臺灣二OO三年國際科學展覽會

科　　別：數學科

作品名稱：n x n 方格表中的計數問題

得獎獎項：數學科第一名

美國第五十四屆國際科技展覽會

學　　校：臺北市立實踐國民中學

作　　者：葉洹君

作 者 簡 介

我叫葉洹君，今年就讀台北實踐國中三年級。爸爸是數學教授，媽媽是公務員，我喜歡音樂、美術和數學。平常爸爸喜歡和姊姊、我一起玩數學遊戲，鼓勵我們把自己的學習心得整理成論文投稿出去，目前我已有文章分別登在數學傳播季刊和科學教育月刊。

這次我研究的主要方法是要從簡單的例子著手，仔細觀察和比對它們規律性，先大膽猜測結果，再來證明。很高興我能堅持到最後，完成目標。

中 文 作 品 摘 要

對4×4方格表中計數問題的二個解題方法(1..解方程式的方法， 2.分割圖形的方法)作分析和研究後，首先我推廣分割圖形的方法來証明：“好的 n×n 方格表” 存在若且惟若 n 爲偶數。同時証明這種“好的 n×n 方格表”內所有 n^2 個數的總和 f(n) 爲 n(n+2)/4。

當討論一般的 n×m 方格表時，發現分割圖形的方法盲點，無法繼續推廣來証明。再經過深入分析與推廣解方程式的方法，藉由 n×m 變數方格表，我們終於找到構造所有“好的 n×m 方格表”的方法。同時計算“好的 n×m 方格表” (n≦m)內所有 mn 個數的總和 f(n,m), n≦7 和証明好的 nxm 方格表會有 2(n+1)行一個循環的現象。

Abstract

We first studied two solution methods (1.solving equations,2.dissecting diagrams.) for calculations on 4x4 checkboard. Using the method of dissecting diagrams, we proved that``good nxn checkboard" exists if and only if n is even. Furthermore, the sum f(n) of those $n^2$ numbers in a ``good" nxn checkboard is equal to n(n+2)/4.

In studying the more general nx m checkboards, we found that the method of dissecting diagrams does not work, However, by extending the method of solving equations,and by considering nx m variable checkboards, we obtained a way of obtaining all ``good nxm checkboards." By way of computing the sum f(n,m) (n≦7) of those mn numbers in a ``good nxm checkboards," periodicity in every 2(n+1) rows is observed.

一、 前言

(一). 研究動機

看到 2000 年秋季環球城市數學競賽國中組初級卷第一題4×4方格表中計數問題 ：

在4×4方格表的 16 個方格中，每個方格內填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和爲 1 (註：兩個相鄰的方格恰有一個共同的邊)。試求此方格表的 16 個方格中的數之總和。

這個題目的解題方法有很多種。當我對解題方法作分析和研究後，發現其中有個分割圖形解題方法很像在玩拼圖遊戲，我覺得相當有趣，而且可以把解題方法推廣到 n 爲偶數的一般情況，所以想繼續對這問題作深入的研究。

(二). 研究目的

我的研究目的是想解答下列問題:

是否可以在 nxm 方格表的 mn 個方格中，每個方格內填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和爲 1 如果可以，則找出這些所有可能的 $n\times m$ 方格表，並且求這些方格表的 mn 個方格內的數之總和。

希望藉由這個研究讓自己熟用學校課程裡所學的知識之外，同時也從仔細觀察和比對例子間的規律性，來培養我的耐心和敏銳的觀察力，加深我對數學歸納法的概念和構造法的能力，進而加強我對數學興趣。

三. 研究方法或過程

(一)定義與符號

(1,1)	(1,2)	…	(1,n)
(2,1)	(2,2)	…	(2,n)
…	…	…	…
(n,1)	(n,2)	…	(n,n)

圖 一

定義一：我們把$n\times n$方格中格子的位子按照圖一方法編號 5 爲(i,j)其中$1\le i,j\le n$ 。我們在 n×n 方格表的(i,j)方格內填入的數爲 $a_{I,j}$。

定義二：我們把 n xn 方格表看成由[n/2]個兩兩不相交的圈所組成。從外往內數，最外一圈是第一圈，去掉最外一圈，剩下來 (n-2)×(n-2) 方格表的最外一圈是第二圈，…。當 n 是奇數時，最內一圈只有一個方格，當 n 是偶數時，最內一圈只有 2×2 共四個方格。

定義三： 在 n×m 方格表的 mn 個方格中，如果可以每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和爲 1。我們稱這種填入數的 n×m 方格表爲一個“好的 n×m 方格表”。我們定義 f(n,m) 爲這種“好的 n×m 方格表”內所有 mn 個數的總和。當 n=m 時，我們簡寫 f(n,m) 爲 f(n)。

定義四： 設 X 爲 n×m 方格表中任意一個方格，令 N(X) 表示這個 n×m 方格表中和方格 X 相鄰的所有方格所成的集合。如果Γ爲 n×m 方格表中任意一些方格所成的集合，則令 N(Γ) 表示這個 n×m 方格表中至少和集合Γ中某一個元素(方格)相鄰的所有方格所成集合。

(二) 4×4 方格表中計數問題的解題方法分析

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

圖 二

第一種作法(解方程式)：首先把 4×4 方格表每個方格內依序填入的數爲 A～P (如圖二)，令

(1).方格表裡四個角之方格內的數之總和 $A+D+M+P$ 爲 X；

(2).中間四個方格內的數之總和 $F+G+J+K$ 爲 Y；

(3). 4×4 方格表中剩下來的八個方格內的數之總和

$$B+C+E+H+I+L+N+O \text{ 爲 } Z，$$

則此 4×4 方格表的 16 個方格內的數和爲 $X+Y+Z$。

當我們把與四個角之方格中每個方格所有相鄰方格內的數全部相加。得到

$$4 = Z \cdots\cdots(1)。$$

當我們把與中間四個方格中每個方格所有相鄰方格內的數全部相加。得到

$$4 = 2Y+Z \cdots\cdots(2)。$$

當我們把與第一、四列中第二、三個方格及第二、三列中第一、四個方格中每 個 方格所有相鄰方格內的數全部相加。得到

$$8 = 2X+2Y+Z \cdots\cdots(3)。$$

由(1),(2),(3)，可以得到 X = 2。Y = 0。Z = 4。所以 4×4 方格表的 16 個方格中的數之總和爲 X + Y + Z = 6。

0.6	0.6	0.4	0.4
0.4	0	0	0.6
0.4	0	0	0.6
0.6	0.6	0.4	0.4

圖 三

第二種作法(分割圖形)：我們發現此 4×4 方格表中每個方格都恰好與 A,D,E,H,N,O 六個方格中某一個方格相鄰。也就是說，所有與 A,D,E,H,N,O 這六個方格中某一個方格相鄰方格剛剛好是此方格表的 16 個方格，而且 A,D,E,H,N,O 這六個方格中任何二個方格都沒有共同的相鄰方格(與 A 相鄰的方格是 B,E，與 D 相鄰的方格是 C,H，與 E 相鄰的方格是 A,F,I，與 H 相鄰的方格是 D, G,L 與 N 相鄰的方格是 J, M, O 與 O 相鄰的方格是 K, M, P)。由題意可以知道與每個方格所有相鄰方格內的數之總和爲 1，我們發現如果可以找到滿足題意之“好的 4×4 方格表”，則此 4×4 方格表的16個方格內的數和一定爲6。我們找到圖三就是一個滿足題意的“好的 4×4 方格表”例子。

(三) n(>1)爲奇數的 n×n 方格表中計數問題

當研究方格表中的計數問題時，我們想把4×4方格表推廣一般的情況，首先要從 3×3，5×5，6×6…方格表著手，再仔細觀察它們規律。我們很容易證明滿足題意之“好的 3×3 方格表”的例子不存在，理由是：

A	B	C
D	E	F
G	H	I

圖 四

把3×3方格表每個方格內依序填入的數爲 $A\sim P$（如圖四），因爲N(A)={B,D}，N(I)={H,F}，根據題意，方格B, D, H, F內的數之總和爲2，但是N(E)={B,D,H,F}，根據題意方格B,D,H,F 內的數之總和爲1 (不合)。

上面證明理由是：**我們在一個 n×n 方格表中找到二個包含不同元素個數的集合Ψ和Φ，其中集合Ψ中任何二個元素(方格)沒有共同的相鄰方格，集合Φ中任何二個元素也沒有共同的相鄰方格，而且 N(Ψ) = N(Φ)，導致矛盾**。我們可以把這個證明方法推廣到 n(>1)爲奇數之“好的 n×n 方格表”不存在。

> 定理一：設 n (>1)爲奇數，則“好的 n×n 方格表”不存在。也就是說：在 n ×n 方格表中的每個方格內任意填入一個數,則一定能在 n ×n 方格表中找到一個方格 X，其中 N(X) 中所有方格內的數之總和不爲 1。

證明：設 n = 2m+1 時，我們

(第一種證明) 令集合Ψ= {(2i+1,2i+1)方格| $0\le i\le m$ }。因爲集合Ψ中任何二個元素(方格)沒有共同的相鄰方格，則 N(Ψ) 中所有方格內的數之總和等於集合Ψ中元素個數，所以它必須是 m+1，令 集合Φ={(2i,2i) 方格|$1\le i\le m$ }，同理，N(Φ)中所有方格內的數之總和必須是 m。但是我們發現 N(Ψ) = N(Φ)，所以不合。也就是說“好的 n×n 方格表”不存在。我們知道一定能在$n\times n$方格表中找到一個方格 X，使得 N(X) 中所有方格內的數之總和不爲 1。

Ψ	■									
■	Φ	■								
	■	Ψ	■							
		■	Φ	■						
			■	Ψ	■					
				■	Φ	■				
					■	Ψ	■			
						■	Φ	■		
							■	Ψ	■	
								■	Φ	■
									■	Ψ

圖 五

(第二種證明) 假設我們可以在 n×n 方格表的 n^2個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和爲 1，令(i,j)方格內填入的數爲 $a_{I,j}$。由左上到右下，我們沿著對角線上的所有方格 a_{ii} 來討論:因爲與(1,1)方格相鄰的所有方格是(1,2)和(2,1)方格，所以$a_{12}+a_{21}=0$,與(2,2)方格相鄰的所有方格是(1,2),(2,1),(2,3)和(3,2)方格，所以

$a_{12}+a_{21}+a_{23}+a_{32}=1$，可得到 $a_{23}+a_{32}=0$，繼續討論下去，我們將可得到

(i) i 是奇數時，$a_{i,i+1}+a_{i+1,i}=1$。

(ii) i 是偶數時，$a_{i,i+1}+a_{i+1,i}=0$，

一直到最後，因爲 n-1 是偶數，所以我們有 $a_{n-1,n}+a_{n,n-1}=0$，但是與(n,n)方格相鄰的所有方格是(n-1,n)和(n,n-1)方格。所以 $a_{n-1,n}+a_{n,n-1}=1$(不合)。

(四) n 爲正偶數的 n×n 方格表中計數問題

當我們想把4×4方格表中計數問題推廣一般 n 爲偶數的情況時，覺得第一個解方程式證明方法很難推廣下去，但是第二個分割圖形證明方法可以繼續推廣。首先我們考慮的問題是希望能找到$n\times n$方格表中一些方格所成的集合 A，滿足：

(1)集合 A 中任何二個元素(方格)沒有共同的相鄰方格;

(2)所有和集合 A 中元素相鄰的方格剛好組成$n\times n$方格表所有的 n^2個方格。

從 2×2, 4×4, 6×6, 8×8, 10×10, 12×12, 14×14, 16×16 方格表的嘗試過程中(見附錄一)，我們都可以找到一些方格所成的集合Γ滿足上述二個條件要求， 例如：

例一：當 n=2 時，我們取Γ_2= { (1,2),(2, 2) }; 當 n =4 時，我們取Γ_4= {(1, 1), (2,1),(1, 4), (2,4) ,(4, 2),(4, 3)}。

例二：當 n=6 時，我們取Γ_6 = {(1,2),(1,3),(1,6),(3,1),(4,1),(1, 6), (2,6),(5,6),(6,2),(6,3),(6,6)} ∪ {(3,4),(4,4) }。

例三：當 n=8 時，我們取Γ_8={(1,4),(1,5),(1,1),(2,1),(5,1)(6,1),(1,8), (2,8),(5,8),(6,8),(8,2),(8,3),(8,6),(8,7)}∪ {(3,3)(4,3),(3,6),(4,6),(6,4),(6,5)}。

例四：當 n=10 時，我們取Γ_{10}= {(1,2),(1,3),(1,6),(1,7) ,(3,1), (4,1),(7,1),(8,1),(1,10),(2,10),(5,10),(6,10),(10,2),(10,3),(10,6) }∪ {(3,4),(3,5),(3,8),(5,3),(6,3),(3,8),(4,8), (7,8),(8,4),(8,5), (8,8)}。

例五：當 n=12 時，我們取Γ_{12}= {(1,4),(1,5),(1,8),(1,9),(1,1),(2,1), (5,1)(6,1),(9,1),(10,1)∪ (1,12),(2,12),(5,12),(6,12),(9,12),(10,12),(12,2),(12,3),(12,6),(12,7),(12,10),(12,11)} ∪ {(3,6),(3,7),(3,3)(4,3),(7,3),(8,3),(3,10),(4,10),(7,10),(8,10),(10,4),(10,5),(10,8),(10,9)} {(5,5),(6,5),(5,8),(6,8),(8,6),(8,7)}。

令

P_{4m}={(1,4i)或(1,4i+1)| i=1,2,⋯(m-1)}，

Q_{4m}={(4i-3, 1)(4i-2,1),(4i-3, 4m),(4i-2,4m)| i=1,2,⋯,m}

R_{4m}={(4m,4i-2),(4m,4i-1) | i=1,2,⋯,m}

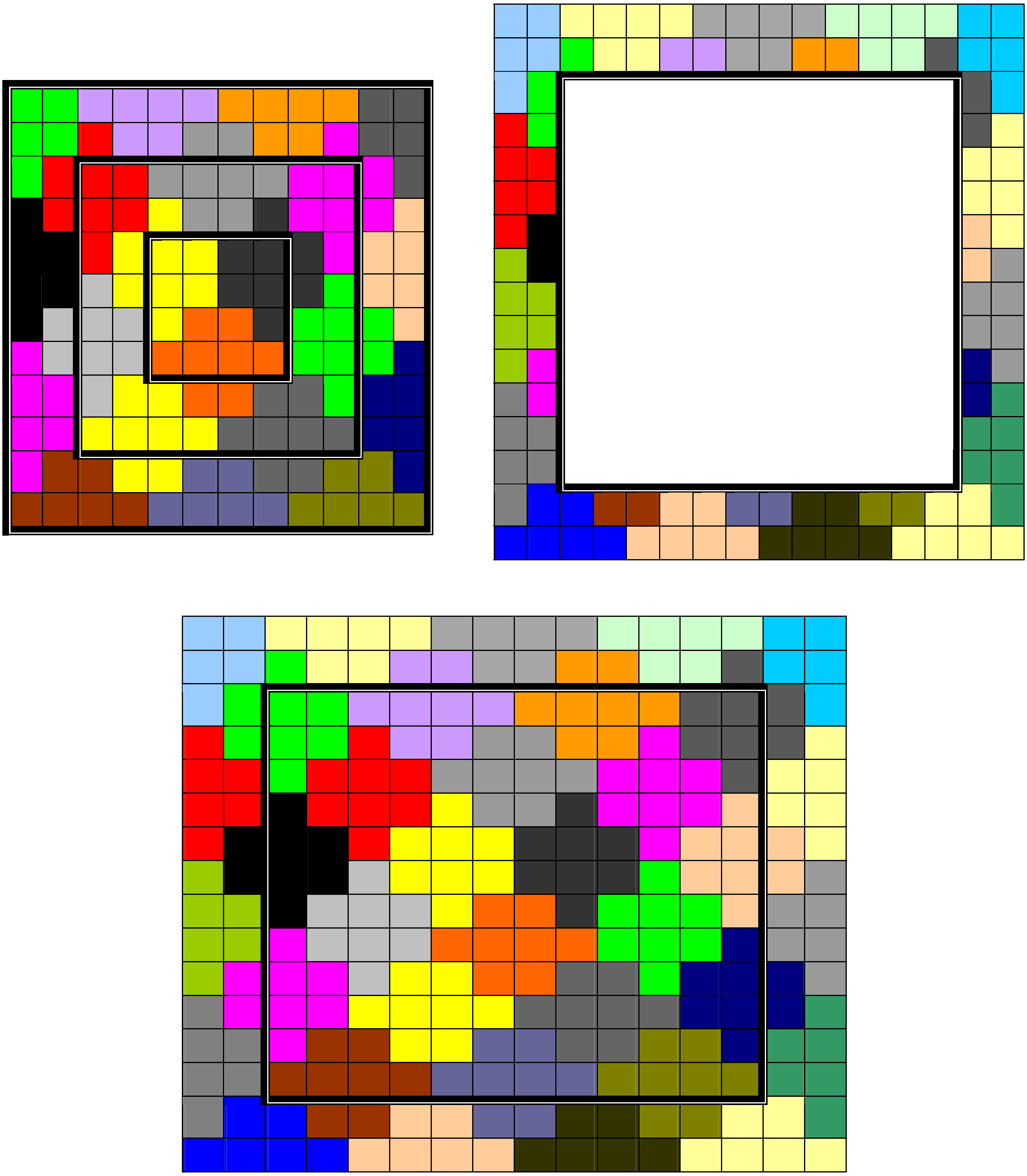
$P_{4m+2}=\{(1,4i-2)$或$(1,4i-1),(4m+2,4i-2),(4m+2,4i-1) \mid i=1,2,\cdots,m\}$，

$Q_{4m+2}=\{(4i-1,1),(4i,1) \mid i=1,2,\cdots,m\}$

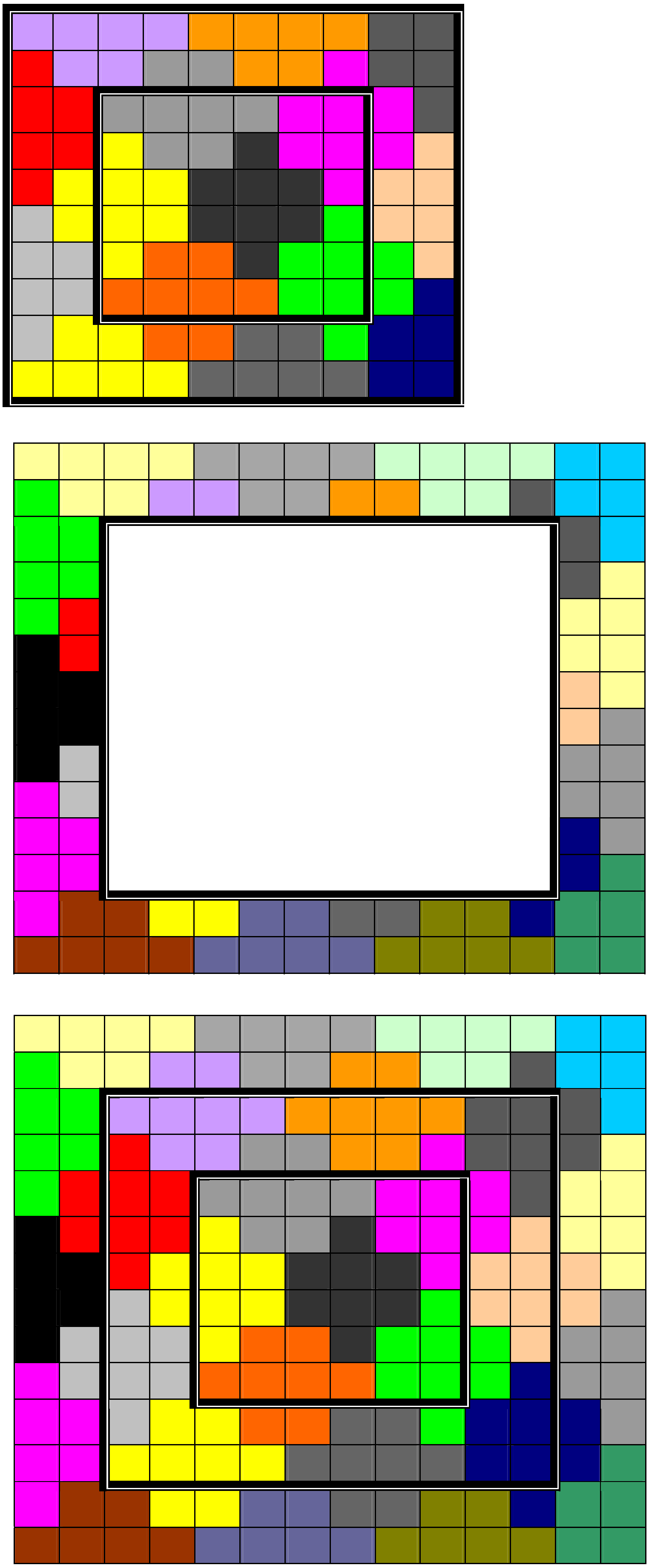
$R_{4m+2}=\{(4i+1,4m+2),(4i+2,4m+2)\} \mid i=0,1,2,\cdots,m\}$ 和

$S_n= P_n \cup Q_n \cup R_n$。

則我們發現



圖六　從Γ_{12}構造Γ_{16}



圖七　從Γ_{10}構造Γ_{14}

$\Gamma_6=(\Gamma_2+2)\cup S_6$，$\Gamma_8=(\Gamma_4+2)\cup S_8$，$\Gamma_{10}=(\Gamma_6+2)\cup S_{10}$，$\Gamma_{12}=(\Gamma_8+2)\cup S_{12}$，其中 (Γ_n+2)代表集合$\{(i+2,j+2) \mid (i,j)\in\Gamma_n\}$。根據這些例子，我們找到一個規律性：

當 n 爲偶數，我們令$\Gamma_{n+4}=(\Gamma_n+2)\cup S_{n+4}$，其中$(\Gamma_n+2)$代表集合$\{(i+2,j+2) \mid (i,j)\in\Gamma_n\}$。

所以可以用歸納法來證明下列定理。

定理二：設 n 爲任意正偶數，一定可以在$n\times n$方格表中一些方格所成的集合Γ_n滿足下列二個條件：(1)集合Γ_n中任何二個元素(方格)沒有共同的相鄰方格；(2)所有和集合Γ_n中元素相鄰的方格剛好組成$n\times n$方格表所有的 n^2個方格。

證明：令 n 爲偶數，我們將用歸納法來證明$\Gamma_{n+4}=(\Gamma_n+2)\cup S_n$，其中 S_n 如上述定義。我們考慮 n = 4m 及 4m+2 兩種情形：

(1) 首先考慮 n = 4m 情形：(見圖六和附錄二)

當 m=1 時，我們取$\Gamma_4=S_4=\{(1,1)(2,1),(1,4),(2,4)\ (4,2),(4,3)\}$，定理成立。

假設 m=k 時，我們取Γ_{4k}定理成立。

當m=k+1時，我們先對中間的4k×4k方格表取集合Γ_{4k}，再由外加入二圈變成4(k+1)×4(k+1)方格表，則原來 4k×4k 方格表中(i,j)方格在新的 4(k+1)×4(k+1)方格表變成 (i+2,j+2)方格。取$\Gamma_{4(k+1)}=(\Gamma_{4k}+2)\cup S_{4k+4}$。我們清楚地看到 4(k+1)×4(k+1)方格表的每個方格恰好都只和$(\Gamma_{4k}+2)\cup S_{4k+4}$中一個方格相鄰。所以定理成立。

(2) 我們考慮 n = 4m+2 情形：(見圖七和附錄二)

當 m = 0 時，我們取$\Gamma_2=\{(1,2),(2,2)\}$，定理成立。

假設 m = k 時，我們取Γ_{4k+2}定理成立。

當 m = k+1 時，我們先對中間的(4k+2)×(4k+2)方格表取集合Γ_{4k+2}，再由外加入二圈變成(4k+6)×(4k+6)方格表，則原來(4k+2)×(4k+2)方格表中(i,j)方格在新的(4k+6)×(4k+6)方格表變成 (i+2,j+2)方格。取$\Gamma_{4k+6}=(\Gamma_{4k+2}+2)\cup S_{4k+6}$。我們清楚地看到(4k+6)×(4k+6)方格表的每個方格恰好都只和$(\Gamma_{4k+2}+2)\cup S_{4k+6}$中一個方格相鄰。所以定理成立。

在嘗試證明定理二的過程中，我們試過許多例子之後，發現一個非常簡單的構造方法來對所有偶數 n，找出滿足題意之"好的$n\times n$方格表"。

定理三：如果 n 爲任意正偶數，則"好的$n\times n$方格表"存在。也就是說：如果 n 爲任意偶數，則可以在 n×n 方格表的 n^2個方格中，每個方格塡入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和爲 1。

證明：我們把 n×n 方格表看成由 n/2 個兩兩不相交的圈所組成。從外往內數，首先在第一圈(最外一圈)中每個方格內塡入數 0.5，第二圈中每個方格內塡入數 0，第三圈中每方格內塡入數 0.5，按照交錯方式，奇數圈中每個方格內塡入數 0.5，.偶數圈中每個方格內塡入數 0(見圖八和附錄三)，我們很容易證明這個 n×n 方格表中的每個方格都恰好和兩個格內數是 0.5 的方格相鄰，所以滿足每個方格的所有相鄰方格內的數之總和爲 1。

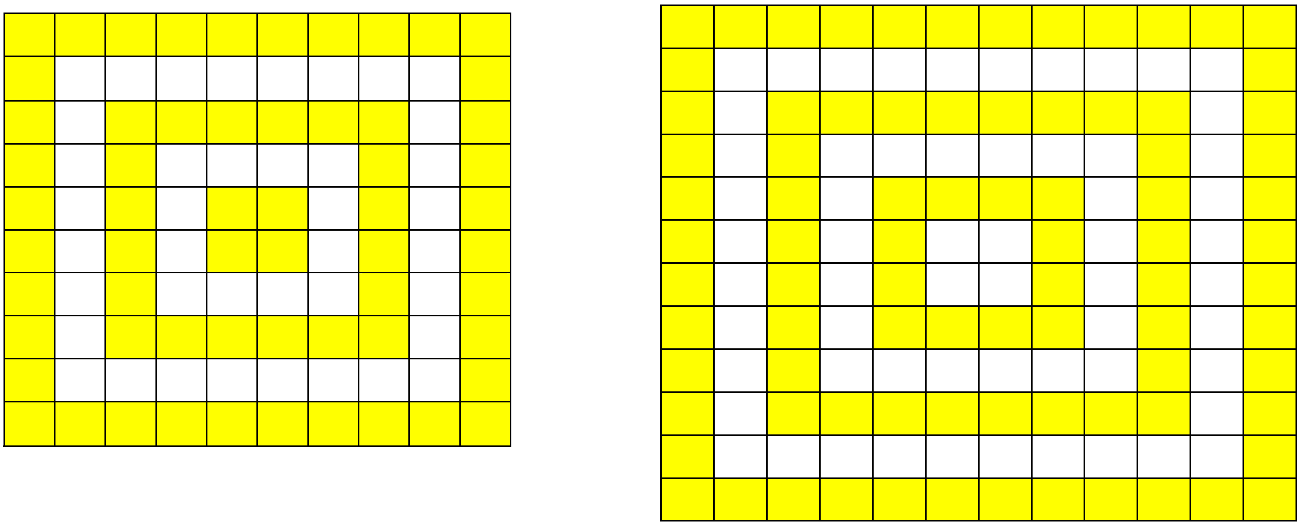


圖 八

當 n 為偶數，我們現在可以計算 f(n)之值。

定理四：設 n 為偶數， $f(n) = n(n+2)/4$。

證明：(第一種證明) 當我們計算這種“好的 $n \times n$ 方格表”內所有數的總和時，我們只要計算方格內填入數 0.5 的方格數目再乘以 0.5 即可。

(1) 當 $n = 4m$ 時，在 $n \times n$ 方格表第一圈(最外一圈)有 $4(4m-1)$個方格，第三圈有 $4(4m-5)$ 個方格，從內往外數，相鄰的兩個奇數圈公差為-16，最內一圈有 12 個方格，所以總和是(見圖八和附錄三)

$$1/2(12 + 28 + 44 + \cdots + 4(4m-1)) = 4m^2 + 2m = 2m(2m+1) = n(n+2)/4$$

(2) 當 $n = 4m+2$ 時，在 $n \times n$ 方格表第一圈(最外一圈)有 $4(4m+1)$個方格，第三圈有 $4(4m-3)$ 個方格，從內往外數，相鄰的兩個奇數圈公差為-16，最內一圈有 4 個方格，所以總和是

$$1/2(4 + 20 + 36 + \cdots + 4(4m+1)) = 2(1+5+9+\cdots+(4m+1)) = (2m+1)\times(2m+2) = n\times(n+2)/4。$$

(第二種證明)

(1) 當 $n = 4m$ 時，已知 P_{4m} 有 $2m-2$ 個元素，Q_{4m}有 $4m$ 個元素，R_{4m}有 $2m$ 個元素，所以 S_{4m}有 $8m-2$ 個元素，Γ_{4m}元素的個數有(見圖六和附錄二)

$$6 + 14 + 22 + \cdots + (8m-2) = 4m^2 + 2m = 2m(2m+1) = n(n+2)/4，$$

所以總和是 $n(n+2)/4$。

(2) 當 $n = 4m+2$ 時，

已知 P_{4m+2} 有 $4m$ 個元素，Q_{4m}有 $2m$ 個元素，R_{4m}有 $2m+2$ 個元素，所以 S_{4m+2}有 $8m+2$ 個元素，Γ_6有 2 + 10 個元素，℃ Γ_{4m+2}元素的個數有(見圖七和附錄)

$$2 + 10 + 18 + 26 + \cdots + (8m+2) = 4m^2 + 6m + 2 = (2m+2)(2m+1) = n(n+2)/4，$$

所以總和是 $n(n+2)/4$ 。

(第三種證明) 當我們考慮一般的 $n \times n$ 方格表(見圖六、七和附錄二)，包含五個方格的形狀

有兩塊，包含六個方格的形狀有(n-3)塊，這兩種形狀佔最外一圈四個方格形狀，而最外圈共有 4n-4 的方格，所以包含六個方格有 $\frac{4n-4-4\times 2}{4}=n-3$ 塊，其餘都是包含 8 個方格形狀，它有 $\frac{n^2-2\times 5-6\times(n-3)}{8}=\frac{1}{8}(n^2-6n+8)$，每塊不同的顏色形狀都是由與某兩個方格相鄰的所有方格所組成，所以它們的總和爲 2×2 + 2×(n-3)+ 2×(n^2 - 6n +8)/ 8 =n(n+2)/ 4。

(五) 分割圖形證明方法的障礙

當考慮用分割圖形證明方法繼續推廣到一般 n×m 方格表的計數問題時，我們想到一個問題：

是否可以在某些"好的 $n\times n$ 方格表"中找不到一些方格所成的集合Γ滿足下列二個條件：
(1)集合Γ中任何二個元素(方格)沒有共同的相鄰方格;
(2) 所有和集合Γ中元素相鄰的方格剛好組成 n×m 方格表所有的 nm 個方格。

1	1	0	1	1
0	0	-1	0	0
0	1	1	1	0

圖 九

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O

圖 十

我們發現這樣的例子不少，其中圖九的 3×5 的方格表就是一個例子。理由是：

首先把 4×4 方格表每個方格內依序填入的數爲 $A\sim P$ (如圖十)，如果我們可以找到一些方格所成的集合Γ滿足上述二個條件要求，因爲 N(A)= {B,F}，爲了使 A 屬於 N(Γ)，所以 B 或 F 兩者之中恰好只有一個屬於Γ;同理 L 或 F 兩者之中恰好只有一個屬於Γ。如果 B 屬於Γ，則 F 不屬於Γ且 L 屬於Γ，但是 N(B)∩N(L)={G} (不合)，所以 B,L 必須不屬於Γ，由對稱原理可證 D,N 都必須不屬於Γ，因此 F 必須屬於Γ。因爲 N(C) = {B, H, D}，爲了滿足 C 屬於 N(Γ)，所以 H 必須屬於Γ，但是 N(H)∩N(F)={G} (不合)。所以我們知道這樣的集合Γ不存在。

現在我面臨的問題是，即使我們不能在 n×m 方格表找到某些方格所成的集合Γ滿足上述二個條件要求，並不代表"好的 n×m 方格表"不存在;即使即使這樣的 n×m 方格表不存在，用分割圖形的方法並不能證明。所以我們必需改變方法，另尋它途。

(六) 找出所有"好的 n × m 方格表"的方法

我們在從新回到第一種解方程式的解法，仔細再思考和分析之後，從 1×m, 2×m…方格表著手，再仔細觀察它們規律。

例六：1×m 方格表的計數問題。爲了要滿足與第一個方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第二個方格內數必須是 1; 爲了要滿足與第二個方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第一個與第三個方格內數之和必須是 1，假設第一行的方格內數爲 a，則第三個方格內數必須是 1-a，爲了要滿足與第個方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第四行的方格內數必須是 0，爲了要滿足與第四行的方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第五行的方格內數必須是 a，按照這種

想法繼下去，我們發現第 4+i 行的方格內數都必須和第 i 行的方格內數相同，造成 4 行一個循環，一直到最後一行 (見圖十一) 。

a	1	1-a	0	a	1	1-a	0	…

圖 十一

當 m = 4k 時，爲了要滿足與最後一個(第 m 個)方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，可以得到 a = 0， 所以下表是唯一的解(4 行一個循環)。

0	1	1	0	…	0	1	1	0

當 m = 4k+1 時，我們發現最後第二個(第 m-1 個)中方格內的數必爲 0，所以與最後一個(第 m 個)方格相鄰的所有方格內的數和爲 0，本題無解。

當 m = 4k+2 時，爲了要滿足與最後一個(第 m 個)方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，可以得到 a = 0， 所以下表是唯一的解(4 行一個循環)。

1	1	0	0	…	1	1	0	0	1	1

當 m = 4k+3 時，我們發現 a 爲任何實數都可以滿足題意，所以得到無限多個解，但是形式必須如下表 (4 行一個循環)。

a	1	1-a	0	…	a	1	1-a	0	a	1	1-a

例七：2×m 方格表的計數問題。假設第一行 2 個方格內的數由上而下爲 a, x，爲了要滿足與第一行中第一個方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第二行中第一個方格內的數必須是 1-x，爲了要滿足與第一行中第二個方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第二行中第二個方格內的數必須是 1-a，爲了要滿足與第二行中第一個(或第二個)方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第三行中兩個方格內數必須是 0，爲了要滿足與第三行中的方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第四行中上、下兩個方格內的數必須是 x,a，按照這種想法繼下去，我們發現第 6+i 行都必須和第 i 行相同，造成 6 行一個循環，一直到最後一行(見圖十二)。

a	1-x	0	x	1-a	0	…
x	1-a	0	a	1-x	0	…

圖 十二

當 m = 3k 時，爲了要滿足與最後一行(第 m 行)中每個方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，可以得到 a = x = 0， 所以下表是唯一的解(3 行一個循環)。

0	1	0	0	1	0	…	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	…	0	1	0	0	1	0

當 m = 3k+1 時，最後一行(第 m+1 行)中每個方格，可以得到 a = x = 1， 所以下表是唯一

的解(3 行一個循環)。

1	0	0	1	0	0	…	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	…	1	0	0	1	0	0	1

當 m = 6k+2 時，我們發現 a, x 爲任何實數都可以滿足題意，所以得到無限多個解，但是形式必須如下表 (6 行一個循環)。

。

a	1-x	0	x	1-a	0	…	a	1-x	0	x	1-a
x	1-a	0	a	1-x	0	…	x	1-a	0	a	1-x

當 m = 6k+5 時，我們發現 a, x 爲任何實數都可以滿足題意，所以得到無限多個解，但是形式必須如下表 (6 行一個循環)。

。

a	1-x	0	x	1-a	0	…	a	1-x	0	x	1-a	0	a	1-x
x	1-a	0	a	1-x	0	…	x	1-a	0	a	1-x	0	x	1-a

看到上述二個例子，我們發現到柳暗花明又一村，終於找到了正確的方法。

找出所有“好的 n×m 方格表”的方法：
首先列出 n×(m+1) 方格表，我們假設第一行每個方格內的數爲 $a_{11},a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1}$，爲了要滿足與第一行中每個方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第二行中每個方格內的數，將被唯一決定。爲了要滿足與第二行中每個方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第三行中每個方格內的數，將被唯一決定。按照這種想法繼下去，當我們決定了最後一行(第 m+1 行)中每個方格內的數，則 $a_{11},a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1}$ 取的值必須使得最後一行中每個方格內的數爲 0。

這個方法成立的理由是：當我們考慮一般 n×m 方格表的計數問題時，我們可以先加上一行在最後面變成 n×(m+1) 方格表，當我們考慮與第 m 行中任何一個方格相鄰的所有方格內的總和爲 1 時，由於第 m+1 行是不存在的，所以我們必須令第 m+1 行方格內的數都必需爲 0，這樣我們可以解出變數 $a_{11},a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1}$ 的值。

在一個 n×m 方格表裡，我們假設第一行每個方格內的數爲 $a_{11},a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1}$，從第一行到最後一行內的數都用變數 $a_{11},a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1}$ 的函數表示，除了最後一行中的方格之外，與方格表中每個方格相鄰的所有方格內的數和都爲 1，則我們稱這樣的 n×m 方格表爲 n×m 變數方格表。

例八：3×m 方格表的計數問題。假設第一行 3 個方格內的數由上而下爲 a, x, b，爲了要滿足與第一行中第一個方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第二行中第一個方格內的數必須是 1-x，爲了要滿足與第一行中第二個方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第二行中第二個方格內的數必須是 1-a-b，爲了要滿足與第一行中第三個方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第二行中第三個方格內的數必須是 1-x，按照這種想法繼下去，我們發現第八行中每個方格內的數都必須是 0，第九行中方格內的數和第一行中方格內的數相同，造成 8 行一個循環，

一直到最後一行。圖十三是 3x8 變數方格表。

A	1-x	b	1	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	1-x	0
b	1-x	a	1	1-a	x	1-b	0

圖 十三

當 m = 8k 時，我們檢查滿足最後一行(第 m+1 行)中每個方格內的數爲 0 時，可以得到 a = b = 0 和 x =1， 所以下表是唯一的解(8 行一個循環)。

0	1	0	1	1	0	1	0		1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	-1	0	0	-1	1	0	…	1	0	0	1	-1	0	0	-1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0		1	0	0	1	0	1	1	0	1	0

當 m = 8k+1 時，我們檢查滿足最後一行中每個方格內的數爲 0 時，可以得到 a + b = 1 就可以，所以解有無限多個，但是形式必需如下表，其中 a 爲任何實數(8 行一個循環，最後一行和第一行一樣)。

A	0	1-a	1	a	1	1-a	0		1	1-a	0	a
1	0	0	0	-1	0	0	0	…	0	0	0	1
1-a	0	a	1	1-a	1	a	0		1	a	0	1-a

當 m = 8k+2 時，我們檢查滿足最後一行中每個方格內的數爲 0 時，可以得到
a=b=0，x =1。所以下表(8 行一個循環，最後二行和最前二行一樣) 是唯一的解。

0	0	0	1	1	1	1	0		1	1	0	0	0
1	1	0	0	-1	-1	0	0	…	-1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0		1	1	0	0	0

當 m = 8k+3 時，我們檢查滿足最後一行中每個方格內的數爲 0 時，我們發現本題無解。
當 m = 8k+4 時，我們檢查滿足最後一行中每個方格內的數爲 0 時，可以得到 a = b = x = 1。所以下表(8 行一個循環，最後四行和最前四行一樣)是唯一的解。

1	1	1	1	0	0	0	0		0	0	0	1	1	1	1
0	-1	-1	0	0	1	1	0	…	1	1	0	0	-1	-1	0
1	1	1	1	0	0	0	0		0	0	0	1	1	1	1

當 m = 8k+5 時，我們檢查滿足最後一行中每個方格內的數爲 0 時，可以得到無限多個解，但是形式必需如下表(8 行一個循環，最後五行和最前五行一樣)，其中 a 爲任何實數。

A	1	1-a	1	a	0	1-a	0		0	1-a	0	a	1	1-a	1	a
0	0	-1	0	0	0	1	0	…	0	1	0	0	0	-1	0	0
1-a	1	a	1	1-a	0	1-a	0		0	1-a	0	1-a	1	a	1	1-a

當 m = 8k+6 時，我們檢查滿足最後一行中每個方格內的數爲 0 時，可以得到 a = b = x = 1。所以下表(8 行一個循環，最後六行和最前六行一樣)是唯一的解。

1	0	1	1	0	1	0	0		1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	-1	0	0	-1	1	0	0	…	1	0	0	1	-1	0	0	-1	1
1	0	1	1	0	1	0	0		1	0	0	1	0	1	1	0	1

當 m = 8k+7 時，我們檢查滿足最後一行中每個方格內的數為 0 時，可以得到無限多個解，但是形式必須如下表(8 行一個循環，最後七行和最前七行一樣)，其中 a ,b ,x 爲任何實數。

A	1-x	b	1	1-b	x	1-a	0		x	1-a	0	a	1-x	b	1	1-b	x	1-a
X	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	1-x	0	…	a+b-1	1-x	0	x	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	1-x
B	1-x	a	1	1-a	x	1-b	0		x	1-b	0	b	1-x	a	1	1-a	x	1-b

經過簡單計算，可以得到

f(3,8k)=8k, f(3,8k+1)=f(3,8k+2)=8k+2, f(3,8k+4)= f(3,8k+5)= 8k+6,
f(3,8k+6)=f(3,8k+7)= 8k+8。

所以我們有

定理五

$$f(3,m)=\begin{cases} 8k & if\ m=8k \\ 8k+2 & if\ m=8k+1 \\ 8k+2 & if\ m=8k+2 \\ \text{無解} & if\ m=8k+3 \\ 8k+6 & if\ m=8k+4 \\ 8k+6 & if\ m=8k+5 \\ 8k+8 & if\ m=8k+6 \\ 8k+8 & if\ m=8k+7 \end{cases}$$

例九：4×m 方格表的計數問題。討論方法是和討論 3×m 方格表相似的。我們假設第一行 4 個方格內的數由上而下爲 a, x, b, y，爲了要滿足與第一行中每個方格相鄰的所有方格內的數和爲 1，則第二行中每個方格內的數由上而下 1-x, 1-a-b,1-x-y, 1-b，按照這種想法繼下去，我們發現第五行中每個方格內的數都必須是 0，第六行中方格內的數和第一行中方格內的數剛好顛倒，第 n+1+I 行中方格內的數和第 I 行中方格內的數剛好顛倒，造成 10 行一個循環，一直到最後一行。當我們檢查滿足最後一行中每個方格內的數爲 0 時，可以得到 a, x, b, y 之值或關係式。圖十四是 4x10 變數方格表。

A	1-x	b	1-y	0	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b	0	b	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b-1	1-x	0	x	1-a-b	x+y-1	1-b	0
y	1-b	x	1-a	0	a	1-x	b	1-y	0

圖 十四

事實上，當我們考慮 m = 5k,5k+1,5k+2,5k+3 情形，五行會形成一個循環(當然，十行也會形成循環)。

當 m = 5k 時，可以得到 a = b = x = y = 0。所以下表(5 行一個循環)是唯一的解。

0	1	0	1	0	0	1	0	1	0		0	1	0	1	0
0	1	-1	1	0	0	1	-1	1	0	…	0	1	-1	1	0
0	1	-1	1	0	0	1	-1	1	0	…	0	1	-1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0		0	1	0	1	0

當 m = 5k+1 時，可以得到 a = y = 0 ，b = x = 1。所以下表(5 行一個循環，最後一行和最前一行一樣)是唯一的解。

0	0	1	1	0		1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	…	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	…	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0		1	0	0	0	1	1	0	0

當 m = 5k+2 時，可以得到 a = y = 1 ，b = x = 0。所以下表(5 行一個循環，最後二行和最前二行一樣)是唯一的解。

1	1	0	0	0		0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	…	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	…	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0		0	0	1	1	0	0	0	1	1

當 m = 5k+3 時，可以得到 a = b = x = y = 1。所以下表(5 行一個循環，最後三行和最前三行一樣)是唯一的解。

1	0	1	0	0		0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	-1	1	0	0	…	0	0	1	-1	1	0	0	1	-1	1
1	-1	1	0	0	…	0	0	1	-1	1	0	0	1	-1	1
1	0	1	0	0		0	0	1	0	1	0	0	1	0	1

當 m = 10k+4 時，，可以得到無限多個解，但是形式必須如下表，其中 a ，b ，x ，y 為任何實數。

a	1-x	b	1-y	0	y	1-b	x	1-a	0		1-a	0	a	1-x	b	1-y
x	1-a-b	x+y-1	1-b	0	b	1-x-y	a+b-1	1-x	0	…	1-x	0	x	1-a-b	x+y-1	1-b
b	1-x-y	a+b-1	1-x	0	x	1-a-b	x+y-1	1-b	0	…	1-b	0	b	1-x-y	a+b-1	1-x
y	1-b	x	1-a	0	a	1-x	b	1-y	0		1-y	0	y	1-b	x	1-a

當 m = 10k+9 時，可以得到無限多個解，但是形式必須如下表，其中 a ，b ，x ，y 為任何實數。

a	1-x	b	1-y	0	y	1-b	x	1-a	0		1-y	0	y	1-b	x	1-a
x	1-a-b	x+y-1	1-b	0	b	1-x-y	a+b-1	1-x	0	…	1-b	0	b	1-x-y	a+b-1	1-x
b	1-x-y	a+b-1	1-x	0	x	1-a-b	x+y-1	1-b	0	…	1-x	0	x	1-a-b	x+y-1	1-b
y	1-b	x	1-a	0	a	1-x	b	1-y	0		1-a	0	a	1-x	b	1-y

經過簡單計算，可以得到　f(4,5k)=6k, f(4,5k+1)=6k+2, f(4,5k+2)=6k+4，

f(4,5k+3)=6k+6, f(4,5k+4)=6k+6

定理六

$$f(4,m)=\begin{cases} 6k & if\ m=5k; \\ 6k+2 & if\ m=5k+1, \\ 6k+4 & if\ m=5k+2; \\ 6k+6 & if\ m=5k+3\ or\ 5k+4. \end{cases}$$

例十：5×m 方格表的計數問題。方法是相似的。我們假設第一行 5 個方格內的數由上而下為 a，x，b，y，c，我們發現第十二行中每個方格內的數都必須是 0，第十三行中方格內的數和第一行中方格內的數相同，造成十二行一個循環，一直到最後一行。當我們檢查滿足最後一行(第 m+1 行)中每個方格內的數為 0 時，為了為了節省空間起見，我們只列出圖九是 4×12 變數方格表(圖十五)。

a	1-x	b	1-y	c	1	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y-1	0	-y	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y	b	1	1-b	x+y	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	1-x-y	b+c-1	1-y	0
c	1-y	b	1-x	a	1	1-a	x	1-b	y	1-c	0

圖 十五

當 m = 12k 時，可以得到 a = b = c = x = y = 0。
當 m = 12k+1 時，本題無解，因為必須要求 x = y = 1 且 x + y = 1，所以不合。
當 m = 12k+2 時，可以得到 a + c = x + y = 1, b = 0。
當 m = 12k+3 時，可以得到 a + b = x = y = 1, a = c。
當 m = 12k+4 時，可以得到 x = y = 1, a = b = c = 0。
當 m = 12k+5 時，本題無解,因為必須要求 x = y = 1 且 x + y = 1(不合)。
當 m = 12k+6 時，可以得到 a = b = c = 1,x = y = 0。
當 m = 12k+7 時，可以得到 a + b = 1, a = c, x = y = 0。
當 m = 12k+8 時，可以得到 a + c = x + y = b = 1。
當 m = 12k+9 時，本題無解,因為必須要求 x = y = 0 且 x + y = 1(不合)。
當 m = 12k+10 時，可以得到 a = b = c = x = y = 1。
當 m = 12k+11 時，可以得到 a , b , c , x , y 為任何實數。

經過列表和簡單計算(見附錄四)，可以得到

定理七

f(5,12k)= 18k, f(5,12k+2)= 18k+4, f(5,12k+3)= 18k+6, f(5,12k+4)= 18k+6,
f(5,12k+6)= 18k+12, f(5,12k+7)= 18k+12, f(5,12k+8)= 18k+14,
f(5,12k+10)= 18k+18, f(5, 12k+11)= 18k+18, 而當 m =12k+1, 12k+5, 12k+9 時無解。

當我們討論 6×m 方格表的計數問題時，我們發現第七行中每個方格內的數都必須是 0，第八行中方格內的數和第一行中方格內的數相同，造成七行一個循環，一直到最後一行。當我們檢查滿足最後一行中每個方格內的數爲 0 時，圖十六是 6×14 變數方格表。

a	1-x	b	1-y	c	1-z	0	a	1-x	b	1-y	c	1-z	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c	0	x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0	b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0	y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
c	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0	c	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
z	1-c	y	1-b	x	1-a	0	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0

圖 十六

事實上，當我們考慮 m = 7k,7k+1,7k+2,7k+3,7k+4,7k+5 情形，七行會形成一個循環(當然，十四行也會形成循環)。

當 m = 7k 時，可以得到 a = b = c = x = y = z = 0。
當 m = 7k+1 時，可以得到 a = c = x = z = 1, y = b = 0。
當 m = 7k+2 時，可以得到 c = x =1, a = b = y = z = 0。
當 m = 7k+3 時，可以得到 a = b = y = z = 1, c = x = 0。
當 m = 7k+4 時，可以得到 b = y = 1, a = c = x = z = 0。
當 m = 7k+5 時，可以得到 a = b = c = x = y = z = 1。
當 m = 14k+6,14k+13 情形，可以得到 a , b , c , x , y , z 爲任何實數。
經過列表和簡單計算(見附錄四)，可以得到

定理八

f(6,7k) = 12k, f(6,7k+1) = 12k+4, f(6,7k+2) = 12k+4, f(6,7k+3) = 12k+6,
f(6,7k+4) = 12k+8, f(6,7k+5) = f(6,7k+6) = 12k+12。

例十一：7×m 方格表的計數問題。我們發現第十六行中每個方格內的數都必須是 0，第十七行中方格內的數和第一行中方格內的數相同，造成十六行一個循環，一直到最後一行。圖十七是 7x16 變數方格表

a	1-x	b	1-y	c	1-z	d	1	1-d	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c-d	z-1	0	-z	c+d-1	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c+d-1	2-y-z	c	1	1-c	y+z	2-b-c-d	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c-d	x+y+z-2	1-b-c	y-1	0	-y	b+c-1	1-x-y-z	a+b+c+d-2	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
c	1-y-z	b+c+d-1	2-x-y-z	a+b+c-1	2-x-y	b	1	1-b	x+y	2-a-b-c	x+y+z-1	2-b-c-d	y+z-1	1-c	0
z	1-c-d	y+z-1	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	1-x-y	b+c-1	1-y-z	c+d-1	1-z	0
d	1-z	c	1-y	b	1-x	a	1	1-a	x	1-b	y	1-c	z	1-d	0

圖 十七

當 m = 16k 時，可以得到 a = b = c = d = x = y = z = 0。
當 m = 16k+1 時，可以得到 a + b = x = z = 1, a = c, b = d, y = 0。
當 m = 16k+2 時，可以得到 a = d = y = 1, b = c = x = z = 0。
當 m = 16k+3 時，可以得到 a + d = b + c = x + z = y = 1。
當 m = 16k+4 時，可以得到 a = d = x = z = 1, b = c = y = 0。
當 m = 16k+5 時，可以得到 a + b = x = y = z = 1, a = c, b = d。
當 m = 16k+6 時，可以得到 x = y = z =1, a = b = c = d = 0。
當 m = 16k+7 時，我們發現本題無解。
當 m = 16k+8 時，可以得到 a = b = c = d =1, x = y = z = 0。
當 m = 16k+9 時，可以得到 a + b = 1, a = c, b = d , x = y = z = 0。
當 m = 16k+10 時，可以得到 b = c = y = 1, a = d = x = z = 0。
當 m = 16k+11 時，可以得到 a + d = b + c = x + z = 1, y = 0。
當 m = 16k+12 時，可以得到 b = c = x = z = 1, a = d = y = 0。
當 m = 16k+13 時，a + b = y = 1, a = c, b = d , x = z = 0。
當 m = 16k+14 時，可以得到 a = b = c = d = x = y = z = 1。
當 m = 16k+15 時，可以得到 a , b , c , d, x , y , z 爲任何實數。
經過列表和簡單計算(見附錄四)，可以得到

定理九

f(7,16k) = 32k ,f(7,16k+1) = 32k+4, f(7,16k+2) = 32k+6, f(7,16k+3) = 32k+8,
f(7,16k+4) = 32k+10, f(7,16k+5) = 32k+12, f(7,16k+6) = 32k+12,
f(7,16k+8) = 32k+20, f(7,16k+9) = 32k+20, f(7,16k+10) = 32k+22,
f(7,16k+11) = 32k+24, f(7,16k+12) = 32k+26, f(7,16k+13) = 32k+28,
f(7,16k+14) = 32k+32, f(7,16k+15) = 32k+32, 而當 m = 16k+7 時無解。

例十二：8×m 方格表的計數問題。我們發現第九行中每個方格內的數都必須是 0，第十行中方格內的數和第一行中方格內的數相同，造成九行一個循環，一直到最後一行。由於篇幅關係，圖十八只列出 8×9 變數方格表。

a	1-x	b	1-y	c	1-z	d	1-w	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c-d	z+w-1	1-d	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c+d-1	2-y-z-w	c+d-1	1-z	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c-d	x+y+z+w-2	2-b-c-d	y+z-1	1-c	0
c	1-y-z	b+c+d-1	2-x-y-z-w	a+b+c+d-2	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
z	1-c-d	y+z+w-1	2-b-c-d	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
d	1-w-z	c+d-1	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
w	1-d	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0

圖 十八

用同樣方法可以得到 $f(8,9k),f(8,9k+1),\cdots,f(8,9k+8)$之值。但是當愈來愈大時，$f(n,m)$之值就很難用同樣方法得到。我們希望討論 $n\times m$ 變數方格表的一些有的意思現象。

當我們討論 $n\times m$ 變數方格表的計數問題時，我們發現想在構造$(n+1)\times 2(n+2)$ 變數方格表，可以用歸納法的概念得到。構造$(n+1)\times 2(n+2)$變數方格表的方法如下:

假設 $n\times 2(n+1)$ 變數方格表第一行方格內的數爲 $a_{11},a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1}$，我們

1. 構造$(n+1)\times 2(n+2)$ 變數方格的前 n+1 行: (見圖十九及附五)
   (1). 在 $n\times 2(n+1)$ 變數方格表的前 n+1 行下面再加入一列 n+1 個數 $a_{n+1,1}, 1-a_{n,1}, a_{(n-1),1}, 1-a_{(n-2),1},\cdots$;
   (2).沿著左下到右上對角線的方向把新增加的第 n+1 列之方格內的數，每次乘以-1，加到右上的方格。也就是說，在(n,2)方格內的數加上$-a_{n+1,1}$，在(n-1,3)方格內的數加上$a_{n+1,1}$，在(n-2,4)方格內的數加上$-a_{n+1,1}$，…，在(1,n+1)方格內的數加上$(-1)^n a_{n+1,1}$; 另外在(n,3)方格內的數加上$-(1-a_{n,1})$，在(n-1,4)方格內的數加上 $1-a_{n,1}$，在(n-2,5)方格內的數加上$-(1-a_{n,1})$， …，在(2,n+1)方格內的數加上$(-1)^{n+1}(1-a_{n,1})\cdots$; 照這樣我們就建構$(n+1)\times 2(n+2)$ 變數方格的前 n+1 行。當 n 是偶數時，第 n 行中每個方格內的數都必須是 $1-a_{n,1}, 1-a_{n-1,1}, 1-a_{n-2,1}\cdots, 1-a_{1,1}$;當 n 是奇數時，第 n 行中每個方格內的數都必須是 $a_{n,1}, a_{n-1,1}-1, a_{n-2,1}, a_{n-3,1}-1, a_{n-4,1}, a_{n-5,1}-1,\cdots$。

a	1-x	b	1-y	c	1-z	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
y	1-b-c	x+y+z-1	1-a-b+1-c	x+y-1	1-b	0
c	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
z	1-c	y	1-b	x	1-a	0

d	1-z	c	1-y	b	1-x	a

a	1-x	b	1-y	c	1-z	d	1
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c-d	z-1	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c+d-1	1-y+1-z	c	1
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c-d	x+y+z-1-1	1-b-c	y-1	0
c	1-y-z	b+c+d-1	1-x-y+1-z	a+b+c-1	1-x+1-y	b	1
z	1-c-d	y+z-1	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0
d	1-z	c	1-y	b	1-x	a	1

w	1-d	z	1-c	y	1-b	x	1-a

a	1-x	b	1-y	c	1-z	d	1-w	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c-d	z+w-1	1-d	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c+d-1	2-y-z-w	c+d-1	1-z	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c-d	x+y+z+w-2	1-b-c+1-d	y+z-1	1-c	0
c	1-y-z	b+c+d-1	2-x-y-z-w	a+b+c+d-1-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
z	1-c-d	y+z+w-1	1-b-c+1-d	x+y+z-1	1-a-b+1-c	x+y-1	1-b	0
d	1-w-z	c+d-1	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
w	1-d	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0

圖 十九

2．構造(n+1)×2(n+2) 變數方格表的第 n+2 行和後 n+2 行:

當 n+1 是偶數時（見圖二十），

(1)．(n+1)×2(n+2) 變數方格表的第 n+2 行中每個方格內的數都必須是 0 ；

(2)．第 n+2+i 行中方格內的數和第 i 行中方格內的數剛好顛倒，即 $a_{i,\ j}=a_{n+2+i,\ n+2-j}$，造成 2(n+2)行一個循環，一直到最後一行。也就是說 2(n+2)行的前 n+2 行和後 n+2 行剛好上下顛倒;

a	1-x	b	1-y	c	1-z	0	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c	0	c	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0	y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0	b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
c	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0	x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c	0
z	1-c	y	1-b	x	1-a	0	a	1-x	b	1-y	c	1-z	0

圖 二十

當 n+1 是奇數時(見圖二十一)，

(1)．(n+1)×2(n+2) 變數方格表的第第 n+2 行中每個方格內的數都必須是 1,0,1,0,…;

(2)．先將前 n+2 行的方格表上下顛倒行，偶數列中方格內的數乘上(-1) ，奇數列中方格內的數乘上(-1)再加上 1，則所得到的方格表，就是後 n+2 行形成的 nx(n+2)方格表。也就是說第 n+2+i 行中方格內的數和第 i 行中方格內的數有密切的關係，

即 (a) j 是偶數時，$a_{n+2+i,n+2-j}=-a_{i,j}$;

(b) j 是奇數時，$a_{n+2+i,n+2-j}=1-a_{i,j}$。

所以第 2(n+2)行中每個方格內的數都必須是 0;

因此我們得到

a	1-x	b	1-y	c	1-z	d	1	1-d	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c-d	z-1	0	-z	c+d-1	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c+d-1	2-y-z	c	1	1-c	y+z	2-b-c-d	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c-d	x+y+z-2	1-b-c	y-1	0	-y	b+c-1	1-x-y-z	a+b+c+d-2	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
c	1-y-z	b+c+d-1	2-x-y-z	a+b+c-1	2-x-y	b	1	1-b	x+y	2-a-b-c	x+y+z-1	2-b-c-d	y+z-1	1-c	0
z	1-c-d	y+z-1	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	1-x-y	b+c-1	1-y-z	c+d-1	1-z	0
d	1-z	c	1-y	b	1-x	a	1	1-a	x	1-b	y	1-c	z	1-d	0

圖 二十一

定理十：一個 n×m 變數方格表會形成 2(n+1)行一個循環。當 n 是偶數時，如果第一行方格內的數為 $a_{11},a_{21},a_{31},\cdots,a_{n1}$ 剛好上下對稱，則方格表會形成 n+1 行一個循環。

我們已經知道一個 n×m 變數方格表會形成 2(n+1)行一個循環，我們希望計算“好的 n×m 方格表”中從第一行到第 2(n+1)行所有的方格內的數之總和。

定義五：定義 p(n)為“好的 n×m 方格表”中從第一行到第 2(n+1)行所有方格內的數之總和。**(任意連續** 2(n+1)行所有方格內的數之總和也是 p(n)) 2(n+1)行所有方格內的數之總和

N	1	2	3	4	5	6	7	8
p(n)	2	4	8	12	18	24	32	40

圖 二十二

我們觀察 n=1,2,…,7 的 p(n)之值(見圖二十二)，發現有很好的規律，就是

$p(n+2)= p(n)+2n+4$。所以我們得到 $P(2k+1)=2k^2$; $p(2k)=2k(k+1)$ 。即

定理十一： $p(n)=[(n+1)^2/2]$，其中[ ]是高斯符號。

經過計算許多好的 nxm 方格表的 f(n,t)之值之後(見圖二十三)，n=1,2,...,19, $1\leqq t\leqq 2n+2$，由於一個 n×m 變數方格表會形成 2(n+1)行一個循環，用 p(n) 和 f(n,t)之值，$1\leqq t\leqq 2n+2$，就可以計算所有好的 nxm 方格表 f(n,m)之值。也就是說:令 $m=(2n+2)k+t$ 其中 t 為正整數且 $1\leqq t\leqq 2n+2$，則 $f(n,(2n+2)k+t) = kp(n) + f(n,t)$ 。

n\t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	2	2	*	4	4	4	*	6	6	6	*	8	8	8	*	10	10
2	2	4	4	4	6	6	6	8	8	8	10	10	10	12	12	12	14
3	*	6	6	8	8	8	10	10	*	14	14	16	16	16	18	18	*
4	6	6	6	8	10	12	12	12	14	16	18	18	18	20	22	24	24
5	6	6	*	12	12	14	*	18	18	18	*	22	24	24	*	30	30
6	8	8	12	12	12	16	16	20	20	24	24	24	28	28	32	32	36
7	8	10	12	12	*	20	20	22	24	26	28	32	32	32	36	38	40
8	8	12	14	16	20	20	20	24	26	28	32	34	36	40	40	40	44
9		12	*	16	20	20	*	30	30	34	*	38	40	44	*	50	50
10		12	18	20	22	24	30	30	30	36	38	40	42	48	50	52	54
11			18	20	24	26	30	30	*	42	42	46	48	52	54	58	*
12			18	24	26	28	34	36	42	42	42	48	50	56	58	60	66
13				24	28	32	*	38	42	42	*	56	56	60	*	66	70
14				24	32	34	38	40	46	48	56	56	56	64	66	72	74
15					32	36	40	42	48	50	56	56	*	72	72	78	80
16					32	40	44	48	52	56	60	64	72	72	72	80	84
17						40	*	50	54	58	*	66	72	72	*	90	90
18						40	50	52	58	60	66	72	78	80	90	90	90
19							50	54	*	66	74	74	80	84	90	90	*
20							50	60	64	68	74	78	86	88	96	100	110
21								60	66	70	*	80	88	92	*	102	110
22								60	72	76	80	88	92	96	104	108	116
23									72	78	84	90	96	100	108	114	120
24									72	84	88	94	100	104	112	120	126
25										84	*	96	104	112	*	122	130
26										84	98	102	110	116	122	128	134
27											98	104	112	120	126	130	*
28											98	112	118	120	130	140	146
29												112	120	124	*	142	150
30												112	128	132	140	148	156
31													128	136	144	150	160
32													128	144	150	156	164
33														144	*	162	170
34														144	162	168	176
35															162	170	*
36															162	180	186
37																180	190
38																180	200
39																	200
40																	200

圖 二十三 f(n,t)之值，n=1,2,...,19, 1≦t≦2n+2

三、研究結果與討論

在這個研究計劃裡，我們証明:

定理一：設 n 為奇數，則“好的 n×n 方格表”不存在。也就是說：在 n ×n 方格表中的每個方格內任意填入一個數，則一定能在 n×n 方格表中找到一個方格 X，其中 N(X) 中所有方格內的數之總和不為 1。

定理二：設 n 為偶數，一定可以在 n×n 方格表中一些方格所成的集合 Γ_n 滿足下列二個條件：
(1) 集合 Γ_n 中任何二個元素(方格)沒有共同的相鄰方格;
所有和集合 Γ_n 中元素相鄰的方格剛好組成 n×n 方格表所有的 n^2 個方格。

定理三：如果 n 為任意偶數，則“好的 n×n 方格表”存在。也就是說：可以在 n×n 方格表的 n^2 個方格中，每個方格填入一個數，使得每個方格的所有相鄰方格中的數之總和為 1。

定理四 設 n 為偶數，一個好的 n×n 方格表中所有方格中的數之總和 f(n) 為 n(n+2)/4。

另外我們找出所有“好的 n×m 方格表”的方法，用這樣方法構造並列出及計算列出所有“好的 n×m 方格表” 的 f(n,m)之值，n=3, 4, 5, 6, 7 (定理五~九)。

定理十：一個“好的 n×m 方格表”會形成 2(n+1)行一個循環。當 n 是偶數時，如果第一行方格內的數為 $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{n1}$ 剛好上下對稱，則方格表會形成 n+1 行一個循環。

定理十一：$p(n)=[(n+1)^2/2]$，其中[ ]是高斯符號。

在這個研究計劃裡，我的主要研究方法是要從簡單的例子著手，仔細觀察和比對它們規律性，先大膽猜測結果，再來證明。在這裡的例子都相當繁瑣，稍不注意很容易出錯，尤其是計算變數方格表，讓我嚐盡苦頭，幾次想放棄，在父親和姊姊的鼓勵下，終於找到了正確的方法。

經過好幾個月後，當我終於可以利用 n×m 變數方格表來構造所有“好的 n×m 方格表”，心裡很滿意，這個研究計劃想就此打住。沒想到父親建議我繼續研究和討論 n×m 變數方格表的一些有的意思現象，整個研究就越來越難了，很高興我可以達到甚至超越預期目標。

四、結論與應用

開始令我最困難的事是：每次觀察規律性，總要找一大堆例子，而且都有許多可能情況，碰到了相當多的困擾，弄得我十分頭疼，但是堅持到最後，困難被我一一克服。

令我開始有信心的事是：用分割圖形的方法找到 n 爲正偶數的“好的 n×n 方格表”，再經過觀察規律性之後，就找出非常簡單的方法來構造。

令我最高興的事是：終於找到了滿足計數問題的規則之所有一般的“好的 n×m 方格表”的正確方法。而且發現 n×m 變數方格表中一些很有意思的現象。

能否直接知道“好的 nxm 方格表” 存不存在? 這將是我繼續研究努力的目標。

經過這研究計劃以後，對自己的程度比較有信心，心裡很高興而且收獲很大。

五、參考資料

1. 2000 秋季環球城市數學競賽國中組初級卷第一題。

2. 孫君儀、葉均承、陳天任, 1999, 土撥鼠遊戲研究, 中央研究院數學傳播, 第 23 卷第四期，p.32-38。

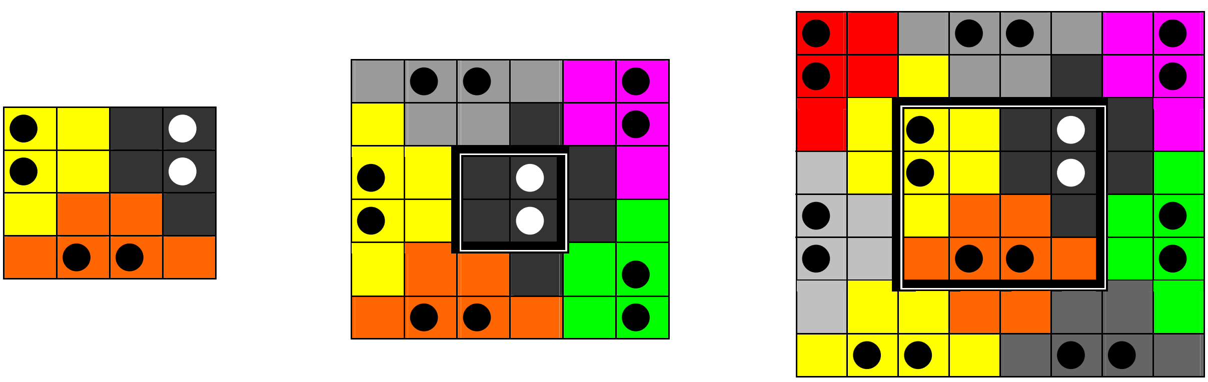
3. 趙文敏, 1981, 寓數學於遊戲第一輯, 台北九章出版社。

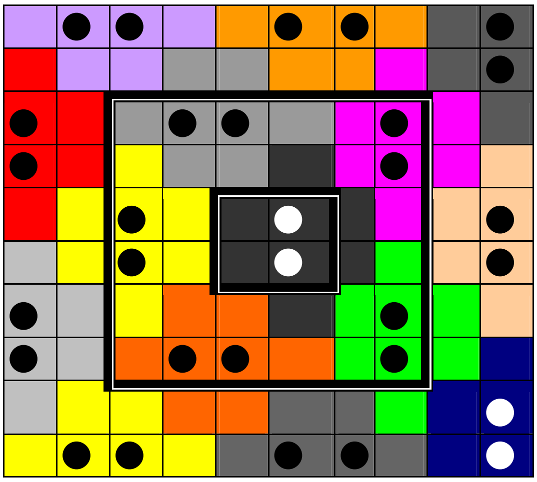
4. 葉洹君,2002 拼圖遊戲，中央研究院數學傳播.第 26 卷. 第四期，p.68-82。

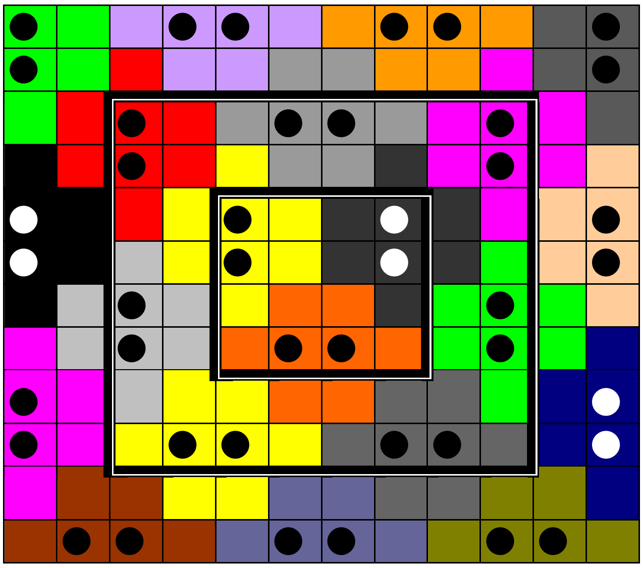
5. 葉洹君、顏德琮、連信欽,2001,所羅門寶藏，科學教育月刊.第 245 卷，p.10-17。

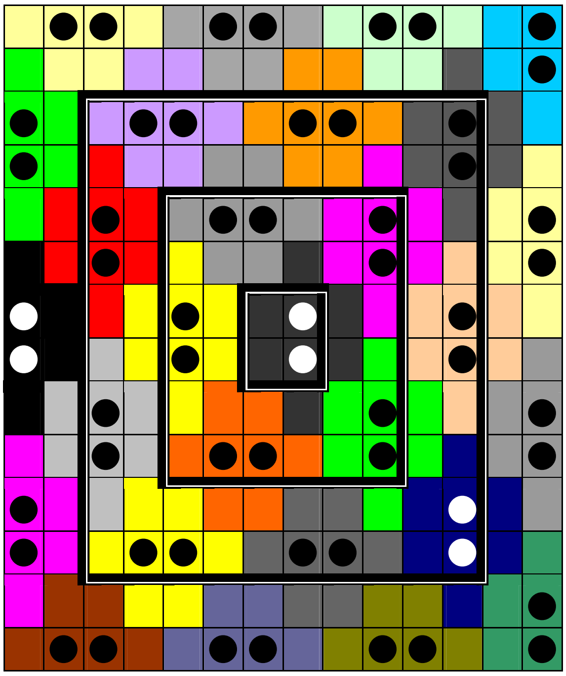
七、 附錄 一、用分割圖形方法來找集合 Γ_n(方格中有●所成的集合)的例子，

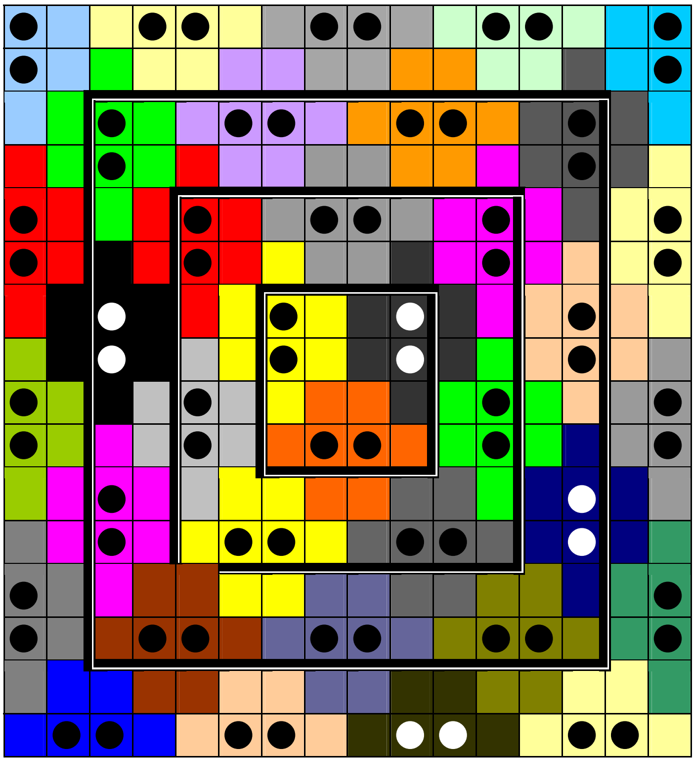
n = 4,6,8,10,12,14,16。



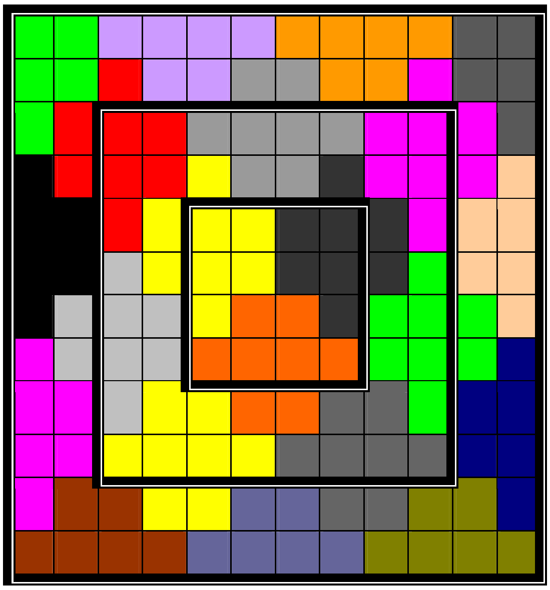


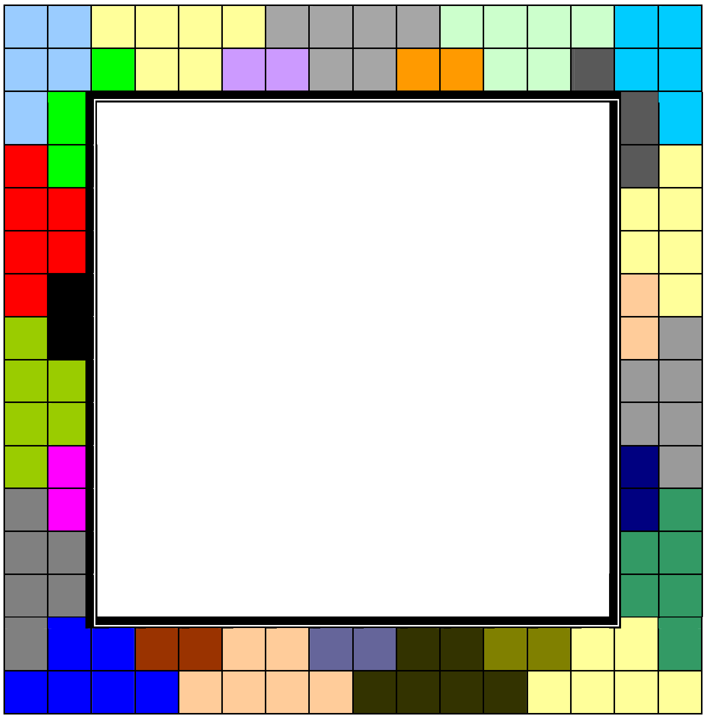


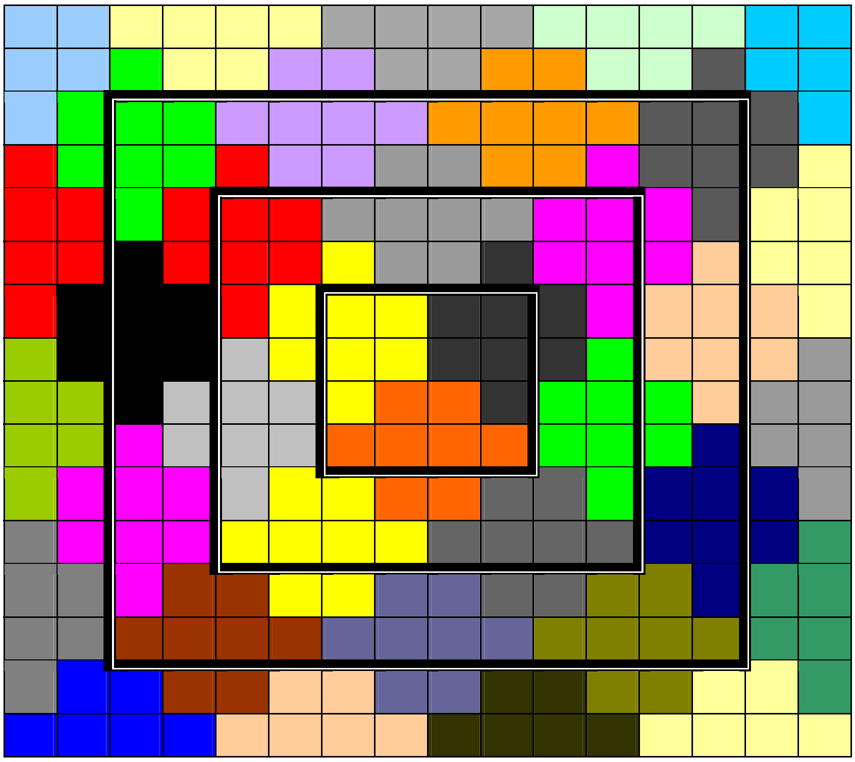


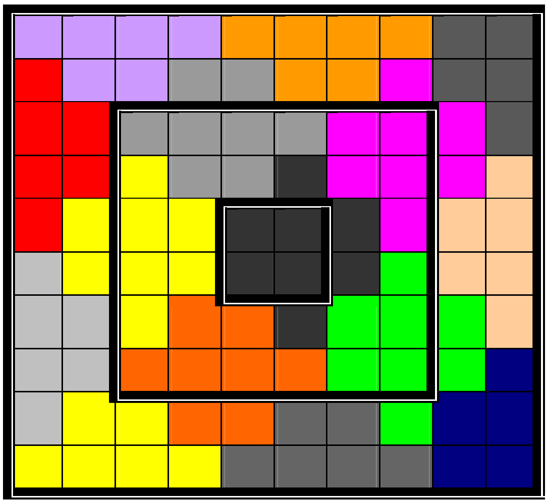


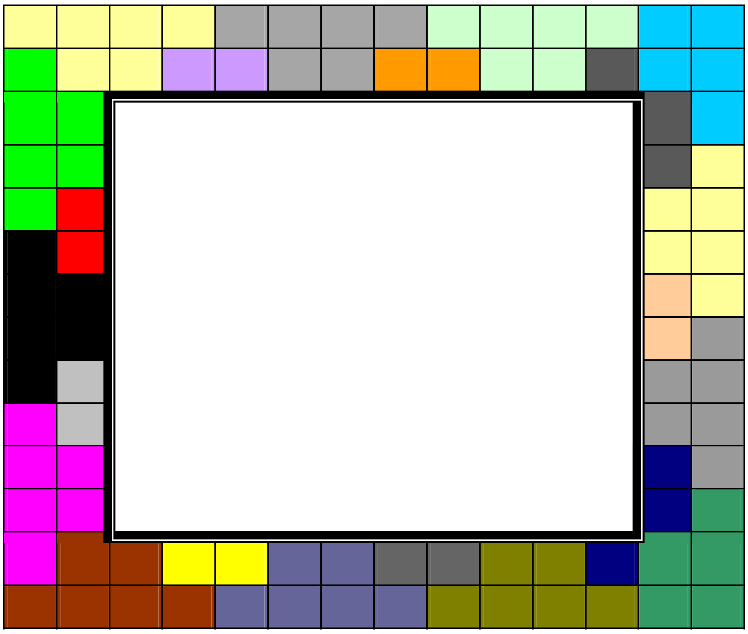
附 錄 二、 從集合Γ_{n}得到集合Γ_{n+4}的例子，n=10,12。

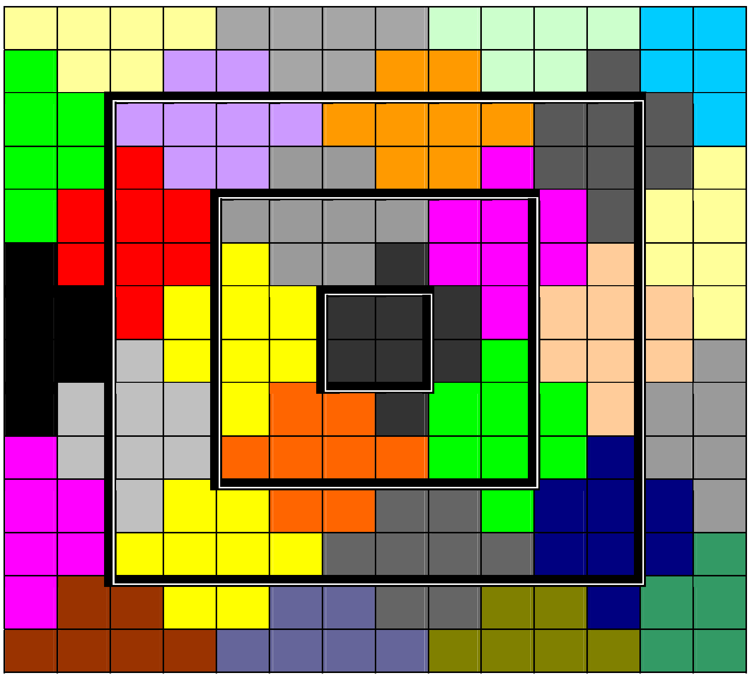




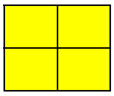


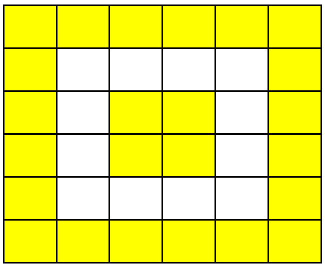


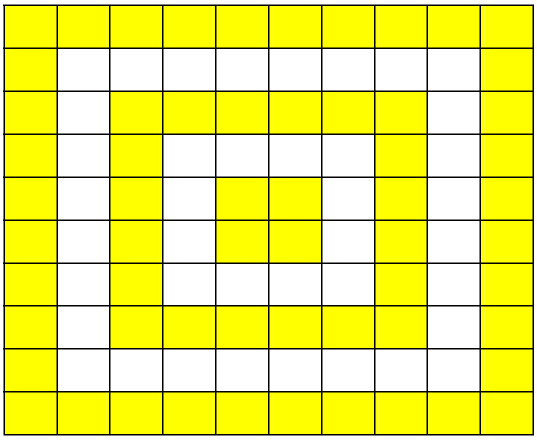


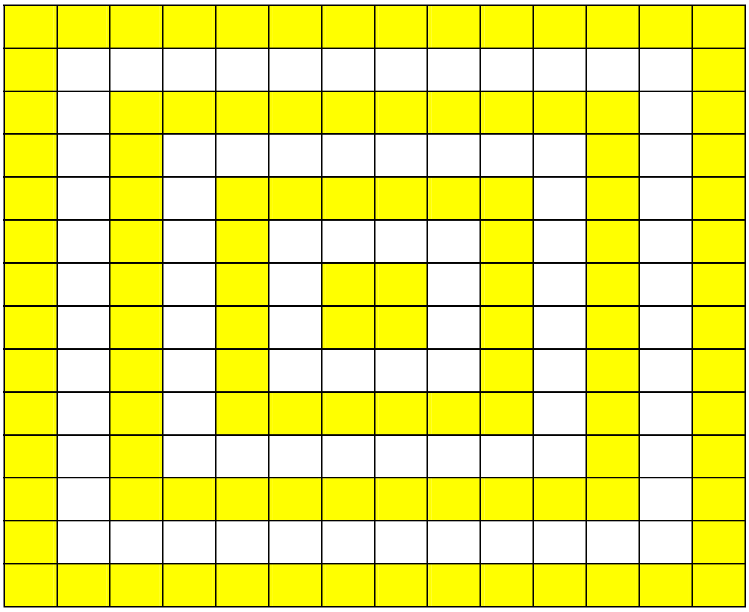


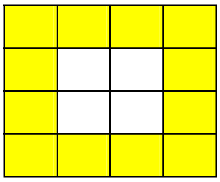
附錄 三、 “好的$n \times n$方格表”例子，n=4,6,8,10,12,14,16，
(黃色的方格代表方格內填入數 0.5，白色的方格代表方格內填入數 0。)

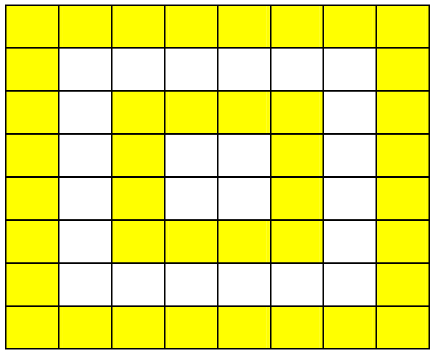


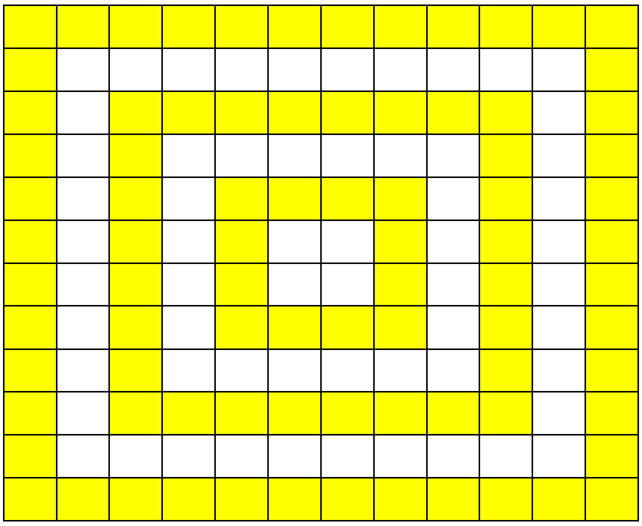


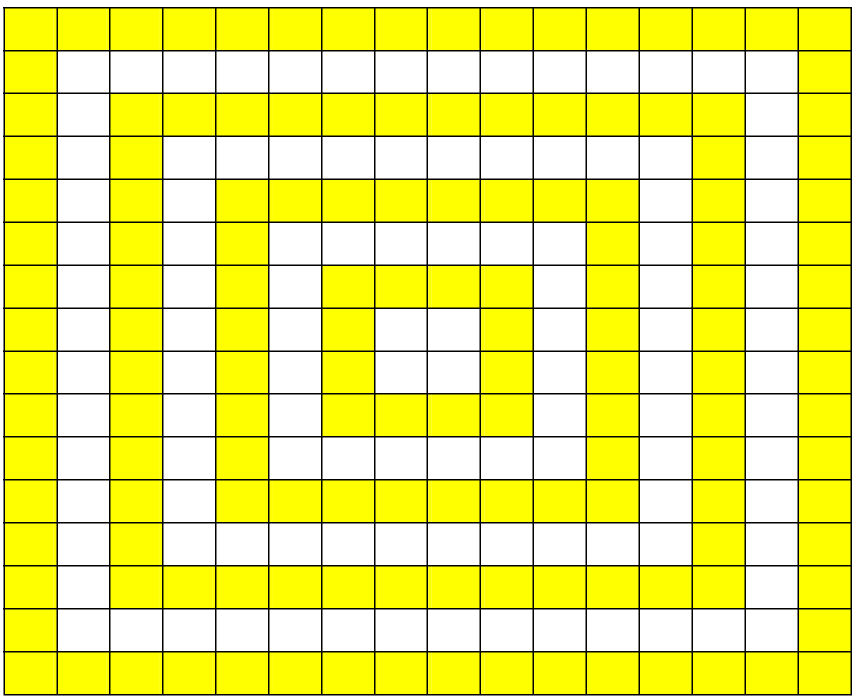












附錄 四、“好的$n \times n$方格表”， n = 5，6，7。

(由於篇幅關係，只列出一個循環，注意如果只檢查與最後一行方格相鄰的所有方格內的數字總和不為 1，這是因為表格沒有畫完，只列出一個循環，例如 5x(12k+3) 方格表，完整循環之後還有 3 行。)

下表是 5x12 變數方格表。

a	1-x	b	1-y	c	1	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y-1	0	-y	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y	b	1	1-b	x+y	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	1-x-y	b+c-1	1-y	0
c	1-y	b	1-x	a	1	1-a	x	1-b	y	1-c	0

當 m = 12k 時，可以得到 a = b = c = x = y = 0。

0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1	0
0	1	-1	2	0	1	1	0	2	-1	1	0
0	1	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0

當 m = 12k+1 時，我們發現本題無解,因為要滿足題意的話，就必需要求 x = y = 1 且 x + y = 1，所以不合。

當 m = 12k+2 時，可以得到 a + c = x + y = 1, b = 0。

a	1-x	0	x	1-a	1	a	1-x	1	x	1-a	0
x	1-a	0	a	-x	0	x-1	-a	0	a-1	1-x	0
0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
1-x	a	0	1-a	x-1	0	-x	a-1	0	-a	x	0
1-a	x	0	1-x	a	1	1-a	x	1	1-x	a	0

當 m = 12k+3 時，可以得到 a + b = x = y = 1, a = c。

a	0	1-a	0	a	1	1-a	1	a	1	1-a	0
1	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0
1-a	-1	a	0	1-a	1	a	2	1-a	1	a	0
1	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0
a	0	1-a	0	a	1	1-a	1	a	1	1-a	0

當 m = 12k+4 時，可以得到 x = y = 1, a = b = c = 0。

0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0
0	-1	-1	0	0	1	1	2	2	1	1	0
1	1	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0

當 m = 12k+5 時，我們發現本題無解,因爲 x = y = 1 且 x + y = 1(不合)。
當 m = 12k+6 時，可以得到 a = b = c = 1,x = y = 0。

1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	-1	-1	-1	-1	0	0	1	1	1	1	0
1	1	2	2	1	1	0	0	-1	-1	0	0
0	-1	-1	-1	-1	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

當 m = 12k+7 時，可以得到 a + b = 1, a = c, x = y = 0。

a	1	1-a	1	a	1	1-a	0	a	0	1-a	0
0	0	-1	0	-1	0	0	0	1	0	1	0
1-a	1	a	2	1-a	1	a	0	1-a	-1	a	0
0	0	-1	0	-1	0	0	0	1	0	1	0
a	1	1-a	1	a	1	1-a	0	a	0	1-a	0

當 m = 12k+8 時，可以得到 a + c = x + y = b = 1。

a	1-x	1	x	1-a	1	a	1-x	0	x	1-a	0
x	-a	0	a-1	-x	0	x-1	1-a	0	a	1-x	0
1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1-x	a-1	0	-a	x-1	0	-x	a	0	1-a	x	0
1-a	x	1	1-x	a	1	1-a	x	0	1-x	a	0

當 m = 12k+9 時，我們發現本題無解,因爲 x = y = 0 且 x + y = 1(不合)。
當 m = 12k+10 時，可以得到 a = b = c = x = y = 1。

1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1	0	0
1	-1	2	0	1	1	0	2	-1	1	0	0
1	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0

當 m = 12k+11 時，可以得到 a ，b ，c ，x ，y 爲任何實數。

a	1-x	b	1-y	c	1	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y-1	0	-y	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y	b	1	1-b	x+y	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	1-x-y	b+c-1	1-y	0
c	1-y	b	1-x	a	1	1-a	x	1-b	y	1-c	0

6×m 方格表的計數問題。

下表是 6×14 變數方格表。

a	1-x	b	1-y	c	1-z	0	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c	0	c	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0	y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0	b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
c	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0	x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c	0
z	1-c	y	1-b	x	1-a	0	a	1-x	b	1-y	c	1-z	0

當 m = 7k 時，可以得到 a = b = c = x = y = z = 0。

0	1	0	1	0	1	0
0	1	-1	1	-1	1	0
0	1	-1	2	-1	1	0
0	1	-1	2	-1	1	0
0	1	-1	1	-1	1	0
0	1	0	1	0	1	0

當 m = 7k+1 時，可以得到 a = c = x = z = 1, y = b = 0。

1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0

當 m = 7k+2 時，可以得到 c = x =1, a = b = y = z = 0。

0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	-1	0	0
0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	-1	0	0
0	0	0	1	1	1	0

當 m = 7k+3 時，可以得到 a = b = y = z = 1, c = x = 0。

1	1	1	0	0	0	0
0	-1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	-1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

當 m = 7k+4 時，可以得到 b = y = 1, a = c = x = z = 0。

0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0

當 m = 7k+5 時，可以得到 a = b = c = x = y = z = 1。

1	0	1	0	1	0	0
1	-1	1	-1	1	0	0
1	-1	2	-1	1	0	0
1	-1	2	-1	1	0	0
1	-1	1	-1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0

當 m = 14k 或 14k+13 時，可以得到 a , b , c , x , y , z 爲任何實數。

a	1-x	b	1-y	c	1-z	0	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c	0	c	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0	y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0	b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
c	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0	x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c	0
z	1-c	y	1-b	x	1-a	0	a	1-x	b	1-y	c	1-z	0

7×m 方格表的計數問題。

下表是 7×16 變數方格表。

a	1-x	b	1-y	c	1-z	d	1	1-d	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c-d	z-1	0	-z	c+d-1	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c+d-1	2-y-z	c	1	1-c	y+z	2-b-c-d	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c-d	x+y+z-2	1-b-c	y-1	0	-y	b+c-1	1-x-y-z	a+b+c+d-2	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
c	1-y-z	b+c+d-1	2-x-y-z	a+b+c-1	2-x-y	b	1	1-b	x+y	2-a-b-c	x+y+z-1	2-b-c-d	y+z-1	1-c	0
z	1-c-d	y+z-1	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	1-x-y	b+c-1	1-y-z	c+d-1	1-z	0
d	1-z	c	1-y	b	1-x	a	1	1-a	x	1-b	y	1-c	z	1-d	0

當 m = 16k 時，可以得到 a = b = c = d = x = y = z = 0。

0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	-1	1	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	0
0	1	-1	2	-1	2	0	1	1	0	2	-1	2	-1	1	0
0	1	-1	2	-2	1	-1	0	0	-1	1	-2	2	-1	1	0
0	1	-1	2	-1	2	0	1	1	0	2	-1	2	-1	1	0
0	1	-1	1	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0

當 m = 16k+1 時，可以得到 a + b = x = z = 1, a = c, b = d , y = 0。

a	0	1-a	1	a	0	1-a	1	a	1	1-a	0	a	1	1-a	0
1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
1-a	0	a	0	1-a	1	a	1	1-a	1	a	1	1-a	0	a	0
0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
a	0	1-a	0	a	1	1-a	1	a	1	1-a	1	a	0	1-a	0
1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
1-a	0	a	1	1-a	0	a	1	a	0	1-a	1	a	0	1-a	0

當 m = 16k+2 時，可以得到 a = d = y = 1, b = c = x = z = 0。

1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	-1	1	0	0	-1	-1	0	0	1	-1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0

m = 16k+3 時，可以得到 $a + d = b + c = x + z = y = 1$。

a	1-x	b	0	1-b	x	1-a	1	a	1-x	b	1	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x	0	1-x	a+b-1	-x	0	x-1	a+b-1	x-1	0	-x	a+b-1	1-x	0
b	-x	a	0	1-a	x	1-b	1	b	2-x	a	1	1-a	x	1-b	0
1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0
1-b	x-1	1-a	0	a	1-x	b	1	1-b	x+1	1-a	1	a	1-x	b	0
1-x	a+b-1	1-x	0	x	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	-x	0	x-1	1-a-b	x	0
1-a	x	1-b	0	b	1-x	a	1	1-a	x	1-b	1	b	1-x	a	0

當 m = 16k+4 時，可以得到 $a = d = x = z = 1, b = c = y = 0$。

1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0

當 m = 16k+5 時，可以得到 $a + b = x = y = z = 1, a = c, b = d$。

a	0	1-a	0	a	0	1-a	1	a	1	1-a	1	a	1	1-a	0
1	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	0
1-a	-1	a	-1	1-a	0	a	1	1-a	2	a	2	1-a	1	a	0
1	0	2	0	1	0	0	0	-1	0	-2	0	-1	0	0	0
a	-1	1-a	-1	a	0	1-a	1	a	2	1-a	2	a	2	a	0
1	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	0
1-a	0	a	0	1-a	0	a	1	1-a	0	a	0	1-a	0	a	0

當 m = 16k+6 時，可以得到 $x = y = z = 1, a = b = c = d = 0$。

0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0
0	-1	-1	-1	-1	0	0	1	1	2	2	2	2	1	1	0
1	1	2	2	1	1	0	0	-1	-1	-2	-2	-1	-1	0	0
0	-1	-1	-1	-1	0	0	1	1	2	2	2	2	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

當 m = 16k+7 時，我們發現本題無解。
當 m = 16k+8 時，可以得到 a = b = c = d =1, x = y = z = 0。

1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	2	2	2	2	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0
0	-1	-1	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	2	1	1	0
1	1	2	2	2	2	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

當 m = 16k+9 時，可以得到 a + b = 1, a = c, b = d , x = y = z = 0。

a	1	1-a	1	a	1	1-a	1	a	0	1-a	0	a	0	1-a	0
0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
1-a	1	a	2	1-a	2	a	1	1-a	0	a	-1	1-a	-1	a	0
0	0	-1	0	-2	0	-1	0	0	0	1	0	2	0	1	0
a	1	1-a	2	a	2	1-a	1	a	0	1-a	-1	a	-1	1-a	0
0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
1-a	1	a	1	1-a	1	a	1	1-a	0	a	0	1-a	0	a	0

當 m = 16k+10 時，可以得到 b = c = y = 1, a = d = x = z = 0。

0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0

當 m = 16k+11 時，可以得到 a + d = b + c = x + z = 1, y =0。

a	1	b	1	1-b	1	1-a	1	a	0	b	0	1-b	1	1-a	0
0	1-a-b	-1	0	-1	a+b-1	-1	0	0	1-a-b	1	0	1	a+b-1	1	0
b	1	a	2	1-a	2	1-b	1	b	0	a	-1	1-a	-1	1-b	0
0	0	-1	0	-2	0	-1	0	0	0	1	0	2	0	1	0
1-b	1	1-a	2	a	2	b	1	1-b	0	1-a	-1	a	-1	b	0
0	a+b-1	-1	0	-1	1-a-b	-1	0	0	a+b-1	1	0	1	1-a-b	1	0
1-a	1	1-b	1	b	1	a	1	1-a	0	1-b	0	b	0	a	0

當 m = 16k+12 時，可以得到 b = c = x = z = 1, a = d = y =0。

0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	-1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0

當 m = 16k+13 時，a + b = y = 1, a = c, b = d , x = z = 0。

a	1	1-a	0	a	1	1-a	1	a	0	1-a	1	a	0	1-a	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1-a	0	a	1	1-a	1	a	1	1-a	1	a	0	1-a	0	a	0
1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
a	0	1-a	1	a	1	1-a	1	a	1	1-a	0	a	0	1-a	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1-a	1	a	0	1-a	1	a	1	1-a	0	a	1	1-a	0	a	0

當 m = 16k+14 時，可以得到 a = b = c = d = x = y = z = 1。

1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	-1	1	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	0	0
1	-1	2	-1	2	0	1	1	0	2	-1	2	-1	1	0	0
1	-1	2	-2	1	-1	0	0	-1	1	-2	2	-1	1	0	0
1	-1	2	-1	2	0	1	1	0	2	-1	2	-1	1	0	0
1	-1	1	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0

當 m = 16k+15 時，可以得到 a , b , c , d, x , y , z 爲任何實數。

a	1-x	b	1-y	c	1-z	d	1	1-d	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c-d	z-1	0	-z	c+d-1	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c+d-1	2-y-z	c	1	1-c	y+z	2-b-c-d	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c-d	x+y+z-2	1-b-c	y-1	0	-y	b+c-1	1-x-y-z	a+b+c+d-2	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
c	1-y-z	b+c+d-1	2-x-y-z	a+b+c-1	2-x-y	b	1	1-b	x+y	2-a-b-c	x+y+z-1	2-b-c-d	y+z-1	1-c	0
z	1-c-d	y+z-1	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	1-x-y	b+c-1	1-y-z	c+d-1	1-z	0
d	1-z	c	1-y	b	1-x	a	1	1-a	x	1-b	y	1-c	z	1-d	0

附 錄 五

a	1-x	b	1
x	1-a-b	x-1	0
b	1-x	a	1

y	1-b	x	1-a

a	1-x	b	1-y	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b	0
b	1-x-y	a+b-1	1-x	0
y	1-b	x	1-a	0

c	1-y	b	1-x	a

a	1-x	b	1-y	c	1
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y-1	0
b	1-x-y	a+b+c-1	1-x+1-y	b	1
y	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0
c	1-y	b	1-x	a	1

z	1-c	y	1-b	x	1-a

a	1-x	b	1-y	c	1-z	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
y	1-b-c	x+y+z-1	1-a-b+1-c	x+y-1	1-b	0
c	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
z	1-c	y	1-b	x	1-a	0

d	1-z	c	1-y	b	1-x	a

a	1-x	b	1-y	c	1-z	d	1
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c-d	z-1	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c+d-1	1-y+1-z	c	1
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c-d	x+y+z-1-1	1-b-c	y-1	0
c	1-y-z	b+c+d-1	1-x-y+1-z	a+b+c-1	1-x+1-y	b	1
z	1-c-d	y+z-1	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0
d	1-z	c	1-y	b	1-x	a	1

w	1-d	z	1-c	y	1-b	x	1-a

a	1-x	b	1-y	c	1-z	d	1-w	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c-d	z+w-1	1-d	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c+d-1	2-y-z-w	c+d-1	1-z	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c-d	x+y+z+w-2	1-b-c+1-d	y+z-1	1-c	0
c	1-y-z	b+c+d-1	2-x-y-z-w	a+b+c+d-1-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
z	1-c-d	y+z+w-1	1-b-c+1-d	x+y+z-1	1-a-b+1-c	x+y-1	1-b	0
d	1-w-z	c+d-1	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
w	1-d	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0

當 m = 16k+12 時，可以得到 b = c = x = z = 1，a = d = y =0。

0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	-1	1	0	0	-1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0

當 m = 16k+13 時，a + b = y = 1，a = c， b = d ， x = z = 0。

a	1	1-a	0	a	1	1-a	1	a	0	1-a	1	a	0	1-a	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1-a	0	a	1	1-a	1	a	1	1-a	1	a	0	1-a	0	a	0
1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
a	0	1-a	1	a	1	1-a	1	a	1	1-a	0	a	0	1-a	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1-a	1	a	0	1-a	1	a	1	1-a	0	a	1	1-a	0	a	0

當 m = 16k+14 時，可以得到 a = b = c = d = x = y = z = 1。

1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	-1	1	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	0	0
1	-1	2	-1	2	0	1	1	0	2	-1	2	-1	1	0	0
1	-1	2	-2	1	-1	0	0	-1	1	-2	2	-1	1	0	0
1	-1	2	-1	2	0	1	1	0	2	-1	2	-1	1	0	0
1	-1	1	-1	1	-1	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0

當 m = 16k+15 時，可以得到 a ，b ，c ，d， x ，y ， z 爲任何實數。

a	1-x	b	1-y	c	1-z	d	1	1-d	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c-d	z-1	0	-z	c+d-1	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c+d-1	2-y-z	c	1	1-c	y+z	2-b-c-d	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c-d	x+y+z-2	1-b-c	y-1	0	-y	b+c-1	1-x-y-z	a+b+c+d-2	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
c	1-y-z	b+c+d-1	2-x-y-z	a+b+c-1	2-x-y	b	1	1-b	x+y	2-a-b-c	x+y+z-1	2-b-c-d	y+z-1	1-c	0
z	1-c-d	y+z-1	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	1-x-y	b+c-1	1-y-z	c+d-1	1-z	0
d	1-z	c	1-y	b	1-x	a	1	1-a	x	1-b	y	1-c	z	1-d	0

評 語

作品從 4×4 方格計算問題，推廣至 n×n 方格問題，進而計算好的 n×m 方格表，本作品具有原創性，以一個國中生能有此好的成績，真是難能可貴。在展示部分字體可再小一點，僅量將證明列入，在研究動機中就直接提到推廣到 n∈N 情況，再證明 n 爲奇數時不成立。然後在說明因這緣故，祇討論 n 爲偶數情況。這樣討論就比較完整。

Admissible $m \times n$ boards

Huan-Chun Yeh
1FL, No 12, Alley 1, Lane 112, Shiouming Rd. Sec. 2, Wenshan Chiu, Taipei 116,Taiwan.R.O.C.
Taipei Municipal Shyr Jainn Junior High School

Motivation

We find [1] the following problem interesting:

> *In a 4×4 board, we assign each square a real number so that, for each square, the sum of numbers in its neighboring squares is equal to 1. Here the neighboring squares are those sharing a common side with the given square. Problem: Find the sum of numbers over all 16 squares.*

The above problem can be solved in a number of ways. I discover a clear solution by a method of "diagram dissection" which is fun like playing a game. This motivates the study of more general cases.

Purpose

In an m×n board, we assign each square a real number so that, for each square, the sum of numbers in its neighboring squares is equal to 1. An m×n board capable of such assignment is called an **admissible board** and the sum of the mn assigned numbers is denoted by f(m,n). In this research, we aim at answering the following questions:

(i) Under what conditions on m,n will an m×n board be admissible?
(ii) Is there any method to find all the m×n admissible boards?
(iii) Is f(m,n) well-defined?
(iv) How to compute the value of f(m,n) if it is defined?

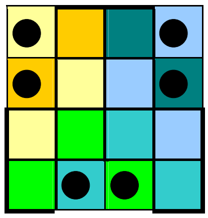


Fig. 1

Procedure

(1) Notation

For a square X of an m×n board, let N(X) denote the set of neighbors of X. Moreover, if T is a subset of squares, then define N(T) to be the union of all sets N(X), where X belongs to T. A subset T of squares of the m×n board is called an **essential subset** (see Fig. 1) if each square in the m×n board is adjacent to exactly one of the squares in T.

(2) Analysis of the 4 × 4 board

As shown in Fig. 2, the 4 × 4 board is admissible. We now give two solutions and prove that the sum equals 6 no matter how the assignment is made. This shows that f(4,4) is well-defined. Suppose that numbers A,B,…,P are filled according to Fig. 3.

0.4	0.6	0.6	0.4
0.4	0	0	0.4
0.6	0	0	0.6
0.6	0.4	0.4	0.6

Fig. 2

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

Fig. 3

First method (diagram dissection):

We note that {A, D, E, H, N, O} forms an essential subset for the 4 × 4 board. Since {{B,E},{C,H},{A,F,I},{D,G,L}, {J,M,O}, {K,M,P}} forms a partition of the 4×4 board. That is to say, {B,E},{C,H},{A,F,I},{D,G,L}, {J,M,O}, {K,M,P} are "disjoint" collections of squares adjacent to A, D, E, H, N, O, respectively. Therefore, then f(4,4) is well defined and must be 6.

Second method (equations solving):

Set

$X = A+D+M+P$ the sum of numbers at the corners;

$Y = F+G+J+K$ the sum of numbers of the central squares and

$Z = B+C+E+H+I+L+N+O$ the sum of the remaining squares.

Then the sum of all numbers in the board is equal to X+Y+Z.

Summing those numbers in squares adjacent to the corners yields $4 = Z$……………….(1).

Summing those numbers in squares adjacent to the central squares yields $4 = 2Y+Z$………… (2).

Summing those numbers in squares adjacent to the remaining squares yields $8 = X+2Y+Z$………(3).

From equations (1),(2) and (3), we obtain X = 2,Y = 0 and Z = 4. Hence f(4,4) = 6.

(3) m×m admissible board

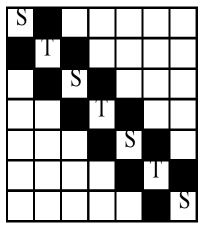
In considering a general m×m admissible board, we begin by studying the special cases of sizes 3×3, 5×5, 6×6…etc.. It is easy to prove that all 3×3 and 5×5 boards are non-admissible. The method of equations solving appears tedious; the diagram dissection method, however, seems promising. Using the method of diagram dissection, we would like to find an essential subset T_m for the m×m board.

Set

$S_{4q+2} = \{(1,4i-2),(1,4i-1),(4q+2,4i-2),(4q+2,4i-1),(4i-1,1),(4i,1)|1\le i\le q\}$
$\cup \{(4i+1,4q+2),(4i+2,4q+2)|0\le i\le q\}$

$S_{4q} = \{(1,4i),(1,4i+1)|\ 1\le i\le q-1\} \cup \{(4i-3,1),(4i-2,1),(4i-3,4m),(4i-2,4m),$
$(4q,4i-2),(4q,4i-1)\ |1\le i\le q\}$, and

$S_m + 2 = \{(i+2,j+2)|(i,j)\in S_m\}$.



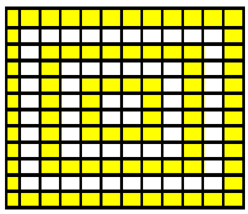
Theorem 1 **Let m > 1. An m×m board is admissible if and only if m is even.**

Fig. 4

Proof (a) m = 2q+1 is odd. We set $S=\{(2i+1,2i+1)|0\leqq i\leqq q\}$ and $T=\{(2i,2i)|1\leqq i\leqq q\}$ (see Fig. 3). It is easy to see that any pair of elements of S (respectively, T) has no adjacent elements in common. It implies that the sum of numbers in squares in N(S) (respectively, N(T)) is equal to the cardinality of S (respectively, T). But we have

N(S)=N(T) and $q+1 = |S| \neq |T| = q$,

contrary to our assumption**.**



(b) m = 2r is even. We can regard a 2r × 2r board as a disjoint union of rings. Traversing inwards, we fill each cell in the first ring with 0.5, each cell in the second with 0, each cell in the third with 0.5, and so on (see Fig. 5, the number in yellow square is 0.5 and the number in white square is 0). It is obvious that 2r × 2r board is admissible. Adding two rings exterior to the central m × m board, we obtain a (m+4)×(m+4) board.

Fig. 5

The square located at (i,j) in the original m × m board will be located at (i+2,j+2) in the (m+4)×(m+4) board. We sketch a proof for the following two cases : m = 4q and m = 4q+2.

(1) m = 4q (see Fig. 6)**.** When q = 1 , we take $T_4 = S_4 = \{(1,1),(2,1),(1,4),(2,4),(4,2),(4,3)\}$ and the theorem holds. Now suppose that it's true for q = k.

When q = k+1, let $T_{4k+4} = (T_{4k+2}) \cup S_{4k+4.}$ We see clearly that T_{4k+4} is an essential subset. The theorem holds in this case.

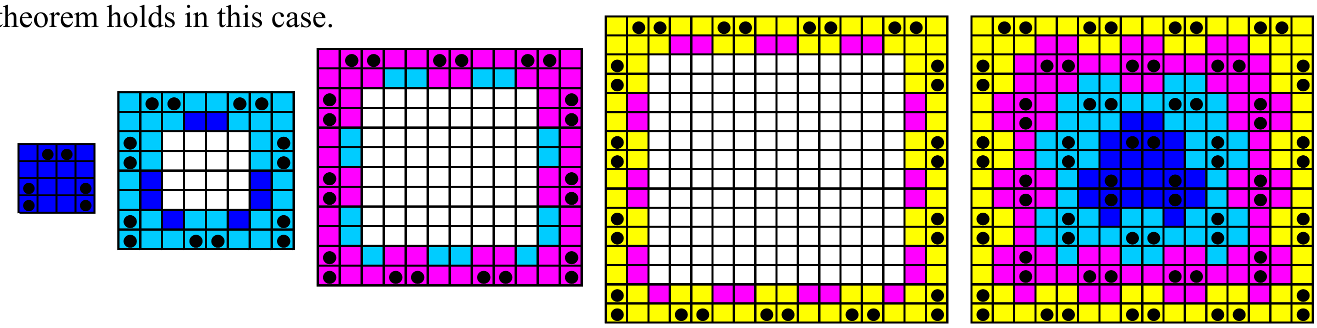


Fig. 6

(2) m = 4q+2 (see Fig. 7)**.** When q = 0, we take $T_2 = \{(1,2),(2,2)\}$ and theorem holds. Suppose that it's true for q=k.

When q =k+1, let $T_{4k+6} = (T_{4k+2} + 2) \cup S_{4k+6}$. We see clearly that T_{4k+6} is an essential subset. The theorem holds in this case.

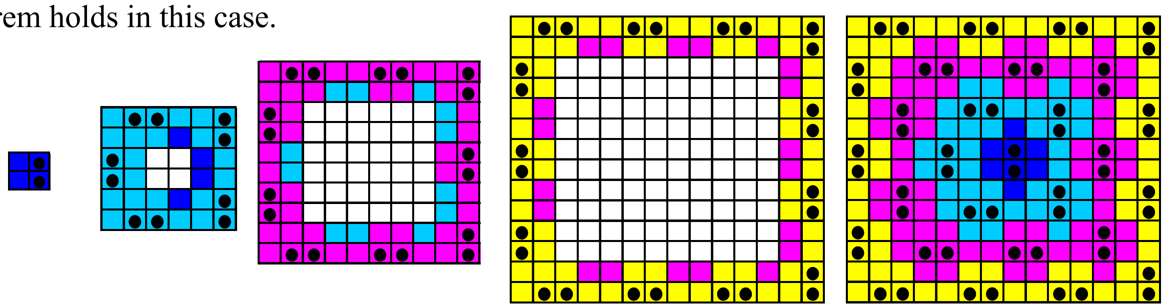


Fig. 7

From theorem 1, we see that the value of f(2m,2m) is well-defined. Then we have

Theorem 2 Let m be even. Then f(m,m)=m(m+2)/4.

Proof (a) When m=4q, $|S_{4q}|=8q-2$, then $|T_{4q}|=6+14+22+ . . .+(8q-2)=2q(2q+1)=$ m (m+2)/4.

(b) When m=4q+2, $|S_{4q+2}|=8q+2$, and then $|T_{4q+2}|=2+10+18+ . .+(8q+2)=(2q+2)(2q+1)=$ m (m+2)/4.

(4) The difficulties with diagram dissection method

Can we extend the above method to any mxn board in general ? As shown in Fig. 8, the 3x5 board is admissible. **No essential subset, however, of this board exists.** The explanation is as follows: First fill the squares by A, B,…,O in order (see figure 9). Suppose there is an admissible subset T the 3×5 board. Since N(A)={B,F}, in order that square A in N (T), exactly one of B and F belongs to T; similarly, only one of L and F belongs to T. If B in T, then F not in T and L in T. But N(B)∩N(L)={G} forces both B,L not in T. By symmetry, both D,N not in T so that F in T. Since N(C)= {B,H,D}, in order that C in N(T),

1	1	0	1	1
0	0	-1	0	0
0	1	1	1	0

Fig. 8

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O

Fig. 9

then H in T necessarily. But N(H)∩N(F)={G}, which is a contradiction. Thus, T does not exist.
An immediate difficulty is that the non-existence of any essential subset *T* for the m × n board does not imply the non-existence of mxn admissible board. The method of diagram dissection fails to prove or disprove the non-existence of admissible board. We now face the dilemma that the essential sets are no longer essential in the argument for the admissibility!

(5) Methods for finding all mxn admissible boards.

We shall back up and examine the equation solving method applied to 1×n, 2×n,…etc..boards. These examples suggest a method for finding all the m×n admissible boards. A board is said to be a **variable board** (see Fig. 10) if the admissibility conditions is satisfied for all squares except those in the last column**.** To find all the mxn admissible boards, we can use the m×(n+1) variable board and find the values of a_1 ,a_2,. . . am in the first column such that the numbers in the (n+1)st column are all 0. Applying the above method to the 3×n cases(see Fig. 10), an 8-column-cyclic pattern is observed.

a_1	$1-a_2$	a_3	1	$1-a_3$	a_2	$1-a_1$	0	a_1	$1-a_2$	a_3	1	$1-a_3$	a_2
a_2	$1-a_1-a_3$	a_2-1	0	$-a_2$	a_3+a_1-1	$1-a_2$	0	a_2	$1-a_1-a_3$	a_2-1	0	$-a_2$	a_3+a_1-1
a_3	$1-a_2$	a_1	1	$1-a_1$	a_2	$1-a_3$	0	a_3	$1-a_2$	a_1	1	$1-a_1$	a_2

Fig. 10

When n=8k, we have $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, the solution is unique; ;

0	0	0	1	1	1	1	0		0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	-1	-1	0	0	…	1	1	0	0	-1	-1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0		0	0	0	1	1	1	1	0

When n=8k+1, we have $a_3 =1- a_1$, $a_2 =1$, there are infinitely many solutions with a_1 as a free parameter);

a_1	0	$1-a_1$	1	a_1	1	$1-a_1$	0		a_1
1	0	0	0	-1	0	0	0	…	1
$1-a_1$	0	a_1	1	$1-a_1$	1	a_1	0		$1-a_1$

When n=8k+2, we have $a_1 = a_3 = 0$ and $a_2 = 1$, the solution is unique;

0	0	0	1	1	1	1	0		0	0
1	1	0	0	-1	-1	0	0	…	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0		0	0

When n=8k+3, there is no solution in this case.

When n=8k+4, we have $a_1 = a_3 = 1$ and $a_2 = 0$, the solution is unique;

1	1	1	1	0	0	0	0		1	1	1	1
0	-1	-1	0	0	1	1	0	…	0	-1	-1	0
1	1	1	1	0	0	0	0		1	1	1	1

When n=8k+5, we have a_3 =1- a_1, a_2 = 0, there are infinitely many solutions with a_1 as a free parameter);

a_1	1	$1-a_1$	1	a_1	0	$1-a_1$	0		a_1	1	$1-a_1$	1	a_1
0	0	-1	0	0	0	1	0	…	0	0	-1	0	0
$1-a_1$	1	a_1	1	$1-a_1$	0	a_1	0		$1-a_1$	1	a_1	1	$1-a_1$

When n=8k+6, we have a_1 = a_2 = a_3 = 1, the solution is unique;

1	0	1	1	0	1	0	0		1	0	1	1	0	1
1	-1	0	0	-1	1	0	0	…	1	-1	0	0	-1	1
1	0	1	1	0	1	0	0		1	0	1	1	0	1

When n=8k+7, there are infinitely many solutions with a_1,a_2,a_3 as free parameters.

a_1	$1-a_2$	a_3	1	$1-a_3$	a_2	$1-a_1$	0		a_1	$1-a_2$	a_3	1	$1-a_3$	a_2	$1-a_1$
a_2	$1-a_1-a_3$	a_2-1	0	$-a_2$	a_3+a_1-1	$1-a_2$	0	…	a_2	$1-a_1-a_3$	a_2-1	0	$-a_2$	a_3+a_1-1	$1-a_2$
a_3	$1-a_2$	a_1	1	$1-a_1$	a_2	$1-a_3$	0		a_3	$1-a_2$	a_1	1	$1-a_1$	a_2	$1-a_3$

Hence we have

$$f(3,m)=\begin{cases} 8k & if \quad m=8k \\ 8k+2 & if \quad m=8k+1 \\ 8k+2 & if \quad m=8k+2 \\ \text{not defined} & if \quad m=8k+3 \\ 8k+6 & if \quad m=8k+4 \\ 8k+6 & if \quad m=8k+5 \\ 8k+8 & if \quad m=8k+6 \\ 8k+8 & if \quad m=8k+7 \end{cases}$$

The discussion of the 1×n, 2×n and 4×n cases are entirely similar to that of the 3×n case, we have

f(1,4k) = 2k, f(1,4k+2) = f(1,4k+3) = 2k+2, but f(1,4k+1) is not defined;

f(2,3k) = 2k, f(2,3k+1) = f(2,3k+2) = 2k+2;

f(4,5k) = 6k, f(4,5k+1) = 6k+2, f(4,5k+2) = 6k+4, f(4,5k+3) = 6k+6, f(4,5k+4) = 6k+6。

(6) Column-cyclicity in an admissible board

When n is getting large, it becomes more difficult to obtain the values of f(m,n). However, we wish to discuss certain interesting phenomena concerning m×n variable boards. Assume that the entries of the first column of the m×n variable board are a_1, a_2, …,a_m. When m is a small number, we observe :

Fact 1 If m is even. The entries of the mth column are $1-a_m$, $1-a_{m-1}$,…,$1-a_1$ and the entries of the (m+1)st column are all zero;

Fact 2 If m is odd. The entries of the mth column are a_m, $a_{m-1}-1$, a_{m-2}, $a_{m-3}-1$,… and the entries of the (m+1)st column are 1,0,1,…, ,0,1 if m is odd;

Fact 3 The entries of the (2m+1)st column are $1-a_1, 1-a_2,\ldots,1-a_m$ and the entries of the (2m+2)nd column are all zero.

Suppose we have constructed the k×(2k+2) variable board (a_{ij}), $a_{j1}= a_j$ for $1\leqq j\leqq k$.

We will prove that Facts 1, 2 and 3 are trus by mathematical induction below.

(For sake of typing, we replace $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ by a, x, b, y, …)

Step 1: For $1\leqq p\leqq k+1$ and $i+j= k+1+p$, replace the entry a_{ij}, by

$a_{ij}+(-1)^{p-1}$ bp with $b_p = a_{k+2-p}$ if p is odd and $b_p=1-a_{k+2-p}$ if p is even(see Fig.11a and Fig.11b).

Then we construct a (k+1)×(k+1) partial variable board.

a	1-x	b	1
x	1-a-b	x-1	0
b	1-x	a	1
y	1-b	x	1-a

⇒

a	1-x	b	1-y	0
x	1-a-b	x-1+y	1-b	0
b	1-x-y	a+b-1	1-x	0
y	1-b	x	1-a	0

Fig.11a

a	1-x	b	1-y	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b	0
b	1-x-y	a+b-1	1-x	0
y	1-b	x	1-a	0
c	1-y	b	1-x	a

⇒

a	1-x	b	1-y	c	1
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y-1	0
b	1-x-y	a+b-1+c	1-x+1-y	b	1
y	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0
c	1-y	b	1-x	a	1

Fig.11b

Step 2: (i) Adding the (k+2)nd column with the entree all zeros if k+1 is even (see Fig.11a).

(ii) Adding the (k+2)nd column with 1,0,1,0,...., if k+1 is odd (see Fig.8b)..

Then we construct a (k+1)×(k+2) partial variable board.

Step 3: (i) If k+1 is even (see Fig. 12a), the (k+2+i)th column is precisely the reversed ith column;

a	1-x	b	1-y	c	1-z	0	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c	0	c	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0	y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0	b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
c	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0	x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c	0
z	1-c	y	1-b	x	1-a	0	a	1-x	b	1-y	c	1-z	0

Fig. 12a

(ii) If k+1 is odd (see Fig.12b), multiply the entries in the reversed (k+1)×(k+2) board by -1, and then add 1 to the entries in the odd-numbered rows.

a	1-x	b	1-y	c	1-z	d	1	1-d	z	1-c	y	1-b	x	1-a	0
x	1-a-b	x+y-1	1-b-c	y+z-1	1-c-d	z-1	0	-z	c+d-1	1-y-z	b+c-1	1-x-y	a+b-1	1-x	0
b	1-x-y	a+b+c-1	2-x-y-z	b+c+d-1	2-y-z	c	1	1-c	y+z	2-b-c-d	x+y+z-1	2-a-b-c	x+y-1	1-b	0
y	1-b-c	x+y+z-1	2-a-b-c-d	x+y+z-2	1-b-c	y-1	0	-y	b+c-1	1-x-y-z	a+b+c+d-2	2-x-y-z	b+c-1	1-y	0
c	1-y-z	b+c+d-1	2-x-y-z	a+b+c-1	2-x-y	b	1	1-b	x+y	2-a-b-c	x+y+z-1	2-b-c-d	y+z-1	1-c	0
z	1-c-d	y+z-1	1-b-c	x+y-1	1-a-b	x-1	0	-x	a+b-1	1-x-y	b+c-1	1-y-z	c+d-1	1-z	0
d	1-z	c	1-y	b	1-x	a	1	1-a	x	1-b	y	1-c	z	1-d	0

Fig.12b

With the three steps above, we can construct the $(k+1)\times 2(k+2)$ variable board.

By Fact 3, we prove that the entries of the $(2m+1)$th column of the $m\times(2m+2)$ variable board are $1-a_1$, $1-a_2,\ldots,1-a_m$ and the entries of the $(2m+2)$th column are all zero, then we have

Theorem 3 **Every m×n admissible board is (2m+2)-column-cyclic.**

When m is even, if the entries in the first column are symmetric (i.e. $a_i = a_{m+2-i}$ for all i), then, by Fact 1, the m×n variable board is (m+1)-column-cyclic.

(7) The value of f(m,n)

The column-cyclicity of m×n admissible enables a fast calculation of f(m,n), especially when n is large. Let $n=2(2m+2)q+r$, where q, r are positive integers and $0\leqq r\leqq 2m+1$. Since the m×n admissible board is (2m+2)-column-cyclic, then $f(m,n) = f(m,2m+2)q + f(m,r)$. In order to compute the values of f(m,n), we should compute f(m,2m+2) (see Fig.13)and f(m,r) for all $0\leqq r\leqq 2m+1$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8
f(m,2m+2)	2	4	8	12	18	24	32	40

Fig.13

Theorem 4 **We have $f(m,2m+2) = [(m+1)^2/2]$, where [ ] denotes the Gaussian notation.**

Here we give the table of the value of f(m,2m+2), $3\leqq m\leqq 19$, $0\leqq r\leqq 2m+1$ (see Fig. 10).

n\m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	2	2	*	4	4	4	*	6	6	6	*	8	8	8	*	10	10
2	2	4	4	4	6	6	6	8	8	8	10	10	10	12	12	12	14
3	*	6	6	8	8	8	10	10	*	14	14	16	16	16	18	18	*
4	6	6	6	8	10	12	12	12	14	16	18	18	18	20	22	24	24
5	6	6	*	12	12	14	*	18	18	18	*	22	24	24	*	30	30
6	8	8	12	12	12	16	16	20	20	24	24	24	28	28	32	32	36
7	8	10	12	12	*	20	20	22	24	26	28	32	32	32	36	38	40
8	8	12	14	16	20	20	20	24	26	28	32	34	36	40	40	40	44
9		12	*	16	20	20	*	30	30	34	*	38	40	44	*	50	50
10		12	18	20	22	24	30	30	30	36	38	40	42	48	50	52	54
11			18	20	24	26	30	30	*	42	42	46	48	52	54	58	*
12			18	24	26	28	34	36	42	42	42	48	50	56	58	60	66
13				24	28	32	*	38	42	42	*	56	56	60	*	66	70
14				24	32	34	38	40	46	48	56	56	56	64	66	72	74

15					32	36	40	42	48	50	56	56	*	72	72	78	80
16					32	40	44	48	52	56	60	64	72	72	72	80	84
17						40	*	50	54	58	*	66	72	72	*	90	90
18						40	50	52	58	60	66	72	78	80	90	90	90
19							50	54	*	66	74	74	80	84	90	90	*
20							50	60	64	68	74	78	86	88	96	100	110
21								60	66	70	*	80	88	92	*	102	110
22								60	72	76	80	88	92	96	104	108	116
23									72	78	84	90	96	100	108	114	120
24									72	84	88	94	100	104	112	120	126
25										84	*	96	104	112	*	122	130
26										84	98	102	110	116	122	128	134
27											98	104	112	120	126	130	*
28											98	112	118	120	130	140	146
29												112	120	124	*	142	150
30												112	128	132	140	148	156
31													128	136	144	150	160
32													128	144	150	156	164
33														144	*	162	170
34														144	162	168	176
35															162	170	*
36															162	180	186
37																180	190
38																180	200
39																	200
40																	200

Fig. 14

(8) Necessary and sufficient conditions for admissibility

After computing the value of f(m,r) for $1 \leqq m \leqq 19$ and $0 \leqq r \leqq 39$, we observe the necessary and sufficient conditions for admissibility: An m×n board is non-admissible if and only if $m = 2^{a-1}b-1$, and $n = m \pm 2^a q$ where a, q are positive integers and b is an odd integer.

Summary

1. **Let m > 1. An m×m board is admissible if and only if m is even.**
2. **If m is even, then f(m,m)=m(m+2)/4.**
3. **Every admissible m×n board is (2m+2)-column-cyclic.**
4. **f(m,2m+2) = [(m+1)2/2], where [ ] denotes the Gaussian notation.**
5. **An m×n board is non-admissible if and only if $m = 2^{a-1}b-1$, and $n = m \pm 2^a q$ where a, q are positive integers and b is an odd integer.**

References

1 2000 Autumn International Mathematics Tournament of Town (JO 1)。
http://ccmef.chiuchang.com

2 Chun-Chen Yeh, The problems of Flipping Chesses for Classification (in Chinese), Science Education Monthly, 251(2002), 9-23。

3 Huan-Chun Yeh, Puzzle games (in Chinese), Mathmedia 26(2001), 4, 68-82。

4 Huan-Chun Yeh, Te-Tsung Yen and Hsin-Chin Lien, King Solomon’s mine (in Chinese), Science Education Monthly, 245(2001), 10-17。

5 Huan-Chun Yeh, Balancing Problem (in Chinese), Science Education Monthly, 248(2002), 16-25。