臺灣二OO三年國際科學展覽會

科　　別：數學科

作品名稱：初等代數鏡頭下的 Fibonacci Sequence

學　　校：高雄市私立國光高級中學

作　　者：謝孟寰、馬靖威

摘　要

壹、研究目的：

培養建構式思考方式，提高解決問題的能力。

貳、研究過程：

一先查數學辭典，確定$F.S.$之定義。

二以文字敘述替代數字敘述$F.S.$，並分析歸納規律性。

三將發表過的有關關係式，挑選適合以代數分析研究者，研究採逆命題角度處理，共有下列七種關係式探論之。

1. $a_{m+n} = a_{n-1}\,a_m + a_n\,a_{m+1}$
2. $a_{m+1}\,a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$
3. $a_{n-k}\,a_{m-k} - a_n\,a_m = (-1)^n a_{m-n-k}\,a_k$
4. $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+1}$
5. $a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 = a_{2n}$
6. $a_{n+1}^3 + a_n^3 - a_{n-1}^3 = a_{3n}$
7. $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_{n+1}} + \dfrac{1}{a_{n+2}} + \dfrac{1}{a_n\,a_{n+1}\,a_{n+2}}$

參、研究結果、結論及應用：

一定義與首項有關連，數字定義有三種，彼此為衍生關係，文字定義僅一種。

二採論之七種關係式相對應之方程式與解答如下：

① $F.S.$係數題群，$Ab^2 + Bbc + Cc^2 - Db - Ec = 0$，定義 I 完全符合，特定$a_{m+n}$與$a_1, a_2$局部符合，③可有$b \neq c$之廣義$F.S.$符合。

② $b^2 + bc - c^2 = 1$，定義 I 之衍生群符合，惟首項須落在定義 I 之奇數項數上。

③ 有錯誤，應修正為$k =$奇數時，$a_{n-k}\,a_{m-k} - a_n\,a_m = (-1)^n a_{m-n+k}\,a_k$

$k =$偶數時，$a_{n-k}\,a_{m-k} - a_n\,a_m = (-1)^{n-1} a_{m-n+k}\,a_k$，

$F.S.$係數題群：$Ab^2 + Bbc - Cc^2 = 0$，$b = c \ or \ \dfrac{-a_{m-n+2k}}{a_{m-n+2k-1}} \times C$ 前者全部適用，後者局部適用。

④ 與⑤為①中分成$m+n =$奇與偶時之狀況 ∴為間一型係數題群。

⑤ 間二型係數題群$Ab^3 + Bb^2c + Cbc^2 + Dc^3 - Eb - Fc = 0$，大膽推論$b = c = \pm 1$符合而已。

⑥ $b^2 + bc - c^2 = -1$，與②中者僅常數項異號而已，即與②中“互補”。

三找出一新的關係式 $a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 = a_{n-1}\,a_n + a_n\,a_{n+1}$，完全無條件限制皆符合之。

Abstract

壹、Motivation and Purpose

In this study, we expect to know something about Fibonacci Sequence (F.S.) that we
can understand and enjoy as a high school student.

貳、Procedure

一.Make sure the definition of F.S.

二.Use algebra instead of numerical to state F.S.

三.Select the related formulas and discuss by fundamental algebra. We get 7 types as follows

1. $a_{m+n} = a_{n-1}\, a_m + a_n\, a_{m+1}$
2. $a_{n+1}\, a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$
3. $a_{n-k}\, a_{m-k} - a_n\, a_m = (-1)^n a_{m-n-k}\, a_k$, this seem have error by hand need correct.
4. $a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+1}$
5. $a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 = a_{2n}$
6. $a_{n+1}^3 + a_n^3 - a_{n-1}^3 = a_{3n}$
7. $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_{n+1}} + \dfrac{1}{a_{n+2}} + \dfrac{1}{a_n\, a_{n+1}\, a_{n+2}}$

參、Results and conclusions

一.

formula kind	correspondent equation type	solution set
①	F.S. coefficient $Ab^2+Bbc+Cc^2-Db-Ec=0$	definition I and other
②	$b^2+bc-c^2=1$	definition I group
③	F.S. coefficient $Ab^2+Bbc-Cc^2=0$	$b=\dfrac{a_{m-n+2k}}{a_{m-n+2k-1}}\times c$
④	meta l F.S. coefficient the same as in □	same as in □
⑤	meta 1 F.S. coefficient the same as in □	same as in □
⑥	meta 2 F.S. coefficient $Ab^3+Bb^2c+Cbc^2+Dc^3-Eb-Fc=0$	may be only $b=c=\pm 1$
⑦	$b^2+bc-c^2=-1$	definition I group

二.A new formula is found, $a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 = a_{n-1}\, a_n + a_n\, a_{n+1}$, for all the F.S. is O.K.！ equation is $0=0$

初等代數鏡頭下的 Fibonacci Sequence (F.S.)

壹、研究動機：

因緣知道數學世界的“數列樂園”裏有一迷人的費氏數列專區，且自1963年起就有一本季刊 Fibonacci Quarterly，供所有費迷們能共享新發掘出來的驚喜，惜此群迷父迷母們，都是“數功”高手，我等那看得懂，但由於此數列基本架構爲：前兩項之和等於第三項，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，實在是有夠簡單四則運算裏的加法而已，故打算由初等代數的觀點，依逆命題的角度來炒這盤冷飯，希望能有我們看得懂可陶醉其中的美景呈現。

貳、研究目的：

培養建構式的思考法，提高解決問題的能力。

參、研究過程：

一.首先自簡明數學百科全書，找出$F.S.$的定義，卻發現有兩類：

Ⅰ：$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，如：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , ……

Ⅱ：$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，如：0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , ……

顯然兩者僅a_1與a_2有所不同而已，這麼一丁點的不一致，不知有無隱含重大訊息？而一起頭就不能“確定化”，真讓我們憂心。

二.改以代數觀點描述即文字定義，狀況應如下：

Ⅰ：$a,\ a,\ 2a,\ 3a,\ 5a,\ 8a\cdots\cdots\cdots\cdots$

Ⅱ：$0,\ a,\ \ a,\ 2a,\ 3a,\ 5a\cdots\cdots\cdots\cdots$

∴若$a=1$，就是其前述的數字定義，但a非必爲1不可嗎？您說呢？

三.而由基本架構描述的基本通式應爲：$b\,,c\,,b+c\,,b+2c\,,2b+3c\,,3b+5c\,,5b+8c\cdots\cdots,$

您看出奇妙處了嗎？將每一項中隔離出含b項所成數列爲$b\,,0\,,b\,,b\,,2b\,,3b,5b\cdots\cdots,$

含c項者爲$0\,,c\,,c\,,2c\,,3c\,,5c\,,8c\,,\cdots\cdots$，顯然由$b$構成者，只不過是首項再向左移動一項的定義Ⅱ，且稱定義Ⅲ，由c構成者即定義Ⅱ囉！同時也可體會到：兩$F.S.$之和仍爲一$F.S.$的廣義$F.S.$特性的存在。因此接下來準備逆向，向左前進看看。當然三個定義均可視爲以其中一個爲母體，餘二個爲其衍生群：各項乘一倍數且首項調整。

四.向左齊步走：

1. $\cdots\cdots\cdots,\ -8,5,-3,2,-1,1,0,\boxed{1,1,}\ 2,3,5,\cdots\cdots\cdots$
2. $\cdots\cdots\cdots,\ -8a,5a,-3a,2a,-a,a,0,\boxed{a,a,}\ 2a,3a\ \ 5a,\ \cdots\cdots\cdots$
3. $\cdots\cdots\cdots,\ 13b-8c\,,-8b+5c\,,5b-3c\,,-3b+2c\,,2b-c\,,-b+c\,,\boxed{b\,,c\,,}\ b+c\,,b+2c\,,$
   $2b+3c\,,3b+5c\,,\cdots\cdots\cdots$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots,13b\,,-8b\,,5b-3b\,,2b\,,-b\,,b\,,0\,,\boxed{b\,,b\,,}\ 2b,3b,\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ -8c\,,5c\,,-3c\,,2c\,,-c\,,c\,,0\,,\boxed{c\,,c\,,}\ 2c\,,3c\,,5c\,,\cdots\cdots\cdots\end{array}\right.$$

心得：a.1與2中，爲全體以“0”項做中心，左右兩側相對應的奇數項爲等值同號，

但偶數項爲等値異號，換言之，定義Ⅰ爲正整數系$F.S.$，定義Ⅲ爲非負整數系$F.S.$，而定義Ⅱ爲“右全” $F.S.$。設若將每一項乘以“-1”，則定義Ⅰ爲負整數系$F.S.$，定義Ⅲ爲非正整數系$F.S.$，至於定義Ⅱ就無以名之，“左全”絕對不適用。

b. 3中，顯然若改以(b,c) 對爲中心，左右兩側相對應項之關係爲奇數項(左,右)$=(-nb+mc\,,\,mb+nc)$，偶數項則爲$=(nb-mc\,,\,mb+nc)$。亦即相對應項裏b與c之係數m與n要對調，而數列右側爲互加$(mb+nc)$，左側爲b,c互減，若奇數項爲$(-nb+mc)$，偶數項爲$(nb-mc)$。

五.在數學第一冊教師手冊與世界名題欣賞「斐波那契數列」一書，我們找到一些同樣可換成初等代數基本架構觀點來研討的資訊。

1. $F.S.$基本架構的更一般關係式爲$a_{m+n}=a_{n-1}\,a_m+a_n\,a_{m+1}$。

a.我們決定取前九項爲例來研究：

項數 $1,2,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 8\ ,\ 9$

通式 $b,\ c,\ b+c\,,b+2c\,,2b+3c\,,3b+5c\,,5b+8c\,,8b+13c\,,13b+21c$

b.設取$m+n=9$ $\quad\therefore$有下述四種狀況

$a_9=a_1a_7+a_2a_8\Rightarrow 13b+21c=b(5b+8c)+c(8b+13c)$

$=a_2a_6+a_3a_7\Rightarrow \qquad =c(3b+5c)+(b+c)(5b+8c)$

$=a_3a_5+a_4a_6\Rightarrow \qquad =(b+c)(2b+3c)+(b+2c)(3b+5c)$

$=a_4^2\ +a_5^2\ \Rightarrow \qquad =(b+2c)^2+(2b+3c)^2$

整理之，均獲同一方程式：$5b^2+16bc+13c^2-13b-21c=0$

c.求解$5b^2+16bc+13c^2-13b-21c=0$

A. 若$b=c$，原式$=34b^2-34b=34b(b-1)=0$ 即 $b=c=0\ or\ b=c=1$，而前者爲全“0”數列，可以會心知道成立但無意義。而後者即爲數字定義Ⅰ，換言之，此關係式的適用，首項要“確定”爲$b=1$者，馬上例證如下：

項數 $\quad 1,2,3,4,5,6,\ 7,\ 8,\ 9$

定義Ⅰ $\ 1,1,2,3,5,8,13,21,34$

定義Ⅱ $\ 0,1,1,2,3,5,\ 8,13,21$

$\therefore a_9=34=1\times13+1\times21=1\times8+2\times13\ =2\times5+3\times8=3^2+5^2$

$=21\neq 0\times8+1\times13=1\times5+1\times8=1\times3+2\times5=2^2+3^2\equiv 13$

$\therefore a_6=a_1a_4+a_2a_5=a_2a_3+a_3a_4$

$\begin{cases}8=1\times3+1\times5=1\times2+2\times3\\5\neq0\times2+1\times3=1\times1+1\times2\equiv3\end{cases}$，得證。

心得：此關係式當時一定是由定義Ⅰ推論而得，若當時是參考定義Ⅱ，則關係式要爲$a_{m+n-1}=a_{n-1}\,a_m+a_n\,a_{m+1}$ 方成立。

B. 若$b\neq c$，$\because b,c\in Z$，故原式看成對b的一元二次方程式時，其判別式$D\geq0$且$D=k^2,k\in Z$。

令 $D=(16c-13)^2-4\times5\times(13c^2-21c)=-4c^2+4c+169=k^2$

$\Rightarrow\ 4c^2-4c+k^2-169=0$

故同理，對 c 而言，此 $4c^2-4c+k^2-169=0$ 的 $D'\geq0$ 且 $D'=k'^2$ 。

$\therefore D'=(-4)^2-4\times4\times(k^2-169)=4^2(170-k^2)\geq0\Rightarrow\sqrt{170}\ \fallingdotseq\ 13.04\geq k$

令

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
k^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
$\sqrt{170-k^2}$	$\sqrt{170}$	$\sqrt{169}$ $=13$	$\sqrt{166}$	$\sqrt{161}$	$\sqrt{154}$	$\sqrt{145}$	$\sqrt{134}$	$\sqrt{121}$ $=11$	$\sqrt{106}$	$\sqrt{89}$	$\sqrt{70}$	$\sqrt{49}$ $=7$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{1}$ $=1$

於是 $4c^2-4c+1^2-169=4(c-7)(c+6)=0\ \Rightarrow\ c=7\ or\ -6$

$4c^2-4c+7^2-169=4(c-6)(c+5)=0\qquad 6\ or\ -5$

$4c^2-4c+11^2-169=4(c-4)(c+3)=0\qquad 4\ or\ -3$

$4c^2-4c+13^2-169=4c(c-1)=0\qquad 0\ or\ \ 1$

而當

$c=-6$ 原式 $=5b^2-109b+594$ $=(5b-54)(b-11)$ $b=\dfrac{54}{5}\ or\ 11$	$c=-5$ 原式 $=(5b-43)(b-10)$ $b=\dfrac{43}{5}\ or\ 10$	$c=-3$ 原式 $=(5b-36)(b-5)$ $b=\dfrac{36}{5}\ or\ \ 5$
$c=0$ 原式 $=b(5b-13)$ $b=\dfrac{13}{5}\ or\ \ 0$	$c=1$ 原式 $=(5b+8)(b-1)$ $b=\dfrac{8}{5}\ or\ 1$	$c=4$ 原式 $=(5b+31)(b+4)$ $b=\dfrac{-31}{5}\ or-4$
$c=6$ 原式 $=(5b+8)(b+9)$ $b=\dfrac{-38}{5}\ or-9$	$c=7$ 原式 $=(5b+49)(b+10)$ $=\dfrac{-49}{5}\ or-10$	

啊哈！共有八組 (b,c) 整數解，內含 $b=c$ 之兩組解在內，亦即 $b\neq c$ 有六組解

d. $\therefore b \neq c$ 之 $F.S.$ 成立者如下：

項數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
一	11	-6	5	-1	4	3	7	10	17
二	10	-5	5	0	5	5	10	15	25
三	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2
四	-4	4	0	4	4	8	12	20	32
五	-9	6	-3	3	0	3	3	6	9
六	-10	7	-3	4	1	5	6	11	17

說明：a. 二、三、四與五皆亦可視爲 $b = c$ 之狀況，只是數列之首項要調整或各項要倍數放大，即原 $F.S.$ 特性之一的 $(a_n, a_{n+1}) = 1$ 要修改成 $(a_n, a_{n+1}) = \ell$， $\ell \in Z$ 。

b. 僅 $m + n = 9$ 成立，例證如下：

$a_7 = a_3^2 + a_4^2 = 5^2 + (-1)^2 \neq 7$ ； $5^2 + 0^2 \neq 10$ ； $2^2 + (-1)^2 \neq 1$ ；
$0^2 + 4^2 \neq 12$ ； $(-3)^2 + 3^2 \neq 3$ ； $(-3)^2 + 4^2 \neq 6$

$a_8 = a_1 a_6 + a_2 a_7 = 11 \times 3 + (-6) \times 7 \neq 10$ ； $10 \times 5 + (-5) \times 10 \neq 15$ ；
$5 \times 0 + (-3) \times 1 \neq 1$ ； $-4 \times 8 + 4 \times 12 \neq 20$ ； $-9 \times 3 + 6 \times 3 \neq 6$ ；
$(-10) \times 5 + 7 \times 6 \neq 11$

心得：1.當 $m + n =$ 奇數 $2k + 1$ 時，選擇 $a_{m+n} = a_k^2 + a_{k-11}^2$ 爲觀察式最利便。

2.只有定義 I ，完全符合關係式 $a_{m+n} = a_n\, a_{m-1} + a_m\, a_{n+1}$ ，亦即此關係式的普遍性欠佳。

e.且再以代數角度觀察其他 $m + n$ 狀況來更確認一番

$m + n = 8$ 時， $a_8 = a_1 a_6 + a_2 a_7$ $\quad \therefore 8b + 13c = b(3b + 5c) + c\,(5b + 8c)$
$\Rightarrow 3b^2 + 10bc - 8b + 8c^2 - 13c = 0$

$m + n = 7$ 時， $a_7 = a_3^2 + a_4^2$ $\quad \therefore 5b + 8c = (b + c)^2 + (b + 2c)^2$
$\Rightarrow 2b^2 + 6bc - 5b + 5c^2 - 8c = 0$

$m + n = 6$ 時， $a_6 = a_1 a_4 + a_2 a_5$ $\quad \therefore 3b + 5c = b\,(b + 2c) + c\,(2b + 3c)$
$\Rightarrow b^2 + 4bc - 3b + 3c^2 - 5c = 0$

$m + n = 5$ 時， $a_5 = a_2^2 + a_3^2$ $\quad \therefore 2b + 3c = c^2 + (b + c)^2$
$\Rightarrow b^2 + 2bc - 2b + 2c^2 - 3c = 0$

$m + n = 4$ 時， $a_4 = a_1 a_2 + a_2 a_3$ $\quad \therefore b + 2c = bc + c\,(b + c)$
$\Rightarrow 2bc - b + c^2 - 2c = 0$

$m + n = 3$ 時， $a_3 = a_1^2 + a_2^2$ $\quad \therefore b + c = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow b^2 - b + c^2 - c = 0$

果然，不同$m+n$，有不同的b,c方程式

Ⅰ 以$m+n=3$爲例，求解佐證。

方程式爲$b^2-b+c^2-c=0$,

$\because b\in Z \quad \therefore D=(-1)^2-4\times1\times(c^2-c)=k^2 \Rightarrow \quad 4c^2-4c+k^2-1=0$

$\because c\in Z \quad \therefore D'=(-4)^2-4\times4\times(k^2-1)=4^2\,(2-k^2)\Rightarrow\sqrt{2}\ \fallingdotseq\ 1.41\geq k$

令$k=0$時，$\sqrt{2-k^2}=\sqrt{2}$ (不合)

$k=1$時，$=\sqrt{1}=1$ (合)

故$k=1$時，$4c^2-4c+1^2-1=4c\,(c-1)=0 \Rightarrow c=0$ or 1

而$c=0$ or 1 時，$b^2-b=b\,(b-1)=0 \Rightarrow b=0$ or 1

於是可得四數列

項數									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	⇒ 全 0
0	1	1	2	3	5	8	13	21	⇒ 定義Ⅱ
1	0	1	1	2	3	5	8	13	⇒ 定義Ⅲ
1	1	2	3	5	8	13	21	34	⇒ 定義Ⅰ

而全0與定義Ⅰ完全符合關係式，至於定義Ⅱ與非負整數$F.S.$，僅$m+n=3$符合成立。

Ⅱ 再以$m+n=4$爲例，$2bc-b+c^2-2c=0$

$\because c\in Z \therefore D=[\,2\,(b-1)]^2-4\times1\times(-b)=(2b-1)^2+3=k^2$

$\Rightarrow \quad k^2-(2b-1)^2=(k+2b-1)\,(k-2b+1)=3$

即 $\begin{cases} k+2b-1=3\ ,-3,1,-1\cdots\cdots & ① \\ k-2b+1=1\ ,-1,3,-3\cdots\cdots & ② \end{cases}$

∴a+b $2k=4,-4,4,-4$ (顯然正、負各選一討論即可)

$\Rightarrow \quad k=\pm2$，$b=1$ or 0，$c=1$ or -1；0 or 2

於是亦可得四數列

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	⇒ 全 0
0	2	2	4	6	10	16	26	42	⇒ 定義Ⅱ×2
1	1	2	3	5	8	13	21	34	⇒ 定義Ⅰ
1	−1	0	−1	−1	−2	−3	−5	−8	⇒ 定義Ⅰ×(−1)且調整首項

而又是全0與定義Ⅰ完全符合，餘兩者僅$m+n=4$符合成立

決定$m+n=5\sim8$ 均求解觀察整理歸納之。

Ⅲ A. $m+n=5$，$b^2+2bc-2b+2c^2-3c=0$

$\because b\in Z \quad \therefore D=(2c-2)^2-4\times1\times(2c^2-3c)=k^2 \Rightarrow 4c^2-4c+k^2-4=0$

$\because c\in Z \quad \therefore D'=(-4)^2-4\times4\times(k^2-4)=4^2(5-k^2)\ge0 \Rightarrow \sqrt{5}=2.24\ge k$

令$k=0$時，$\sqrt{5-k^2}=\sqrt{5}$ (不合)

$k=1$時，$=\sqrt{4}=2$ (合)$\Rightarrow$ $4c^2-4c-3=(2c+1)(2c-3)=0$

$\therefore c=\frac{-1}{2}\ or\ \frac{3}{2}$ (不合)

$k=2$時，$=\sqrt{1}=1$ (合)$\Rightarrow$ $4c^2-4c=0 \quad \therefore c=0\ or\ 1$ (合)

而$c=0$時，$b^2-2b=b(b-2)=0 \quad \therefore b=0\ or\ 2$

$c=1$時，$b^2-1=0 \quad \therefore b=\pm1$

於是可得又含有全0與定義Ⅰ之四數列，另二者為

1，2，3，4，5，6，7，8，9

2，0，2，2，4，6，10，16，26 $\Rightarrow$ 定義Ⅲ$\times2$

-1，1，0，1，1，2，3，5，8 $\Rightarrow$ 定義Ⅰ但調整

B. $m+n=6$，$b^2+4bc-3b+3c^2-5c=0$

$\because b\in Z \therefore D=(4c-3)^2-4\times1\times(3c^2-5c)=k^2$

$\Rightarrow k^2-(2c-1)^2=(k-2c+1)(k+2c-1)=8$

即 $\begin{cases} k+2c-1=8,\ -8,\ 2,\ -2 \\ k-2c+1=1,\ -1,\ 4,\ -4 \end{cases}$ $c=\frac{9}{4},\frac{-5}{4}$(不合)$,0,1$(合)

而 $c=0$時，$b=0\ or\ 3$

$c=1$時，$b=-2\ or\ 1$

於是另二者為

3，0，3，3，6，9，15，24，39	定義Ⅲ$\times3$
-2，1，-1，0，-1，-1，-2，-3，-5	Ⅰ$\times(-1)$且調整

C. $m+n=7$，$2b^2+6bc-5b+5c^2-8c=0$

$\because b\in Z$，$D=(6c-5)^2-4\times2\times(5c^2-8c)=k^2 \Rightarrow 4c^2-4c+k^2-25=0$

$c\in Z, D'=(-4)^2-4\times4\times(k^2-25)=4^2(26-k^2)\ge0 \quad \therefore \sqrt{26} \fallingdotseq 5.10\ge k$

令$k=1,5$(合)$, k=1, 4c^2-4c-24=4(c-3)(c+2)=0 \quad \therefore c=3\ or\ -2$(合)

$k=5, 4c^2-4c=0 \quad \therefore c=0\ or\ 1$ (合)

而$c=0, b=0$(合)$or\ \frac{5}{2}$(不合)

$c=1, b=1\quad or\ \frac{-3}{2}$

$c=3, b=-3\quad or\ \frac{-7}{2}$ $\Rightarrow$

-3，3，0，3，3，6，9，15，24 $\Rightarrow$ Ⅰ$\times3$且調

4，-2，2，0，2，2，4，6，10 $\Rightarrow$ Ⅰ$\times2$且調

$c=-2, b=4\ or\ \frac{9}{2}$

D. $m+n=8$，$3b^2+10bc-8b+8c^2-13c=0$

$\because b \in Z , D = (10c-8)^2 - 4\times 3\times (8c^2 - 13c) = k^2$

$$\Rightarrow k^2 - (2c-1)^2 = (k+2c-1)(k-2c+1) = 63$$

$$\therefore \begin{cases} k+2c-1 = 1 \ , -1 \ , 3 \ , -3 \ , 7 \ , -7 \\ k-2c+1 = 63 \ , -63 \ , 21 \ , -21 \ , 9 \ , -9 \end{cases} \Rightarrow \ c = -15 , 16 , -4 , 5 , 0 , 1$$

今 $c=-15$, $b=21 \ or \ \dfrac{95}{3}$ ， $c=1$, $b=1 \ or \ \dfrac{-5}{3}$

$c=-4$, $b=6 \ or \ 10$ ， $c=5$, $b=-5 \ or \ -9$

$c=0$, $b=0 \ or \ \dfrac{8}{3}$ ， $c=16$, $b=-2 \ or \ \dfrac{-92}{3}$

於是

21	−15	6	−9	−3	−12	−15	−27	−42	$b \neq c$
10	−4	6	2	8	10	18	28	46	$b \neq c$
6	−4	2	−2	0	−2	−2	−4	−6	Ⅰ $\times(-2)$ 且調
−5	5	0	5	5	10	16	25	40	Ⅰ $\times 5$ 且調
−9	5	−4	1	−3	−2	−5	−7	−12	$b \neq c$
−20	16	−4	12	8	20	28	48	76	$b \neq c$

心得：1.與預測吻合，這不就是“題群”現象嗎？共同都有的解爲“全 0 ”與“定義Ⅰ”，真想知道在幾何學上，它們的含意模樣？ $F.S.$係數題群，且如此稱呼之。

2. $m+n=2k+1 \ or \ 2k$ 時之解法不盡相同，蠻有趣的。

f.分析“$F.S.$係數題群”規律狀況。

$m+n$ 係數 項名	3	4	5	6	7	8	9	$F.S.$狀況
b^2	1	0	1	1	2	3	5	I 且調
b	-1	-1	-2	-3	-5	-8	-13	I $\times(-1)$
c^2	1	1	2	3	5	8	13	I
c	-1	-2	-3	-5	-8	-13	-21	I $\times(-1)$ 且調
bc	0	2	2	4	6	10	16	II $\times 2$
常數	0	0	0	0	0	0	0	全0
答案數	四	四	四	四	四	八	八	
答案面自	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	
(b,c)	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	
	$(0,1)$	$(0,2)$	$(2,0)$	$(3,0)$	$(4,-2)$	$(6,-4)$	$(5,-3)$	
	$(1,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-2,1)$	$(-3,3)$	$(10,-4)$	$(10,-5)$	
						$(21,-15)$	$(11,-6)$	
						$(-5,5)$	$(-4,4)$	
						$(-9,5)$	$(-9,6)$	
						$(-20,16)$	$(-10,7)$	

心得：a. 各項係數均為定義 I 或廣義定義 I $F.S.$，且c^2與b兩項係數等值異號。

b. 答案數則因樣本不足，尚無法歸納出規律，預估還得研究至$m+n=13$，方可有端倪出現。

c. 答案面目則均必有$(0,0),(1,1)$，至於規律尋找，看不出有蹤跡追溯，也許由這些方程式所對應的幾何曲線著手，或有希望。

d. 答案數≥八以上有$b\neq c$之$F.S.$出現。

2. 1680年卡西尼發現之關係式 $a_{n+1}\,a_{n-1}-a_n^2=(-1)^n$

a. a_n可有$a_2\sim a_8$，$8-2+1=7$種狀況

即 $a_3a_1-a_2^2=(b+c)\,b-c^2=b^2+bc-c^2=(-1)^2=1$

$a_4a_2-a_3^2=(b+2c)\,c-(b+c)^2=-b^2-bc+c^2=(-1)^3=-1$

$a_5a_3-a_4^2=(2b+3c)\,(b+c)-(b+2c)^2=(-1)^4=1$

$a_6a_4-a_5^2=(3b+5c)\,(b+2c)-(2b+3c)^2=(-1)^5=-1$

$a_7a_5-a_6^2=(5b+8c)\,(2b+3c)-(3b+5c)^2=(-1)^6=1$

$a_8a_6-a_7^2=(8b+13c)\,(3b+5c)-(5b+8c)^2=(-1)^7=-1$

$a_9a_7-a_8^2=(13b+21c)\,(5b+8c)-(8b+13c)^2=(-1)^8=1$

故均為 $b^2+bc-c^2=1$，$b,c\in Z$。

b. A. 若$b=c$，$\therefore b=c=\pm 1$，即定義 I 與 I $\times(-1)$

B. 若$b\neq c$，$\therefore D=c^2-4\times1\times(-c^2-1)=5c^2+4=k^2\Rightarrow 5c^2=k^2-4$，於是

$\because 5 \mid k^2-4$，故可能成立的k，其個位數限 2 , 3 , 7 , 8 四種

($\because$5之倍數的個位數為 0 or 5。)

今$k=2$，$5c^2 = 0 = 5\times 0 = 5\times 0^2$ $\therefore c=0 \Rightarrow b=1 \text{ or } -1$ $\because b^2=1$

3	5	=	1	1^2	± 1	$\begin{cases}-2 \text{ or } 1\\ 2 \text{ or } -1\end{cases}$	$\begin{cases}b^2+b-1=1\\ b^2-b-1=1\end{cases}$
7	45	=	9	3^2	± 3	$\begin{cases}-5 \text{ or } 2\\ 5 \text{ or } -2\end{cases}$	$\begin{cases}b^2+3b-9=1\\ b^2-3b-9=1\end{cases}$
8	60	=	12				
12	140	=	28				
13	165	=	33				
17	285	=	37				
18	320	=	64	8^2	± 8	$\begin{cases}-13 \text{ or } 5\\ 13 \text{ or } 5\end{cases}$	$\begin{cases}b^2+8b-64=1\\ b^2-8b-64=1\end{cases}$
22	480	=	96				
23	525	=	105				
27	725	=	145				
28	780	=	156				
32	1020	=	204				
33	1085	=	217				
37	1365	=	273				
38	1440	=	288				
42	1760	=	352				
43	1845	=	369				
47	2205	=	441	21^2	± 21	$\begin{cases}-34 \text{ or } 13\\ 34 \text{ or } -13\end{cases}$	$\begin{cases}b^2+21b-441=1\\ b^2-21b-441=1\end{cases}$
48	2300	=	460				

於是看來有無窮多組解，且由解b所成之數列，可預測出下一組解b中亦有$b=\pm 34$者，而其對應之解$c=\pm 21$與$\pm x$，此x可推論而得為55。

$\because b=34$ $\therefore 34^2+34c-c^2=1 \Rightarrow c^2-34c-1155=(c+21)(c-55)=0$

$$\Rightarrow c=-21 \text{ or } 55$$

於是必也有$c=21 \text{ or } -55$

c. 若將解b與c之數列排列如下：

$b=$ ± 1 , ∓ 2 , ± 5 , ∓ 13 , $\pm 34\cdots\cdots\cdots$

$c=$ 0 , ± 1 , ∓ 3 , ± 8 , ∓ 21 , $\pm 55\cdots\cdots\cdots$

$\therefore$將$c=0$除外，其餘對應關係為

$b=$ $-M$ N or Y

$c=$ X $-Q$ R

d.將解b與c取絕對值來看，解b之數列不就是定義Ⅱ之偶數項，解c之數列爲Ⅱ之奇數項，真妙啊！對不！

e.且任舉五種數列爲實證：

$$1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13$$
$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34$$
$$-2,\ 1,\ -1,\ 0,\ -1,\ -1,\ -2,\ -3,\ -5$$
$$-1,-1,-2,-3,-5,-8,-13,-21,-34,-55,-89$$
$$5,-3,\ 2,-1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2$$

$2\times 1-1^2$

$\therefore a_5a_3-a_4^2=5\times 2-3^2 \qquad =1=(-1)^4$,均合

$(-1)\times(-1)-0^2$

$(-13)\times(-5)-(-8)^2$

$1\times 2-(-1)^2$

心得：〈一〉均可視爲定義Ⅰ之衍生群，惟其首項須均落在奇數項數上方可。

〈二〉絕無$b\neq c$之廣義$F.S.$適用，∴比較單純

〈三〉蠻新鮮的解題過程與結果。

3.上〈二〉的推廣式 $a_{m-k}\,a_{m+k}-a_na_m=(-1)^n\,a_{m-n-k}\,a_k$

a.先分析可成立之狀況：

$\because 1\le n,m,k\le 9$ ……①

又$\because 1\le n-k\le 9\Rightarrow 1+k\le n\le 9+k$ $\therefore k$取最小$=1$ 代入可得$2\le n\le 10$，將之與①綜合得 $2\le n\le 9$ ……②

又$\because 1\le m+k\le 9\Rightarrow$ $1-k\le m\le 9-h$ $\therefore k$最小$=1$ 代入可得$0\le m\le 8$，與①綜合得$1\le m\le 8$ ……③

今又$\because 1\le m-n-k\le 9$ $\Rightarrow$ $1+n+k\le m\le 9+n+k$

$\therefore n,k$各取最小$=2,1$ 代入可得 $4\le m\le 12$，

將之與③綜合，可得 $4\le m\le 8$

$\Rightarrow$ $m-k-9\le n\le m-k-1$

$\therefore k$最小$=1$，m最大$=8$ 代入可得 $-2\le n\le 6$

將之與②綜合，可得 $2\le n\le 6$

同理k之分析：$1\le n-k\le 9\Rightarrow 1-n\le -k\le 9-n\Rightarrow n-1\ge k\ge n-9$，$n=6$代入得

$5\ge k\ge -4$

$1\le m+k\le 9\Rightarrow 1-m\le k\le 9-m$，$m=4$代入得$-3\le k\le 5$

$1\le m-n-k\le 9\Rightarrow 1-m+n\le -k\le 9-m+n$

$\Rightarrow m-n-1\ge k\ge m-n-9$，$m=8$，$n=2$代入得

$5\ge k\ge -3$，將三者與①綜合 故 $5\ge k\ge 1$

於是

m	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	5	5	4
n	6	5	4	3	2	4	3	5	4	3	2	3	4	3	2	3	2	2
k	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1

共有十八種。果然$4 \le m \le 8$，$2 \le n \le 6$，但$1 \le k \le 2$ 不全然符合分析結果。

b. $a_{6-1}\, a_{8+1} - a_6\, a_8 = (-1)^6\, a_{8-6-1}\, a_1 \Rightarrow (2b+3c)(13b+21c)-(3b+5c)(8b+13c) = (-1)^6 b^2$

$\Rightarrow b^2 + 2bc - 2c^2 = 0$ $^{\vee}$

$a_{5-1}\, a_{8+1} - a_5\, a_8 = (-1)^5\, a_{8-5-1}\, a_1 \Rightarrow (b+2c)(13b+21c)-(2b+3c)(8b+13c) = (-1)^5 cb$

$\Rightarrow 3c^2 - 2bc - 3b^2 = 0$ $^{\Delta}$

$a_{4-1}\, a_{8+1} - a_4\, a_8 = (-1)^4 a_{8-4-1}\, a_1 \Rightarrow (b+c)(13b+21c)-(b+2c)(8b+13c)$

$= (-1)^4 (b \ne c)\, b \qquad \Rightarrow 4b^2 + 4bc - 5c^2 = 0$ $*$

$a_{3-1}\, a_{8+1} - a_3\, a_8 = (-1)^3\, a_{8-3-1}\, a_1 \Rightarrow c\,(13b+21c)-(b+c)(8b+13c)$

$= (-1)^3 (b+2c)\, b \qquad \Rightarrow 8c^2 - 6bc - 7b^2 = 0$ $^{\nabla}$

$a_{2-1}\, a_{8+1} - a_2\, a_8 = (-1)^2\, a_{8-2-1}\, a_1 \Rightarrow b(13b+21c)-c\,(8b+13c) = (-1)^2\,(2b+3c)\, b$

$\Rightarrow 11b^2 + 10bc - 13c^2 = 0$

$a_{4-2}\, a_{7+2} - a_4\, a_7 = (-1)^4\, a_{7-4-2}\, a_2 \Rightarrow c(13b+21c)-(b+2c)(5b+8c) = (-1)^4 bc$

$\Rightarrow 5c^2 - 6bc - 5b^2 = 0$ $^{\square}$

$a_{3-2}\, a_{7+2} - a_3\, a_7 = (-1)^3\, a_{7-3-2}\, a_2 \Rightarrow b(13b+21c)-(b+c)(5b+8c) = (-1)^3 c^2$

$\Rightarrow 8b^2 + 8bc - 7c^2 = 0$

$a_{5-1}\, a_{7+1} - a_5\, a_7 = (-1)^5\, a_{7-5-1}\, a_1 \Rightarrow (b+2c)(8b+13c)-(2b+3c)(5b+8c) = (-1)^5 b^2$

$\Rightarrow 2c^2 - 2bc - b^2 = 0$ $^{\vee}$

$a_{4-1}\, a_{7+1} - a_4\, a_7 = (-1)^4\, a_{7-4-1}\, a_1 \Rightarrow (b+c)(8b+13c)-(b+2c)(5b+8c) = (-1)^4 cb$

$\Rightarrow 3b^2 + 2bc - 3c^2 = 0$ $^{\Delta}$

$a_{3-1}\, a_{7+1} - a_3\, a_7 = (-1)^3\, a_{7-3-1}\, a_1 \Rightarrow c\,(8b+13c)-(b+c)\,(5b+8c) = (-1)^3 (b+c)\, b$

$\Rightarrow 5c^2 - 4bc - 4b^2 = 0$ $*$

$a_{2-1}\, a_{7+1} - a_2\, a_7 = (-1)^2\, a_{7-2-1}\, a_1 \Rightarrow b\,(8b+13c)-c\,(5b+8c) = (-1)^2 (b+2c)\, b$

$\Rightarrow 7b^2 + 6bc - 8c^2 = 0$ $^{\nabla}$

$a_{3-2}\, a_{6+2} - a_3\, a_6 = (-3)^3\, a_{6-3-2}\, a_2 \Rightarrow b\,(8b+13c)-(b+c)\,(3b+5c) = (-1)^3 bc$

$\Rightarrow 5b^2 + 6bc - 5c^2 = 0$ $^{\square}$

$a_{4-1}\, a_{6+1} - a_4\, a_6 = (-1)^4\, a_{6-4-1}\, a_1 \Rightarrow (b+c)\,(5b+8c)-(b+2c)\,(3b+5c) = (-1)^4 \cdot b^2$

$\Rightarrow b^2 + 2bc - 2c^2 = 0$ $^{\vee}$

$a_{3-1}\, a_{6+1} - a_3\, a_6 = (-1)^3\, a_{6-3-1}\, a_1 \Rightarrow c\,(5b+8c)-(b+c)\,(3b+5c) = (-1)^3 cb$

$\Rightarrow 3c^2 - 2bc - 3b^2 = 0$ $^{\Delta}$

$a_{2-1}\, a_{6+1} - a_2\, a_6 = (-1)^2\, a_{6-2-1}\, a_1 \Rightarrow b\,(5b+8c)-c\,(3b+5c) = (-1)^2 (b+c)\, b$

$\Rightarrow 4b^2 + 4bc - 5c^2 = 0$ $*$

$a_{3-1}\, a_{5+1} - a_3\, a_5 = (-1)^3\, a_{5-3-1}\, a_1 \Rightarrow c\,(3b+5c)-(b+c)\,(2b+3c) = (-1)^3 \cdot b^2$

$\Rightarrow 2c^2 - b^2 - 2bc = 0$ $^{\vee}$

$$a_{2-1}\,a_{5+1}-a_2\,a_5=(-1)^2\,a_{5-2-1}\,a_1\Rightarrow b\,(3b+5c\,)-c\,(2b+3c)=(-1)^2\cdot c\cdot b$$
$$\Rightarrow 3b^2+2bc-3c^2=0\ ^{\Delta}$$
$$a_{2-1}\,a_{4+1}-a_2\,a_4=(-1)^2\,a_{4-2-1}\,a_1\Rightarrow b\,(2b+3c\,)-c\,(b+2c)=(-1)^2\cdot b^2$$
$$\Rightarrow b^2+2bc-2c^2=0\ ^{\vee}$$

整理結果有七類，這可與前兩者大不同，前兩者有一爲題群，有一爲恒一方程式。

∨五個, $b^2+2bc-2c^2=0$　　$D=12c^2=k^2$

△四個, $3b^2+2bc-3c^2=0$　　$=28c^2=k^2$

＊三個, $4b^2+4bc-5c^2=0$　　$=86c^2=k^2$

▽二個, $7b^2+6bc-8c^2=0$　　$=360c^2=k^2$

□二個, $5b^2+6bc-5c^2=0$　　$=136c^2=k^2$

一個, $11b^2+10bc-13c^2=0$　　$=672c^2=k^2$

一個, $8b^2+8bc-7c^2=0$　　$=288c^2=k^2$

∴均有惟一解$b=c=0$之全0數列，即此無實例可成立，真是怪哉！莫非印刷之時手民之誤的錯誤規則。

c.實例佐證，
$$\begin{cases}\text{I}\,;\ 1,1,2,3,5,8,13,21,34\\ \text{II}\,;\ 0,1,1,2,3,5,8,13,21\end{cases}$$

$$\therefore a_{2-1}\,a_{4+1}-a_2\,a_4=\begin{cases}1\times 5-1\times 3=2\neq(-1)^2\,a_{4-2-1}\,a_1=(-1)^2\times 1\times 1=1\\ 0\times 3-1\times 2=-2\neq(-1)^2\times 0\times 0=0\end{cases}$$

果然完全不對味，而由例證 I 之狀況，大膽推測手民之誤情形而修正爲

$$a_{n-k}\,a_{m+k}-a_n\,a_m=(-1)^n\,a_{m-n+k}\,a_k$$

心得：真是有貴人相助，所選例證蠻明確點醒手民之誤處也，神來之筆選了 $n=2,\ m=4,\ k=1$。

d.就先再以 I 之前九項的實例來驗證吧！

A.先分析可成立之狀況：$k<n\,(\because n-k)\,,m+k\leq 9,\ 1\leq m+k-n$

故
$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}m&8&8&8&8&8&8&8\\ n&8&7&6&5&4&3&2\\ k&1&1&1&1&1&1&1\end{array},\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}7&7&7&7&7&7\\7&6&5&4&3&2\\1&1&1&1&1&1\end{array},\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}7&7&7&7&7&7\\8&7&6&5&4&3\\2&2&2&2&2&2\end{array},\begin{array}{|c|c|c|c|c|}6&6&6&6&6\\6&5&4&3&2\\1&1&1&1&1\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}6&6&6&6&6\\7&6&5&4&3\\2&2&2&2&2\end{array},\begin{array}{|c|c|c|c|c|}6&6&6&6&6\\8&7&6&5&4\\3&3&3&3&3\end{array},\begin{array}{|c|c|c|c|}5&&&\\5&4&3&2\\1&&&\end{array},\begin{array}{|c|c|c|c|}5&&&\\6&5&4&3\\2&&&\end{array},\begin{array}{|c|c|c|c|}5&&&\\7&6&5&4\\3&&&\end{array},\begin{array}{|c|c|c|c|}5&&&\\8&7&6&5\\4&&&\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}4&&\\4&3&2\\1&&\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}4&&\\5&4&3\\2&&\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}4&&\\6&5&4\\3&&\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}4&&\\7&6&5\\4&&\end{array},\begin{array}{|c|c|c|}4&&\\8&7&6\\5&&\end{array},\begin{array}{|c|c|}3&\\3&2\\1&\end{array},\begin{array}{|c|c|}3&\\4&3\\2&\end{array},\begin{array}{|c|c|}3&\\5&4\\3&\end{array},\begin{array}{|c|c|}3&\\6&5\\4&\end{array},$$

$$\left|\begin{matrix}3\\7\\5\end{matrix}\right|6\Bigg|,\left|\begin{matrix}3\\8\\6\end{matrix}\right|7\Bigg|,\left|\begin{matrix}2\\2\\1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}2\\3\\2\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}2\\4\\3\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}2\\5\\4\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}2\\6\\5\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}2\\7\\6\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}2\\8\\7\end{matrix}\right|\Bigg\|$$

∴共有$7\times1+6\times2+5\times3+4\times4+3\times5+2\times6+1\times7=84$種

B. $a_{8-1}\,a_{8+1}-a_8^2 \quad =13\times34-21^2=1 \qquad =(-1)^8a_{8-8+1}\,a_1=1\times1\times1=1$

$a_{7-1}\,a_{8+1}-a_7a_8=8\times34-13\times21=-1=(-1)^7\,a_{8-7+1}\,a_1=(-1)\times1\times1=-1$

$a_{6-1}\,a_{8+1}-a_6a_8=5\times34-8\times21=2 \quad =(-1)^6\,a_{8-6+1}\,a_1=1\times2\times1=2$

$a_{5-1}\,a_{8+1}-a_5a_8=3\times34-5\times21=-3 \quad =(-1)^5\,a_{8-5+1}\,a_1=(-1)\times3\times1=-3$

$a_{4-1}\,a_{8+1}-a_4a_8=2\times34-2\times21=5 \quad =(-1)^4\,a_{8-4+1}\,a_1=1\times5\times1=5$

$a_{3-1}\,a_{8+1}-a_3a_8=1\times34-1\times21=-8 \quad =(-1)^3\,a_{8-3+1}\,a_1=(-1)\times8\times1=-8$

$a_{2-1}\,a_{8+1}-a_2a_8=1\times34-1\times21=13 \quad =(-1)^2\,a_{8-2+1}\,a_1=1\times13\times1=13$

$a_{7-1}\,a_{7+1}-a_7^2 \quad =8\times21-13^2=-1 \qquad =(-1)^7\,a_{7+7+1}\,a_1=(-1)\times1\times1=-1$

$a_{6-1}\,a_{7+1}-a_6a_7=5\times21-8\times13=1 \quad =(-1)^6\,a_{7-6+1}\,a_1=1\times1=1$

$a_{5-1}\,a_{7+1}-a_5a_7=3\times21-5\times13=-2 \quad =(-1)^5\,a_{7-5+1}\,a_1=(-1)\times2\times1=-2$

$a_{4-1}\,a_{7+1}-a_4a_7=2\times21-3\times13=3 \quad =(-1)^4\,a_{7-4+1}\,a_1=3\times1=3$

$a_{3-1}\,a_{7+1}-a_3a_7=1\times21-2\times13=-5 \quad =(-1)^3\,a_{7-3+1}\,a_1=(-1)\times5\times1=-5$

$a_{2-1}\,a_{7+1}-a_2a_7=1\times21-1\times13=8 \quad =(-1)^2\,a_{7-2+1}\,a_1=8\times1=8$

$a_{8-2}a_{7+2}-a_8a_7=8\times34-21\times13=-1\neq(-1)^8a_{7-8+2}\,a_2=1\times1\times1=1$

$a_{7-2}a_{7+2}-a_7^2 \quad =5\times34-13^2=1 \qquad \neq(-1)^7a_{7-7+2}\,a_2=(-1)\times1\times1=-1$

$a_{6-2}a_{7+2}-a_6a_7=3\times34-8\times13=-2\neq(-1)^6a_{7-6+2}\,a_2=2\times1=2$

$a_{5-2}a_{7+2}-a_5a_7=2\times34-5\times13=3 \quad \neq(-1)^5a_{7-5+2}\,a_2=(-1)\times3\times1=-3$

$a_{4-2}a_{7+2}-a_4a_7=1\times34-3\times13=-5 \quad \neq(-1)^4a_{7-4+2}\,a_2=5\times1=5$

$a_{3-2}a_{7+2}-a_3a_7=1\times 34-2\times 13=8 \quad \neq (-1)^3 a_{7-3+2}\,a_2=(-1)\times 8\times 1=-8$

此組六者均不合，但僅差符號而已，大膽假設建議再修正如后就一切 OK！

當 $k=$偶數時 $a_{n-k}a_{m+k}-a_na_m=(-1)^{m-n}a_{m-n+k}a_k$

$a_{6-1}\,a_{6+1}-a_6^2 \quad =5\times 13-8^2 \qquad =1 \;=(-1)^6 \quad a_{6-6+1} \quad a_1=1\times 1=1$

$a_{5-1}\,a_{6+1}-a_5a_6=3\times 13-5\times 8 \quad =-1=(-1)^5 \quad a_{6-5+1} \quad a_1=-1\times 1\times 1=-1$

$a_{4-1}\,a_{6+1}-a_4a_6=2\times 13-3\times 8 \quad =2 \;=(-1)^4 \quad a_{6-4+1} \quad a_1=2\times 1=2$

$a_{3-1}\,a_{6+1}-a_3a_6=1\times 13-2\times 8 \quad =-3=(-1)^3 \quad a_{6-3+1} \quad a_1=-1\times 3\times 1=-3$

$a_{2-1}\,a_{6+1}-a_2a_6=1\times 13-1\times 8 \quad =5 \;=(-1)^2 \quad a_{6-2+1} \quad a_1=5\times 1=5$

$a_{7-2}\,a_{6+2}-a_7a_6=5\times 21-13\times 8=1 \;\neq (-1)^{-1} \quad a_{6-7+2} \quad a_2=-1\times 1\times 1=-1$

$a_{6-2}\,a_{6+2}-a_6^2 \quad =3\times 21-8^2 \qquad =-1\neq (-1)^0 \quad a_{6-6+2} \quad a_2=1\times 1=1$

$a_{5-2}\,a_{6+2}-a_5a_6=2\times 21-5\times 8 \quad =2\neq (-1)^1 \quad a_{6-5+2} \quad a_2=-1\times 2\times 1=-2$

$a_{4-2}\,a_{6+2}-a_4a_6=1\times 21-3\times 8 \quad =-3\neq (-1)^2 \quad a_{6-4+2} \quad a_2=3\times 1=3$

$a_{3-2}\,a_{6+2}-a_3a_6=1\times 21-2\times 8 \quad =5 \;\neq (-1)^3 \quad a_{6-3+2} \quad a_2=-1\times 5\times 1=-5$

此組五者又是僅差符號，於是得再度修正就一切OK！

$k=$偶數時， $a_{n-k}a_{m+k}-a_na_m=(-1)^{n-1}a_{m-n+k}a_k$

心得：前次修正未能正確中的，真是有夠不聰明，看來得需再例證的就是
$k=$偶數時者，就再選兩組看看吧！

$a_{6-2}\,a_{5+2}-a_6a_5=3\times 13-8\times 5=-1 \quad =(-1)^5\,a_{5-6+2}\,a_2=-1\times 1\times 1=-1$

$a_{5-2}\,a_{5+2}-a_5^2 \quad =2\times 13-5\times 5=1 \qquad =(-1)^4\,a_{5-5+2}\,a_2=1\times 1\times 1=1$

$a_{4-2}\,a_{5+2}-a_4a_5=1\times 13-3\times 5=-2 \quad =(-1)^3\,a_{5-4+2}\,a_2=-1\times 2\times 1=-2$

$a_{3-2}\,a_{5+2}-a_3a_5=1\times 13-2\times 5=3 \qquad =(-1)^2\,a_{5-3+2}\,a_2=1\times 3\times 1=3$

$$a_{8-4}\ a_{5+4} - a_8 a_5 = 3\times 34 - 21\times 5 = -3 = (-1)^7\ a_{5-8+4}\ a_4 = -1\times 1\times 3 = -3$$

$$a_{7-4}\ a_{5+4} - a_7 a_5 = 2\times 34 - 13\times 5 = 3 \quad = (-1)^6\ a_{5-7+4}\ a_4 = 1\times 1\times 3 = 3$$

$$a_{6-4}\ a_{5+4} - a_6 a_5 = 1\times 34 - 8\times 5 \quad = -6 = (-1)^5\ a_{5-6+4}\ a_4 = -1\times 2\times 3 = -6$$

$$a_{5-4}\ a_{5+4} - a_5^2 \quad = 1\times 34 - 5^2 \quad\quad = 9 \quad = (-1)^4\ a_{5-5+4}\ a_4 = 1\times 3\times 3 = 9$$

e.現在換換用初等代數鏡頭瞧瞧！

A.先看$k=$奇數者

$$a_{8-1}\ a_{8+1} - a_8^2 = (5b+8c)(13b+21c) - (8b+13c)^2 = (-1)^8 a_{8-8+1}\ a_1 = b\times b$$

$$\Rightarrow bc - c^2 = c\,(b-c) = 0 \quad \therefore c = 0\ or\ b = c$$

$$a_{7-1}\ a_{8+1} - a_7 a_8 = (3b+5c)(13b+21c) - (5b+8c)(8b+13c) = (-1)^7 a_{8-7+1}\ a_1 = -1\times c\times b$$

$$\Rightarrow b^2 - c^2 = (b+c)\,(b-c) = 0 \quad \therefore b = \pm c$$

$$a_{6-1}\ a_{8+1} - a_6 a_8 = (2b+3c)(13b+21c) - (3b+5c)(8b+13c) = (-1)^6 a_{8-6+1}\ a_1 = (b+c)\times b$$

$$\Rightarrow b^2 + bc - 2c^2 = (b+2c)(b-c) = 0 \quad \therefore b = -2c\ or\ b = c$$

$$a_{5-1}\ a_{8+1} - a_5 a_8 = (b+2c)(3b+21c) - (2b+3c)(8b+13c) = (-1)^5 a_{8-5+1}\ a_1$$

$$= (-1)\times(b+2c)\times b$$

$$\Rightarrow 2b^2 + bc - 3c^2 = (2b+3c)(b-c) = 0 \quad \therefore b = -\frac{3}{2}c\ or\ b = c$$

$$a_{4-1}\ a_{8+1} - a_4 a_8 = (b+c)(13b+21c) - (b+2c)(8b+13c) = (-1)^4 a_{8-4+1} a_1 = (2b+3c)\times b$$

$$\Rightarrow 3b^2 + 2bc - 5c^2 = (3b+5c)(b-c) = 0 \quad \therefore b = \frac{-5}{3}c\ or\ b = c$$

$$a_{3-1}\ a_{8+1} - a_3 a_8 = c\times(13b+21c) - (b+c)(8b+13c) = (-1)^3 a_{8-3+1}\ a_1 = (-1)\times(3b+5c)\times b$$

$$\Rightarrow 5b^2 + 3bc - 8c^2 = (5b+8c)(b-c) = 0 \quad \therefore b = \frac{-8}{5}c\ or\ b = c$$

$$a_{2-1}\ a_{8+1} - a_2 a_8 = bc\,(3b+21c) - c(8b+13c) = (-1)^2 a_{8-2+1}\ a_1 = (5b+8c)\times b$$

$$\Rightarrow 8b^2 + 5bc - 13c^2 = (8b+13c)(b-c) = 0 \quad \therefore b = \frac{-13}{8}c\ or\ b = c$$

心得：1.也是$F.S.$係數題群現象，均有$b=c$之解，但並非一定為$b=c=1$，另一解為$b\neq c$者，真不知它們的幾何圖形意義又會是何款？

2.本題群之解為文字解，而前面討論之題群則為數字解，真是風味另有一番且以實例驗證一下，均取$b=3$為例。

$a_{8-1}\, a_{8+1} - a_8^2 = (-1)^8 a_{8-8+1}\, a_1$；

$a_{5-1}\, a_{8+1} - a_5 a_8 = (-1)^5 a_{8-5+1}\, a_1$

$b = c$ $\boxed{3,3,}\,6,9,15,24,39,63,102$ $39\times102-63^2=9=3\times3=9$；

$9\times102-15\times63=27=9\times3=27$

$c=0$ $3,0,\boxed{3,3,}\,6,9,15,24,39$ $15\times39-24^2=9=3\times3=9$；

$3\times39-6\times24=-27\neq3\times3=9$

$b=\dfrac{-3}{2}c$ $3,-2,1,-1,0,\boxed{-1,-1,}\,-2,-3$ $(-1)\times(-3)-(-2)^2=-1\neq3\times3=9$；

$(-1)\times(-3)-0\times(-2)=3$
$=(-1)\times(-1)\times3=3$

O.K.！沒錯，但您發現了嗎？並非是真正的$b\neq c\ F.S.$，而是廣義的定義 I ：倍數且調整，而$b=c$的確全部適合，$b\neq c$爲有限適合。

B. $k=$偶數者

$a_{8-4}a_{5+4}-a_8a_5=(b+2c)(13b+21c)-(8b+13c)(2b+3c)=(-1)^7 a_{5-8+4}a_4$

$=-b\times(b+2c)$

$\Rightarrow 2b^2+bc-3c^2=(2b+3c)(b-c)=0 \quad \therefore b=\dfrac{-3}{2}c\ or\ c$

$a_{7-4}a_{5+4}-a_7a_5=(b+c)(13b+21c)-(5b+8c)(2b+3c)=(-1)^6 a_{5-7+4}a_4=c\times(b+2c)$

$\Rightarrow 3b^2+2bc-5c^2=(3b+5c)(b-c)=0 \quad \therefore b=\dfrac{-5}{3}c\ or\ c$

$a_{6-4}a_{5+4}-a_6a_5=c\,(13b+21c)-(3b+5c)(2b+3c)=(-1)^5 a_{5-6+4}a_4=-(b+c)(b+2c)$

$\Rightarrow 5b^2+3bc-8c^2=(5b+8c)(b-c)=0 \quad \therefore b=\dfrac{-8}{5}c\ or\ c$

$a_{5-4}a_{5+4}-a_5^2=b\,(13b+21c)-(2b+3c)^2=(-1)^4 a_{5-5+4}\,a_4=(b+2c)^2$

$\Rightarrow 8b^2+5bc-13c^2=(8b+13c)(b-c)=0 \quad \therefore b=\dfrac{-13}{8}c\ or\ c$

ya ！the same as $k=$奇者

f.尋找一下有限適用的通解吧！

$k=$奇者；$m\equiv 8\,,k\equiv 1,$

$n=$	8	7	6	5	4	3	2
$b=$	$\frac{-1}{0}c$	$\frac{-1}{1}c$	$\frac{-2}{1}c$	$\frac{-3}{2}c$	$\frac{-5}{3}c$	$\frac{-8}{5}c$	$\frac{-13}{8}c$
$c=$	$\frac{-0}{1}b$	$\frac{-1}{1}b$	$\frac{-1}{2}b$	$\frac{-2}{3}b$	$\frac{-3}{5}b$	$\frac{-5}{8}b$	$\frac{-8}{13}b$

$k=$偶者：$m\equiv 5\,,k\equiv 4,$

$n=$	8	7	6	5
$b=$	$\frac{-3}{2}c$	$\frac{-5}{3}c$	$\frac{-8}{5}c$	$\frac{-13}{8}c$
$c=$	$\frac{-2}{3}b$	$\frac{-3}{5}b$	$\frac{-5}{8}b$	$\frac{-8}{13}b$

$\therefore$通解式爲$c=\dfrac{-a_{m-n+2k-1}}{a_{m-n+2k}}\,b \Rightarrow\ \ b=\dfrac{-a_{m-n+2k}}{a_{m-n+2k-1}}\,c$

而分子、分母之a_x表數字定義Ⅱ之項數x，將其數字值代入即可，數定Ⅱ爲 $0\,,1\,,1\,,2\,,3\,,5\,,8\,,13\,,21\,,\ \cdots\cdots$

且再以實例驗證：設取$a_{6-3}a_{6+3}-a_6^2=(-1)^6\ a_{6-6+3}a_3 \ \Rightarrow\ \ m=6\,,n=6\,,k=3$

$\therefore$通解式告知解爲$b=c\ or\ b=\dfrac{-a_{m-n+2k}}{a_{m-n+2k-1}}\ c=\dfrac{-5}{3}c$

代數處理：$(b+c)(13b+21c)-(3b+5c)^2=(b+c)^2$

$\Rightarrow\ \ 3b^2+2bc-5c^2=(3b+5c)(b-c)=0$

$\therefore b=c\ or\ \dfrac{-5}{3}c$ ，得證。

4. $a_n^2+a_{n+1}^2=a_{2n+1}$，此實與前1中討論之 $a_{m+n}=a_{n-1}\ a_m+a_n\ a_{m+1}$的$m+n=$奇數，且$n-m=1$時爲相同狀況，即$m=n-1$代入1中之式可得，右$=a_{(n-1)+n}=a_{2n-1}=$左$=a_{n-1}\ a_{(n-1)}+a_n\ a_{(n-1)+1}$ $=a_{n-1}^2+a_n^2$。而方程式爲間一型$F.S.$係數題群。

5. $a_{n+1}^2-a_{n-1}^2=a_{2n}$，$\because n-1\geq 1 \Rightarrow\ \ n\geq 2\ \ \therefore$有$a_{2n}=a_8,\ a_6,\ a_4$三狀況可論，

$\therefore a_{4+1}^2-a_{4-1}^2=a_8\ \ \Rightarrow\ \ (2b+3c)^2-(b+c)^2=8b+13c \Rightarrow 3b^2+10bc-8b+8c^2-13c=0$

$a_{3+1}^2-a_{3-1}^2=a_6\ \ \Rightarrow\ \ (b+2c)^2-c^2=3b+5c\ \ \Rightarrow\ \ b^2+4bc-3b+3c^2-5c=0$

$a_{2+1}^2-a_{2-1}^2=a_4\ \ \Rightarrow\ \ (b+c)^2-b^2=b+2c\ \ \Rightarrow\ \ 2bc-b+c^2-2c=0$

心得：①又是$F.S.$係數題群，亦爲“間一”型而非前面之“連續”型係數關係。

②在前1中，以$m+n=8\,,6\,,4$代入$a_{m+n}=a_{n-1}\ a_m+a_n\ a_{m+1}$中所得式子就是這些，$\therefore$爲裏子一樣，外觀不同而已，若以$m=n$代入1中式子，則成$a_{2n}=a_{n-1}\ a_n+$

$a_n\ a_{n+1}$，難不成有關係式$a_{n-1}a_n+a_na_{n+1}\equiv a_{n+1}^2-a_{n-1}^2$，這式倒未見有人提出，其導證如下：

a.已知$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\ \Rightarrow\ a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$ ……①

b.今$a_{n-1}\ a_n+a_n\ a_{n+1}=a_n\ (a_{n-1}+a_{n+1})$，將①代入，

$\therefore$右$=(a_{n+1}-a_{n-1})\times(a_{n-1}+a_{n+1})=a_{n+1}^2-a_{n-1}^2$，得證。

i. 先以實例佐證之：

Ⅰ	1	1	2	3	5	8	13	21	34
Ⅱ	0	1	1	2	3	5	8	13	21
$b\neq c$	-9	5	-4	1	-3	-2	-5	-7	-12

$a_{n-1}\ a_n+a_n\ a_{n+1}$：　3，　8，　21，55，144，377，987

1，　3，　8，21，　55，144，377

-65，-24，-7，3，　16，　45，119

$a_{n+1}^2-a_{n-1}^2$：完全同上。

故$b=c$與$b\neq c$都合，是最完整無條件限制的關係式也。

ii. 代數討論：$b\cdot c=c\cdot(b+c)=(b+c)^2-b^2\Rightarrow 0=0$　　爲$a_1a_2+a_2a_3=a_3^2-a_1^2$

$c\,(b+c)+(b+c)(b+2c)=(b+2c)^2-c^2\Rightarrow 0=0$　爲$a_2a_3+a_3a_4=a_4^2-a_2^2$

完全了解爲無條件限制均成立的關係式。

6. $a_{n+1}^3+a_n^3-a_{n-1}^3=a_{3n}$

$\therefore a_3^3+a_2^3-a_1^3=(b+c)^3+c^3-b^3=a_6=3b+5c\Rightarrow 2c^3+3bc^2+3b^2c-3b-5c=0$

$a_4^3+a_3^3-a_2^3=(b+2c)^3+(b+c)^3-c^3=a_9=13b+21c$

$\Rightarrow 8c^3+15bc^2+9b^2c+2b^3-13b-21c=0$

怪！怪！爲二元三次方程式，應該不是初等代數範疇，才疏學淺探討前進不了，但仍爲$F.S.$係數題群，爲間二型係數狀況而已。

正面攻堅力道不足，只好另類處理求解之，幸好$n=1$之式子對b言爲二次式。$\therefore$

a.設$b=c$代入則可得 $\begin{cases} 8b^3-8b=8b\,(b+1)(b-1)=0 \\ 34b^3-34b=34b\,(b+1)(b-1)=0 \end{cases}$ $\Rightarrow b=0\,,or-1\,,or\,1$

b.$b\neq c$時，由$3b^2c+3bc^2-3b+2c^3-5c=0$

$\therefore D=[3\,(c^2-1)]^2-4\times3c\times(2c^3-5c)=-15c^4+42c^2+9=-3\,(5c^2+1)(c^2-3)=0$

即$c=\pm\dfrac{c}{\sqrt5}\ or\ \pm\sqrt3$　$\therefore$均不合

於是資訊夠不夠，能大膽宣佈僅$b=c$成立且只能$b=c=0\,,1\,,-1$ 而已嗎？

且實例驗證如下：(“全0”不必討論)

1，1，2，3，　5，　8，　13，　21，　34　　$\therefore 2^3+1^3-13=8$

$-1, -1, -2, -3,\ -5,\ -8,\ -13,\ -21,\ -34 \qquad (-2)^3+(-1)^3-(-1)^3=-8$

$2,\ 2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 16,\ 26,\ 42,\ 68 \qquad 4^3+2^3-2^3=64\neq 16$

$-3, -3, -6, -9, -15, -24, -39, -63, -102 \qquad (-6)^3+(-3)^3-(-3)^3=-219\neq -24$

$1,\ 4,\ 5,\ 9,\ 14,\ 23,\ 37,\ 60,\ 97 \qquad 5^3+4^3-1^3=188\neq 23$ 得證。

c.將 $n=2$ 之式子，認定必有 $(b-c)$ 因式存在而因式分解之。

$$8c^3+15bc^2+9b^2c+2b^3-13b-21c=(b-c)(2b^2+xbc-8c^2+y)$$
$$=8c^3-(8+x)bc^2+(x-2)b^2c+yb-yc$$

$$\therefore \begin{cases} 8+x=-15 \Rightarrow x=23 \\ x-2=9 \quad \Rightarrow x=11 \\ y=-13 \ or\ 21 \end{cases}$$

故有夠矛盾即無法因式分解。

以上就是我們能夠處理的狀況，打住了。

7. $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{1}{a_{n+2}}+\dfrac{1}{a_n\ a_{n+1}\ a_{n+2}}$

a.先以通分法轉換成非分數型來表示，$\therefore$以 $a_n\ a_{n+1}\ a_{n+2}$ 乘各項

可得 $a_{n+1}\ a_{n+2}=a_n\ a_{n+2}+a_n\ a_{n+1}+1$

$=a_n\ (a_{n+2}+a_{n+1})+1$

$=a_na_{n+3}+1$ ，您覺得此式與分數型表示，孰佳？

b.代數討論

A. $a_1a_4+1=a_2a_3 \quad \therefore b\,(b+2c)+1=c\,(b+c) \qquad \Rightarrow \quad b^2-c^2+bc+1=0$

$a_2a_5+1=a_3a_4 \quad \therefore c\,(2b+3c)+1=(b+c)(b+2c) \Rightarrow \quad b^2-c^2+bc+1=0$

$a_3a_6+1=a_4a_5 \quad \therefore (b+c)(3b+5c)+1=(b+2c)(2b+3c) \Rightarrow b^2-c^2+bc+1=0$

$\therefore$亦恒爲同一式 $b^2-c^2+bc+1=0$ ，更令人驚訝的是與2中 $a_{n+1}\ a_{n-1}-a_n^2=(-1)^n$

所討論之方程式 $b^2-c^2+bc-1=0$ ，僅常數項符號不同而已，那麼代數求解過程中會是如何，真令人期待？

B.求解：$b^2-c^2+bc+1=0 \quad \therefore D=c^2-4\times1\times(1-c^2)=5c^2-4=k^2$ ，果然！亦與2中相對應式子 $5c^2+4=k^2$ ，僅常數項符號有異而已，解題流程應相同。

於是依 $5c^2-4=k^2 \Rightarrow 5c^2=k^2+4$ ，故 $5|k^3+4$ ，可推知 k 之尾數=1，4，6，9可行

即 $k=1$ ，$c^2=1=1^2 \ \Rightarrow\ c=\pm1$ ，$b=\begin{cases} 0\ or\ -1 \\ 0\ or\ 1 \end{cases}$

$k=4$ ，$c^2=4=2^2 \Rightarrow \ c=\pm 2$ ，$b=\begin{cases} 1\ or\ -3 \\ -1\ or\ 3 \end{cases}$

$k=6$ ，$c^2=8$

$k=9$ ，$c^2=17$

$k=11$，$c^2=25=5^2 \Rightarrow c=\pm 5$，$b=\begin{cases} 3 \ or \ -8 \\ -3 \ or \ 8 \end{cases}$

$k=14$，$c^2=40$

$k=16$，$c^2=52$

$k=19$，$c^2=73$

$k=21$，$c^2=89$

$k=24$，$c^2=116$

$k=26$，$c^2=136$

$k=29$，$c^2=169=13^2 \Rightarrow \pm 13$，$b=\begin{cases} 8 \ or \ -21 \\ -8 \ or \ 21 \end{cases}$

$k=31$，$c^2=193$

$k=34$，$c^2=232$

$k=36$，$c^2=260$

$k=39$，$c^2=305$

啊哈！與$5c^2=k^2-4$爲恰爲“互補”之解，妙的n次方哉！不必多言囉！

$\therefore$符合者亦爲定義Ⅰ之衍生群，而首項均落在定義Ⅰ之偶數項數上，絕無$b\neq c$者符合。

肆、討論：

一.困難的產生在卻步，困難的化解在進步。

二.沒料到這款逆向思索討論，也是如此精采炫目，學問！做學問！已有些能領悟“書中自有”的境界，“慧根”謝天賜，“道行”在自己囉！

三.「斐波那契數列」一書中，曾提及$x^2+1=2y^4$，$x^2+4=5y^4$，$x^4+4=5y^2$之整數解狀況及其引發之相關數學概念，似乎我們討論的$5c^2\pm 4=k^2$爲那些論戰的“暖身”，有空應可思索思索一番。

四.初等代數整數論碰上$F.S.$，真沒想到還那麼讓人陶醉，數學藝術，藝術數學。

伍、結論：

一. Fibonacci Sequence的定義與首項有關，基本架構爲前兩項之和等於第三項：

$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，其定義可分：Ⅰ.$a_1=a,\ a_2=a$，Ⅱ.$a_1=0,\ a_2=a$，Ⅲ.$a_1=a$，$a_2=0$，而通式定義爲$a_1=b$，$a_2=c$。

二. 關係式與方程式狀況

1. $a_{m+n}=a_{n-1}\,a_m+a_n\,a_{m+1}$，對應方程式爲$F.S.$係數題群：$Ab^2+Bbc+Cc^2-Db-Ec=0$，
   a.定義Ⅰ完全符合 b.特定a_{m+n}與a_1,a_2局部符合 c.可有$b\neq c$之廣義$F.S.$符合。
2. $a_{m+1}\,a_{n-1}-a_n^2=(-1)^n$，對應方程式恆爲$b^2+bc-c^2=1$，符合者爲定義Ⅰ爲母體之衍生群，而首項須落在定義Ⅰ之奇數項數上，但絕無$b\neq c$者符合。
3. $a_{n-k}\,a_{m-k}-a_n\,a_m=(-1)^n a_{m-n-k}\,a_k$，可能有手民之誤，似應修正爲
   a.$k=2\ell+1$奇數時，$a_{n-k}\,a_{m-k}-a_n\,a_m=(-1)^n\,a_{m-n+k}\,a_k$
   b.$k=2\ell$　偶數時，$a_{n-k}\,a_{m-k}-a_n\,a_m=(-1)^{n-1}\,a_{m-n+k}\,a_k$
   但對應之方程式均爲$F.S.$係數題群：$A\cdot b^2+B\cdot bc-C\cdot c^2=0$，即其解爲文字解，有二類，Ⅰ.$b=c$時，全部適用，Ⅱ.$c=\dfrac{-a_{m-n+2k-1}}{a_{m-n+2k}}\times b$，$\therefore b\neq c$但其實均爲定義Ⅰ

爲母體之衍生，爲局部適用，而分子、分母的a_z表示數字定義Ⅱ的項數，此項數對應之數字值代入即是之。

4. $a_n^2+a_{n+1}^2=a_{2n+1}$，爲1中取$m+n=2\ell+1$，且$n-m=1$時之狀況，對應方程式同1中者，但爲間一型$F.S.$係數題群。

5. $a_{n+1}^2-a_{n-1}^2=a_{2n}$，爲1中取$m+n=2\ell$，且$n-m=0$時之狀況，∴對應方程式亦同1中者，但亦爲間一型$F.S.$係數題群，換言之，4與5爲1中之$m+n$分類成奇或偶之裏子相同，外觀有異之關係式而已。

6. $a_{n+1}^3+a_n^3-a_{n-1}^3=a_{3n}$，對應方程式爲間二型$F.S.$係數題群：
$Ab^3+Bb^2c+Cbc^2+Dc^3-Eb-Fc=0$，大膽推論僅$b=c=\pm 1$方符合。

7. $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{1}{a_{n+2}}+\dfrac{1}{a_n\,a_{n+1}\,a_{n+2}}$可表示成非分數型$a_{n+1}\,a_{n+2}=a_n\,a_{n+3}+1$，與2中爲“互補”現象，對應方程式爲$b^2+bc-c^2=-1$，即與2中者僅常數項異號而已，符合者亦爲定義Ⅰ爲母體之衍生，而首項均落在定義Ⅰ之偶數項數上，但絕無$b\neq c$者符合。

三.找到一新的關係式$a_{n+1}^2-a_{n-1}^2=a_{n-1}\,a_n+a_n\,a_{n+1}$，對應方程式爲$0=0$，
∴解答無條件限制，只要$F.S.$必成立。

陸、參考資料：

一.吳振奎編著，斐波那契數列，初版，台北，九章出版社，243頁，民82年。

二.孫文先、陳碧真編輯，簡明數學百科全書，四版，台北，九章出版社，民71年8月。

三.數學第一冊教師手冊，大同資訊企業股份有限公司，286頁，民88年8月。