臺灣二○○三年國際科學展覽會

科　　別：數學科

作品名稱：空心球的奧秘

學　　校：台北縣立中正國民中學

作　　者：陳新、曹力文

作者簡介

我們是熱愛運動而且喜歡思考的國中三年級學生。雖然我們熱愛運動，但是面對籃框總是進球不多，更別提像其他同學每投必中，而且還是超難的空心球了。於是我們決定著手研究一套必勝的絕技，找出空心球的奧妙之處。因此，我們請教多位老師，利用相關的數學知識與運動原理來討論籃球投出後的運行軌跡，以及影響其命中率的相關因素。在網路上看到國際科展的活動，於是決定將研究內容作進一步的探討，完成了這一份研究報告。

空心球的奧秘

中文摘要

上體育課的時候看到同學投空心球（籃球在沒有碰著籃框的情況下進入籃中），覺得好厲害。因此，我們利用相關的數學知識與運動原理來討論籃球投出後的運行軌跡，以及影響其命中率的相關因素。我們得知籃球的運行軌跡是一條拋物線，並求出其二次方程式；並利用標準籃球直徑與籃框直徑找出籃球進入籃框的最小入射角。若要提高命中率，必須考慮籃球投出時的投射角、初速度、籃球投出時的高度以及籃球與籃框水平距離之間的相關影響。此外，我們藉由電腦軟體列出相關數據提供作爲實際投籃時的參考，並藉此進一步分析上述因素如何影響籃球運行軌跡以及如何提高投籃的命中率。

Abstract

Those who always shoot nothing but the net in basketball games were always heroes to me. I have being thinking for a long time how to become a person of that kind. For this, we investigated the trajectory of shooting a basketball and the factors to increasing the field goal percentages through our knowledge on mathematics and physics. We have obtained that the trajectory is in fact a parabola and, we further, found its quadratic equation. We also derived the minimal incident angle from the diameters of the standard basketball and hoop as well as the quadratic equation we have found. To raise the field goal percentages, some important factors must be taken into consideration, such as the vertical and horizontal distance between the basketball and the hoop, the incident angle and the initial velocity of shooting. Finally, we provide some concerning data for reference, and analyzed how the important factors we have mentioned above have affected our basketball trajectory and how, of the most importance, to increase the field goal percentages.

壹、前言

一、研究動機

在上體育課的時候看到同學投空心球（籃球在沒有碰著籃框的情況下送入籃中），覺得好厲害。記得數學課的時候，老師說過投籃的運動路徑是一條拋物線，但是老師並沒有深入解說哪些因素會影響籃球的運行。因此，我們利用課餘時間和數學老師討論如何更容易投出空心球及其相關問題。

二、研究目的

1、 在某些條件固定下，怎樣可以增加投出空心球的機會？

2、 找出籃球行進路徑的拋物線方程式。

3、 籃球投出時的離地高度、投出速度、投出角度、立足點離籃框的距離和空心球的路徑關係。

貳、研究方法或過程

一、請教體育老師標準球場尺寸規定，得知標準籃球直徑爲約 24.27 公分、籃框直徑約爲 45 公分、籃框離地面高度爲 3.05 公尺、罰球線離籃框的水平距離約爲 4.45 公尺、以及三分球線離籃框的水平距離爲 6.25 公尺，其餘相關尺寸規定請參考附件一。

二、實際進行投籃實驗，尋找及驗證可能影響籃球運行的因素。

三、找理化老師討論，並請教老師物理學相關的運動原理（附件二）。

四、閱讀相關數學書籍，並請數學老師補充研究所需的相關知識。

五、研究器材：

1、 個人電腦。

2、 籃球。

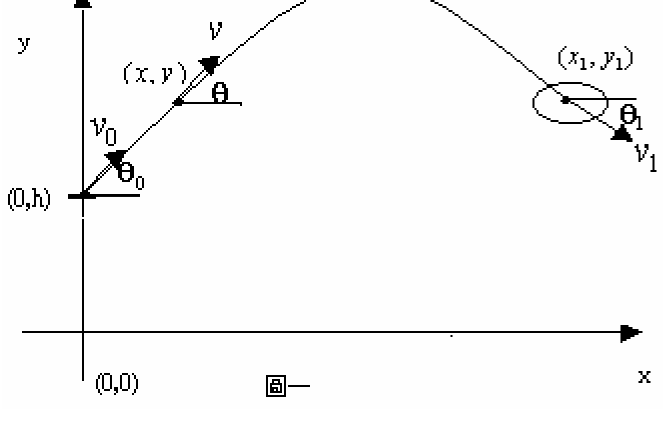
3、 皮尺。

4、 紙筆。

5、 MATLAB 5.2。

六、定義與符號：

1、 如圖一，以球員的立足點爲座標軸原點 $(0,0)$ 、籃球投出時的起始位置爲 $(0,h)$ 、籃球運行中的位置爲 (x,y) 、以及定籃框中心點位置爲 (x_1,y_1) 。



圖一

2、 相關符號及其說明

v_0：籃球投出時的初速度（單位：公尺/秒）。

v：籃球行進時的速度（單位：公尺/秒）。

v_1：籃球到達籃框中心時的速度（單位：公尺/秒）。

v_{1x}：v_1 在水平方向的分速（單位：公尺/秒）。

v_{1y}：v_1 在垂直方向的分速（單位：公尺/秒）。

θ_0：籃球投出時的方向與水平線所形成的投射角。

θ：籃球行進時的方向與水平線所形成的角度。

θ_1：籃球進入籃框時的方向與水平線所形成的入射角。

ϕ：籃球進入籃框時的方向與水平線所形成的最小入射角。

t ：籃球自投出到當時行進位置所經歷的時間（單位：秒）。

t_1：籃球自投出到進入籃框時所經歷的時間（單位：秒）。

g：重力加速度，即 $g = 9.8$ 公尺/秒 ^{2}。

R：籃框直徑，即 $R = 45$ 公分。

r：籃球直徑，即 $r = 24.27$ 公分。

參、研究結果與討論

一、籃球行進路徑是一條拋物線

若籃球投出時的初速度為 v_0，且籃球投出時的方向與水平所形成的投射角為 θ_0，則該球在水平方向的分速為 $v_0\cos\theta_0$，垂直方向的分速為 $v_0\sin\theta_0$，再根據物理學的運動原理，我們可以得到

$$\begin{cases} x = (v_0\cos\theta_0)t & \text{-----------------------------(1)} \\ y - h = (v_0\sin\theta_0)t - \dfrac{1}{2}gt^2 & \text{-----------------------------(2)} \end{cases}$$

將(1)式中 $t = \dfrac{x}{v_0\cos\theta_0}$ 代入(2)式中消去 t，得到

$$y = (v_0\sin\theta_0)\frac{x}{v_0\cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta_0}\right)^2 + h$$

整理後，我們得到 y 是 x 的二次函數，即

$$y = \frac{-g}{2v_0^2}(\tan^2\theta_0 + 1)\,x^2 + \tan\theta_0\,x + h \quad \text{---------------------(3)}$$

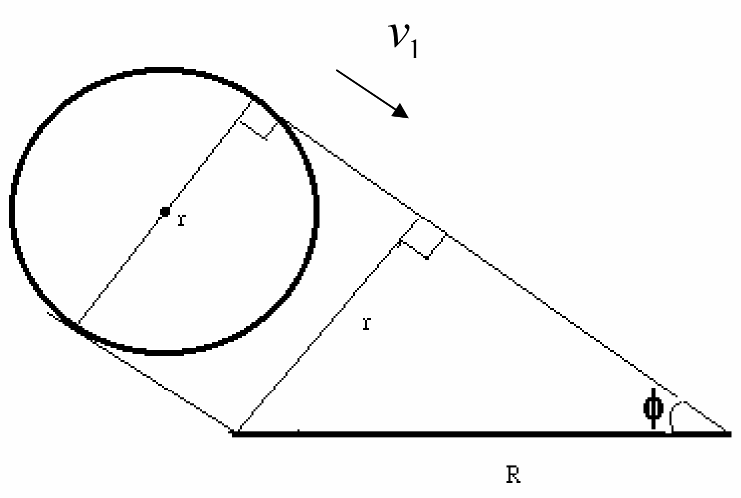
由(3)式，可得知籃球運動路徑是一條拋物線。

二、籃球進入籃框的最小入射角

已知標準籃球直徑 r 為 24.27 公分，而籃框直徑 R 為 45 公分，因此籃球最大的橫切面面積約為籃框面積的 30%。若籃球由上而下垂直穿過籃框，應該是一件簡單的事。但考慮球員與籃框有一定的距離及高度，籃球是以拋物線的路徑進入籃框，因此籃

球進入籃框時的方向與水平線所形成的入射角θ_1是很難接近90度的，儘管愈大的入射角有愈高的進球機會，但最小的入射角應爲何呢？

我們考慮籃球進入籃框時的方向與水平線所形成的最小入射角ϕ的側面圖，如圖二。可知$\sin\phi = \dfrac{r}{R}$，且$\tan\phi = \dfrac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$。若將$R = 45$ 公分，$r = 24.27$公分代入，得到$\tan\phi \fallingdotseq 0.6405$，即$\phi \fallingdotseq 32.64$度。



圖二

由上得知籃球進入籃框時的方向與水平線所形成的入射角θ_1必須大於等於ϕ，即$\theta_1 \geq \phi$，這意味著

$$\tan\theta_1 \geq \tan\phi \fallingdotseq 0.6405 \text{---} (4)$$

從另一方面來看，當籃球投出時的初速度爲v_0且投射角爲θ_0時，若要能成功投出空心球則籃球運動路徑必定滿足(3)式，且籃球必須通過(x_1, y_1)，那麼此時入射角θ_1是多少呢？

已知籃球投出時的初速度v_0在水平方向分速爲$v_0 \cos\theta_0$，在垂直方向分速爲$v_0 \sin\theta_0$。籃球投出之後，在不考慮空氣阻力及其因素下，籃球在水平方向並未再受力，一直會保持等速度運動。因此，當籃球到達籃框中心點位置(x_1, y_1)時，v_1在水平方向分速v_{1x}仍爲$v_0 \cos\theta_0$；然而，籃球投出之後，籃球在垂直方向受到地心引力影響，爲一等加速度運動。因此，當籃球經過t_1秒到達(x_1, y_1)時，v_1在垂直方向分速v_{1y}爲$v_0 \sin\theta_0 - gt_1$。又$x_1 = v_0 \cos\theta_0 t_1$，所以得到

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0 \cos\theta_0}$$

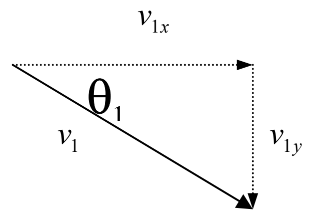
將之代入垂直方向分速v_{1y}可得

$$v_{1y} = v_0 \ \sin\theta_0 - g\frac{x_1}{v_0\cos\theta_0}$$

再利用籃球到達(x_1, y_1)時的v_1在水平方向分速v_{1x}及垂直方向分速v_{1y}，如圖三，我們可以求出

$$\tan\theta_1 = \frac{|v_{1y}|}{v_{1x}} = \left| \frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0} - \frac{gx_1}{v_0^2\cos^2\theta_0} \right|$$

$$= \left| \tan\theta_0 - \frac{gx_1}{v_0^2}(1+\tan^2\theta_0) \right|$$



圖三

由(4)式$\tan\theta_1 \geq \tan\phi$，可以改寫成

$$\tan\theta_1 = \left| \tan\theta_0 - \frac{gx_1}{v_0^2}(1+\tan^2\theta_0) \right| \geq \tan\phi \text{--------------(5)}$$

我們可以發現，當籃球投出時的初速度為v_0且投射角為θ_0時，必須滿足(5)式方得以空心球方式進籃。換言之，若控制初速度v_0與投射角θ_0得到較大的$\tan\theta_1$，則必然有較大的入射角θ_1，也就意味著有較大的進球機會。

三、初速度與投射角的控制

若一位站在特定點（如罰球線或三分球線）的球員想要投出一個空心球，其籃球運行過程必須同時滿足(3)、(5)兩式，其中初速度v_0與投射角θ_0為關鍵影響因素。回顧實際練球情況，每個球員的特性不同，有些人習慣以特定角度投球，視不同的距離與高度調整球速；亦有些人有習慣特定球速，視不同的距離與高度調整角度。我們想了解其中變化的情形，於是作了以下的討論。

1、　若以特定角度θ_0投球，可視不同的距離與高度調整球速v_0。

我們知道若要成功投出一個空心球必須符合(3)、(5)兩式，意味著(3)式的拋物線必須通過(x_1, y_1)，即

$$y_1 = \frac{-g}{2v_0^2}(\tan^2\theta_0 + 1)\,x_1^{\ 2} + \tan\theta_0\ x_1 + h \quad \text{-----------------(6)}$$

整理之後得到

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx_1^2(1+\tan^2\theta_0)}{2(x_1\tan\theta_0 + h - y_1)}} \text{--------------------------------------(7)}$$

根據以上的結果，我們可以依據球員的投球高度、立足位置、以及習慣投射角度，找出適合的投球速度；再將初速度v_0與投射角θ_0代入(5)式中算出

$\tan\theta_1$，並檢驗是否符合 $\tan\theta_1 \geq \tan\phi$，數值上即為 $\tan\theta_1$ 必須大於等於 0.6405，方得以空心球方式進籃，且較大的 $\tan\theta_1$ 意味著有較大的進球機會。

目前國中學生身高約為 150 公分到 180 公分，加上手臂長度以及跳躍高度，我們討論 h 為 1.8 公尺到 2.1 公尺，並討論球員位在罰球線與三分球線的情況，藉由電腦軟體 MATLAB 5.2 列出相關數據，製作出以下表格提供同學在投籃時的參考。

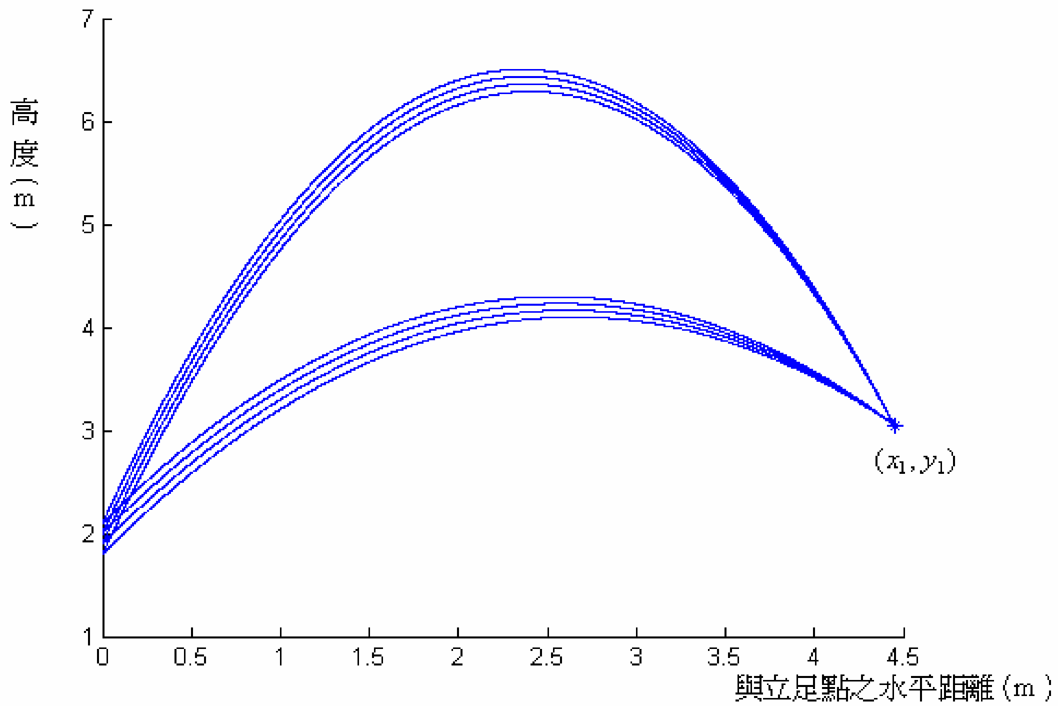
(1) 位於罰球線上

我們討論習慣投射角度為 θ_0=60 度和 θ_0=75 度，且 x_1=4.45，y_1=3.03，得到結果如表一所示。

投射角 θ_0 (度)	投射高度 h (公尺)	$\tan\theta_1$	初速度 v_0 (公尺/秒)
60	1.8	1.1703	7.7527
60	1.9	1.2152	7.6933
60	2.0	1.2601	7.6353
60	2.1	1.3051	7.5786
75	1.8	3.1703	9.7118
75	1.9	3.2152	9.6803
75	2.0	3.2601	9.6492
75	2.1	3.3051	9.6183

表一

將上述資料代入(3)式後，可得下列籃球運動軌跡：



圖四

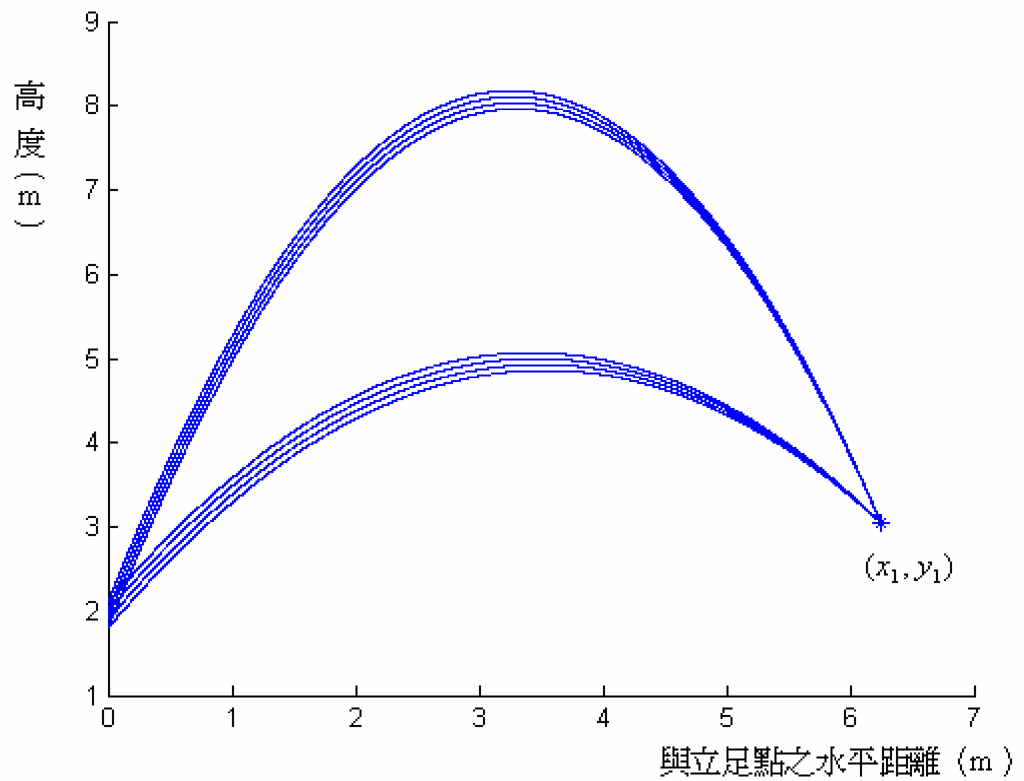
(2) 位於三分球線上

我們討論習慣投射角度爲θ_0=60 度和θ_0=75 度，且 x_1=6.25， y_1=3.03，得到結果如表二所示。

投射角θ_0(度)	投射高度h(公尺)	$\tan\theta_1$	初速度v_0(公尺/秒)
60	1.8	1.3321	8.9419
60	1.9	1.3641	8.8956
60	2.0	1.3961	8.8500
60	2.1	1.4281	8.8051
75	1.8	3.3321	11.3770
75	1.9	3.3641	11.3513
75	2.0	3.3961	11.3258
75	2.1	3.4281	11.3005

表二

將上述資料代入(3)式後，可得下列籃球運動軌跡：



圖五

綜合表一、表二的資料，我們發現若一位站在特定點（如罰球線或三分球線）的球員想要投出一個空心球，且此球員的特性是習慣以特定角度投球，則此球員應該增加投出時的高度，例如使用跳投動作，如此一來不但增加進球機會，另一方面也因需要稍減投出速度，而可節省所需力道。另一方面，若於相同距離、高度的條件下，球員習慣的投射角愈大，所需的初速度也越大。同時比較表一、表二，我們可以發現若球員以相同角度與高度投球，較遠的距離須搭配較大的初速度，這和我們

實際投籃經驗不謀而合。

2、　若以特定球速，可視不同的距離與高度調整角度

再者，依據球員的投球高度、立足位置、以及習慣投球速度，找出適合的投射

角度，其方法如下：

將(6)式演化為 $\tan\theta_0$ 的二次方程式

$$\left(\frac{gx_1^{\,2}}{2v_0^{\,2}}\right)\tan^2\theta_0 - x_1\tan\theta_0 + y_1 - h + \frac{gx_1^{\,2}}{2v_0^{\,2}} = 0$$

若 $\tan\theta_0$ 有兩個解，利用一元二次方程式公式解的方法，得到

$$\tan\theta_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^{\,2}}\left(y_1 - h + \frac{gx_1^{\,2}}{2v_0^{\,2}}\right)}}{\frac{gx_1}{v_0^{\,2}}} \text{-----------------------------(8)}$$

再考量 $\tan\theta_0$ 的值代入(5)式中須使得 $\tan\theta_1 \geq \tan\phi$，方為所需的解。若 $\tan\theta_0$ 沒有解，即判別式 $=1 - \frac{2g}{v_0^{\,2}}\left(y_1 - h + \frac{gx_1^{\,2}}{2v_0^{\,2}}\right)$ 小於零，則表示以此種速度條件下無法投進空心球。

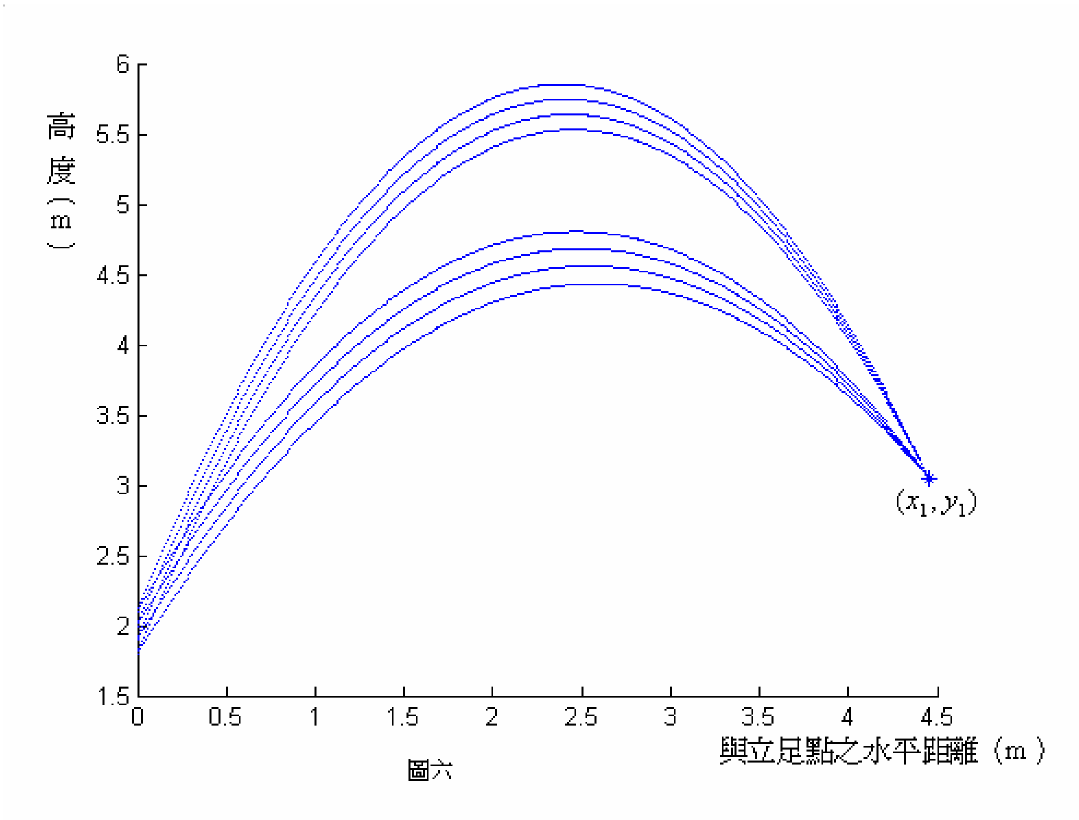
(1)　位於罰球線上

討論習慣投球速為每秒 8 公尺與 9 公尺，且 x_1=4.45， y_1=3.03，得到結果如表三所示。

初速度 v_0 (公尺/秒)	投射高度 h (公尺)	$\tan\theta_1$	投射角 θ_0 (度)
8	1.8	1.4796	63.9011
8	1.9	1.5794	64.4964
8	2.0	1.6747	65.0218
8	2.1	1.7666	65.4929
9	1.8	2.4815	71.8098
9	1.9	2.5611	72.0015
9	2.0	2.6398	72.1842
9	2.1	2.7176	72.3587

表三

將上述資料代入(3)式後，可得下列籃球運動軌跡：



圖六

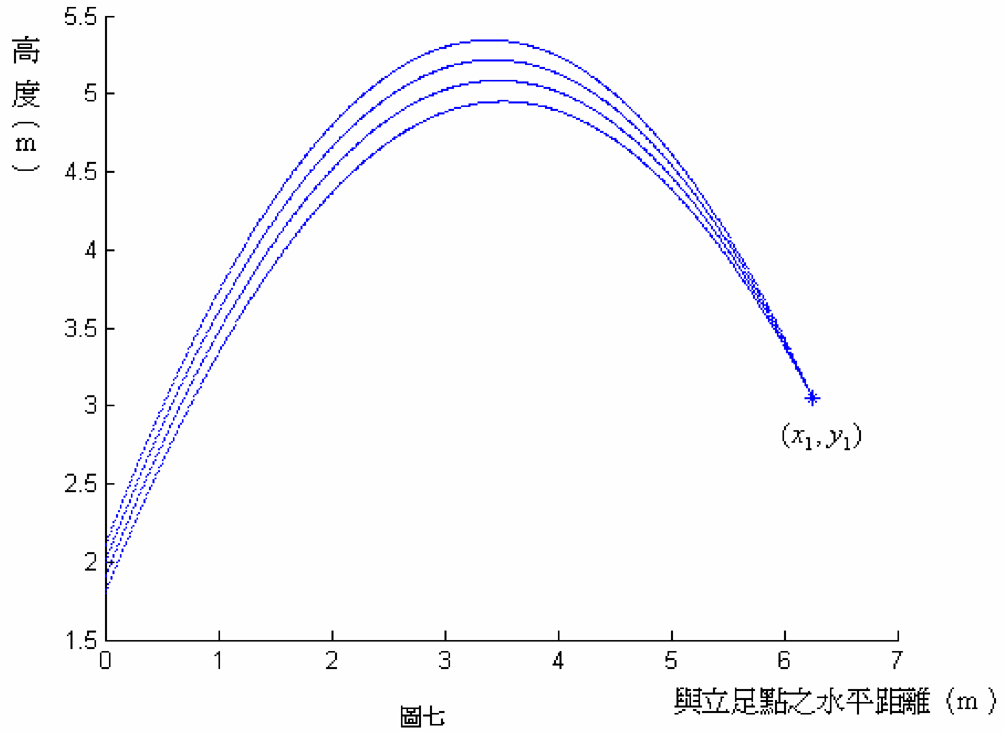
(2) 位於三分球線上

討論習慣投球速爲每秒 8 公尺與 9 公尺，且 x_1=6.25， y_1=3.03，得到結果如表四所示。

初速度 v_0 (公尺/秒)	投射高度 h (公尺)	$\tan\theta_1$	投射角 θ_0 (度)
8	1.8	N/A	N/A
8	1.9	N/A	N/A
8	2.0	N/A	N/A
8	2.1	N/A	N/A
9	1.8	1.3914	60.8284
9	1.9	1.4665	61.4050
9	2.0	1.5383	61.9185
9	2.1	1.6074	62.3823

表四

將上述資料代入(3)式後，可得下列籃球運動軌跡：



圖七

綜合表三、表四的資料，我們發現若一位站在特定點的球員想要投出一個空心球，且此球員的特性是習慣以特定速度投球，則此球員也應該增加投出時的高度，例如使用跳投動作，但需要稍增投射角度，如此可增加進球機會。另一方面，若於相同距離、高度的條件下，球員習慣的初速度愈大，所需的角度也越大。同時比較表三、表四，我們可以發現若球員以相同的初速度與高度投球，較遠的距離須搭配較大的角度。但表四中發現，在較遠的距離下若初速度不夠大，可能找不到相對應的投射角，印證先前討論 $\tan\theta_0$ 可能沒有解，即判別式小於零，表示以此種速度條件下無法投進空心球。

肆、結論與應用

一、結論

1、 我們得到籃球的運行軌跡是一條拋物線，並求出其二次方程式，見(3)式。

2、 我們找出了籃球進入籃框的最小入射角，見(4)式。

3、 我們討論在成功投籃的前提下，籃球出手時的投射角、初速度、所在高度以及

籃球與籃框水平距離之間的相關影響，並且利用 MATLAB 軟體計算出相對應的數據及其運動軌跡。

二、應用

1、 我們列出相關數據提供同學作爲實際投籃時的參考，以提高投籃的命中率。

2、 若於相同距離、高度的條件下，球員習慣的投射角愈大，所需的初速度也越大；

同樣的，若於相同距離、高度的條件下，球員習慣的初速度愈大，所需的角度也越大。

3、 .在固定距離投球的情況下，若有適當初速的配合，球員應該增加籃球的投射角或是出手的高度，例如使用跳投動作，以增加成功進籃的機會。同樣地，若搭配適當的投射角度，球員則應該增加籃球的初速度或是出手的高度，一樣可以提高投籃命中率。

4、 在一定的高度出手投球時，若球員有習慣的投射角度，在較遠距離位置投籃，則籃球需要較大的初速度，此時，成功進籃的機會也隨之增加。反之，若球員有習慣的投球速度，在較遠距離位置投籃，則籃球需要較小的投射角度，同時也增加成功進籃的機會。

伍、參考文獻

中華民國籃球協會，國際籃球規則中英文版，初版，台北，中華民國籃球協會，8，1990年。

國立編譯館，國民中學數學教科書第三冊，再版，台北，國立編譯館，213－225，民國九十年。

國立編譯館，國民中學數學教科書第四冊，再版，台北，國立編譯館，6－56，民國九十一年。

國立編譯館，國民中學選修數學教科書第六冊，三版，台北，國立編譯館，6－42，民國九十一年。

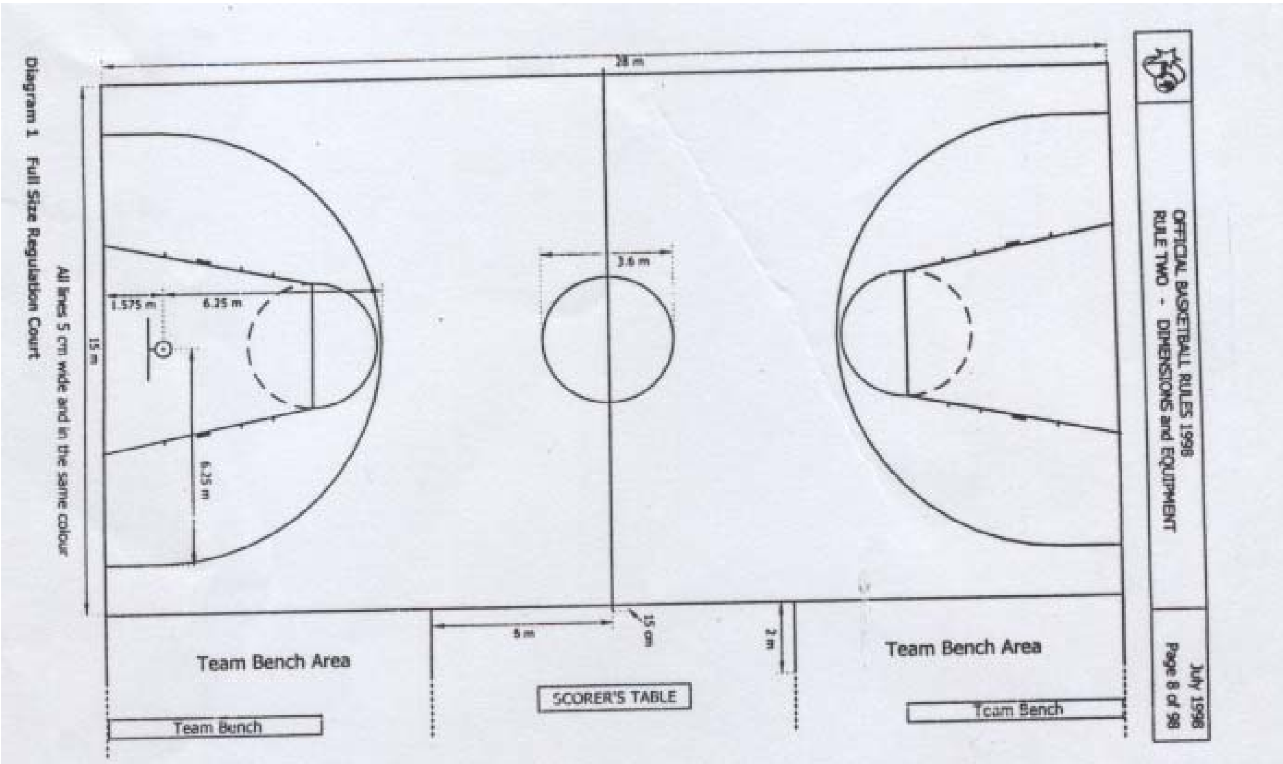
國立編譯館，國民中學理化教科書第四冊，初版，台北，國立編譯館，1－30，民國九十一年。

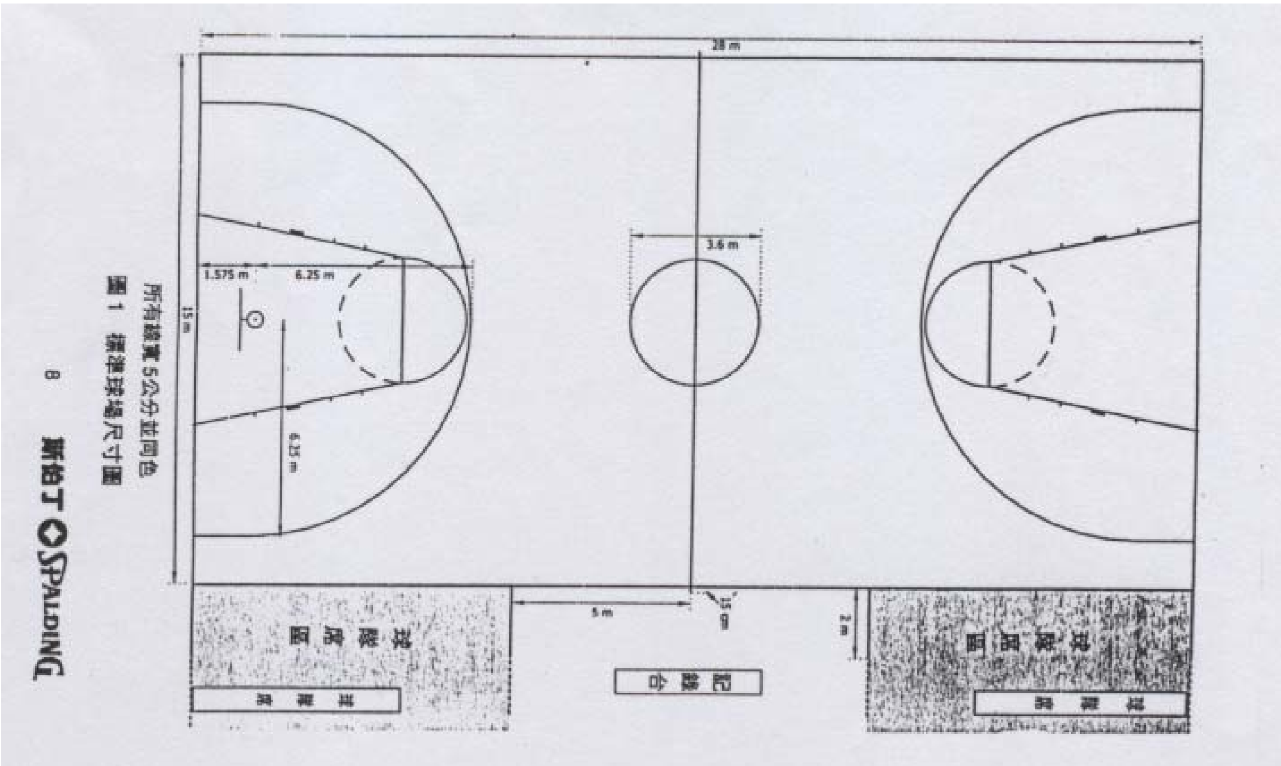
鄭錦聰，MATLAB 程式設計基礎篇，初版，台北，全華科技圖書股份有限公司，民國八十

九年。

羅浩源，生活的數學，一版，台北，九章出版社，115－119，2000 年。

附件一


OFFICIAL BASKETBALL RULES 1998
RULE TWO - DIMENSIONS and EQUIPMENT
July 1998
Page 8 of 98
28 m
3.6 m
1.575 m
6.25 m
15 m
6.25 m
5 m
15 cm
2 m
Team Bench Area
SCORER'S TABLE
Team Bench
Team Bench Area
Team Bench
All lines 5 cm wide and in the same colour
Diagram 1 Full Size Regulation Court


28 m
3.6 m
1.575 m
6.25 m
15 m
6.25 m
5 m
15 cm
2 m
球隊席區
記錄台
球隊席
球隊席區
球隊席
所有線寬5公分並同色
圖1 標準球場尺寸圖
8
斯伯丁 SPALDING

附件二

運動學相關公式：

一、等速度運動

S ：距離　　　v ：速度　　　v_0 ：初速度　　　t ：時間

（一）　$v = v_0$

（二）　$S = v_0 t$

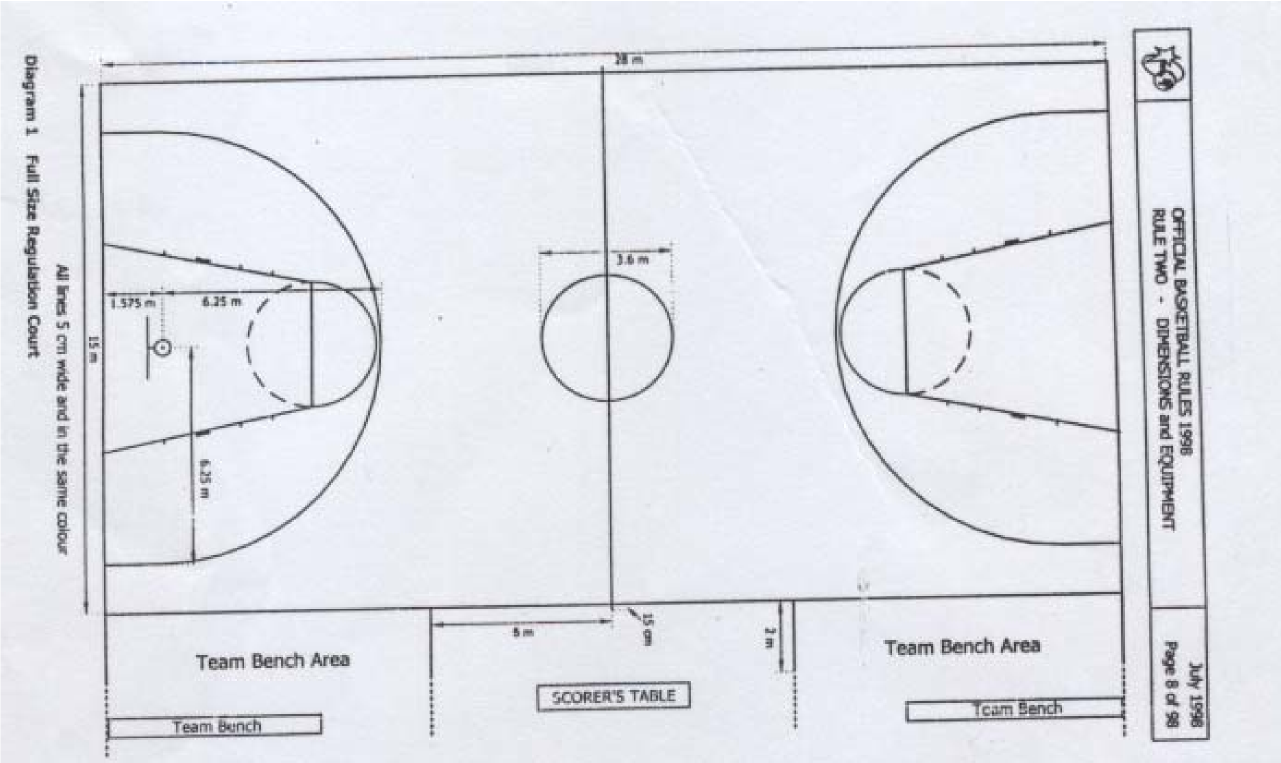
二、等加速度運動

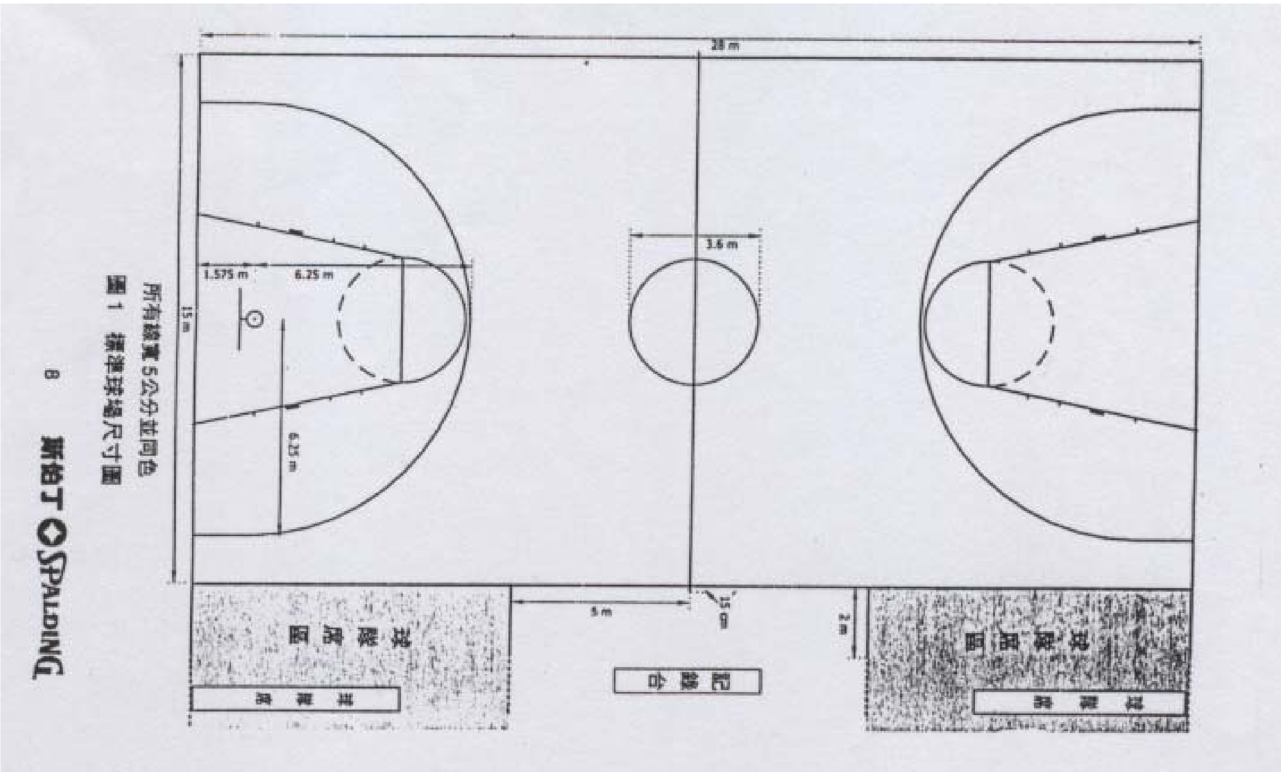
S ：距離　　　v ：速度　　　v_0 ：初速度　　　t ：時間　　　a ：加速度

（一）　$v = v_0 + a t$

（二）　$S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

附件一


OFFICIAL BASKETBALL RULES 1998
RULE TWO - DIMENSIONS and EQUIPMENT
July 1998
Page 8 of 98
28 m
3.6 m
15 m
1.575 m
6.25 m
6.25 m
5 m
15 cm
2 m
Team Bench Area
SCORER'S TABLE
Team Bench Area
Team Bench
Team Bench
All lines 5 cm wide and in the same colour
Diagram 1 Full Size Regulation Court


28 m
3.6 m
15 m
1.575 m
6.25 m
6.25 m
5 m
15 cm
2 m
球隊席區
記錄台
球隊席區
球隊席
球隊席
所有線寬5公分並同色
圖1 標準球場尺寸圖
8
斯伯丁 SPALDING

附件二

運動學相關公式：

一、等速度運動

S：距離　　v：速度　　v_0：初速度　　t：時間

（一）　$v = v_0$

（二）　$S = v_0 t$

二、等加速度運動

S：距離　　v：速度　　v_0：初速度　　t：時間　　a：加速度

（一）　$v = v_0 + a t$

（二）　$S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

實驗紀錄簿

一、表一

（一）表格

投射角θ_0(度)	投射高度h(公尺)	$\tan\theta_1$	初速度v_0(公尺/秒)
60	1.8	1.1703	7.7527
60	1.9	1.2152	7.6933
60	2.0	1.2601	7.6353
60	2.1	1.3051	7.5786
75	1.8	3.1703	9.7118
75	1.9	3.2152	9.6803
75	2.0	3.2601	9.6492
75	2.1	3.3051	9.6183

（二）MATLAB 程式

```
function  v=va(a,h)
y=3.05;
x=4.45;
g=9.8;
s=tan(a*pi/180);
v=((g*(x^2)*(1+s^2))/(2*(-y+h+x*s)))^(1/2);
tan1=s-(g*x/v^2)*(1+s^2)
```

（三）MATLAB數據

*va(60,1.8)

tan1 =

-1.1703

ans =

7.7527

*va(60,1.9)

tan1 =

-1.2152

ans =

7.6933

```
*va(60,2.0)
tan1 =
   -1.2601
ans =
     7.6353

*va(60,2.1)
tan1 =
   -1.3051
ans =
     7.5786

*va(75,1.8)
tan1 =
   -3.1703
ans =
     9.7118

*va(75,1.9)
tan1 =
   -3.2152
ans =
     9.6803

*va(75,2.0)
tan1 =
   -3.2601
ans =
     9.6492

*va(75,2.1)
tan1 =
   -3.3051
ans =
     9.6183
```

二、表二

（一）表格

投射角θ_0(度)	投射高度h(公尺)	$\tan\theta_1$	初速度v_0(公尺/秒)
60	1.8	1.3321	8.9419
60	1.9	1.3641	8.8956
60	2.0	1.3961	8.8500
60	2.1	1.4281	8.8051
75	1.8	3.3321	11.3770
75	1.9	3.3641	11.3513
75	2.0	3.3961	11.3258
75	2.1	3.4281	11.3005

（二）MATLAB 程式

```
function  v=va(a,h)
y=3.05;
x=6.25;
g=9.8;
s=tan(a*pi/180);
v=((g*(x^2)*(1+s^2))/(2*(-y+h+x*s)))^(1/2);
tan1=s-(g*x/v^2)*(1+s^2)
```

（三）MATLAB數據

```
*va(60,1.8)
tan1 =
    -1.3321
ans =
      8.9419

*va(60,1.9)
tan1 =
    -1.3641
ans =
      8.8956

*va(60,2.0)
tan1 =
    -1.3961
ans =
      8.8500
```

```
*va(60,2.1)
tan1 =
    -1.4281
ans =
      8.8051

*va(75,1.8)
tan1 =
    -3.3321
ans =
    11.3770

*va(75,1.9)
tan1 =
    -3.3641
ans =
    11.3513

*va(75,2.0)
tan1 =
    -3.3961
ans =
    11.3258

*va(75,2.1)
tan1 =
    -3.4281
ans =
    11.3005
```

三、表三

（一）表格

初速度 v_0(公尺/秒)	投射高度 h(公尺)	$\tan\theta_1$	投射角 θ_0(度)
8	1.8	1.4796	63.9011
8	1.9	1.5794	64.4964
8	2.0	1.6747	65.0218
8	2.1	1.7666	65.4929
9	1.8	2.4815	71.8098
9	1.9	2.5611	72.0015
9	2.0	2.6398	72.1842
9	2.1	2.7176	72.3587

（二）MATLAB 程式

```
function  a1=sa(v,h)
y=3.05;
x=4.45;
g=9.8;
b=(1+(1-(2*g/v^2)*(y-h+(g*x^2)/(2*v^2)))^(1/2))/(g*x/v^2);
c=(1-(1-(2*g/v^2)*(y-h+(g*x^2)/(2*v^2)))^(1/2))/(g*x/v^2);
t1=numeric(b);
t2=numeric(c);
a1=atan(t1)*180/pi;
a2=atan(t2)*180/pi;
tan1=t1-(g*x/v^2)*(1+t1^2)
tan2=t2-(g*x/v^2)*(1+t2^2)
```

（三）MATLAB數據

*sa(8,1.8)

tan1 =

    -1.4796

tan2 =

    -0.3320

ans =

    63.9011

*sa(8,1.9)

tan1 =

    -1.5794

tan2 =

    -0.3220

ans =

64.4964

*sa(8,2.0)

tan1 =

-1.6747

tan2 =

-0.3166

ans =

65.0218

*sa(8,2.1)

tan1 =

-1.7666

tan2 =

-0.3146

ans =

65.4929

*sa(9,1.8)

tan1 =

-2.4815

tan2 =

-0.1097

ans =

71.8098

*sa(9,1.9)

tan1 =

-2.5611

tan2 =

-0.1199

ans =

72.0015

*sa(9,2.0)

tan1 =

-2.6398

tan2 =

-0.1311

ans =

72.1842

*sa(9,2.1)

tan1 =

-2.7176

tan2 =

-0.1432

ans =

72.3587

四、表四

（一）表格

初速度 v_0 (公尺/秒)	投射高度 h (公尺)	$\tan\theta_1$	投射角 θ_0 (度)
8	1.8	N/A	N/A
8	1.9	N/A	N/A
8	2.0	N/A	N/A
8	2.1	N/A	N/A
9	1.8	1.3914	60.8284
9	1.9	1.4665	61.4050
9	2.0	1.5383	61.9185
9	2.1	1.6074	62.3823

（二）MATLAB 程式

```
function  a1=sa(v,h)
y=3.05;
x=6.25;
g=9.8;
b=(1+(1-(2*g/v^2)*(y-h+(g*x^2)/(2*v^2)))^(1/2))/(g*x/v^2);
c=(1-(1-(2*g/v^2)*(y-h+(g*x^2)/(2*v^2)))^(1/2))/(g*x/v^2);
t1=numeric(b);
t2=numeric(c);
a1=atan(t1)*180/pi;
a2=atan(t2)*180/pi;
tan1=t1-(g*x/v^2)*(1+t1^2)
tan2=t2-(g*x/v^2)*(1+t2^2)
```

（三）MATLAB數據

```
*sa(8,1.8)
tan1 =
  -0.6449 - 0.5711i
tan2 =
  -0.6449 + 0.5711i
ans =
  50.6550 +14.6999i

*sa(8,1.9)
tan1 =
  -0.6769 - 0.5410i
tan2 =
  -0.6769 + 0.5410i
ans =
  50.2129 +14.0218i

*sa(8,2.0)
tan1 =
  -0.7089 - 0.5092i
tan2 =
  -0.7089 + 0.5092i
ans =
  49.7683 +13.2861i

*sa(8,2.1)
tan1 =
  -0.7409 - 0.4752i
tan2 =
  -0.7409 + 0.4752i
ans =
  49.3214 +12.4825i

*sa(9,1.8)
tan1 =
   -1.3914
tan2 =
   -0.4535
```

```
ans =
   60.8284

*sa(9,1.9)
tan1 =
  -1.4665
tan2 =
  -0.4424
ans =
   61.4050

*sa(9,2.0)
tan1 =
  -1.5383
tan2 =
  -0.4346
ans =
   61.9185

*sa(9,2.1)
tan1 =
  -1.6074
tan2 =
  -0.4295
ans =
   62.3823
```

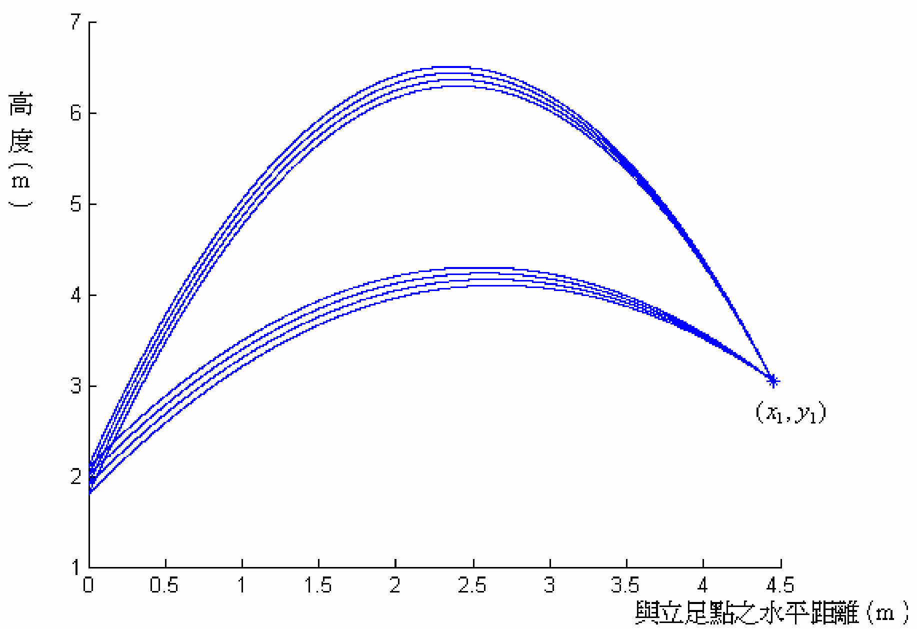
五、圖四

（一）MATLAB 程式

```
y=3.05;
x=4.45;
g=9.8;
a=60;
hold
for h=1.8:0.1:2.1
s=tan(a*pi/180);
```

```
v=((g*(x^2)*(1+s^2))/(2*(-y+h+x*s)))^(1/2);
tan1=s-(g*x/v^2)*(1+s^2);
for x1=0:0.001:x
y1=(-g/(2*v^2))*(s^2+1)*x1^2+s*x1+h;
plot(x1,y1)
end
end
plot(x,y,'*')
a=75;
for h=1.8:0.1:2.1
s=tan(a*pi/180);
v=((g*(x^2)*(1+s^2))/(2*(-y+h+x*s)))^(1/2);
tan1=s-(g*x/v^2)*(1+s^2);
for x1=0:0.001:x
y1=(-g/(2*v^2))*(s^2+1)*x1^2+s*x1+h;
plot(x1,y1)
end
end
plot(x,y,'*')
pause
```

（二）MATLAB繪圖



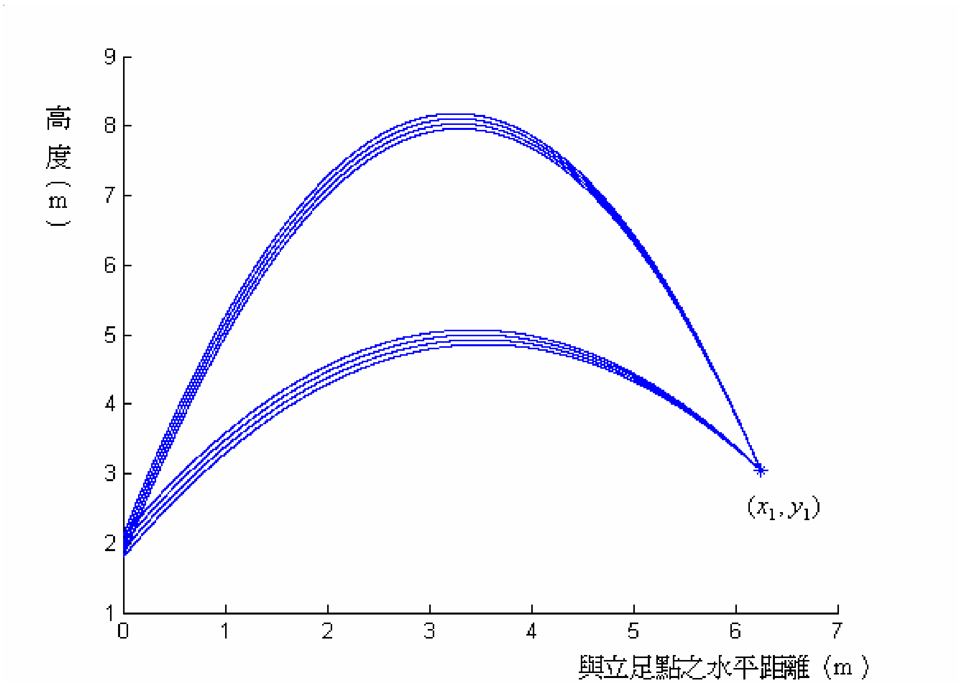
圖四

六、圖五

（一）MATLAB 程式

```
clf
y=3.05;
x=6.25;
g=9.8;
a=60;
hold
for h=1.8:0.1:2.1
s=tan(a*pi/180);
v=((g*(x^2)*(1+s^2))/(2*(-y+h+x*s)))^(1/2);
tan1=s-(g*x/v^2)*(1+s^2);
for x1=0:0.001:x
y1=(-g/(2*v^2))*(s^2+1)*x1^2+s*x1+h;
plot(x1,y1)
end
end
plot(x,y,'*')
a=75;
for h=1.8:0.1:2.1
s=tan(a*pi/180);
v=((g*(x^2)*(1+s^2))/(2*(-y+h+x*s)))^(1/2);
tan1=s-(g*x/v^2)*(1+s^2);
for x1=0:0.001:x
y1=(-g/(2*v^2))*(s^2+1)*x1^2+s*x1+h;
plot(x1,y1)
end
end
pause
```

（二）MATLAB繪圖



圖五

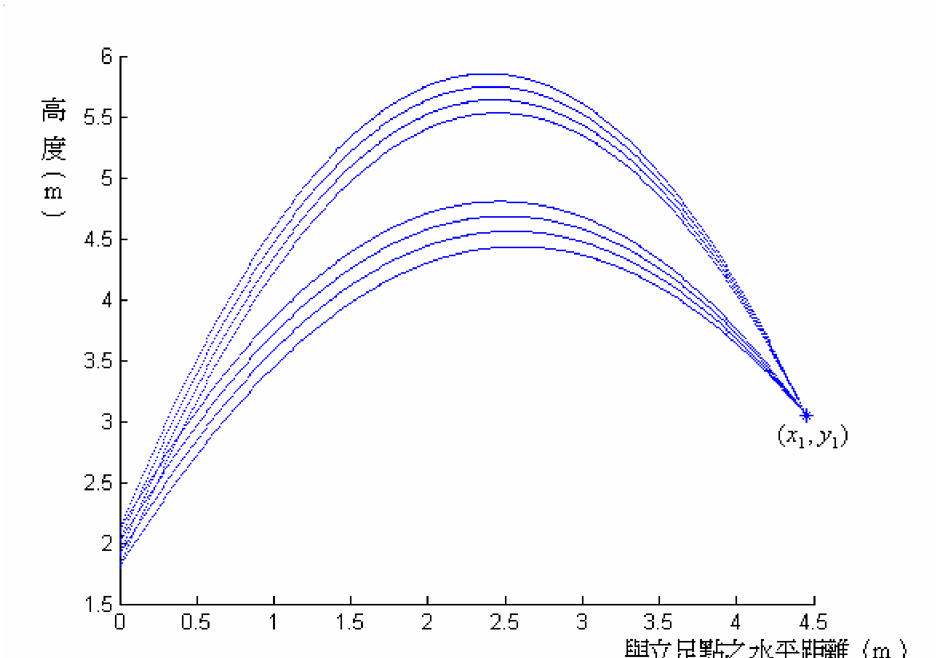
七、圖六

（一）MATLAB 程式

```
clf
y=3.05;
x=4.45;
g=9.8;
v=8;
hold
for h=1.8:0.1:2.1
b=(1+(1-(2*g/v^2)*(y-h+(g*x^2)/(2*v^2)))^(1/2))/(g*x/v^2);
t1=numeric(b);
s=atan(t1)*180/pi;
for x1=0:0.01:x
y1=(-g/(2*v^2))*(t1^2+1)*x1^2+t1*x1+h;
plot(x1,y1)
end
end
v=9;
for h=1.8:0.1:2.1
b=(1+(1-(2*g/v^2)*(y-h+(g*x^2)/(2*v^2)))^(1/2))/(g*x/v^2);
```

```
t1=numeric(b);
s=atan(t1)*180/pi;
for x1=0:0.01:x
y1=(-g/(2*v^2))*(t1^2+1)*x1^2+t1*x1+h;
plot(x1,y1)
end
end
plot(x,y,'*')
pause
```

（二）MATLAB 繪圖



圖六

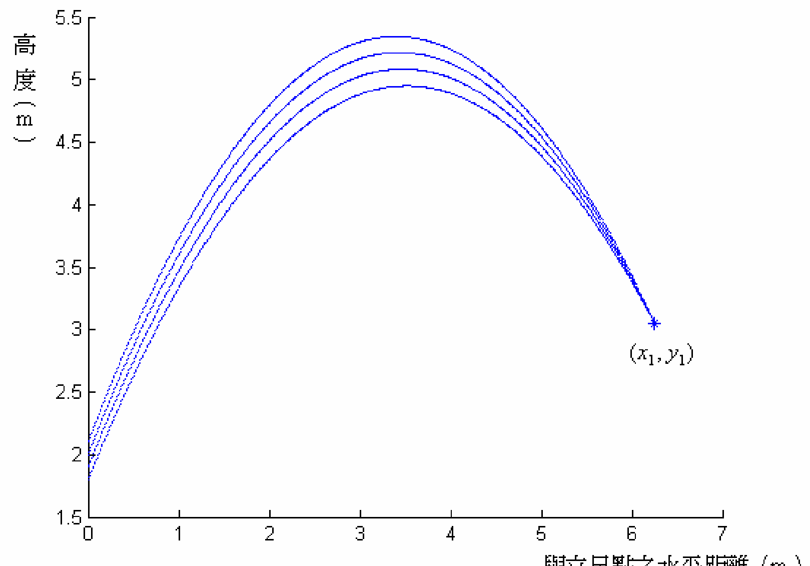
八、圖七

（一）MATLAB 程式

```
clf
y=3.05;
x=6.25;
g=9.8;
hold
v=9;
for h=1.8:0.1:2.1
b=(1+(1-(2*g/v^2)*(y-h+(g*x^2)/(2*v^2)))^(1/2))/(g*x/v^2);
t1=numeric(b);
s=atan(t1)*180/pi;
for x1=0:0.01:x
```

```
y1=(-g/(2*v^2))*(t1^2+1)*x1^2+t1*x1+h;
plot(x1,y1)
end
end
plot(x,y,'*')
pause
```

（二）MATLAB 繪圖



圖七