台灣二ＯＯ三年國際科學展覽會

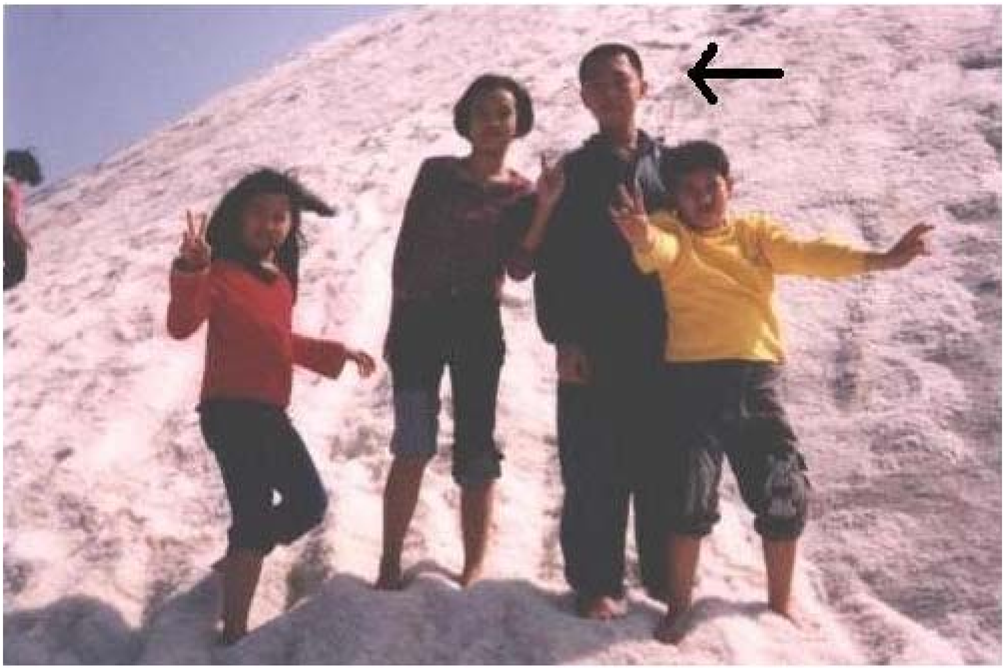
科　　別　：　數學科

作品名稱　：　挑戰你的好眼力

學　　校　：　虎林國中

作　　者　：　姚漢洲

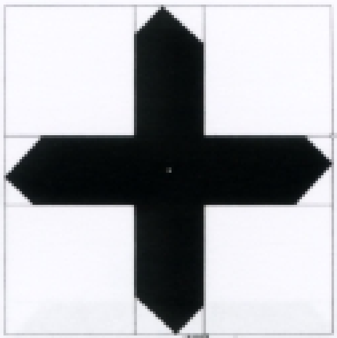
作者簡介



姚漢洲，新竹人，76年生，曾得過86年度、87年度桃竹苗地區聯合盃心算比賽第四名、第二名。第十二屆中華民國國小學童數學科全國大賽六年級優等，與多項珠心算比賽的獎項。

兩歲時因家庭遭受到變故，養成了他獨立與吃苦耐勞的性格。於此次科展中應用數學方程式和邏輯去找出一般人看不見的東西，讓它們被看見，這過程讓他覺得至為有趣與感動。

中文摘要



(圖一)

想像一下，原來固定的一個黑色大正方形(以下我們簡稱S1)，四個角經過較小之正方形(以下簡稱 S2)遮蓋後旋轉，為什麼會有放大縮小的感覺呢? (圖一)

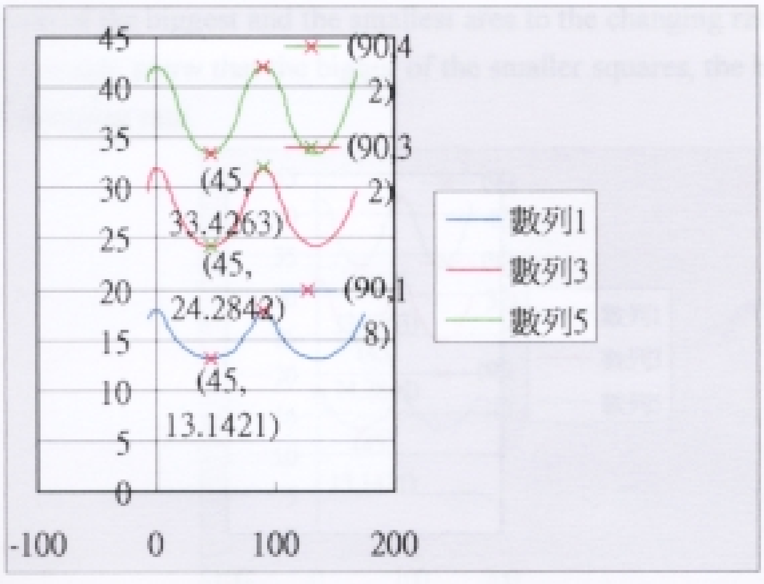
我們猜測這是因為未被遮蓋部分(以下簡稱 S3)的面積改變了，所造成的結果。令 S1 的邊長為 $\sqrt{2}\,r$，S2 的一個小正方形邊長為 n， k=r-n，θ 為旋轉角度，我們實際算出了旋轉角度 θ 對 S3 的面積函數，

$$A(\theta)=\begin{cases} f(\theta)=2r^2-\dfrac{2(r-2k\cos\theta)^2}{\cos 2\theta}, & -\sin^{-1}\dfrac{k}{r}\le\theta\le\sin^{-1}\dfrac{k}{r} \\ g(\theta)=4\sqrt{2}rk\csc(\theta+45^\circ)-4k^2, & \sin^{-1}\dfrac{k}{r}\le\theta\le 90^\circ-\sin^{-1}\dfrac{k}{r} \end{cases},$$

接著，我們詳細的由 $A(\theta)$ 中分析出了放大與縮小的原理後；我們更在例三中用 EXCEL 軟體將 S3 的面積函數 $A(\theta)$ 實作一題(圖二)，再與實際用 GSP 做出之動態模擬對照觀察。我們很高興的發現了：不再只是看到 S1 的放大縮小而已，更看出了

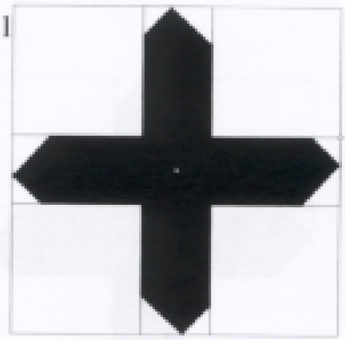
(1)S1 旋轉至感覺放到最大附近的變化大於旋轉至縮到最小附近的變化；而且 S2 越大時，兩邊的差別越明顯；在視覺上與 v_k 的數據推論完全附合。

(2)另外由 $h(k)=1-\dfrac{2(\sqrt{2}-1)r}{\sqrt{2}r-k}$ 的數據亦完全可說明視覺上的效果，就是 S2 越大，則整體上放大縮小的變化越強烈。



(圖二)

Challenge Your Eyesight



(fig.1)

Imagine, the black fixed square (we define it as S1, see fig.1) will look stretch-shrunk-stretched in turns when it is covered by four smaller squares (represent as S2 in the following) on the four corners and then rotates? (see fig.1)

At first, let S3 be the part of S1 uncovered by S2, we guessed that it is because of the change of the area of S3. So we found the function of the area of S3 as follows,

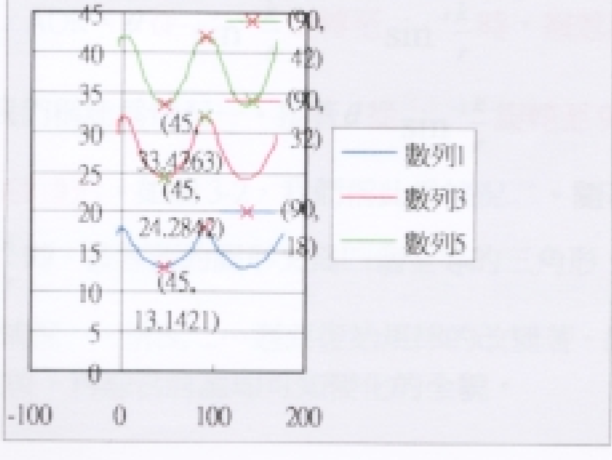
$$\mathrm{A}(\theta)=\begin{cases} f(\theta)=2r^2-\dfrac{2(r-2k\cos\theta)^2}{\cos 2\theta}, & -\sin^{-1}\dfrac{k}{r}\le\theta\le\sin^{-1}\dfrac{k}{r} \\ g(\theta)=4\sqrt{2}rk\csc(\theta+45°)-4k^2, & \sin^{-1}\dfrac{k}{r}\le\theta\le 90°-\sin^{-1}\dfrac{k}{r} \end{cases}$$

Then we analyzed $\mathrm{A}(\theta)$ directly to find out the reason why it looked like stretched and shrunk in turns when rotating.

At last, we use $\mathrm{A}(\theta)$ to make a example by EXCEL(see fig2). Comparing with the animated model made in GSP (see fig.3), we are happy not only to see the phenomenon of stretching and shrinking , but also

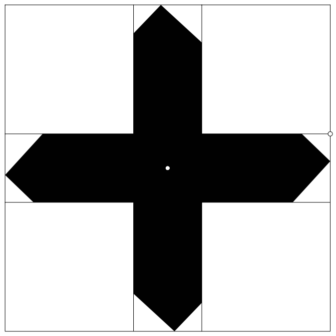
(1) the changing rate around the maximum of $\mathrm{A}(\theta)$ is bigger than the minimum one, this coincide with v_i by calculating.

(2) Besides, we derive statistics from the function $\mathrm{h(k)}=1-\dfrac{2(\sqrt{2}-1)r}{\sqrt{2}r-k}$, the function of the biggest and the smallest area to the changing rate of k. Then we may know that the bigger of the smaller squares, the bigger of the total changing rate.



挑戰你的好眼力

壹、研究動機



有一次實驗數學社團的指導老師給我們看一個用 GSP 軟體模擬的動態畫面，畫面如右圖，然後當她點兩下啓動按鈕時，螢幕立即出現一個不斷放大、縮小、放大、縮小…旋轉不已的黑色正方形(以下簡稱 S1)。當大家都確定所見無誤時，她將前景的四個正方形(以下簡稱 S2)變透明，讓我們重新再看一次，這時大家才恍然大悟，驚訝的發現，原來黑色的正方形是固定不變的，並沒有放大縮小。可是爲什麼會有如此的錯覺呢?這令我們十分好奇。

貳、研究目的

找出爲什麼 S1 用 S2 遮蓋住四個角後經過旋轉，會有放大縮小的感覺? 放大縮小的變化又是如何的改變? 當 S2 的一個小正方形邊長改變時，又會產生什麼視覺效果?

參、研究過程

首先，我們猜測這是因爲 S1 未被 S2 遮蓋部分(以下簡稱 S3)的面積改變了，所造成的結果；故定理一與定理二我們找出了旋轉角度改變時，所對應 S3 的面積公式。因爲整個變化是週期性的，故我們很自然的想到了用三角函數來表示它。此外，有些角度需要特別的探討，故亦需用到反三角函數。

爲方便整個討論，以下我們皆令圓半徑爲 r，S2 的一個小正方形邊長爲 n，$\frac{\sqrt{2}}{2}r$ < n < r；k=r-n，0 < k < $\frac{r}{2}$，$\theta=\angle AOR$。θ從$-\sin^{-1}\frac{k}{r}$旋轉至$\sin^{-1}\frac{k}{r}$時，被遮蓋的圖形爲四個全等的三角形，如圖 3-1，我們稱此爲情況一。接著θ從$\sin^{-1}\frac{k}{r}$旋轉至$90^\circ-\sin^{-1}\frac{k}{r}$時，被遮蓋的圖形爲四個全等的四邊形，如圖 3-2，我們稱此爲情況二。隨著θ旋轉過$90^\circ-\sin^{-1}\frac{k}{r}$至$90^\circ+\sin^{-1}\frac{k}{r}$時，被遮蓋的圖形又爲四個全等的三角形，如圖 3-3。整個過程就是情況一，情況二，情況一，情況二…週而復始規律的改變著。故我們只需對情況一與情況二兩個部分研究後，再綜合討論即可知變化的全貌。

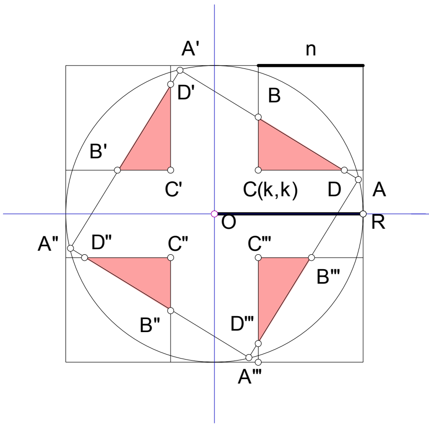


圖 3-1

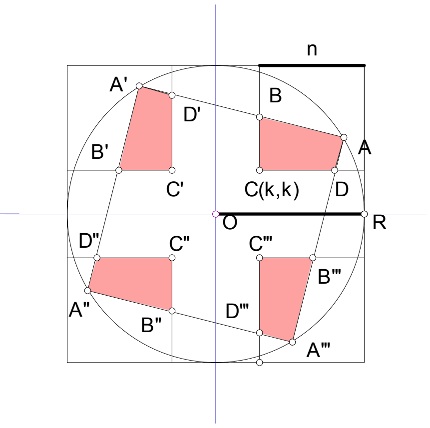


圖 3-2

以下便是我們分三部份的探討：

一、情況一

A $(r\cos\theta, r\sin\theta)$，A'$(-r\sin\theta, r\cos\theta)$，A'"$(r\sin\theta, -r\cos\theta)$。

$\overleftrightarrow{AA'}$ 之方程式為 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ r\cos\theta & r\sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix}=0$ 《附註一》

$\Rightarrow r\sin\theta x + r^2\cos^2\theta - r\sin\theta y + r^2\sin^2\theta - r\cos\theta y - r\cos\theta x = 0$

$\Rightarrow\ r=(\cos\theta - \sin\theta)x+(\sin\theta+\cos\theta)y$

$\Rightarrow$ B $(k, \dfrac{r+(\sin\theta-\cos\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta})$， C (k, k)， D $(\dfrac{r-(\cos\theta+\sin\theta)k}{\cos\theta-\sin\theta}, k)$ 。

$\overleftrightarrow{AA'''}$ 之方程式為 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ r\cos\theta & r\sin\theta & 1 \\ r\sin\theta & -r\cos\theta & 1 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow r\sin\theta x - r^2\cos^2\theta + r\sin\theta y - r^2\sin^2\theta + r\cos\theta x - r\cos\theta y = 0$

$\Rightarrow r=(\sin\theta+\cos\theta)x+(\sin\theta-\cos\theta)y$

$\Rightarrow$ B'" $(\dfrac{r+(\sin\theta-\cos\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta}, -k)$， C'" $(k, -k)$， D'" $(k, \dfrac{r-(\sin\theta+\cos\theta)k}{\sin\theta-\cos\theta})$ 。

引理 1-1：情況一時，四個被遮住的三角形皆全等。

【已知】如圖 3-1，△BCD 與△B'"C'"D'"分別為 S1 旋轉至 θ 時，兩角被 S2 所遮蓋之圖形。

【求證】△BCD≅△B'"C'"D'"。

【證明】∵1. $\overline{BC}=\dfrac{r+(\sin\theta-\cos\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta}$-k=$\overline{B'''C'''}$，

2.∠C=∠C'=90°，

3. $\overline{CD}$=k-$\dfrac{r-(\sin\theta+\cos\theta)k}{\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{r-2k\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\dfrac{r-(\cos\theta+\sin\theta)k}{\cos\theta-\sin\theta}$-k=$\overline{C'''D'''}$。

∴由 SAS 全等性質知△BCD≅△B'''C'''D'''。

同理可證，△BCD≅△B'C'D'≅△B''C''D''≅△AB'''C'''D'''。

引理 1-2：情況一時，△BCD 的面積為$\dfrac{(r-2k\cos\theta)^2}{2(\cos2\theta)}$。

【已知】如圖 3-1，△BCD 中 B (k , $\dfrac{r-(\cos\theta-\sin\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta}$) , C(k,k) ,

D ($\dfrac{r-(\sin\theta+\cos\theta)k}{\cos\theta-\sin\theta}$, k) 。

【求證】△BCD=$\dfrac{(r-2k\cos\theta)^2}{2(\cos2\theta)}$。

【證明】△BCD $=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{r-(\cos\theta-\sin\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta}-k\right]\left[\dfrac{r-(\sin\theta+\cos\theta)k}{\cos\theta-\sin\theta}-k\right]$

$=\dfrac{(r-2k\cos\theta)^2}{2(\cos2\theta)}$。

引理 1-3：情況一時，w(θ_i)=$\dfrac{(r-2k\cos\theta_i)^2}{2(\cos2\theta_i)}$為遞減函數。

【已知】0＜k＜$\dfrac{r}{2}$， $-\sin^{-1}\dfrac{k}{r}<\theta_i<0^\circ$ ，w(θ_i)=$\dfrac{(r-2k\cos\theta_i)^2}{2(\cos2\theta_i)}$。

【求證】w(θ_i)為遞減函數。

【證明】令 $x_i=\cos\theta_i\leq1$，當$-\sin^{-1}\dfrac{k}{r}<\theta_i<0^\circ$ 時 $\cos\theta_i$遞增，亦即 x_i為遞增函數

且 $\cos2\theta_i$亦為遞增函數。

令 $y(x_i)=(r-2kx_i)^2$ ，則 x_i遞增時，

∵若 $x_1>x_2$，$x_1-x_2>0$，

$\Rightarrow y(x_1)-y(x_2)=(r-2kx_1)^2-(r-2kx_2)^2=4k(x_1-x_2)[(x_1+x_2)k-r]$ 。

$\Rightarrow$ 又$\because 0<k<\dfrac{r}{2}$且$0<x_1+x_2\leq 2$；$\therefore [(x_1+x_2)k-r]<0$。

$\Rightarrow y(x_1)-y(x_2)<0$，故 $y(x_i)$為遞減函數。

$\Rightarrow$ $w(\theta)$為遞減函數。

定理一：情況一時，S3 的面積對θ的函數為 $f(\theta)=2r^2-\dfrac{2(r-2k\cos\theta)^2}{\cos 2\theta}$。

【已知】如圖 3-1，S3=多邊形 ADCBA'D'C'B'A"D"C"B"A'''D'''C'''B'''

【求證】S3 的面積對θ的函數為 $f(\theta)=2r^2-\dfrac{2(r-2k\cos\theta)^2}{\cos 2\theta}$。

【證明】S1 的面積 $2r^2$ 且由引理 1-1、1-2 知

$$\text{S3 面積為 } 2r^2-4\frac{(r-2k\cos\theta)^2}{2(\cos 2\theta)}=2r^2-\frac{2(r-2k\cos\theta)^2}{\cos 2\theta}\text{。}$$

由引理 1-3 與定理一可知，θ從$-\sin^{-1}\dfrac{k}{r}$旋轉至 0° 遞增時，S3 的面積函數 $f(\theta)=2r^2-\dfrac{2(r-2k\cos\theta)^2}{\cos 2\theta}$遞增。同理可討論，$f(\theta)$對$\theta$從 0° 旋轉至$\sin^{-1}\dfrac{k}{r}$時遞減。又因 $f(\theta)$在$-\sin^{-1}\dfrac{k}{r}<\theta<\sin^{-1}\dfrac{k}{r}$時，為連續函數，故 $f(\theta)$在 0° 時最大，且為 $8rk-8k^2$。

例一：當 r=5cm, k=1cm 時

$-\sin^{-1}\dfrac{1}{5}\fallingdotseq 11.53696$，

$-12^\circ \leq \theta \leq 12^\circ$，

面積 $f(\theta)=50-\dfrac{2(5-2\cos\theta)^2}{\cos 2\theta}$

的圖形如右：

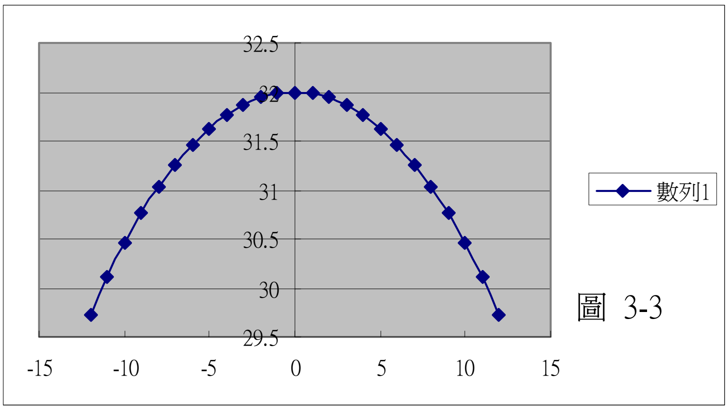


圖 3-3

二、情況二

$A(r\cos\theta, r\sin\theta)$，$A'(-r\sin\theta, r\cos\theta)$，$A''(-r\cos\theta, -r\sin\theta)$，$A'''(r\sin\theta, -r\cos\theta)$，

$\overleftrightarrow{AA'}$之方程式為 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ r\cos\theta & r\sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow r\sin\theta x+r^2\cos^2\theta-r\sin\theta y+r^2\sin^2\theta-r\cos\theta y-r\cos\theta x=0$

$\Rightarrow r=(\cos\theta-\sin\theta)x+(\sin\theta+\cos\theta)y$，

故 B (k ,$\dfrac{r+(\sin\theta-\cos\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta}$) ， D'(-k,$\dfrac{r+(\cos\theta-\sin\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta}$) 。

$\overleftrightarrow{A'A''}$ 之方程式爲 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 1 \\ -r\cos\theta & -r\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$=0

$\Rightarrow r\cos\theta x + r^2\sin^2\theta - r\cos\theta y + r^2\cos^2\theta + r\sin\theta x + r\sin\theta y$

$\Rightarrow -r = (\sin\theta+\cos\theta)x + (\sin\theta-\cos\theta)y$，故 B'($\dfrac{-(r+(\sin\theta-\cos\theta))y}{\sin\theta+\cos\theta}$,k) ， C'(-k,k) 。

$\overleftrightarrow{AA'''}$ 之方程式爲 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ r\cos\theta & r\sin\theta & 1 \\ r\sin\theta & -r\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$=0

$\Rightarrow r\sin\theta x - r^2\cos^2\theta + r\sin\theta y - r^2\sin^2\theta + r\cos\theta x - r\cos\theta y = 0$

$\Rightarrow r = (\sin\theta+\cos\theta)x + (\sin\theta-\cos\theta)y$，故 D ($\dfrac{r+(\cos\theta-\sin\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta}$, k) ， C (k, k)。

引理 2-1：情況二時，四個被遮住的四邊形皆全等。

【已知】如圖 3-2，四邊形 ABCD 與四邊形 A'B'C'D'分別爲 S1 旋轉至θ時，兩角被 S2 所遮蓋之圖形。

【求證】四邊形 ABCD≅四邊形 A'B'C'D'。

【證明】∵1. $\overline{CD} = \dfrac{r+(\cos\theta-\sin\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta} - k = \overline{C'D'}$ ，

2. ∠C=∠C'=90° ，

3. $\overline{BC} = \dfrac{r+(\sin\theta-\cos\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta} - k = \overline{B'C'}$ ，

∴由 SAS 全等性質知△BCD≅△B'C'D'……(一)

故 $\overline{BD} = \overline{B'D'}$ 。

又∵∠A =∠A'=90° 且

$$\overline{AB} = \sqrt{(r\cos\theta-k)^2 + (r\sin\theta - \frac{r+(\sin\theta-\cos\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta})^2}$$

$$= \sqrt{(r\cos\theta-k)^2 + (-r\sin\theta + \frac{r+(\sin\theta-\cos\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta})^2} = \overline{A'B'}$$

∴由 RHS 全等性質知△ABD≅△A'B'D'……(二)

由(一)、(二)得知△ABD+△BCD≅△A'B'D'+△B'C'D'

⇒四邊形 ABCD≅四邊形 A'B'C'D'。

同理可證，四邊形 ABCD$\cong$四邊形 A'B'C'D'$\cong$四邊形 A"B"C"D"$\cong$四邊形四邊形 A'''B'''C'''D'''。

引理 2-2：情況二時，四邊形 ABCD 的面積爲$k^2+\frac{r^2}{2}-2\sqrt{2}rk\csc(\theta+45^o)$。

【已知】如圖 3-2，四邊形 ABCD 中 A (r$\cos\theta$,r$\sin\theta$)，B (k ,$\frac{r+(\sin\theta-\cos\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta}$) ，

C (k, k) ，D ($\frac{r+(\cos\theta-\sin\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta}$, k)。

【求證】四邊形 ABCD 的面積爲$k^2+\frac{r^2}{2}-2\sqrt{2}rk\csc(\theta+45^o)$

【證明】△ABD=$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta & 1 \\ k & \frac{r+(\sin\theta-\cos\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta} & 1 \\ \frac{r-(\sin\theta-\cos\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta} & k & 1 \end{vmatrix}$《附註二》

$$=\frac{1}{2}(k^2-\frac{r^2-(\sin\theta-\cos\theta)^2k^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+r^2-\frac{2rk}{\sin\theta+\cos\theta})$$

△BCD=$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} k & \frac{r+(\sin\theta-\cos\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta} & 1 \\ k & k & 1 \\ \frac{r-(\sin\theta-\cos\theta)k}{\sin\theta+\cos\theta} & k & 1 \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{2}(k^2+\frac{r^2-(\sin\theta-\cos\theta)^2k^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\frac{2rk}{\sin\theta+\cos\theta})$$ 。

△ABD+△BCD=$\frac{1}{2}(k^2-\frac{r^2-(\sin\theta-\cos\theta)^2k^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+r^2-\frac{2rk}{\sin\theta+\cos\theta})+$
$\frac{1}{2}(k^2+\frac{r^2-(\sin\theta-\cos\theta)^2k^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\frac{2rk}{\sin\theta+\cos\theta})$

$$=k^2+\frac{r^2}{2}-\frac{2rk}{\sqrt{2}\sin(\theta+45^0)}=k^2+\frac{r^2}{2}-\sqrt{2}rk\csc(\theta+45^o)$$ 。

定理二：情況二時，S3 的面積對θ的函數爲 g(θ)=$4\sqrt{2}rk\csc(\theta+45^o)-4k^2$ 。

【已知】如圖 3-2，S3 = 多邊形 DCBD'C'B'D"C"B"D'''C'''B'''

【求證】S3 的面積對θ的函數爲 g(θ)=$4\sqrt{2}rk\csc(\theta+45^o)-4k^2$。

【證明】S1 的一個小正方形面積$2r^2$且由引理 2-1、2-2 知，S3 的面積爲

$$2r^2\text{-}4\left[k^2+\frac{r^2}{2}-\sqrt{2}rk\csc(\theta+45^o)\right]=4\sqrt{2}rk\csc(\theta+45^o)-4k^2\text{。}$$

因爲cscθ從θ=0° 旋轉至 90° 時遞減，故 g(θ)=$4\sqrt{2}rk\csc(\theta+45^o)-4k^2$從$\theta$=$\sin^{-1}\frac{k}{r}$旋轉至 45° 時遞減。csc$\theta$在$\theta$=90° 時最小且爲 1，故 g($\theta$)在 45° 時最小，且爲$4\sqrt{2}rk-4k^2$。同理，g($\theta$)從 45° 旋轉至 90° -$\sin^{-1}\frac{k}{r}$時遞增。

例二：當 r=5cm, k=1cm 時

$\sin^{-1}\frac{1}{5}\fallingdotseq 11.53696$，

11° ≦θ≦79° ，

面積 g(θ)=

$20\sqrt{2}\csc(\theta+45)-4$

的圖形如右：

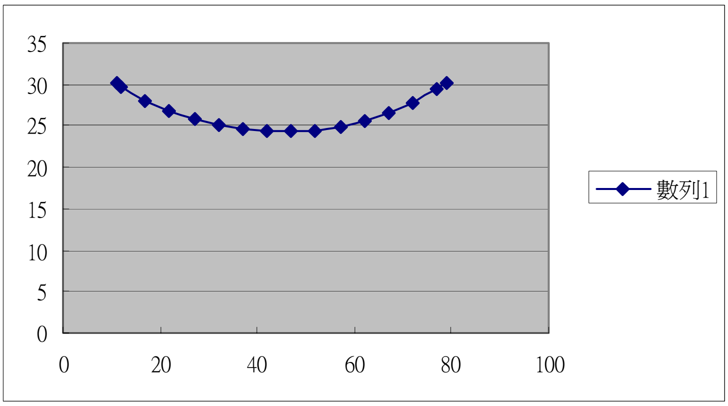


圖 3-4

三、情況一與情況二的綜合分析

定理三：當θ =-$\sin^{-1}\frac{k}{r}$， $\sin^{-1}\frac{k}{r}$， 90° -$\sin^{-1}\frac{k}{r}$， 90° +$\sin^{-1}\frac{k}{r}$， 180° -$\sin^{-1}\frac{k}{r}$，180° +$\sin^{-1}\frac{k}{r}$， 270° -$\sin^{-1}\frac{k}{r}$， 270° +$\sin^{-1}\frac{k}{r}$時 ，

f(θ)=g (θ)。我們並稱這些θ爲反曲點。

【證明】若令θ=$\sin^{-1}\frac{k}{r}\Rightarrow\sin\theta=\frac{k}{r}$ ，$\cos\theta=\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{r}$

$$\Rightarrow f(\theta)=\frac{8r^2k\sqrt{r^2-k^2}-12r^2k^2-8k^4}{r^2-k^2}=g(\theta)$$；同理可證其它的點。

綜合以上的討論，我們可得當 S1 旋轉時，情況一的視覺效果爲由反曲點逐漸

放大，$f(0°)$時最大，再逐漸縮小至反曲點，再接上情況二的視覺效果，繼續縮小，$g(45°)$最小，再逐漸放大至反曲點接上情況一的視覺效果；整個變化就是以情況一加情況二為一個週期，不斷的重複上演。

定義令 A(θ)為θ對 S3 的面積函數，亦即

$$A(\theta)=\begin{cases} f(\theta) & -\sin^{-1}\frac{k}{r}\le\theta\le\sin^{-1}\frac{k}{r} \\ g(\theta) & \sin^{-1}\frac{k}{r}\le\theta\le 90°-\sin^{-1}\frac{k}{r} \end{cases},$$

則 A(θ)為連續函數。極大值為 A(0°)，極小值為 A(45°)，反曲點請參考定理三。

k 固定時，單位面積變化率=｜A(θ+1 單位)- A(θ)｜。

令 M_k =｜A(0° +1 單位)- A(0°)｜；

m_k =｜A(45° +1 單位)- A(45°)｜；

$v_k = M_k - m_k$。

若 v_k>0，則在 S3 最大面積附近對一單位的變化較最小面積時來得大；同時 v_k 越大，兩邊變化的差別越明顯。

定理四：k 對 S3 最大與最小的面積的變化率函數為 h(k)=$1-\frac{2(\sqrt{2}-1)r}{\sqrt{2}r-k}$。

【已知】S3 之面積函數在 0° 時最大，並為 8rk-8k^2。在 45° 時最小，並為 $4\sqrt{2}rk-4k^2$。

【求證】k 對 S3 最大與最小面積的變化率函數為 h(k)=$1-\frac{2(\sqrt{2}-1)r}{\sqrt{2}r-k}$。

【證明】h(k)=$\frac{f(0°)-g(45°)}{g(45°)}=\frac{8rk-8k^2-(4\sqrt{2}rk-4k^2)}{4\sqrt{2}rk-4k^2}=1-\frac{2(\sqrt{2}-1)r}{\sqrt{2}r-k}$。

由定理四知，當 k 遞增時$\frac{1}{a-k}$遞增，故 h(k)=$1-\frac{2(\sqrt{2}-1)r}{\sqrt{2}r-k}$遞減。亦即 S2 越大，則感覺放大縮小的面積變化越大。

例三：令 r=5cm, 2° 為一單位，則

1. k=0.5cm 時$\sin^{-1}\frac{1}{10}$≒5.73915；

當 -6° ≦θ≦6° 時，面積 f(θ)=50-$\frac{2(5-\cos\theta)^2}{\cos 2\theta}$；

當 5° ≦θ≦85° 時，面積 g(θ)=$10\sqrt{2}\csc(\theta+45°)-1$，

$M_{0.5}$ ≒18-17.91209=0.08791； $m_{0.5}$ ≒13.15072-13.1421=0.00862；
$v_{0.5}$ ≒0.07929； h(0.5) ≒0.369644；請參考下圖數列 1。

2. k=1cm 時 $\sin^{-1}\frac{1}{5}$ ≒11.53696；

當 -12° ≦ θ ≦12° 時，面積 f(θ)=50-$\frac{2(5-2\cos\theta)^2}{\cos 2\theta}$ ；

當 11° ≦ θ ≦79° 時，面積 g(θ)=$20\sqrt{2}\csc(\theta+45^\circ)-4$ ，

M_1 ≒32-31.94139=0.05861； m_1 ≒24.30144-24.2842=0.01724；
v_1 ≒0.04137； h(1) ≒0.317723；請參考下圖數列 3。

3. k=1.5cm 時 $\sin^{-1}\frac{3}{10}$ ≒17.45792；

當 -18° ≦ θ ≦18° 時，面積 f(θ)=50-$\frac{2(5-3\cos\theta)^2}{\cos 2\theta}$ ；

當 17° ≦ θ ≦73° 時，面積 g(θ)=$30\sqrt{2}\csc(\theta+45^\circ)-9$ ，

$M_{1.5}$ ≒42-41.9658=0.0342； $m_{1.5}$ ≒33.45216-33.4263=0.02586；
$v_{1.5}$ ≒0.00834； h(1.5) ≒ 0.2565；請參考下圖數列 5。

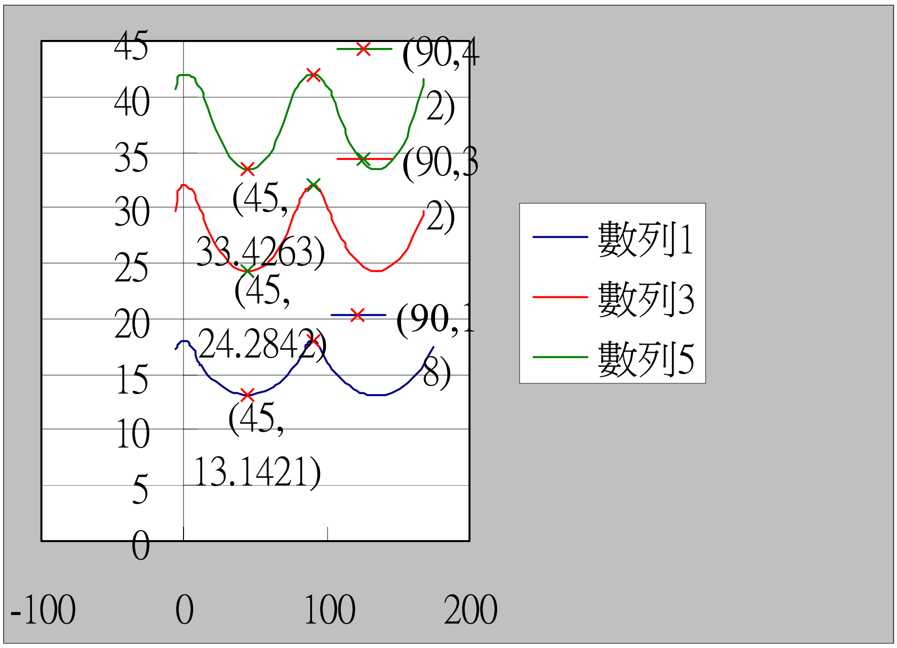


圖 3-5《附註三》

肆、 結論

在定理一與定理二中我們實際算出了θ對 S3 的面積函數為

$$A(\theta)=\begin{cases} f(\theta)=2r^2-\dfrac{2(r-2k\cos\theta)^2}{\cos 2\theta}, & -\sin^{-1}\dfrac{k}{r}\le\theta\le\sin^{-1}\dfrac{k}{r} \\ g(\theta)=4\sqrt{2}rk\csc(\theta+45°)-4k^2, & \sin^{-1}\dfrac{k}{r}\le\theta\le 90°-\sin^{-1}\dfrac{k}{r} \end{cases}$$ 。

且經分析知 A(θ)從θ=-$\sin^{-1}\frac{k}{r}$旋轉至 0° 時遞增，在 0° 時有最大值 8rk-8k^2。再從 0° 旋轉至$\sin^{-1}\frac{k}{r}$時遞減。$\sin^{-1}\frac{k}{r}$為一反曲點，A(θ)從θ=$\sin^{-1}\frac{k}{r}$旋轉至 45° 時遞減，在 45° 時有最小值$4\sqrt{2}rk-4k^2$。再從 45° 旋轉至 90° -$\sin^{-1}\frac{k}{r}$時遞增。90° -$\sin^{-1}\frac{k}{r}$亦為一反曲點。依此類推。

解釋了放大與縮小的原理後，我們更在例三中用 EXCEL 將 S3 的面積函數 A(θ)實作一題，再與實際用 GSP 做出之模型對照觀察。我們很高興的發現了，不再只是看到放大縮小而已，更看出了

一、S1 旋轉至感覺放到最大附近的變化大於旋轉至縮到最小附近的變化；而且 S2 越大時，兩邊的差別越明顯；在視覺上與 v_k 的數據推論完全附合。《附註四》

二、另外由 h(k)=$1-\dfrac{2(\sqrt{2}-1)r}{\sqrt{2}r-k}$的數據亦完全可說明視覺上的效果，S2 越大，則整體上放大縮小的變化越強烈。

最後，有人說希臘文明的奇蹟，若濃縮為四個字，那便是：追根究底。追根究底讓我們很意外的發現了，有些感覺是可以說清楚講明白的。除此還有很多意料之外的美好結果!

伍、參考資料

一、 國中選修數學下冊（國立編譯館，八十六年版）。

二、 高中基礎數學第二冊（國立編譯館，八十七年版）。

陸、附註

一、為表示簡潔，我們採用行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$

表示：若 A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 之方程式爲 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$。

二、若 A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)，C(x_3,y_3)，則△ABC=$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$。

三、

r=5cm					
k=0.5cm(數列 1)		k=1cm(數列 3)		k=1.5cm(數列 5)	
θ	A(θ)	θ	A(θ)	θ	A(θ)
				-17	39.04386
-6	17.19543	-12	29.71827	-12	40.65941
-5	17.44449	-7	31.26413	-7	41.56969
-4	17.64615	-6	31.46321	-6	41.68631
-3	17.80168	-4	31.76402	-4	41.86223
-2	17.91209	-2	31.94139	-2	41.9658
0	18	0	32	0	42
2	17.91209	2	31.94139	2	41.9658
4	17.64615	4	31.76402	4	41.86223
5	17.4612	5	31.62947	5	41.78359
6	17.19748	6	31.46321	6	41.68631
11	16.05845	11	30.11691	11	40.88959
12	15.86252	12	29.72504	12	40.65941
17	15.01692	17	28.03384	17	39.04386
22	14.36342	22	26.72683	22	37.09025
27	13.86988	27	25.73977	27	35.60965
32	13.5141	32	25.02819	32	34.54229
37	13.28108	37	24.56217	37	33.84325
42	13.16151	42	24.32302	42	33.48452
45	13.1421	45	24.2842	45	33.4263
47	13.15072	47	24.30144	47	33.45216
52	13.2483	52	24.49661	52	33.74491
57	13.45804	57	24.91609	57	34.37413
62	13.78828	62	25.57655	62	35.36483
67	14.25275	67	26.50549	67	36.75824

72	14.87205	72	27.7441	72	38.61615
78	15.86252	78	29.72504	78	40.65941
79	16.05845	79	30.11691	79	40.88959
83	16.89734	83	31.26413	83	41.56969
85	17.4612	85	31.62947	85	41.78359
86	17.64615	86	31.76402	86	41.86223
88	17.91209	88	31.94139	88	41.9658
90	18	90	32	90	42
91	17.97806	91	31.98537	91	41.99147
93	17.80168	93	31.86776	93	41.92283
94	17.64615	94	31.76402	94	41.86223
95	17.44449	95	31.62947	95	41.78359
98	16.70783	98	31.03084	98	41.43285
101	16.05845	101	30.10788	101	40.88959
102	15.86252	102	29.71827	102	40.65941
106	15.16943	106	28.33886	106	39.50828
109	14.73453	109	27.46906	109	38.20358
110	14.60408	110	27.20816	110	37.81224
111	14.48046	111	26.96091	111	37.44137
116	13.95698	116	25.91395	116	35.87093
121	13.57504	121	25.15008	121	34.72512
126	13.31838	126	24.63677	126	33.95515
131	13.17663	131	24.35327	131	33.5299
135	13.1421	135	24.2842	135	33.4263
136	13.14425	136	24.28851	136	33.43276
141	13.22	141	24.44	141	33.66
146	13.40679	146	24.81359	146	34.22038
151	13.71202	151	25.42404	151	35.13606
156	14.14824	156	26.29648	156	36.44472
161	14.73453	161	27.46906	161	38.20358
166	15.49865	166	28.99729	166	40.49594
168	15.86252	168	29.72504	168	41.58756
175	17.4612				

4. 此部份對一般性的證明過於複雜，故我們省略，只利用實算的數據說明觀察與結果無誤。