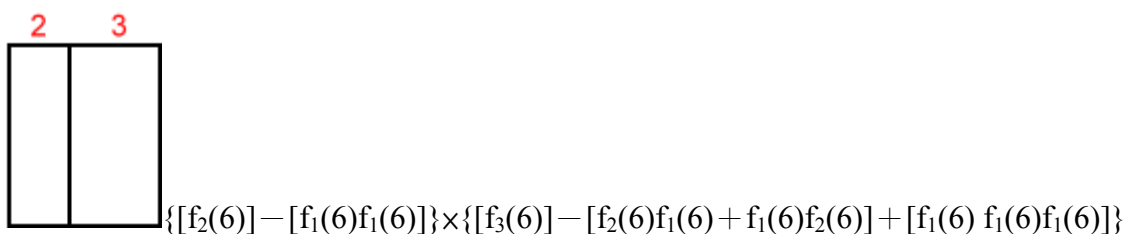
$$\prod \left( \sum_{i=1}^n (-1)^i \prod_{r=1}^n f_{b_r^i}(x_j) \right), \quad \sum_{j=1}^n x_j = n$$

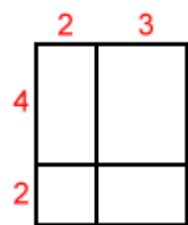
(ㄅ)  $x_j$  均為偶數時， $\sum_{i=1}^n (\sum_{r=1}^n b_r^i) = m$  且  $b_r^i \in \text{正偶數} \cup \{0\}$

(ㄆ)  $x_j$  中至少有一為奇數時， $\sum_{i=1}^n (\sum_{r=1}^n b_r^i) = m$  且  $b_r^i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

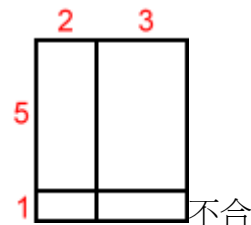
(2) 我們一樣拿較簡單的來說明，然後再來推廣：

ㄅ、 $5 \times 6$  的圖形：

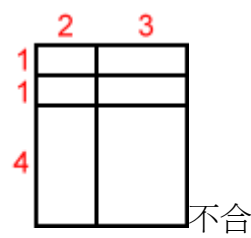




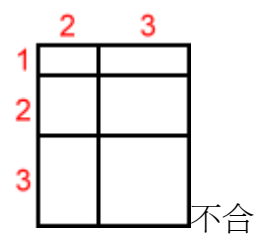
$$\{[f_2(4)f_2(2)] + [f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)]\} \times \{[f_3(4)f_3(2)] - [f_2(4)f_2(2)f_1(4)f_1(2) + f_1(4)f_1(2)f_2(4)f_2(2) + [f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)]]\}$$



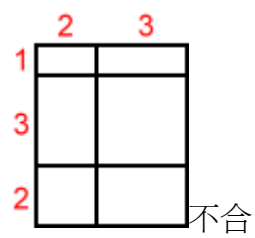
不合



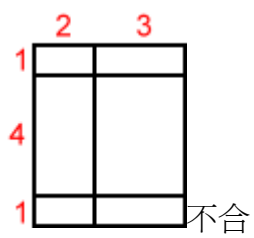
不合



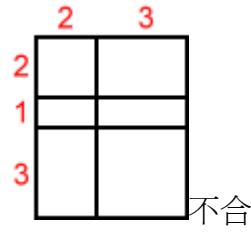
不合



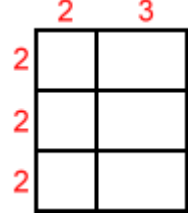
不合



不合



不合



$$\{[f_2(2)f_2(2)f_2(2)] - [f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)]f_1(2)f_1(2)\} \{[f_3(2)f_3(2)f_3(2)] - [f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2) + f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2)] + [f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)]\}$$

等等

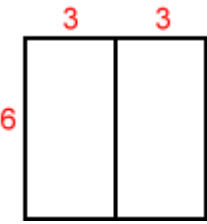
經過以上的計算之後，發現還是可以利用排容原理[(全部的情況) - (至少有一條橫線) + (至少有兩條橫線) - (至少有三條橫線) + ……]來算出全部的排法數，最後推廣可以得到我們要的通式，不過現在所推出來通式只適用於將 5×6 的總排法數中恰有第二直條線的排法數，但是我們爲了要推廣到 m×n，所以在多試了幾個類似的圖形之後，發現 m 還是可以利用拆解的手法來推得當有 k 條直線存在的時候，所以我們就利用了一樣的手法將公式推廣得到：

$$\prod \left( \sum (-1)^n \prod_{i,j,r=1}^n f_{b_r^i}(x_j) \right) , \quad \sum_{j=1}^n x_j = n \quad x_j \text{ 均爲偶數}$$

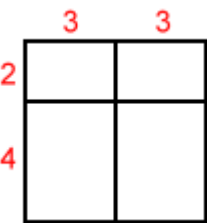
$$\sum_{r=1}^n b_r^i = a_i, \quad \sum_{i=1}^n a_i = m \text{ 且 } b_r^i \in \text{正偶數} \cup \{0\}, \quad a_i \text{ 中必須有一奇一偶}$$

(3)現在還是一樣拿 6×6 的圖形來說明，且這次是算恰有第三條直線存在的總排法數，然後再推廣：

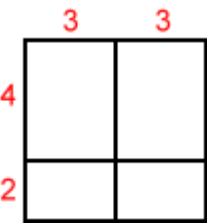
ㄣ、6×6 之圖形：



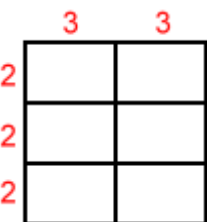
$$\{[f_3(6)] - [f_2(6)f_1(6) + f_1(6)f_2(6)] + [f_1(6)f_1(6)f_1(6)]\} \times \{[f_3(6)] - [f_2(6)f_1(6) + f_1(6)f_2(6)] + [f_1(6)f_1(6)f_1(6)]\}$$



$$\{[f_3(2)f_3(4)] - [f_2(2)f_2(4)f_1(2)f_1(4) + f_1(2)f_1(4)f_2(2)f_2(4)] + [f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_2(4)]\} \times \{[f_3(2)f_3(4)] - [f_2(2)f_2(4)f_1(2)f_1(4) + f_1(2)f_1(4)f_2(2)f_2(4)] + [f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_2(4)]\}$$



$$\{[f_3(4)f_3(2)] - [f_2(4)f_2(2)f_1(4)f_1(2) + f_1(4)f_1(2)f_2(4)f_2(2)] + [f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)]\} \times \{[f_3(4)f_3(2)] - [f_2(4)f_2(2)f_1(4)f_1(2) + f_1(4)f_1(2)f_2(4)f_2(2)] + [f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)]\}$$



$$\{[f_3(2)f_3(2)f_3(2)] - [f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2) + f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_2(2)f_2(2)] + [f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)]\} \times \{[f_3(2)f_3(2)f_3(2)] - [f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2) + f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_2(2)f_2(2)] + [f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)]\}$$

ㄤ、經過此邏輯推算[(全部的情況) - (至少有一條橫線) + (至少有兩條橫線) - (至少有三條橫線) + ……]之後，可以得到我們想要的公式，但是我們要的是當有 k 條直線存在的

通式，所以再經過我們調整之後，推廣可得：

$$\prod \left( \sum_{i,j,r=1}^n -(-1)^n f_{b_r^i}(x_j) \right), \quad \sum_{j=1}^n x_j = n \quad x_j \text{ 均為偶數}$$

$$\sum_{r=1}^n b_r^i = a_i, \quad \sum_{i=1}^n a_i = m \text{ 且 } b_r^i \in \text{正整數} \cup \{0\}, \quad a_i \text{ 中必須均為奇數}$$

(4)綜合(1)、(2)、(3)全部的情況，我們發現可以綜合成一個公式：

$$\prod \left( \sum_{i,j,r=1}^n -(-1)^n f_{b_r^i}(x_j) \right), \quad \sum_{j=1}^n x_j = n$$

ㄅ、

$$(ㄅ) x_j \text{ 均為偶數時, } \sum_{i=1}^n \left( \sum_{r=1}^n b_r^i \right) = m \text{ 且 } b_r^i \in \text{正偶數} \cup \{0\}$$

$$(ㄅ) x_j \text{ 中至少有一為奇數時, } \sum_{i=1}^n \left( \sum_{r=1}^n b_r^i \right) = m \text{ 且 } b_r^i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ㄆ、

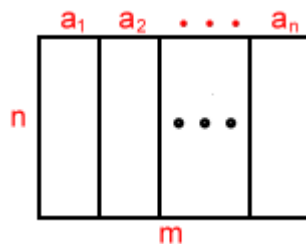
$$\sum_{r=1}^n b_r^i = a_i, \quad \sum_{i=1}^n a_i = m \text{ 且 } b_r^i \in \text{正偶數} \cup \{0\}, \quad a_i \text{ 中必須有一奇一偶}$$

ㄇ、

$$\sum_{r=1}^n b_r^i = a_i, \quad \sum_{i=1}^n a_i = m \text{ 且 } b_r^i \in \text{正整數} \cup \{0\}, \quad a_i \text{ 中必須均為奇數}$$

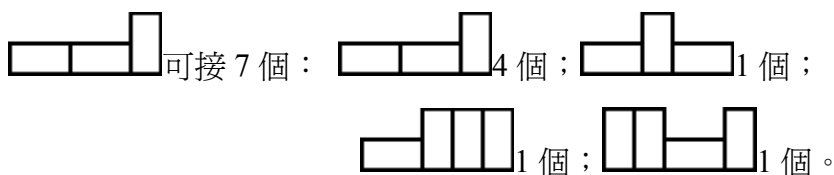
而  $a_i$  為  $m$  的分拆元素：

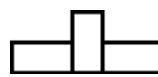
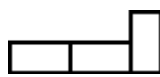
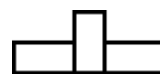
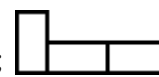
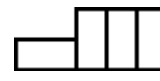

例：

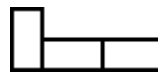
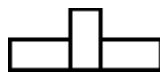
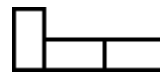
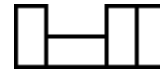



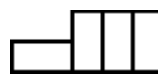
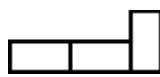
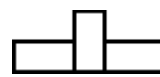
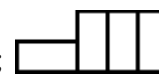
4、先討論  $5 \times n$  中特特殊形接  $5 \times 2$  的總排法數與邏輯：


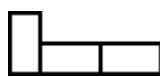
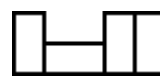
(1)先來討論特特殊形的部分：


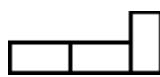



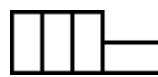
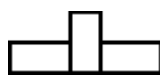
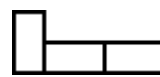

 可接 7 個 :  1 個 ;  3 個 ;  1 個 ;  
 1 個 ;  1 個 。

 可接 7 個 :  1 個 ;  4 個 ;  
 1 個 ;  1 個 。

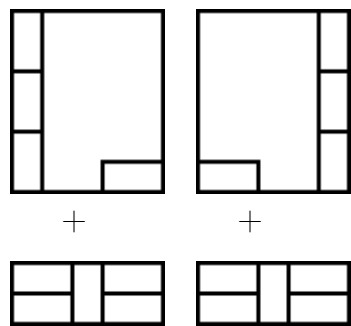
 可接 3 個 :  1 個 ;  1 個 ;  1 個 。


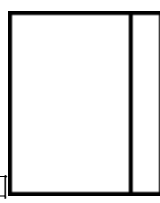
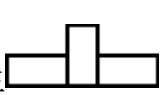
 可接 2 個 :  1 個 ;  1 個 。

 可接 2 個 :  1 個 ;  1 個 。

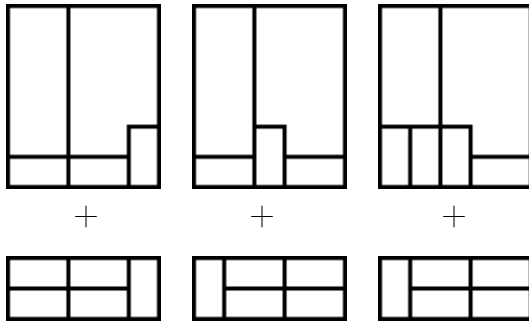
 可接 3 個 :  1 個 ;  1 個 ;  1 個 。

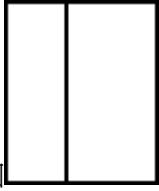
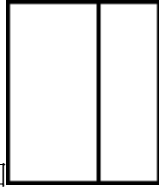
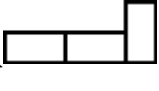
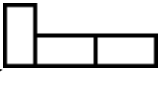
(2) 恰有第 1,4 線的情況 :




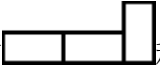
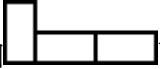
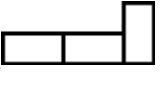
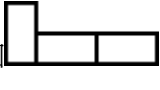
 和  有 x 個 , 就產生  的底 x 個 。

(3) 恰有第 2,3 線的情況 :



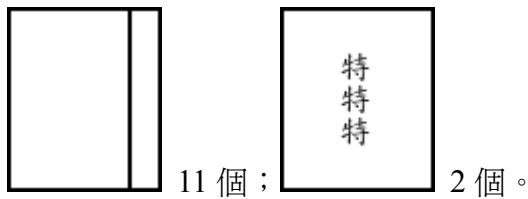
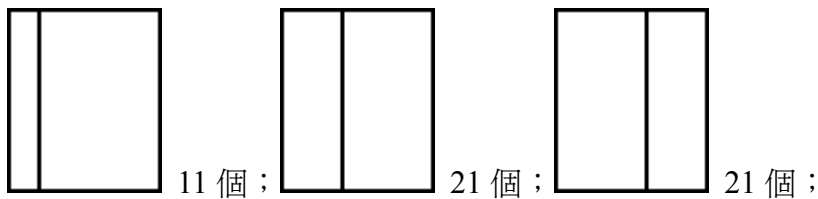
可得知  和  有  $y$  個，就產生   $\frac{y}{2}$  個，  
及   $\frac{y}{2}$  個。

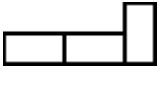
(4)特特特：

；只有  和  兩種底，且兩種互為左右相反之圖形；可得知若  
特特特殊形有  $z$  個，就產生   $\frac{z}{2}$  個和   $\frac{z}{2}$  個。

(5)統合

∵依我們之前所做過的問題，先用  $5 \times 6$  的特特，來推得  $5 \times 8$  的特特總數：



$\Rightarrow \therefore 5 \times 8$  中，： $4 \times 2 + 1 \times 2$  + 21 + 1 = 32

特特 恰有 2,3 線 特特特

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \text{特} & \\ \hline \text{特} & & \text{特} \\ \hline \end{array} : \underline{1 \times 2 + 1 \times 2 + 3 \times 2} + \underline{22} = 32$$

特特 恰有 1,4 線

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \text{特} & \text{特} & \text{特} \\ \hline \text{特} & & & \\ \hline \end{array} : \underline{1 \times 2 + 1 \times 2} = 4$$

特特

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{特} & & \text{特} & \text{特} \\ \hline & \text{特} & & \\ \hline \end{array} : \underline{1 \times 2} = 2$$

特特

$$\therefore 5 \times 8 \text{ 共有 } 32 \times 2 + 32 + 4 \times 2 + 2 \times 2 = 108 \text{ 種}$$

又、 $5 \times 10$  :

由之前所做過的研究 :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} 79 \text{ 個}; \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} 147 \text{ 個}; \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} 147 \text{ 個};$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} 79 \text{ 個}; \begin{array}{|c|} \hline \text{特} \\ \hline \text{特} \\ \hline \text{特} \\ \hline \end{array} 26 \text{ 種。}$$

$$\therefore \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \text{特} \\ \hline \text{特} & \text{特} & \\ \hline \end{array} : \underline{32 \times 4 + 32 \times 1 + 2 \times 1 + 4 \times 1} + \underline{147} + \underline{13} = 326$$

特特 恰有 2,3 線 特特特

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \text{特} & \\ \hline \text{特} & & \text{特} \\ \hline \end{array} : \underline{32 \times 1 + 32 \times 1 + 32 \times 3 + 4 \times 1 + 4 \times 1} + \underline{158} = 326$$

特特 恰有 1,4 線

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \text{特} & \text{特} & \text{特} \\ \hline \text{特} & & & \\ \hline \end{array} : \underline{32 \times 1 + 32 \times 1 + 4 \times 1} = 68$$

特特

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{特} & & \text{特} & \text{特} \\ \hline & \text{特} & & \\ \hline \end{array} : \underline{32 \times 1 + 2 \times 1} = 34$$

特特

$$\therefore 5 \times 10 \text{ 共有 } 326 \times 2 + 326 \times 1 + 68 \times 2 + 34 \times 2 = 1182 \text{ 種}$$

(6)結論：

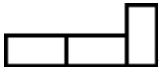
由  $5 \times n$  最前面的三項來找初步的規則：

$5 \times 6$ ：6 個

$5 \times 8$ ：108 個

$5 \times 10$ ：1182 個

$\therefore 5 \times (n-2)$ ：

定義： 有  $D_5^1(n-2)$  種

 有  $D_5^2(n-2)$  種

 有  $D_5^3(n-2)$  種

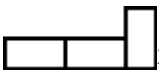
 有  $D_5^4(n-2)$  種

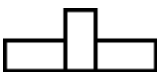
 有  $D_5^5(n-2)$  種

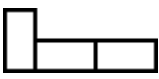
 有  $D_5^6(n-2)$  種

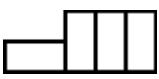
 有  $D_5^7(n-2)$  種

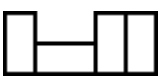
$\Rightarrow$  可推導出  $5 \times n$  的遞迴關係式：

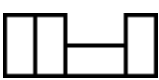
 有  $4D_5^1(n-2) + D_5^2(n-2) + D_5^4(n-2) + D_5^6(n-2)$   
 $+ \frac{5 \times n \text{中恰有2,3線}}{2} + \frac{5 \times n \text{中特特特}}{2}$  種


 有  $[D_5^1(n-2) + 3D_5^2(n-2) + D_5^3(n-2) + D_5^4(n-2) + D_5^7(n-2)] +$   
 $(5 \times n \text{中恰有1,4線})$  種

 有  $D_5^2(n-2) + 4D_5^3(n-2) + D_5^5(n-2) + D_5^7(n-2)$   
 $+ \frac{5 \times n \text{中恰有2,3線}}{2} + \frac{5 \times n \text{中特特特}}{2}$  種

 有  $D_5^1(n-2) + D_5^2(n-2) + D_5^4(n-2)$  種

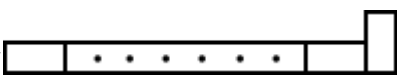
 有  $D_5^3(n-2) + D_5^5(n-2)$  種

 有  $D_5^1(n-2) + D_5^6(n-2)$  種

 有  $D_5^2(n-2) + D_5^3(n-2) + D_5^7(n-2)$  種

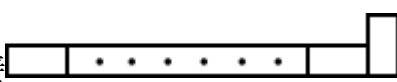
(7)依照以上的排法邏輯，推廣可得  $m \times n$  的特特：

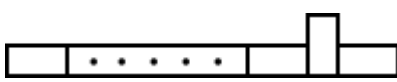
先討論  $m = 2k + 1 (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ ：

先用  的圖形底下接  $(2k+1) \times 2$  討論：

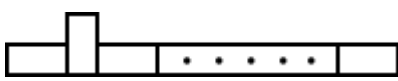
分成恰有一個直的磚塊、恰有三個直的磚塊、...、恰有  $(2k-1)$  個直的磚塊

ㄅ、恰有一個直的磚塊：

當底下接  時，有  $f_{2k}(2)-1$  種排法；

 時，有  $f_{2(k-1)}(2)-1$  種排法；

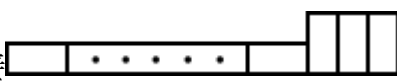
...

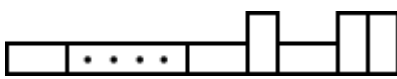
 時，有  $f_2(2)-1$  種排法。

$\therefore$  恰有一個直的磚塊共有  $\sum_{a=1}^k [f_{2a}(2)-1]$  種排法；

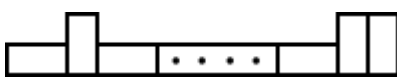
ㄆ、恰有三個直的磚塊：

(ㄅ)固定最右邊為兩塊直的磚塊：

當底下接  時，有  $f_{2(k-1)}(2)-1$  種排法；

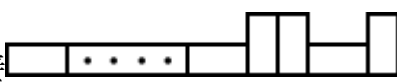
 時，有  $f_{2(k-2)}(2)-1$  種排法；

...

 時，有  $f_2(2)-1$  種排法；

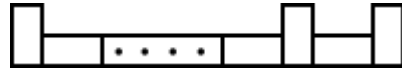
$\therefore$  共有  $\sum_{a=1}^{k-1} [f_{2a}(2)-1]$  種排法。

(ㄆ)固定最右邊為一塊直的磚塊：

當底下接  時，有  $f_2(2)f_{2(k-2)}(2)-1$  種排法；

 時，有  $f_2(2)f_{2(k-3)}(2)-1$  種排法；

...



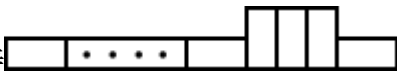
時，有  $f_2(2)f_0(2)-1$  種排法；

$\therefore$  共有  $\sum_{a=0}^{k-2} [f_2(2)f_{2a}(2)-1]$  種排法。

(□) 固定最右邊為直的磚塊，(剩下兩塊直的磚塊任意排)：

$\therefore$  當最右邊為一塊直的磚塊時，共有  $\sum_{a=1}^{k-1} [f_{2a}(2)-1] + \sum_{b=0}^{k-2} \left\{ \sum_{c=0}^b [f_{2(k-1-b)}(2)f_{2c}(2)-1] \right\}$  種排法。

(□) 統合：

當底下接 ，固定最右邊為一橫緊接一直，而剩下左邊兩塊直的磚塊任意排時，依前面的排法邏輯，共有

$\sum_{a=1}^{k-2} [f_{2a}(2)-1] + \sum_{b=0}^{k-3} \left\{ \sum_{c=0}^b [f_{2(k-2-b)}(2)f_{2c}(2)-1] \right\}$  種排法

$\therefore$  由此可知，當最右邊的排不斷往左移，可求出恰有三個直的磚塊共有

$\sum_{a=1}^{k-1} \left\{ \sum_{b=1}^a (f_{2b}(2)-1) + \sum_{c=0}^{a-1} \left\{ \sum_{d=0}^c (f_{2(k-1-c)}(2)f_{2d}(2)-1) \right\} \right\}$  種排法。

□、恰有五個直的磚塊：

依照前面所用的手法，可求出恰有五個直的磚塊共有

$\sum_{a=1}^{k-2} \left\{ \sum_{b=1}^a \left\{ \sum_{c=1}^b [f_{2c}(2)-1] + \sum_{d=0}^{b-1} \left\{ \sum_{e=0}^d [f_{2(k-2-d)}(2)f_{2e}(2)-1] + \sum_{f=0}^{a-1} \left\{ \sum_{g=0}^f \left\{ \sum_{h=0}^g \left\{ \sum_{i=0}^h [f_{2(k-3-f)}(2)f_{2(g-h)}(2)f_{2i}(2)-1] \right\} \right\} \right\} \right\} \right\} \right\}$  種排法。

□、恰有七個直的磚塊：

依照前面所用的手法，可求出恰有七個直的磚塊共有

$\sum_{a=1}^{k-3} \left\{ \sum_{b=1}^a \left\{ \sum_{c=1}^b \left\{ \sum_{d=1}^c [f_{2d}(2)-1] + \sum_{e=0}^{c-1} \left\{ \sum_{f=0}^e [f_{2(k-3-e)}(2)f_{2f}(2)-1] \right\} \right\} \right\} \right\}$   
 $+ \sum_{g=0}^{b-1} \left\{ \sum_{h=0}^g \left\{ \sum_{i=0}^h \left\{ \sum_{j=0}^i [f_{2(k-4-g)}(2)f_{2(h-i)}(2)f_{2j}(2)-1] \right\} \right\} \right\} \right\}$   
 $+ \sum_{l=0}^{a-1} \left\{ \sum_{m=0}^l \left\{ \sum_{n=0}^m \left\{ \sum_{o=0}^n \left\{ \sum_{p=0}^o [f_{2(k-5-l)}(2)f_{2(m-n)}(2)f_{2(o-p)}(2)f_{2q}(2)-1] \right\} \right\} \right\} \right\} \right\}$

□、推廣到恰有  $(2r-1)$  個直的磚塊：

$\sum_{s_1=1}^{k+1-r} \left\{ \sum_{s_2=1}^{s_1} \left\{ \sum_{s_3=1}^{s_2} \dots \left\{ \sum_{s_r=1}^{s_{r-1}} [f_{2s_r}(2)-1] + \sum_{s_{r+1}=0}^{s_{r-1}-1} \left\{ \sum_{s_{r+2}=0}^{s_{r+1}} [f_{2(k+1-r-s_{r+1})}(2)f_{2s_{r+2}}(2)-1] \right\} \right\} \right\} \right\}$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s_{r+3}=0}^{s_{r-2}-1} \left\{ \sum_{s_{r+4}=0}^{s_{r+3}} \left\{ \sum_{s_{r+5}=0}^{s_{r+4}} \left\{ \sum_{s_{r+6}=0}^{s_{r+5}} [f_{2(k-r-s_{r+3})}(2) f_{2(s_{r+4}-s_{r+5})}(2) f_{2s_{r+6}}(2) - 1] \right\} \right\} \right\} + \dots \\
& + \sum_{s_{r^2-2r+3}=0}^{s_1-1} \left\{ \sum_{s_{r^2-2r+4}=0}^{s_{r^2-2r+3}} \left\{ \dots \left\{ \sum_{s_{r^2}=0}^{s_{r^2}-1} [f_{2(k+3-2r-s_{r^2-2r+3})}(2) f_{2(s_{r^2-2r+4}-s_{r^2-2r+5})}(2) \dots f_{2s_{r^2}}(2) - 1] \right\} \dots \right\} \right\}
\end{aligned}$$

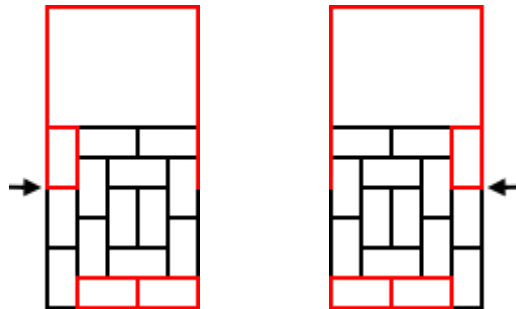
根據前面的四項，我們可以發現規律

以此種排法邏輯，慢慢類推下去，可求得總接法數，即特特接出的新特特殊形的總數；包括上面特特圖形的其他的底，以及用偶數  $2n \times 2$  所接出的圖形，就可以求得  $m \times n$  中，特特底下接  $m \times 2$ ，接出新的特特殊形的通解。

### 5、 $5 \times n$ 特特特

(1) 在  $5 \times n$  特特特的底主要有 2 種

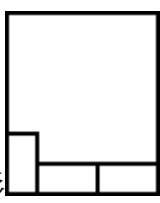
我們再將底部縮小成下面 2 圖：



(圖 1)

(圖 2)

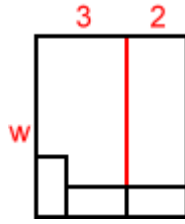
因為底部固定，所以先把下面 2 塊橫的往上移，形成新的圖形會較好討論。由於(圖 1)(圖 2)為對稱，所以以下部分以(圖 1)來討論：

此圖為新的圖形 ，只要再討論其內部線的分部即可。

$$\therefore r_5(n) = \times \begin{matrix} n-4 \\ \text{Diagram 1} \end{matrix} 2 + \times 2 \begin{matrix} n-4 \\ \text{Diagram 2} \end{matrix} + r_5(n-2)$$

(2) 暫定分為 3 部分來討論：

勺、即在  $5 \times n$  中，設高為  $w$ ，恰有第 3 條線的所有排法數



首先以  $3 \times w$  內部有幾條線來看，

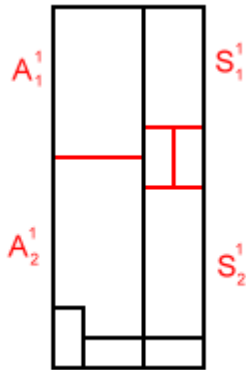
定義：設可有  $i$  條線， $(1 \leq i \leq \frac{w-2}{2}, i \in \mathbb{N})$

從上而下可以分第 1 塊、第 2 塊、 $\dots$ 、第  $(i+1)$  塊。

即在  $3 \times w$  的  $w = A_1^i + A_2^i + \dots + A_{i+1}^i$ ；

$$\text{且 } w \geq 4, \begin{cases} A_1^i = S_1^i + 1, 1 \leq i \leq \frac{w-2}{2}, i \in \mathbb{N} \\ A_j^i = S_j^i + 2, 1 < i < \frac{w-2}{2}, 2 \leq j \leq i, i, j \in \mathbb{N} \\ A_1^i = S_{i+1}^i + 1, 1 \leq i \leq \frac{w-2}{2}, i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(ㄅ) 當恰有 1 條線時：

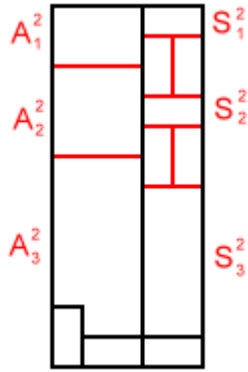


左邊為  $\{k_3(A_1^1) \times 1 - (k_3(A_1^1) - 1) \times 1\}$ ；

右邊為  $\{f_2(S_1^1) f_2(S_2^1 - 1)\}$ ；

即  $\{k_3(A_1^1) \times 1 - (k_3(A_1^1) - 1) \times 1\} \{f_2(S_1^1) f_2(S_2^1 - 1)\}$ 。

(ㄆ) 當恰有 2 條線時：

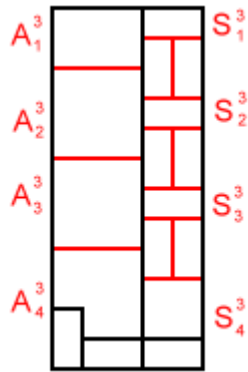


左邊為  $\{k_3(A_1^2)k_3(A_2^2) \times 1 - (k_3(A_1^2) - 1)(k_3(A_2^2) - 1) \times 1\}$  ;

右邊為  $\{f_2(S_1^2)f_2(S_2^2)f_2(S_3^2 - 1)\}$  ;

即  $\{k_3(A_1^2)k_3(A_2^2) \times 1 - (k_3(A_1^2) - 1)(k_3(A_2^2) - 1) \times 1\} \{f_2(S_1^2)f_2(S_2^2)f_2(S_3^2 - 1)\}$  。

(□)當恰有 3 條線時 :



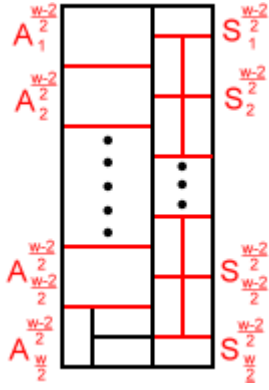
左邊為  $\{k_3(A_1^3)k_3(A_2^3)k_3(A_3^3) \times 1 - (k_3(A_1^3) - 1)(k_3(A_2^3) - 1)(k_3(A_3^3) - 1) \times 1\}$  ;

右邊為  $\{f_2(S_1^3)f_2(S_2^3)f_2(S_3^3)f_2(S_4^3 - 1)\}$  ;

即  $\{k_3(A_1^3)k_3(A_2^3)k_3(A_3^3) \times 1 - (k_3(A_1^3) - 1)(k_3(A_2^3) - 1)(k_3(A_3^3) - 1) \times 1\} \times$

$\{f_2(S_1^3)f_2(S_2^3)f_2(S_3^3)f_2(S_4^3 - 1)\}$  。

(□)由此推廣至  $\frac{w-2}{2}$  條線 :



左邊為

$$\left\{ k_3(A_1^{\frac{w-2}{2}}) k_3(A_2^{\frac{w-2}{2}}) \cdots k_3(A_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}}) \times 1 - \left( k_3(A_1^{\frac{w-2}{2}}) - 1 \right) \left( k_3(A_2^{\frac{w-2}{2}}) - 1 \right) \cdots \left( k_3(A_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}}) - 1 \right) \times 1 \right\};$$

$$\text{右邊為} \left\{ f_2(S_1^{\frac{w-2}{2}}) \cdots f_2(S_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}}) f_2(S_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}} - 1) \right\};$$

即

$$\left\{ k_3(A_1^{\frac{w-2}{2}}) k_3(A_2^{\frac{w-2}{2}}) \cdots k_3(A_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}}) \times 1 - \left( k_3(A_1^{\frac{w-2}{2}}) - 1 \right) \left( k_3(A_2^{\frac{w-2}{2}}) - 1 \right) \cdots \left( k_3(A_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}}) - 1 \right) \times 1 \right\}$$

$$\left\{ f_2(S_1^{\frac{w-2}{2}}) \cdots f_2(S_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}}) f_2(S_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}} - 1) \right\}。$$

$$\therefore \text{公式} : = \sum_{k=1}^{\frac{w-2}{2}} \left\{ \left[ \prod_{j=1}^k k_3(A_j^k) - \prod_{j=1}^k (k_3(A_j^k) - 1) \right] \left[ \prod_{j=1}^k f_2(S_j^k) \right] f_2(S_{k+1}^k - 1) \right\}$$

w=n-4 代入，再乘以 2(因為左右對稱)

$$\text{即} 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}} \left\{ \left[ \prod_{j=1}^k k_3(A_j^k) - \prod_{j=1}^k (k_3(A_j^k) - 1) \right] \left[ \prod_{j=1}^k f_2(S_j^k) \right] f_2(S_{k+1}^k - 1) \right\}$$

又、即  $5 \times (n-4)$  特特底的個數：

$$\Rightarrow D_5^3(n-4)$$

□、 $r_5(n-2)$

所以  $r_5(n) = (A) + (B) + (C)$

$$\Rightarrow r_5(n) = 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}} \left\{ \left[ \prod_{j=1}^k k_3(A_j^k) - \prod_{j=1}^k (k_3(A_j^k) - 1) \right] \left[ \prod_{j=1}^k f_2(S_j^k) \right] f_2(S_{k+1}^k - 1) \right\} + D_5^3(n-4) + r_5(n-2)$$

2)

6、例：當  $m=5$  時，我們將  $5 \times n$  分成三種情況的總和：

(1)  $5 \times n$  裡面恰有一條直線接上  $5 \times 2$  的總圖形數，在這裡我們嘗試利用正面的方式，求出總排法數。

(2) 特特殊形接上  $5 \times 2$  的總排法數。

(3) 特特特殊形。

現在就逐一來討論：

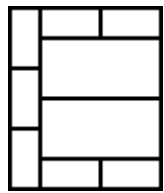
(1)  $5 \times 8$  的情況：

ㄣ、第一條直線存在情況(同第四條直線存在的情況)：

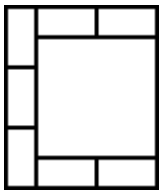
經我們把全部的情況列出，可以得到一些特徵——也就是 6 可以分成兩個奇數和數個偶數之和，而其中的偶數(也就是  $4 \times n$ ， $n \in \text{偶數}$ )裡面，爲了要避免破線，所以必須放入特殊形來擋住缺陷線，以下即爲我們所討論的過程：

$$1 + \dots + 1 \Rightarrow \text{剩 } 4 \quad 4 = 2 + 2 \Rightarrow 1 + 2 + 2 + 1 \quad \text{共 } k_4(1) \times \{ 1 \times k_4(2) + 1 \times k_4(2) - 1 \times 1 \} \times k_4(1) = 7$$

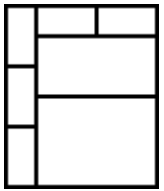
種



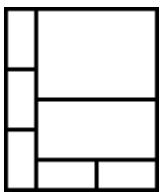
$$= 4 \Rightarrow 1 + 4 + 1 \quad \text{共 } k_4(1) \times 1 \times k_4(1) = 1 \text{ 種}$$



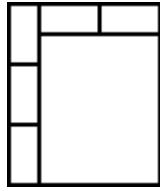
$$1 + \dots + 3 \Rightarrow \text{剩 } 2 \quad 2 = 2 \Rightarrow 1 + 2 + 3 \quad \text{共 } k_4(1) \times 1 \times k_4(3) = 2 \text{ 種}$$



$$3 + \dots + 1 \Rightarrow \text{剩 } 2 \quad 2 = 2 \Rightarrow 3 + 2 + 1 \quad \text{共 } k_4(3) \times 1 \times k_4(1) = 2 \text{ 種}$$

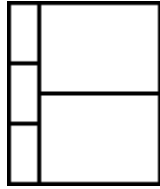


$$1 + 5 \Rightarrow \text{剩 } 0 \quad \text{不合，爲 } 0 \text{ 種}$$



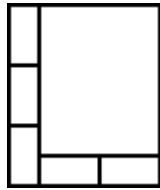
3+3⇒剩 0

不合，為 0 種



5+1⇒剩 0

不合，為 0 種



以上是  $5 \times 6$  中有第一條直線的總排法數，但是與我們所要求的還有一些多的，所以還必須把它加以去除，以算出我們想要的最後總排法數。而使得  $5 \times 2$  不可以接的只有與最下層的排法有關，所以當最底下的矩形的端邊大於 1 時，則需扣除此種情形。

$$1 + \dots + 3 \Rightarrow \text{剩 } 2 \quad 2=2 \quad \Rightarrow 1+2+3 \quad \text{共 } \frac{1}{2} k_4(1) \times 1 \times k_4(3) = 1 \text{ 種不合}$$

所以能成為  $5 \times 8$  的特特殊圖形的有 11 個。

∴能成為  $5 \times 8$  的特特殊圖形且恰有第一條與第四條直線的圖形一共有 22 種。

所以依照上面的情況來推廣可得：

$$k_4(x_1)k_4(x_2) \prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} k_4(a_i) \times \left[ \sum_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} -(-1)^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} k_4(r_i)} \right] -$$

$$\frac{1}{2} k_4(x_1)k_4(x_2) \prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} k_4(a_i) \times \left[ \sum_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} -(-1)^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} k_4(r_i)} \right]$$

$$x_1 + x_2 = 2, 4, 6, \dots, n-2 \wedge x_1, x_2 \in \text{奇數} \wedge a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{\frac{n-x_1-x_2}{2}} = n - x_1 - x_2 \wedge$$

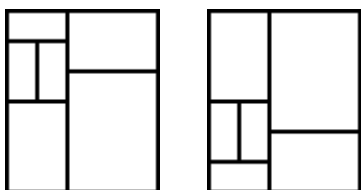
$$x_1 + x_2 = n \text{ 時，均為 } 0 \text{ 種} \wedge r_1, r_2, r_3, \dots, r_{\frac{n-x_1-x_2}{2}} \in a_1, a_2, a_3, \dots, a_{\frac{n-x_1-x_2}{2}},$$

後面的  $x_2 \neq 1$  的奇數。

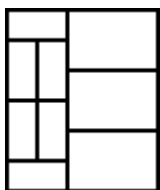
又、第二條直線存在情況(同第三條直線存在的情況)：

如果要利用有第一條直線的討論方法，將會很麻煩，所以現在改用有橫線的情況來討論。

恰有一條橫線： $2 [ f_2(1)f_2(3) + f_2(3)f_2(1) ] - f_2(1)f_2(1) = 11$



恰有兩條橫線： $\{ [ k_3(2) + k_3(2) ] - 1 \} \{ 2 [ f_2(1)f_2(0)f_2(1) ] \} = 10$



∴共有 21 種

∴能成爲 5×8 的特特殊圖形且恰有第二條與第三條直線的圖形一共有 42 種

$$\text{令 } A_1^i = S_1^i + 1, A_2^i = S_2^i + 2, A_3^i = S_3^i + 2, \dots, A_n^i = S_n^i + 2 \quad i \geq 3$$

$$G(i) = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ (S_1^i + 1)(S_2^i + 1) - 1 & i \geq 3, i \in N \\ T(i) & i = 2 \end{cases}$$

$$T(i) = k^{i-1} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{i-1} \leq i} A_{n_1} A_{n_2} A_{n_3} \dots A_{n_{i-1}} + (-1)^{i-2} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{i-2} \leq i} A_{n_1} A_{n_2} A_{n_3} \dots A_{n_{i-2}} + (-1)^2$$

$$k^{i-3} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{i-3} \leq i} A_{n_1} A_{n_2} A_{n_3} \dots A_{n_{i-3}} + \dots + (-1)^{i-2} k \sum_{1 \leq n_1 \leq i} A_{n_1} + (-1)^{i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{\substack{S_1^i + S_2^i + S_{1+i}^i = n-2-2i \\ S_2^i, S_3^i, \dots, S_i^i \in \{1, 2, \dots, n-2-2i\}}} G(i) \{ 2f_i(S_1^i)f_i(S_2^i) \dots f_i(S_{1+i}^i) - f_i(S_1^i)f_i(S_2^i) \dots f_i(S_{1+i}^i - 2) \}$$

(2)特特殊形接 5×2 的情況： $q_5(n) =$

$$4D_5^1(n-2) + D_5^2(n-2) + D_5^4(n-2) + D_5^6(n-2) + \frac{5 \times n \text{中恰有} 2,3 \text{線}}{2} + \frac{5 \times n \text{中特特特}}{2} +$$

$$[ D_5^1(n-2) + 3D_5^2(n-2) + D_5^3(n-2) + D_5^4(n-2) + D_5^7(n-2) ] + (5 \times n \text{中恰有} 1,4 \text{線}) +$$

$$D_5^2(n-2) + 4D_5^3(n-2) + D_5^5(n-2) + D_5^7(n-2) + \frac{5 \times n \text{中恰有} 2,3 \text{線}}{2} + \frac{5 \times n \text{中特特特}}{2} +$$

$$D_5^1(n-2) + D_5^2(n-2) + D_5^4(n-2) + D_5^3(n-2) + D_5^5(n-2) + D_5^1(n-2) + D_5^6(n-2) +$$

$$D_5^2(n-2) + D_5^3(n-2) + D_5^7(n-2)$$

$$(3) \text{特特殊形} : r_5(n) = 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}} \left\{ \left[ \prod_{j=1}^k k_3(A_j^k) - \prod_{j=1}^k (k_3(A_j^k) - 1) \right] \left[ \prod_{j=1}^k f_2(S_j^k) \right] f_2(S_{k+1}^k - 1) \right\} + D_5^3(n-4) +$$

$r_5(n-2)$

$$(4) \text{所以 } f_5(n) = \sum (-1)^q \sum f_{k_1}(x_1) f_{k_1}(x_2) \dots f_{k_1}(x_{\frac{n}{2}}) f_{k_2}(x_1) f_{k_2}(x_2) \dots$$

$$f_{k_2}(x_{\frac{n}{2}}) f_{k_3}(x_1) f_{k_3}(x_2) \dots f_{k_3}(x_{\frac{n}{2}}) f_{k_m}(x_1) f_{k_m}(x_2) \dots f_{k_m}(x_{\frac{n}{2}}) +$$

$$2k_4(x_1)k_4(x_2) \prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} k_4(a_i) \times \left[ \sum -(-1)^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} k_4(r_i)} \right] -$$

$$k_4(x_1)k_4(x_2) \prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} k_4(a_i) \times \left[ \sum -(-1)^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}} k_4(r_i)} \right] +$$

$$2 \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} \sum_{\substack{S_1^i + S_2^i + S_{1+i}^i = n-2-2i \\ S_2^i, S_3^i, \dots, S_{i+1}^i \in \{1, 2, \dots, n-2-2i\}}} G(i) \{ 2f_i(S_1^i) f_i(S_2^i) \dots f_i(S_{1+i}^i) - f_i(S_1^i) f_i(S_2^i) \dots f_i(S_{1+i}^i - 2) \}$$

$$+ 4D_5^1(n-2) + D_5^2(n-2) + D_5^4(n-2) + D_5^6(n-2) + \frac{5 \times n \text{中恰有} 2,3 \text{線}}{2} + \frac{5 \times n \text{中特特特}}{2} +$$

$$[D_5^1(n-2) + 3D_5^2(n-2) + D_5^3(n-2) + D_5^4(n-2) + D_5^7(n-2)] + (5 \times n \text{中恰有} 1,4 \text{線}) +$$

$$D_5^2(n-2) + 4D_5^3(n-2) + D_5^5(n-2) + D_5^7(n-2) + \frac{5 \times n \text{中恰有} 2,3 \text{線}}{2} + \frac{5 \times n \text{中特特特}}{2} +$$

$$D_5^1(n-2) + D_5^2(n-2) + D_5^4(n-2) + D_5^3(n-2) + D_5^5(n-2) + D_5^1(n-2) + D_5^6(n-2) +$$

$$D_5^2(n-2) + D_5^3(n-2) + D_5^7(n-2) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}} \left\{ \left[ \prod_{j=1}^k k_3(A_j^k) - \prod_{j=1}^k (k_3(A_j^k) - 1) \right] \left[ \prod_{j=1}^k f_2(S_j^k) \right] f_2(S_{k+1}^k - 1) \right\} +$$

$$D_5^3(n-4) + r_5(n-2)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = 5, \quad x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{\frac{n}{2}} = n$$

$k_1, k_2, k_3, \dots, k_m, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\frac{n}{2}}$  均為非負整數，

$k_i \in \mathbb{N}$  時， $i=q$ ， $i$  為最大的值。

$$x_1 + x_2 = 2, 4, 6, \dots, n-2 \wedge x_1, x_2 \in \text{奇數} \wedge a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{\frac{n-x_1-x_2}{2}} = n - x_1 - x_2 \wedge$$

$$x_1 + x_2 = n \text{ 時，均為 } 0 \text{ 種} \wedge r_1, r_2, r_3, \dots, r_{\frac{n-x_1-x_2}{2}} \in a_1, a_2, a_3, \dots, a_{\frac{n-x_1-x_2}{2}},$$

後面的  $x_2 \neq 1$  的奇數。

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{\frac{n}{2}} = n, x_1 + x_2 + x_3 + \dots + a_{\frac{n-1}{2}} = n-1,$$

$$G(i) = \begin{cases} 1, i=1 \\ (S_1^i + 1)(S_2^i + 1) - 1, i \geq 3, i \in N \\ T(i), i=2 \end{cases}$$

陸、結論：

一、 $f_1(n) = 1$ ，( $n = 2r$ ， $r \in \mathbb{N}$ )

$$\text{二、} f_2(n) = \sum \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)!}{x_1! x_2! x_3! \dots x_n!} f_2(1)^{x_1} \times k_2(2)^{x_2} \times k_2(3)^{x_3} \times k_2(4)^{x_4} \times \dots \times k_2(n)^{x_n}$$

而  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = n$ ，且  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  為非負整數。

$$\text{三、} f_3(r) = \sum \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_r)!}{x_1! x_2! x_3! \dots x_r!} f_3(1)^{x_1} \times k_3(2)^{x_2} \times k_3(3)^{x_3} \times k_3(4)^{x_4} \times \dots \times k_3(r)^{x_r}$$

， $n = 2r$ ，而  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + rx_r = r$ ，且  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$  為非負整數。

且  $k_3(n)$  ( $n \in 2k$  ( $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ))：

1、 $k_3(2) = 3$ 。

2、 $k_3(n) = 2$ ， $n \geq 4$ 。

$$\text{四、} f_4(n) = \sum \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)!}{x_1! x_2! x_3! \dots x_n!} f_4(1)^{x_1} \times k_4(2)^{x_2} \times k_4(3)^{x_3} \times k_4(4)^{x_4} \times \dots \times k_4(n)^{x_n}$$

而  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = n$ ，且  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  為非負整數。

且  $k_4(n)$  ( $n \in 2k$  ( $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ))：

1、 $k_4(2) = 4$ 。

2、 $k_4(2k+2) = 3$ ， $k \in \mathbb{N}$ 。

3、 $k_4(2k+1) = 2$ ， $k \in \mathbb{N}$ 。

五、 $g_m(n)$ (至少有一條缺陷線的總排法數)：

(一) $m$  為奇數時：

$$g_m(n) = \sum (-1)^q \sum f_{k_1}(x_1) f_{k_1}(x_2) \dots f_{k_1}(x_{\frac{n}{2}}) f_{k_2}(x_1) f_{k_2}(x_2) \dots f_{k_2}(x_{\frac{n}{2}}) f_{k_3}(x_1) f_{k_3}(x_2) \dots f_{k_3}(x_{\frac{n}{2}}) f_{k_m}(x_1) f_{k_m}(x_2) \dots f_{k_m}(x_{\frac{n}{2}})$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = m, \quad x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{\frac{n}{2}} = n$$

$k_1, k_2, k_3, \dots, k_m, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\frac{n}{2}}$  均為非負整數，

$k_i \in \mathbb{N}$  時， $i=q$ ， $i$  為最大的值。

(二) $m$  為偶數時：

$$g_m(n) = \sum (-1)^q \sum f_{k_1}(x_1) f_{k_1}(x_2) \dots f_{k_1}(x_{\frac{n}{2}}) f_{k_2}(x_1) f_{k_2}(x_2) \dots f_{k_2}(x_{\frac{n}{2}}) f_{k_3}(x_1) f_{k_3}(x_2) \dots f_{k_3}(x_{\frac{n}{2}}) f_{k_m}(x_1) f_{k_m}(x_2) \dots f_{k_m}(x_{\frac{n}{2}})$$

1、 $n$  為偶數時：

(1)  $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = m$ ， $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$  至少有一為奇數

， $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{\frac{n}{2}} = n$ ， $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\frac{n}{2}}$  均為偶數， $k_i \in \mathbb{N}$  時， $i=q$ ， $i$

為最大的值。

(2)  $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = m$ ， $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$  均為偶數時

$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{\frac{n}{2}} = n$ ， $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\frac{n}{2}}$  屬於正整數， $k_i \in \mathbb{N}$  時， $i=q$ ， $i$

$i$  為最大的值。

2、 $n$  為奇數時：

$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = m$ ， $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$  均為偶數時，

$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{\frac{n}{2}} = n$ ， $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\frac{n}{2}}$  屬於正整數，

$k_i \in \mathbb{N}$  時， $i=q$ ， $i$  為最大的值。

六、 $f_m(n) = g_m(n) + h_m(n)$  ( $m \geq 5$ )

$h_m(n) = p_m(n) + q_m(n) + r_m(n)$ ：

(一) 恰有 k 條線存在的總排法數：

$$\prod \left( \sum_{i,j,r=1}^n (-1)^n f_{b_r^i}(x_j) \right), \quad \sum_{j=1}^n x_j = n$$

1、

(1)  $x_j$  均為偶數時， $\sum_{i=1}^n (\sum_{r=1}^n b_r^i) = m$  且  $b_r^i \in \text{正偶數} \cup \{0\}$

(2)  $x_j$  中至少有一為奇數時， $\sum_{i=1}^n (\sum_{r=1}^n b_r^i) = m$  且  $b_r^i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

2、

$$\sum_{r=1}^n b_r^i = a_i, \quad \sum_{i=1}^n a_i = m \text{ 且 } b_r^i \in \text{正偶數} \cup \{0\}, \text{ } a_i \text{ 中必須有一奇一偶}$$

3、

$$\sum_{r=1}^n b_r^i = a_i, \quad \sum_{i=1}^n a_i = m \text{ 且 } b_r^i \in \text{正整數} \cup \{0\}, \text{ } a_i \text{ 中必須均為奇數}$$

## 柒、未來發展方向：

- (一)、利用  $a \times b$  的矩形填滿  $m \times n$  的矩形的總排法數。
- (二)、利用固定的長方體填滿  $m \times n \times q$  的長方體的排法邏輯。
- (三)、利用固定的長方體填滿  $m \times n \times q$  的長方體的總排法數。
- (四)、利用  $a \times b \times c$  的長方體填滿  $m \times n \times q$  的長方體的排法邏輯。
- (五)、利用  $a \times b \times c$  的長方體填滿  $m \times n \times q$  的長方體的總排法數。

## 捌、參考資料：

- (一)、周明憲 著/C 語言演算法徹底入門
- (二)、施威銘 著/C 語言學習實務
- (三)、黃偉烈 著/磚塊堆疊問題之研究與探討
- (四)、洪維思 著/Mathematica4.0/初版/台北市/碁峰資訊股份有限公司/672 頁/ 2001 年

## 玖、其他：

- (一)、全部的圖形總數程式碼：

```

#include <conio.h>
#include <iostream.h>
#include <stdio.h>
#include <iomanip.h>

//#define DEBUG //if defined then won't show ways of filling grid
//if not define then will show ways of filling grid

long quantity=0;
int max_x;
int max_y;
int grid[100][100]={0};

void fill_grid(int x,int y,int direction,int level);
void print_grid(void);

void main(void)
{
    cout << "Input length of the grid : ";
    cin >> max_y;

    cout << "Input width of the grid : ";
    cin >> max_x;

    for(int a=0;a<max_x;a++)
        for(int b=0;b<max_y;b++)
            grid[a][b]=0;

    fill_grid(0,0,0,1);

    cout << endl << "----- result -----" << endl;
    cout << "There are " << quantity << " ways to fill the grid.";
    getch();
}

void fill_grid(int x,int y,int direction,int level)
{
    if(x<max_x) {

```

```

if(grid[x][y]==0) { //current location is empty
    if(direction==0) { //horizontal fill
        if(x+1<max_x && grid[x+1][y]==0) { //if have enough space
            grid[x][y]=level; //fill data
            grid[x+1][y]=level;

            fill_grid(x+2,y,0,level+1); //continue filling

            grid[x][y]=0; //reset data
            grid[x+1][y]=0;
        }
        fill_grid(x,y,1,level);
    }else if(direction==1) { //vertical fill
        if(y+1<max_y && grid[x][y+1]==0) { //if have enough space
            grid[x][y]=level; //fill data
            grid[x][y+1]=level;

            fill_grid(x+1,y,0,level+1); //continue filling

            grid[x][y]=0; //reset data
            grid[x][y+1]=0;
        }
    } //if(direction==0)
}else {
    fill_grid(x+1,y,0,level); //continue filling
} //if(grid[x][y]==0)
}else {
    if(y==max_y-1) { //have filled to the last space.find a way to fill

        quantity++;
#ifdef DEBUG
        clrscr();
        cout << endl << "----- " << quantity << "th way
-----" << endl;
        print_grid();
        cout << "press any key to view next..." << endl;
        getch();
#endif

```

```

        }else
            fill_grid(0,y+1,0,level);
    } //if(x<max_x)
}

void print_grid(void)
{
    for(int a=0;a<max_y;a++)
    {
        for(int b=0;b<max_x;b++)
        {
            textbackground(grid[b][a]%7+1);
            cprintf(" ");
        }
        cout << endl;
    }
    textbackground(8);
}

```

(二)、有缺陷線的總圖形排法數程式碼：

```

{\rtf1\ansi\ansicpg950\deff0\deflang1033\deflangfe1028 {\fonttbl {\f0\fnil\fcharset136
 \b7\73\b2\d3\a9\fa\c5\e9;} {\f1\fmmodern\frq6\fcharset136 \b7\73\b2\d3\a9\fa\c5\e9;}}
\viewkind4\uc1\pard\lang1028\f0\fs20 #include <conio.h>\par
#include <iostream.h>\par
#include <stdio.h>\par
#include <iomanip.h>\par
#include <ctype.h>\par
#include <time.h>\par
#include <dos.h>\par
\par
double quantity=0;\par
int max_x;\par
int max_y;\par
int grid[100][100]={0};\par
char view_grid;\par
\par
void fill_grid(int x,int y,int direction,int level);\par
void print_grid(void);\par

```

```

int check_row(int row); //return 1 if line is broken\par
int check_column(int column); //return 1 if line is broken\par
\par
void main(void)\par
\{\par
\tab char re_use,count_time;\par
\tab time_t start,end;\par
\par
\tab do\{\par
\tab\tab clrscr();\par
\par
\tab\tab cout << "Input length of the grid : ";\par
\tab\tab cin >> max_y;\par
\par
\tab\tab cout << "Input width of the grid : ";\par
\tab\tab cin >> max_x;\par
\par
\tab\tab cout << "Show Grid ? (Y/N) : ";\par
\tab\tab cin >> view_grid;\par
\tab\tab view_grid=toupper(view_grid);\par
\par
\tab\tab if(view_grid!='Y')\par
\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab cout << "Count Time ? (Y/N) : ";\par
\tab\tab\tab cin >> count_time;\par
\tab\tab\tab count_time=toupper(count_time);\par
\tab\tab\}\par
\par
\tab\tab for(int a=0;a<max_x;a++)\par
\tab\tab\tab for(int b=0;b<max_y;b++)\par
\tab\tab\tab\tab grid[a][b]=0;\par
\tab\tab quantity=0;\par
\par
\tab\tab start=time(NULL);\par
\tab\tab fill_grid(0,0,0,1);\par
\tab\tab end=time(NULL);\par
\par
\tab\tab cout << endl << "----- result -----" << endl;\par

```

```

\tab\tab cout << "There are " << quantity << " ways to fill the grid." << endl << endl;\par
\par
\tab\tab if(count_time=='Y')\par
\tab\tab\tab cout << "Time used : " << end-start << " Seconds." <<endl;\par
\par
\tab\tab cout << "Find another grid ? (Y/N) : ";\par
\tab\tab cin >> re_use;\par
\tab\tab re_use=toupper(re_use);\par
\tab\}while(re_use=='Y');\par
\}\par
\par
void fill_grid(int x,int y,int direction,int level)\par
\{\par
\tab if(x<max_x) \{\par
\tab\tab if(grid[x][y]==0) \{ //current location is empty\par
\tab\tab\tab if(check_row(y)!=0) \{\par
\tab\tab\tab\tab if(direction==0) \{ //horizontal fill\par
\tab\tab\tab\tab\tab if(x+1<max_x && grid[x+1][y]==0) \{ //if have enough space\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x][y]=level; //fill data\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x+1][y]=level;\par
\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab fill_grid(x+2,y,0,level+1); //continue filling\par
\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x][y]=0; //reset data\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x+1][y]=0;\par
\tab\tab\tab\tab\tab\}\par
\tab\tab\tab\tab\tab fill_grid(x,y,1,level);\par
\tab\tab\tab\tab\}else if(direction==1) \{ //vertical fill\par
\tab\tab\tab\tab\tab if(y+1<max_y && grid[x][y+1]==0) \{ //if have enough space\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x][y]=level; //fill data\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x][y+1]=level;\par
\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab fill_grid(x+1,y,0,level+1); //continue filling\par
\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x][y]=0; //reset data\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x][y+1]=0;\par
\tab\tab\tab\tab\tab\}\par
\tab\tab\tab\tab\} //if(direction==0)\par

```

```

\tab\tab\tab\}\par
\tab\tab\}\else \{\par
\tab\tab\tab fill_grid(x+1,y,0,level); //continue filling\par
\tab\tab\} //if(grid[x][y]==0)\par
\tab\}\else \{\par
\tab\tab if(y==max_y-1) \{ //have filled to the last space.find a way to fill\par
\par
\tab\tab\tab if(check_row(y)==0)\par
\tab\tab\tab\}\par
\tab\tab\tab\tab return;\par
\tab\tab\tab\}\par
\par
\tab\tab\tab for(int a=1;a<max_x;a++)\par
\tab\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab\tab if(check_column(a)==0)\par
\tab\tab\tab\tab\}\par
\tab\tab\tab\tab\tab return;\par
\tab\tab\tab\tab\}\par
\tab\tab\tab\}\par
\par
\tab\tab\tab quantity++;\par
\par
\tab\tab\tab if(view_grid=='Y')\par
\tab\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab\tab clrscr();\par
\tab\tab\tab\tab cout << endl << "-----" << quantity << "th way
-----" << endl;\par
\tab\tab\tab\tab print_grid();\par
\tab\tab\tab\tab cout << "press any key to view next..." << endl;\par
\tab\tab\tab\tab getch();\par
\tab\tab\tab\}\par
\tab\tab\}\else \{\par
\tab\tab\tab fill_grid(0,y+1,0,level);\par
\tab\tab\}\par
\tab\} //if(x<max_x)\par
\}\par
\par
int check_row(int row)\par

```

```

\{\par
\tab for(int a=0;a<max_x;a++)\par
\tab\tab if(grid[a][row-1]==grid[a][row])\par
\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab return 1;\par
\tab\tab\}\par
\tab return 0;\par
\}\par
\par
int check_column(int column)\par
\{\par
\tab for(int a=0;a<max_y;a++)\par
\tab\tab if(grid[column-1][a]==grid[column][a])\par
\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab return 1;\par
\tab\tab\}\par
\tab return 0;\par
\}\par
\par
void print_grid(void)\par
\{\par
\tab for(int a=0;a<max_y;a++)\par
\tab\{\par
\tab\tab for(int b=0;b<max_x;b++)\par
\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab textbackground(grid[b][a]%7+1);\par
\tab\tab\tab cprintf(" ");\par
\tab\tab\}\par
\tab\tab cout << endl;\par
\tab\}\par
\tab textbackground(8);\par
\}\par
\fl\par
}

```

## 評語

1. 作品呈現完整，表達只有靜態方式，無法展現生動的結果!。
2. 如能採用示範証證理論將較生動活潑。
3. 建議能把推廣部分完成。