

# 臺灣二〇〇三年國際科學展覽會

科 別：數學科

作品名稱：棋子排列的平均值

學 校：台北市立第一女子高級中學

作 者：高典萱、劉懿真

## 作者簡介



(右邊那個)

其實不知道該寫些什麼。

高典萱，台北人。自從上了高二後，每天在課業、專研裡打轉。不敢說自己從小就對數學及自然科學有濃厚的興趣，那太八股了，況且在國中前尚是一無所知。直到開始專題研究之後，才覺得熬夜證明、跟同學、指導老師討論、承受進度壓力，雖有點辛苦但都是非常寶貴的經驗。

我只想實話實說。



我是劉懿真，就讀於北一女中二年級數理實驗班。

求學過程中很幸運碰到許多很照顧我的老師，給我種種的啟發。進高中後參加教育部基礎科學人才培育計畫數學科，讓自己有不同的體驗，受益良多。我的興趣很廣泛，在國樂方面，學習柳琴八年，目前是學校國樂團的一員。也對資訊有興趣，在學校參加資訊專題課程。

對未來的期許，希望能不斷學習、培養更多興趣。

## 摘要

本研究由下述問題開始：將  $n_1$  個黑色棋子和  $n_2$  個白色棋子排成一列，規定第一個棋子必為黑棋；對於每一種排列方法中，同色棋相鄰處記為 1，異色棋相鄰處記為-1，所有 1 和-1 的總和記為  $t_{(n_1, n_2)}$ 。對所有可能的排列方法所算出來的  $t_{(n_1, n_2)}$  值求其平均值，記為  $a_{(n_1, n_2)}$ 。我們先由觀察各種  $n_1$  和  $n_2$  值，得到這平均值的可能公式，隨後並嚴格證明其正確性，證明方法也經過多次精鍊到十分簡潔的方式。以此為基礎，我們並做了各方向的推廣，研究涉及下列各點：

- (一) 利用組合數探討原來的問題。
- (二) 在第一個棋子不限定為黑棋的假設下，求平均值  $a_{(n_1, n_2)}$ 。
- (三) 將棋子由兩種增加到多種。
- (四) 改變棋子排列以及相鄰的方式。

經由研究，我們發現，每一次愈將問題推廣時，愈能找出清晰的概念涵蓋並印證先前的想法。

## ABSTRACT

Our study starts with the following problem. Suppose  $n_1$  black chesses and  $n_2$  white chesses are arranged in a line under the condition that the first chess is black. For any arrangement of these chesses, an adjacent pair of chesses having the same (respectively, different) colors is associated with a value of 1 (respectively, -1). Let  $t_{(n_1, n_2)}$  denote the sum of these values.

The purpose of this problem is to calculate the average value  $a_{(n_1, n_2)}$  of these  $t_{(n_1, n_2)}$  which runs over all possible arrangements of the chesses described above. We begin from observing various values of  $n_1$  and  $n_2$  and find a possible formula for the solution. We then give a rigorous proof for the formula. After some refinements, simple proofs are also established. Based on this, we also make some generalizations. In summary, the research includes the following:

1. Study the problem by using binomial coefficients.
2. Calculate  $a_{(n_1, n_2)}$  when  $t_{(n_1, n_2)}$  runs over all possible arrangements in which the first chess can be black or white.
3. Increase the types of chesses from two to many.
4. Variant the arrangement method of the chesses from a line to other configurations.

During the study, we find that whenever we extend the problem to a more general case, we make the ideas for the original problem clearer.

## 壹、研究題目

取  $n_1$  個黑色棋子、 $n_2$  個白色棋子排成一列，規定第一個棋子必為黑棋。若相鄰兩棋子顏色相同，則定義此二棋關係為 1（稱之為不變號），若相鄰兩棋子顏色不同，則定義此二棋關係為 -1（稱之為變號）。將所有可能排列出來並將其變號及不變號的總和相加，稱此和為總和  $\alpha_{(n_1, n_2)}$ ，再將總和  $\alpha_{(n_1, n_2)}$  除以所有可能，求一平均值  $a_{(n_1, n_2)}$ ，此即為每一排列方法之期望值。

## 貳、研究動機

老師在某次做數論問題時，猜測此性質會成立，認為我們應該可以解出此性質。（此性質原為  $n$  黑  $n$  白， $a_{(n, n)}$  值為 -1，經我們討論後，不僅能很快證明、更發現可再推廣求其一般式。

## 參、研究目的

以組合數之方法，探討此題目之  $a_{(n_1, n_2)}$  值，並推廣、探討此問題之一般性。

## 肆、研究方法及過程

### 一、引理

引理 1：巴斯卡定理  $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$

引理 2： $p, q \in \mathbb{N}, p \leq q, \sum_{t=0}^p t \cdot C_t^p \cdot C_t^q = p \cdot C_p^{p+q-1}$

證明：

由二項式定理

$$(1+x)^q = C_0^q + C_1^q x + C_2^q x^2 + \cdots + C_{q-1}^q x^{q-1} + C_q^q x^q = \sum_{k=0}^q C_k^q x^k \quad \text{—— (1)}$$

$$\frac{d(1+x)^p}{dx} = p(1+x)^{p-1} = C_1^p + 2 \cdot C_2^p x + 3 \cdot C_3^p x^2 + \cdots + (p-1) \cdot C_{p-1}^p \cdot x^{p-2} + p \cdot C_p^p \cdot x^{p-1}$$

$$= \sum_{k=0}^p k \cdot C_k^p \cdot x^{k-1} \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times (2) \rightarrow p(1+x)^{p+q-1} = p[\dots + (C_1^p \cdot C_{q-1}^q + 2C_2^p \cdot C_{q-2}^q + \dots + pC_p^p \cdot C_{q-p}^q)x^{q-1} + \dots]$$

因此  $\sum_{t=0}^p t \cdot C_t^p \cdot C_t^q$  是  $p \cdot (1+x)^{p+q-1}$  的  $x^{q-1}$  項係數

$$\therefore \sum_{t=0}^p t \cdot C_t^p \cdot C_t^q = p \cdot C_p^{p+q-1}$$

引理 3 :  $p, q \in \mathbb{N}, p \leq q, \sum_{t=0}^{p-1} t \cdot C_{t+1}^p \cdot C_t^q = q \cdot C_{q+1}^{p+q-1}$

證明 :

由二項式定理

$$(1+x)^p = C_0^p + C_1^p x + C_2^p x^2 + \dots + C_{p-1}^p x^{p-1} + C_p^p x^p = \sum_{k=0}^p C_k^p x^k \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{d(1+x)^q}{dx} = q(1+x)^{q-1}$$

$$= C_1^q + 2 \cdot C_2^q x + 3 \cdot C_3^q x^2 + \dots + (q-1)C_{q-1}^q x^{q-2} + q \cdot C_q^q x^{q-1}$$

$$= \sum_{k=0}^q k \cdot C_k^q \cdot x^{k-1} \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times (2) \rightarrow$$

$$q(1+x)^{p+q-1} = q[\dots + (C_1^q \cdot C_{p-2}^p + 2C_2^q \cdot C_{p-3}^p + \dots + (p-1)C_{p-1}^q \cdot C_0^p)x^{p-2} + \dots]$$

因此  $\sum_{t=0}^{p-1} t \cdot C_{t+1}^p \cdot C_t^q$  是  $q(1+x)^{p+q-1}$  的  $x^{p-2}$  項係數

$$\therefore \sum_{t=0}^{p-1} t \cdot C_{t+1}^p \cdot C_t^q = q \cdot C_{q+1}^{p+q-1}$$

引理 4 :  $p, q \in \mathbb{N}, p < q, \sum_{t=0}^p t \cdot C_t^p \cdot C_{t+1}^q = p \cdot C_{p+1}^{p+q-1}$

證明 :

由二項式定理

$$(1+x)^q = C_0^q + C_1^q x + C_2^q x^2 + \dots + C_{q-1}^q x^{q-1} + C_q^q x^q = \sum_{k=0}^q C_k^q x^k \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{d(1+x)^p}{dx} = p(1+x)^{p-1}$$

$$= C_1^p + 2 \cdot C_2^p x + 3 \cdot C_3^p x^2 + \dots + (p-1)C_{p-1}^p x^{p-2} + p \cdot C_p^p x^{p-1}$$

$$= \sum_{k=0}^p k \cdot C_k^p \cdot x^{k-1} \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times (2) \rightarrow p(1+x)^{p+q-1} = p[\dots + (C_1^p \cdot C_{q-2}^q + 2C_2^p \cdot C_{q-3}^q + \dots + p \cdot C_p^p \cdot C_{q-p-1}^q)x^{q-2} + \dots]$$

因此  $\sum_{t=0}^p t \cdot C_t^p \cdot C_{t+1}^q$  是  $q(1+x)^{p+q-1}$  的  $x^{q-2}$  項係數

$$\therefore \sum_{t=0}^p t \cdot C_t^p \cdot C_{t+1}^q = p \cdot C_{p+1}^{p+q-1}$$

引理 5 :  $s, p, q \in \mathbb{N}, s \leq p \leq q, \sum_{t=0}^{p-s} C_{t+s}^p \cdot C_t^q = C_{p-s}^{p+q}$

證明 :

由二項式定理

$$(1+x)^p = C_0^p + C_1^p x + C_2^p x^2 + \dots + C_{p-s}^p x^{p-s} + \dots + C_{p-1}^p x^{p-1} + C_p^p x^p = \sum_{k=0}^p C_k^p x^k \quad \text{--- (1)}$$

$$(1+x)^q = C_0^q + C_1^q x + C_2^q x^2 + \dots + C_{p-s}^q x^{p-s} + \dots + C_{q-1}^q x^{q-1} + C_q^q x^q = \sum_{k=0}^q C_k^q x^k \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times (2) \rightarrow$$

$$(1+x)^{p+q} = C_0^{p+q} + \dots + (C_0^q C_{p-s}^p + C_1^q C_{p-s-1}^p + C_2^q C_{p-s-2}^p + \dots + C_{p-s}^q C_0^p)x^{p-s} + \dots$$

因此  $\sum_{t=0}^{p-s} C_{t+s}^p \cdot C_t^q = C_{p-s}^{p+q}$  是  $(1+x)^{p+q}$  的  $x^{p-s}$  項係數

$$\therefore \sum_{t=0}^{p-s} C_{t+s}^p \cdot C_t^q = C_{p-s}^{p+q}$$

引理 6 :  $s, p, q \in \mathbb{N}, s \leq p \leq q, \sum_{t=0}^p C_t^p \cdot C_{t+s}^q = C_{p+s}^{p+q}$

證明 :

由二項式定理

$$(1+x)^p = C_0^p + C_1^p x + C_2^p x^2 + \dots + C_{p-1}^p x^{p-1} + C_p^p x^p = \sum_{k=0}^p C_k^p x^k \quad \text{--- (1)}$$

$$(1+x)^q = C_0^q + C_1^q x + C_2^q x^2 + \dots + C_{p+s}^q x^{p+s} + \dots + C_{q-1}^q x^{q-1} + C_q^q x^q = \sum_{k=0}^q C_k^q x^k \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times (2) \rightarrow$$

$$(1+x)^{p+q} = C_0^{p+q} + \dots + (C_0^p C_{q-s}^q + C_1^p C_{q-s-1}^q + \dots + C_p^p C_{q-s-p}^q)x^{p+s} + \dots + C_{p+q}^{p+q} x^{p+q}$$

因此  $\sum_{t=0}^p C_t^p \cdot C_{t+s}^q$  是  $(1+x)^{p+q}$  的  $x^{p+s}$  項係數

$$\therefore \sum_{t=0}^p C_t^p \cdot C_{t+s}^q = C_{p+s}^{p+q}$$

## 二、觀察及組合數證明

### 1. $n_1 > n_2$ 時

a.  $(n+1)$ 黑  $n$  白

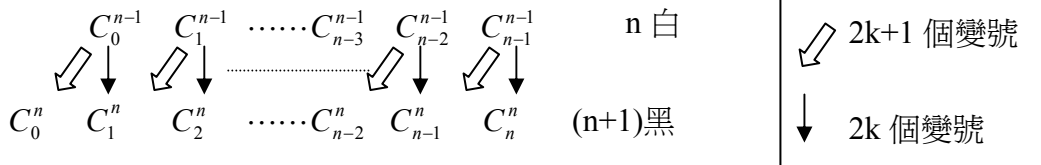
◎ 3 黑 2 白

$$\text{排列方法數} : \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \quad \text{變號數} : 1 \sim 4$$

1 個變號	BW	$H_2^1 \times H_1^1 = C_2^2 \times C_1^1 = 1$	BBBWW	$(-1) + 3 = -2$
2 個變號	BWB	$H_1^2 \times H_1^1 = C_1^2 \times C_0^1 = 2$	BBWWB	$(-2) + 2 = 0$
3 個變號	BWBW	$H_1^2 \times H_0^2 = C_1^2 \times C_0^1 = 2$	⋮	$(-3) + 1 = -2$
4 個變號	BWBWB	$H_0^3 \times H_0^2 = C_0^2 \times C_0^1 = 1$	⋮	$(-4) + 0 = -4$

$$a_{(3,2)} = 1 \times [(-1)+3] + 2 \times [(-2)+2] + 2 \times [(-3)+1] + 1 \times [(-4)+0] / 6 = -1$$

由此，我們觀察到方法數與巴斯卡三角形的對應關係如下：



◎  $(n+1)$  黑  $n$  白證明：

$$\text{排列方法數} : \frac{2n!}{n!n!} = C_n^{2n} \quad \text{變號數} : 1 \sim 2n$$

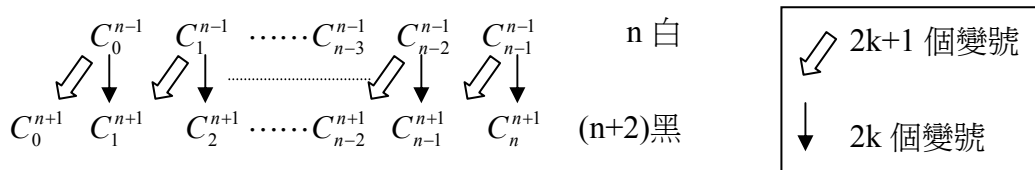
1 個變號	BW	$H_n^1 \times H_{n-1}^1 = C_n^n \times C_{n-1}^{n-1} = C_0^n \times C_0^{n-1}$	$(-1) + [2n - (1)] = 2n - 2$
2 個變號	BWB	$H_{n-1}^2 \times H_{n-1}^1 = C_{n-1}^n \times C_{n-1}^{n-1} = C_1^n \times C_0^{n-1}$	$(-2) + [2n - (2)] = 2n - 4$
3 個變號	BWBW	$H_{n-1}^2 \times H_{n-2}^2 = C_{n-1}^n \times C_{n-2}^{n-1} = C_1^n \times C_1^{n-1}$	$(-3) + [2n - (3)] = 2n - 6$
4 個變號	BWBWB	$H_{n-2}^3 \times H_{n-2}^2 = C_{n-2}^n \times C_{n-2}^{n-1} = C_2^n \times C_1^{n-1}$	$(-4) + [2n - (4)] = 2n - 8$
⋮	⋮	⋮	⋮

$$\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} (2n - 2 - 4k) C_k^{n-1} \cdot C_k^n + \sum_{k=0}^{n-1} (2n - 4 - 4k) C_k^{n-1} \cdot C_{k+1}^n$$

$$\begin{aligned}
&= (2n-2) \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} \cdot C_k^n + (2n-4) \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} \cdot C_{k+1}^n - 4 \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot C_k^{n-1} (C_k^n + C_{k+1}^n) \\
&\quad (\text{由引理 1、引理 6}) \\
&= (2n-2) C_{n-1}^{2n-1} + (2n-4) C_n^{2n-1} - 4 \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot C_k^{n-1} \cdot C_{k+1}^{n+1} \\
&\quad (\text{由引理 4}) \\
&= (4n-6) C_{n-1}^{2n-1} - 4(n-1) C_n^{2n-1} \\
&= (-2) \frac{(2n-1)! \cdot 2n \cdot n}{n!(n-1)! \cdot 2n \cdot n} \\
&= \frac{(-2)n}{2n} C_n^{2n} \\
&= (-1) C_n^{2n}
\end{aligned}$$

$$\therefore a_{(n+1,n)} = (-1) C_n^{2n} / C_n^{2n} = -1$$

b. (n+2)黑 n 白



$$\text{排列方法數} : \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = C_n^{2n+1} \quad \text{變號數} : 1 \sim 2n$$

1 個變號 :	BW	$H_{n+1}^1 \times H_{n-1}^1 = C_{n+1}^{n+1} \times C_{n-1}^{n-1} = C_0^{n+1} \times C_0^{n-1}$	$(-1) + [2n+1 - (1)] = 2n-1$
2 個變號 :	BWB	$H_n^2 \times H_{n-1}^1 = C_n^{n+1} \times C_{n-1}^{n-1} = C_1^{n+1} \times C_0^{n-1}$	$(-2) + [2n+1 - (2)] = 2n-3$
3 個變號 :	BWBW	$H_n^2 \times H_{n-2}^2 = C_n^{n+1} \times C_{n-2}^{n-1} = C_1^{n+1} \times C_1^{n-1}$	$(-3) + [2n+1 - (3)] = 2n-5$
4 個變號 :	BWBWB	$H_{n-1}^3 \times H_{n-2}^2 = C_{n-1}^{n+1} \times C_{n-2}^{n-1} = C_2^{n+1} \times C_1^{n-1}$	$(-4) + [2n+1 - (4)] = 2n-7$
⋮	⋮	⋮	⋮

$$\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} (2n-1-4k) C_k^{n-1} \cdot C_k^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (2n-3-4k) C_k^{n-1} \cdot C_{k+1}^{n+1}$$

$$= (2n-1) \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} \cdot C_k^{n+1} + (2n-3) \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} \cdot C_{k+1}^{n+1} - 4 \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot C_k^{n-1} (C_k^{n+1} + C_{k+1}^{n+1})$$

(由引理 1、引理 6)

$$= (2n-1) C_{n-1}^{2n} + (2n-3) C_n^{2n} - 4 \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot C_k^{n-1} \cdot C_{k+1}^{n+2}$$

(由引理 4)

$$= (2n-1) C_{n-1}^{2n} + (2n-3) C_n^{2n} - 4(n-1) C_n^{2n}$$

$$= (2n-1) C_{n-1}^{2n} + (-2n+1) C_n^{2n}$$

$$= \frac{(2n-1)n}{2n+1} \cdot \frac{(2n)!(2n+1)}{(n+1)!(n-1)!n} + \frac{(-2n+1)(n+1)}{2n+1} \cdot \frac{(2n)!(2n+1)}{n!n!(n+1)}$$

$$= \frac{2n^2 - n - 2n^2 - n + 1}{2n+1} C_n^{2n+1}$$

$$= \frac{-2n+1}{2n+1} C_n^{2n+1}$$

$$\therefore a_{(n+2,n)} = \frac{-2n+1}{2n+1} C_n^{2n+1} / C_n^{2n+1} = \frac{-2n+1}{2n+1}$$

c. 我們猜測  $n+t$  ( $t \in N$ ) 的情況如下表：

黑色個數	白色個數	$a_{(n_1, n_2)}$ 值
n+1	n	$-2n/2n$
n+2	n	$-(2n-1)/2n+1$
n+3	n	$-(2n-4)/2n+2$
n+4	n	$-(2n-9)/2n+3$
⋮	n	⋮
n+t	n	$-[2n-(t-1)^2]/2n+(t-1)$

d.  $n_1 > n_2$  時證明：

$$\text{排列方法數} : \frac{(n_1 + n_2 - 1)!}{(n_1 - 1)! n_2!} = C_{n_2}^{n_1 + n_2 - 1} \quad \text{變號數} : 1 \sim 2n_2$$

1個 變號	BW	$H_{n-1}^1 \times H_{n-1}^1 = C_{n_1-1}^{n_1-1} \times C_{n_2-1}^{n_2-1} = C_0^{n_1-1} \times C_0^{n_2-1}$	$(-1)+[n_1+n_2-1-(1)]=n_1+n_2-3$
2個 變號	BWB	$H_{n_1-2}^2 \times H_{n_2-1}^1 = C_{n_1-2}^{n_1-1} \times C_{n_2-1}^{n_2-1} = C_1^{n_1-1} \times C_0^{n_2-1}$	$(-2)+[n_1+n_2-1-(2)]=n_1+n_2-5$
3個 變號	BWBW	$H_{n_1-2}^2 \times H_{n_2-2}^2 = C_{n_1-2}^{n_1-1} \times C_{n_2-2}^{n_2-1} = C_1^{n_1-1} \times C_1^{n_2-1}$	$(-3)+[n_1+n_2-1-(3)]=n_1+n_2-7$
4個 變號	BWBWB	$H_{n_1-3}^3 \times H_{n_2-2}^2 = C_{n_1-3}^{n_1-1} \times C_{n_2-2}^{n_2-1} = C_2^{n_1-1} \times C_1^{n_2-1}$	$(-4)+[n_1+n_2-1-(4)]=n_1+n_2-9$
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

$$\alpha = \sum_{k=0}^{n_2-1} (n_1 + n_2 - 3 - 4k) C_k^{n_1-1} \cdot C_k^{n_2-1} + \sum_{k=0}^{n_2-1} (n_1 + n_2 - 5 - 4k) C_k^{n_2-1} \cdot C_{k+1}^{n_1-1}$$

(由引理 1、引理 6)

$$= (n_1 + n_2 - 3) \cdot C_{n_2-1}^{n_1+n_2-2} + (n_1 + n_2 - 5) C_{n_2}^{n_1+n_2-2} - 4 \sum_{k=0}^{n_2-1} k \cdot C_k^{n_2-1} \cdot C_{k+1}^{n_1-1}$$

(由引理 4)

$$= (n_1 + n_2 - 3) C_{n_2-1}^{n_1+n_2-2} + (n_1 + n_2 - 5) C_{n_2}^{n_1+n_2-2} - 4(n_2 - 1) C_{n_2}^{n_1+n_2-2}$$

$$= (n_1 + n_2 - 3) C_{n_2-1}^{n_1+n_2-2} + (n_1 - 3n_2 - 1) C_{n_2}^{n_1+n_2-2}$$

$$= \frac{(n_1 + n_2 - 3)n_2}{n_1 + n_2 - 1} C_{n_2}^{n_1+n_2-1} + \frac{(n_1 - 3n_2 - 1)(n_1 - 1)}{n_1 + n_2 - 1} C_{n_2}^{n_1+n_2-1}$$

$$= \frac{(n_1 - n_2)^2 - 2n_1 + 1}{n_1 + n_2 - 1} C_{n_2}^{n_1+n_2-1}$$

$$= \frac{(n_1 - n_2)^2 - n_1 - n_2 + 1 - n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 1} C_{n_2}^{n_1+n_2-1}$$

$$= \left[ (-1) + \frac{(n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2 - 1} \right] C_{n_2}^{n_1+n_2-1}$$

$$\therefore a_{(n_1, n_2)} = \left[ (-1) + \frac{(n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2 - 1} \right] C_{n_2}^{n_1+n_2-1} \Big/ C_{n_2}^{n_1+n_2-1}$$

$$= (-1) + \frac{(n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2 - 1}$$

## 2. $n_1 \leq n_2$ 時

a. (n-1)黑 n 白

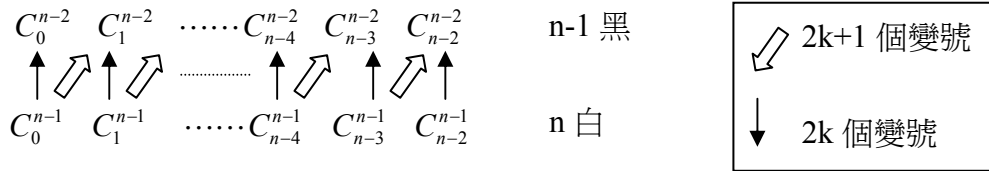
◎ 2 黑 3 白

排列方法數： $\frac{4!}{1! \times 3!} = 4$       變號數：1~3

1 個變號	BW	$H_1^1 \times H_2^1 = C_1^1 \times C_2^2 = 1$	BBWW	$(-1) + 3 = -2$
2 個變號	BWB	$H_0^2 \times H_2^1 = C_0^1 \times C_2^2 = 1$	BWWB	$(-2) + 2 = 0$
3 個變號	BWBW	$H_0^2 \times H_1^2 = C_0^1 \times C_1^2 = 2$	BWBW BWWB	$(-3) + 1 = -2$

$$a_{(2,3)} = 1 \times [(-1) + 3] + 1 \times [(-2) + 2] + 2 \times [(-3) + 1] / 4 = -\frac{2}{4}$$

由此，我們觀察到方法數與巴斯卡三角形的對應關係如下：



◎ (n-1) 黑 n 白證明：

排列方法數： $\frac{(2n-2)!}{(n-2)! \cdot n!} = C_n^{2n-2}$       變號數：1~2n-3

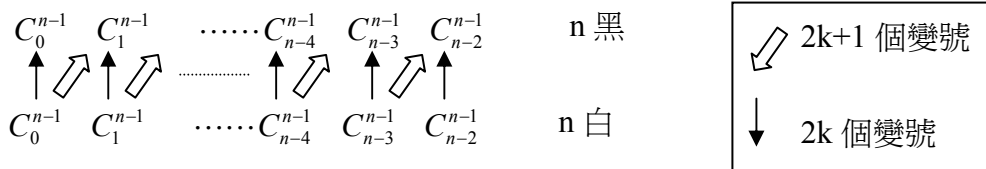
1 個變號	BW	$H_{n-2}^1 \times H_{n-1}^1 = C_{n-2}^{n-2} \times C_{n-1}^{n-1} = C_0^{n-2} \times C_0^{n-1}$	$(-1) + [2n-2-(1)] = 2n-4$
2 個變號	BWB	$H_{n-3}^2 \times H_{n-1}^1 = C_{n-3}^{n-2} \times C_{n-1}^{n-1} = C_1^{n-2} \times C_0^{n-1}$	$(-2) + [2n-2-(2)] = 2n-6$
3 個變號	BWBW	$H_{n-3}^2 \times H_{n-2}^2 = C_{n-3}^{n-2} \times C_{n-2}^{n-1} = C_1^{n-2} \times C_1^{n-1}$	$(-3) + [2n-2-(3)] = 2n-8$
4 個變號	BWBWB	$H_{n-4}^3 \times H_{n-2}^2 = C_{n-4}^{n-2} \times C_{n-2}^{n-1} = C_2^{n-2} \times C_1^{n-1}$	$(-4) + [2n-2-(4)] = 2n-10$
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{k=0}^{n-2} (2n-4-4k) C_k^{n-2} \cdot C_k^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-3} (2n-6-4k) C_{k+1}^{n-2} \cdot C_k^{n-1} \\ &= (2n-4) \sum_{k=0}^{n-2} C_k^{n-2} \cdot C_k^{n-1} + (2n-6) \sum_{k=0}^{n-3} C_{k+1}^{n-2} \cdot C_k^{n-1} - 4 \sum_{k=0}^{n-2} k \cdot C_k^{n-2} \cdot C_k^{n-1} - 4 \sum_{k=0}^{n-3} k \cdot C_{k+1}^{n-2} \cdot C_k^{n-1} \\ &\quad (\text{由引理 2、引理 3、引理 5、引理 6}) \\ &= (2n-4) C_{n-2}^{2n-3} + (2n-6) C_{n-3}^{2n-3} - 4(n-2) C_{n-2}^{2n-4} - 4(n-1) C_n^{2n-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2n-4)C_{n-2}^{2n-3} + (2n-6)C_{n-3}^{2n-3} - \frac{4(n-2)(2n-4)!(n-1)}{(n-3)!(n-2)(n-2)!(n-1)} - 4(n-1)C_n^{2n-4} \\
&= (2n-4)C_{n-2}^{2n-3} + (2n-6)C_{n-3}^{2n-3} - 4(n-1)C_{n-3}^{2n-4} - 4(n-1)C_{n-4}^{2n-4} \\
&= (2n-4)C_{n-2}^{2n-3} + (2n-6)C_{n-3}^{2n-3} - 4(n-1)(C_{n-3}^{2n-4} + C_{n-4}^{2n-4}) \\
&\quad (\text{由引理 1}) \\
&= (2n-4)C_{n-2}^{2n-3} + (2n-6)C_{n-3}^{2n-3} - 4(n-1)C_{n-3}^{2n-3} \\
&= (2n-4)C_{n-2}^{2n-3} + (-2n-2)C_{n-3}^{2n-3} \\
&= (2n-4)\frac{(2n-3)!(2n-2)(n)}{(n-2)!(n-1)!(2n-2)(n)} - (2n+2)\frac{(2n-3)!(2n-2)(n-2)}{(n-3)!(n)!(2n-2)(n-2)} \\
&= \frac{(2n-4)n - (2n+2)(n-2)}{2n-2} C_n^{2n-2} \\
&= \frac{-2n+4}{2n-2} C_n^{2n-2}
\end{aligned}$$

$$\therefore a_{(n-1,n)} = \frac{-2n+4}{2n-2} C_n^{2n-2} / C_n^{2n-2} = \frac{-2n+4}{2n-2}$$

b. n 黑 n 白



排列方法數： $\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} = C_n^{2n-1}$       變號數：1~2n-1

1 個變號	BW	$H_{n-1}^1 \times H_{n-1}^1 = C_{n-1}^{n-1} \times C_{n-1}^{n-1} = C_0^{n-1} \times C_0^{n-1}$	$(-1) + [2n-1-(1)] = 2n-3$
2 個變號	BWB	$H_{n-2}^2 \times H_{n-1}^1 = C_{n-2}^{n-1} \times C_{n-1}^{n-1} = C_1^{n-1} \times C_0^{n-1}$	$(-2) + [2n-1-(2)] = 2n-5$
3 個變號	BWBW	$H_{n-2}^2 \times H_{n-2}^2 = C_{n-2}^{n-1} \times C_{n-2}^{n-1} = C_1^{n-1} \times C_1^{n-1}$	$(-3) + [2n-1-(3)] = 2n-7$
4 個變號	BWBWB	$H_{n-3}^3 \times H_{n-2}^2 = C_{n-3}^{n-1} \times C_{n-2}^{n-1} = C_2^{n-1} \times C_1^{n-1}$	$(-4) + [2n-1-(4)] = 2n-9$
⋮	⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{k=0}^{n-1} (2n-3-4k) \binom{n-1}{k}^2 + \sum_{k=0}^{n-2} (2n-5-4k) \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n-1}{k+1} \\
&= (2n-3) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^2 + (2n-5) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n-1}{k+1} - 4 \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k}^2 - 4 \sum_{k=0}^{n-2} k \cdot \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n-1}{k+1} \\
&\quad (\text{由引理 2、引理 3、引理 5、引理 6}) \\
&= (2n-3) C_{n-1}^{2n-2} + (2n-5) C_{n-2}^{2n-2} - 4(n-1) C_{n-2}^{2n-3} - 4(n-1) C_n^{2n-3} \\
&= (2n-3) C_{n-1}^{2n-2} + (2n-5) C_{n-2}^{2n-2} - 4(n-1) (C_{n-2}^{2n-3} + C_{n-3}^{2n-3}) \\
&\quad (\text{由引理 1}) \\
&= (2n-3) C_{n-1}^{2n-2} + (2n-5) C_{n-2}^{2n-2} - 4(n-1) C_{n-2}^{2n-2} \\
&= (2n-3) C_{n-1}^{2n-2} + (-2n-1) C_{n-2}^{2n-2} \\
&= (2n-3) \frac{(2n-2)!(2n-1)n}{(n-1)!(n-1)!(2n-1)n} + (-2n-1) \frac{(2n-2)!(2n-1)(n-1)}{(n-2)!(n)!(2n-1)(n-1)} \\
&= \frac{n(2n-3) - (2n+1)(n-1)}{2n-1} C_n^{2n-1} \\
&= \frac{-2n+1}{2n-1} C_n^{2n-1} \\
&\quad \therefore a_{(n,n)} = \frac{-2n+1}{2n-1} C_n^{2n-1} / C_n^{2n-1} = \frac{-2n+1}{2n-1} = -1
\end{aligned}$$

c. 我們猜測  $n+t$  ( $t \in \mathbb{Z}$  且  $t < 0$ ) 的情況如下表：

黑色個數	白色個數	$a_{(n_1, n_2)}$ 值
n	n	$\frac{-(2n-1)}{2n-1}$
n-1	n	$\frac{-(2n-4)}{2n-2}$
n-2	n	$\frac{-(2n-9)}{2n-3}$
$\vdots$	n	$\vdots$
n+t	n	$-\frac{[2n-(t-1)^2]}{2n+(t-1)}$

d.  $n_1 \leq n_2$  時證明：

$$\text{排列方法數} : \frac{(n_1 + n_2 - 1)!}{(n_1 - 1)!n_2!} = C_{n_2}^{n_1+n_2-1} \quad \text{變號數} : 1 \sim 2(n_1-1)-1$$

1 個 變號	BW	$H_{n_1-1}^1 \times H_{n_2-1}^1 = C_{n_1-1}^{n_1-1} \times C_{n_2-1}^{n_2-1} = C_0^{n_1-1} \times C_0^{n_2-1}$	$(-1) + [n_1+n_2-1-(1)] = n_1+n_2-3$
2 個 變號	BWB	$H_{n_1-2}^2 \times H_{n_2-1}^1 = C_{n_1-2}^{n_1-1} \times C_{n_2-1}^{n_2-1} = C_1^{n_1-1} \times C_0^{n_2-1}$	$(-2) + [n_1+n_2-1-(2)] = n_1+n_2-5$
3 個 變號	BWBW	$H_{n_1-2}^2 \times H_{n_2-2}^2 = C_{n_1-2}^{n_1-1} \times C_{n_2-2}^{n_2-1} = C_1^{n_1-1} \times C_1^{n_2-1}$	$(-3) + [n_1+n_2-1-(3)] = n_1+n_2-7$
4 個 變號	BWBWB	$H_{n_1-3}^3 \times H_{n_2-2}^2 = C_{n_1-3}^{n_1-1} \times C_{n_2-2}^{n_2-1} = C_2^{n_1-1} \times C_1^{n_2-1}$	$(-4) + [n_1+n_2-1-(4)] = n_1+n_2-9$
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{k=0}^{n_1-1} (n_1 + n_2 - 3 - 4k) C_k^{n_1-1} \cdot C_k^{n_2-1} + \sum_{k=0}^{n_1-2} (n_1 + n_2 - 5 - 4k) C_{k+1}^{n_1-1} \cdot C_k^{n_2-1} \\ &= (n_1 + n_2 - 3) \sum_{k=0}^{n_1-1} C_k^{n_1-1} \cdot C_k^{n_2-1} + (n_1 + n_2 - 5) \sum_{k=0}^{n_1-2} C_{k+1}^{n_1-1} \cdot C_k^{n_2-1} \\ &\quad - 4 \sum_{k=0}^{n_1-1} k \cdot C_k^{n_1-1} \cdot C_k^{n_2-1} - 4 \sum_{k=0}^{n_1-2} k \cdot C_{k+1}^{n_1-1} \cdot C_k^{n_2-1} \\ &\quad (\text{由引理 2、引理 3、引理 5、引理 6}) \\ &= (n_1 + n_2 - 3) C_{n_2-1}^{n_1+n_2-2} + (n_1 + n_2 - 5) C_{n_1-2}^{n_1+n_2-2} - 4(n_1 - 1) C_{n_1-1}^{n_1+n_2-3} - 4(n_2 - 1) C_{n_2}^{n_1+n_2-3} \\ &= (n_1 + n_2 - 3) C_{n_2-1}^{n_1+n_2-2} + (n_1 + n_2 - 5) C_{n_2}^{n_1+n_2-2} - \frac{4(n_1 - 1)(n_1 + n_2 - 3)!(n_2 - 1)}{(n_1 - 1)(n_1 - 2)!(n_2 - 2)!(n_2 - 1)} \\ &\quad - 4(n_2 - 1) C_{n_2}^{n_1+n_2-3} \\ &= (n_1 + n_2 - 3) C_{n_2-1}^{n_1+n_2-2} + (n_1 + n_2 - 5) C_{n_2}^{n_1+n_2-2} - 4(n_2 - 1) C_{n_2-1}^{n_1+n_2-3} - 4(n_2 - 1) C_{n_2}^{n_1+n_2-3} \\ &= (n_1 + n_2 - 3) C_{n_2-1}^{n_1+n_2-2} + (n_1 + n_2 - 5) C_{n_2}^{n_1+n_2-2} - 4(n_2 - 1) (C_{n_2-1}^{n_1+n_2-3} + C_{n_2}^{n_1+n_2-3}) \\ &\quad (\text{由引理 1}) \\ &= (n_1 + n_2 - 3) C_{n_2-1}^{n_1+n_2-2} + (n_1 + n_2 - 5) C_{n_2}^{n_1+n_2-2} - 4(n_2 - 1) C_{n_2}^{n_1+n_2-2} \\ &= (n_1 + n_2 - 3) C_{n_2-1}^{n_1+n_2-2} + (n_1 - 3n_2 - 1) C_{n_1-2}^{n_1+n_2-2} \\ &= \frac{n_2(n_1 + n_2 - 3)}{n_1 + n_2 - 1} C_{n_2}^{n_1+n_2-1} + \frac{(n_1 - 1)(n_1 - 3n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 1} C_{n_2}^{n_1+n_2-1} \\ &= \frac{(n_1 - n_2)^2 - 2n_1 + 1}{n_1 + n_2 - 1} C_{n_2}^{n_1+n_2-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n_1 - n_2)^2 - n_1 - n_2 + 1 - n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 1} C_{n_2}^{n_1+n_2-1}$$

$$= \left[ (-1) + \frac{(n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2 - 1} \right] C_{n_2}^{n_1+n_2-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{(n_1, n_2)} &= \left[ (-1) + \frac{(n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2 - 1} \right] \frac{C_{n_2}^{n_1+n_2-1}}{C_{n_2}^{n_1+n_2-1}} \\ &= (-1) + \frac{(n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2 - 1} \end{aligned}$$

由 1.、2. 得證  $n_1$  黑  $n_2$  白 其  $a_{(n_1, n_2)}$  值為  $(-1) + \frac{(n_1 - n_2 - 1)(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2 - 1}$

### 三、推廣 1：不規定第一個棋子必為黑棋

原題目因為  $n$  黑  $n$  白時，規定第一個棋子為白棋的排列方法數、總和  $\alpha$  皆與黑棋相同，所以並不討論不規定第一個棋子為黑棋之情況。

#### 1. 觀察

◎ 3 黑 2 白

$$\text{排列方法數} : \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

排列 (黑色在前)	總和	排列 (白色在前)	總和
BBBWW	2	WWBBB	2
BBWBW	-2	WBWBB	-2
BBWWB	0	WBBWB	-2
BWBWB	-2	WBBBW	0
BWBWB	-4		
BWWBB	0		

$$\alpha = [2 + (-2) + 0 + (-2) + (-4) + 0 + 2 + (-2) + (-2) + 0] / 10 = \frac{-4}{5}$$

由以上 3 黑 2 白例子，我們發現白色在前的排列可看成黑色在前，只是黑色個數與白色個數交換 ( $n_1$  黑  $n_2$  白  $\Rightarrow$   $n_2$  黑  $n_1$  白)

所以

排列方法數為  $C_{n_2}^{n_1+n_2}$

$$\begin{aligned} a_{(n_1, n_2)} &= \frac{(n_1 - n_2)^2 - 2n_1 + 1}{n_1 + n_2 - 1} C_{n_2}^{n_1+n_2-1} + \frac{(n_2 - n_1)^2 - 2n_2 + 1}{n_1 + n_2 - 1} C_{n_2}^{n_1+n_2-1} \Big/ C_{n_2}^{n_1+n_2} \\ &= \frac{(n_1 - n_2)^2 - 2n_1 + 1}{n_1 + n_2 - 1} \cdot \frac{n_1}{n_1 + n_2} + \frac{(n_2 - n_1)^2 - 2n_2 + 1}{n_1 + n_2 - 1} \cdot \frac{n_2}{n_1 + n_2} \\ &= \frac{(n_1 + n_2)(n_1 - n_2)^2 + (n_1 + n_2) - 2n_1^2 - 2n_2^2}{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2)} \\ &= \frac{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 - n_2)^2 + (n_1 + n_2 - 1) + (n_1 - n_2)^2 + 1 - 2n_1^2 - 2n_2^2}{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2)} \\ &= \frac{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 - n_2)^2 + (n_1 + n_2 - 1) + n_1^2 - 2n_1n_2 + n_2^2 + 1 - 2n_1^2 - 2n_2^2}{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 - n_2)^2 + (n_1 + n_2 - 1) + 1 - n_1^2 - n_2^2 - 2n_1n_2}{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2)} \\
&= \frac{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 - n_2)^2 + (n_1 + n_2 - 1) - [(n_1 + n_2)^2 - 1]}{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2)} \\
&= \frac{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 - n_2)^2 + (n_1 + n_2 - 1) - (n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2 + 1)}{(n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2)} \\
&= \frac{(n_1 - n_2)^2 + 1 - (n_1 + n_2 + 1)}{n_1 + n_2} \\
&= \frac{(n_1 - n_2)^2 - n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\
&= (-1) + \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 + n_2}
\end{aligned}$$

#### 四、證明法二

因爲  $a_{(n_1, n_2)}$  值即爲每一排列方法所產生的平均值，也就是每一排列方法產生之  $\alpha$  值除以排列方法數。而  $\alpha$  值由相鄰的黑棋白棋產生的 +1、-1 個數影響。由此我們又發現若令黑棋爲 +1，白棋爲 -1，則 +1、-1 是由相鄰的黑棋白棋相除得來的，(前項除以後項)。於是我們把題目轉化爲：「 $n_1$  個 1， $n_2$  個 -1 排成一列，將所有可能排列出來，並將每一相鄰的兩個數相除 (前數除以後數)，其值爲 +1 或 -1，計算所有若干個 +1、若干個 -1 的總和，稱此和爲總和  $\alpha$ ，再將總和  $\alpha$  除以排列方法數，求一平均值  $a_{(n_1, n_2)}$ 。此即每一排列方法之期望值。」

##### 1. 觀察

◎ 3 (1) 2 (-1)

$$\text{排列方法數} : \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

排列	總和	排列	總和
1 1 1 -1 -1	$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{-1} + \frac{-1}{-1}$	1 -1 -1 1 1	$\frac{1}{-1} + \frac{-1}{-1} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{1}$
1 1 -1 1 -1	$\frac{1}{1} + \frac{1}{-1} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{-1}$	-1 1 1 1 -1	$\frac{-1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{-1}$
1 1 -1 -1 1	$\frac{1}{1} + \frac{1}{-1} + \frac{-1}{-1} + \frac{-1}{1}$	-1 1 1 -1 1	$\frac{-1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{-1} + \frac{-1}{1}$

1	-1	1	1	-1	$\frac{1}{-1} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{-1}$	-1	1	-1	1	1	$\frac{-1}{1} + \frac{1}{-1} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{1}$
1	-1	1	-1	1	$\frac{1}{-1} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{-1} + \frac{-1}{1}$	-1	-1	1	1	1	$\frac{-1}{-1} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$

$$\alpha_{(3,2)} = \frac{12 \times 1 + 12 \times (-1)}{1} + \frac{12 \times 1 + 4 \times (-1)}{-1}$$

$$= 10 \left[ 3 \times \frac{\frac{(3-1)}{3+2} \times 1 + \frac{2}{3+2} \times (-1)}{1} + 2 \times \frac{\frac{3}{3+2} \times 1 + \frac{(2-1)}{3+2} \times (-1)}{-1} \right] = -8$$

$$\therefore a_{(3,2)} = -8/10 = -\frac{4}{5}$$

由以上例子可發現

由於當  $n_1$  個 1 和  $n_2$  個 -1 排列時，

1 的前面是 1 的機會為  $n_1-1$ ，1 的前面是 -1 的機會為  $n_2$ ，-1 的前面是 1 的機會為  $n_1$ ，-1 的前面是 -1 的機會為  $n_2-1$ 。

所以  $a_{(n_1, n_2)}$  值可表為下式：(f 為排列方法數)

$$\begin{aligned} a_{(n_1, n_2)} &= f \left[ \binom{n_1}{n_1+n_2} \frac{\frac{n_1-1}{n_1+n_2} \times 1 + \frac{n_2}{n_1+n_2} \times (-1)}{1} + \binom{n_2}{n_1+n_2} \frac{\frac{n_1}{n_1+n_2} \times 1 + \frac{n_2-1}{n_1+n_2} \times (-1)}{-1} \right] / f \\ &= \binom{n_1}{n_1+n_2} \frac{\frac{n_1-1}{n_1+n_2} \times 1 + \frac{n_2}{n_1+n_2} \times (-1)}{1} + \binom{n_2}{n_1+n_2} \frac{\frac{n_1}{n_1+n_2} \times 1 + \frac{n_2-1}{n_1+n_2} \times (-1)}{-1} \\ &= \frac{n_1(n_1-1) + (-1)n_1n_2 + (-1)n_2n_1 + n_2(n_2-1)}{n_1+n_2} \\ &= \frac{n_1^2 - n_1 - n_2 - 2n_1n_2 + n_2^2 - n_2}{n_1+n_2} \\ &= (-1) + \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 + n_2} \end{aligned}$$

## 五、推廣 2：增加顏色

### 1. $n_1$ 黑 $n_2$ 白 $n_3$ 紅

由兩個顏色(黑、白)， $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$ ，我們令黑色為 1，白色為  $\omega$ ，紅色為  $\omega^2$ ，即分別為  $x^3=1$  的三個根，則

$$\begin{aligned}
a_{(n_1, n_2, n_3)} &= \frac{f}{f} \left[ n_1 \frac{(n_1-1)1 + n_2\omega + n_3\omega^2}{n_1 + n_2 + n_3} + n_2 \frac{n_1 + (n_2-1)\omega + n_3\omega^2}{\omega(n_1 + n_2 + n_3)} + n_3 \frac{n_1 + n_2\omega + (n_3-1)\omega^2}{\omega^2(n_1 + n_2 + n_3)} \right] \\
&= \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3} \left\{ [n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1) + n_3(n_3-1)] + (n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_1)\omega + (n_1n_3 + n_2n_1 + n_3n_2)\omega^2 \right\} \\
&= \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - n_1 - n_2 - n_3 - n_1n_2 - n_2n_3 - n_3n_1}{n_1 + n_2 + n_3} \\
&= (-1) + \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - n_1n_2 - n_2n_3 - n_3n_1}{n_1 + n_2 + n_3} \\
&= (-1) + \frac{(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_3 - n_1)^2}{2(n_1 + n_2 + n_3)}
\end{aligned}$$

## 2. $n_1$ 黑 $n_2$ 白 $n_3$ 紅 $n_4$ 黃

令  $n_1+n_2+n_3+n_4=s$  ;  $i = \sqrt{-1}$  , 黑色爲 1 , 白色爲  $i$  , 紅色爲  $i^2=-1$  , 黃色爲  $i^3=-i$  , 即分別爲  $x^4=1$  的四個根 , 則

$$\begin{aligned}
a_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} &= \frac{f}{f} \left[ n_1 \frac{(n_1-1)1 + n_2i + n_3i^2 + n_4i^3}{s} + n_2 \frac{n_1 + (n_2-1)i + n_3i^2 + n_4i^3}{is} \right. \\
&\quad \left. + n_3 \frac{n_1 + n_2i + (n_3-1)i^2 + n_4i^3}{i^2s} + n_4 \frac{n_1 + n_2i + n_3i^2 + (n_4-1)i^3}{i^3s} \right] \\
&= \frac{1}{s} \left\{ [n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1) + n_3(n_3-1) + n_4(n_4-1)] + i[n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_1] \right. \\
&\quad \left. + i^2[n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_1 + n_4n_2] + i^3[n_1n_4 + n_2n_1 + n_3n_2 + n_4n_3] \right\} \\
&= (-1) + \frac{1}{s} \left\{ [n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2] + i[n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_1] \right. \\
&\quad \left. + (-1)[2n_1n_3 + 2n_2n_4] - i[n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_1] \right\} \\
&= (-1) + \frac{1}{s} [n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 - 2n_1n_3 - 2n_2n_4] \\
&= (-1) + \frac{(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}
\end{aligned}$$

### 3. $n_1$ 黑 $n_2$ 白 $n_3$ 紅 $n_4$ 黃 $n_5$ 藍

令  $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=s$ ；黑色為 1，白色為  $\omega$ ，紅色為  $\omega^2$ ，黃色為  $\omega^3$ ，藍色為  $\omega^4$ ，即分別為  $x^5=1$  的五個根，則

$$\begin{aligned}
 a_{(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)} &= (-1) + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^5 n_i [n_1 \omega^{1-i} + n_2 \omega^{2-i} + n_3 \omega^{3-i} + n_4 \omega^{4-i} + n_5 \omega^{5-i}] \\
 &= (-1) + \frac{1}{s} \left[ (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2) + (n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_4 + n_4 n_5 + n_5 n_1) \omega \right. \\
 &\quad \left. + (n_1 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_5 + n_4 n_1 + n_5 n_2) \omega^2 + (n_1 n_4 + n_2 n_5 + n_3 n_1 + n_4 n_2 + n_5 n_3) \omega^3 \right. \\
 &\quad \left. + (n_1 n_5 + n_2 n_1 + n_3 n_2 + n_4 n_3 + n_5 n_4) \omega^4 \right] \\
 &= (-1) + \frac{1}{s} \left[ (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2) + (n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_4 + n_4 n_5 + n_5 n_1) (\omega + \omega^4) \right. \\
 &\quad \left. + (n_1 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_5 + n_4 n_1 + n_5 n_2) (\omega^2 + \omega^3) \right] \\
 &= (-1) + \frac{-1}{2s} \left\{ [(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_3 - n_4)^2 + (n_4 - n_5)^2 + (n_5 - n_1)^2] \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right) \right. \\
 &\quad \left. + [(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + (n_3 - n_5)^2 + (n_4 - n_1)^2 + (n_5 - n_2)^2] \left( \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right) \right\} \\
 &= (-1) + \frac{-1}{s} \cdot \frac{1}{2} \left\{ [(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_3 - n_4)^2 + (n_4 - n_5)^2 + (n_5 - n_1)^2] \left[ 2 \cdot \cos \frac{2}{5} \pi \right] \right. \\
 &\quad \left. + [(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + (n_3 - n_5)^2 + (n_4 - n_1)^2 + (n_5 - n_2)^2] \left[ 2 \cdot \cos \frac{4}{5} \pi \right] \right\} \\
 &= (-1) + \frac{-1}{s} \left\{ [(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_3 - n_4)^2 + (n_4 - n_5)^2 + (n_5 - n_1)^2] \left[ \cos \frac{2}{5} \pi \right] \right. \\
 &\quad \left. + [(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + (n_3 - n_5)^2 + (n_4 - n_1)^2 + (n_5 - n_2)^2] \left[ \cos \frac{4}{5} \pi \right] \right\}
 \end{aligned}$$

### 4. $r$ 個顏色

令  $\sum_{i=1}^r n_i = s$ ； $k_i$  色為  $\omega^{i-1}$ ；即分別為  $x^r=1$  的  $r$  個根，則

$$a_{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = (-1) + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r n_i [n_1 \omega^{1-i} + n_2 \omega^{2-i} + \dots + n_r \omega^{r-i}]$$

就  $r$  值之奇偶分兩種情形討論：

(i)  $r=2v+1$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= (-1) + \frac{-1}{2s} \left\{ \left[ (n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_{2v+1} - n_1)^2 \right] \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right) \right. \\
&\quad + \left[ (n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_{2v+1} - n_2)^2 \right] \left( \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right) + \cdots \\
&\quad \left. \cdots + \left[ (n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_{2v+1} - n_v)^2 \right] \left( \omega^v + \frac{1}{\omega^v} \right) \right\} \\
&= (-1) + \frac{-1}{2s} \left\{ \left[ (n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_{2v+1} - n_1)^2 \right] \left( 2 \cos \frac{2\pi}{2v+1} \right) \right. \\
&\quad + \left[ (n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_{2v+1} - n_2)^2 \right] \left( 2 \cos \frac{4\pi}{2v+1} \right) + \cdots \\
&\quad \left. \cdots + \left[ (n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_{2v+1} - n_v)^2 \right] \left( 2 \cos \frac{2v\pi}{2v+1} \right) \right\} \\
&= (-1) + \frac{-1}{s} \left\{ \left[ (n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_{2v+1} - n_1)^2 \right] \left( \cos \frac{2\pi}{2v+1} \right) \right. \\
&\quad + \left[ (n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_{2v+1} - n_2)^2 \right] \left( \cos \frac{4\pi}{2v+1} \right) + \cdots \\
&\quad \left. \cdots + \left[ (n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_{2v+1} - n_v)^2 \right] \left( \cos \frac{2v\pi}{2v+1} \right) \right\} \\
&= (-1) + \frac{-1}{s} \sum_{j=1}^v \cos \frac{2j\pi}{2v+1} \left[ (n_1 - n_{1+j})^2 + (n_2 - n_{2+j})^2 + \cdots + (n_{2v+1} - n_j)^2 \right], v \geq 1 \\
&= (-1) + \frac{-1}{s} \sum_{i=1}^{2v+1} \sum_{j=1}^v \cos \frac{2j\pi}{2v+1} (n_i - n_{i+j(\text{mod } 2v+1)})^2, v \geq 1 \\
&= (-1) + \frac{-1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{2j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, r \geq 3
\end{aligned}$$

(ii)  $r=2v$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= (-1) + \frac{-1}{2s} \left\{ \left[ (n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_{2v} - n_1)^2 \right] \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right) \right. \\
&\quad + \left[ (n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_{2v} - n_2)^2 \right] \left( \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right) + \cdots \\
&\quad \left. \cdots + \left[ (n_1 - n_v)^2 + (n_2 - n_{v+1})^2 + \cdots + (n_{2v} - n_{v-1})^2 \right] \left( \omega^{v-1} + \frac{1}{\omega^{v-1}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ (n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_{2v} - n_v)^2 \right] \left( \omega^v \right) \\
= & (-1) + \frac{-1}{2s} \left\{ \left[ (n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_{2v} - n_1)^2 \right] \left( 2 \cos \frac{2\pi}{2v} \right) \right. \\
& + \left[ (n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_{2v} - n_2)^2 \right] \left( 2 \cos \frac{4\pi}{2v} \right) + \cdots \\
& \cdots + \left[ (n_1 - n_v)^2 + (n_2 - n_v)^2 + \cdots + (n_{2v} - n_{v-1})^2 \right] \left( 2 \cos \frac{2(v-1)\pi}{2v} \right) \\
& \left. + \left[ (n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_{2v} - n_v)^2 \right] \left( \cos \frac{2v\pi}{2v} \right) \right\} \\
= & (-1) + \frac{1}{2s} \sum_{i=1}^{2v} (n_i - n_{i+v(\bmod 2v)})^2 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{2v} \sum_{j=1}^{v-1} \cos \frac{2j\pi}{2v} (n_i - n_{i+j(\bmod 2v)})^2, v \geq 2 \\
= & (-1) + \frac{1}{2s} \sum_{i=1}^r \left( n_i - n_{i+\frac{r}{2}(\bmod r)} \right)^2 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r}{2}-1} \cos \frac{2j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\bmod r)})^2, r \geq 4
\end{aligned}$$

## 六、推廣 3：二維排列

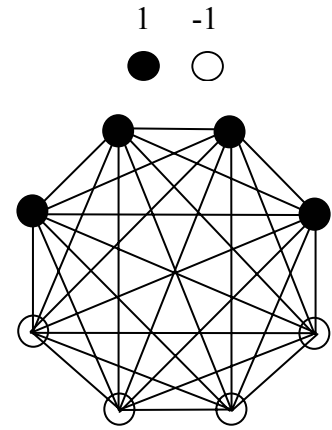
### 1. n 黑 n 白

如右圖，將若干個黑棋(+1)、白棋(-1)任意放置於平面上。並將每一個棋子與其餘所有棋子相除，即考慮兩兩棋子間的關係，此稱之為「路」。

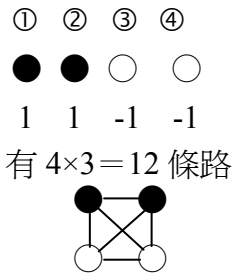
以此方式定義二維排列的原因為，當排列情形拓展至平面情形時，若欲取矩形排列而考慮其與上下左右棋子關係時，會屬於上述定義範圍下的一種特例。

舉簡單的例子：若由平面推回直線的想法，就是利用右上圖，以「一筆劃」把所有棋子串聯起來。

以下先由二至三個例子觀察，再探討其一般性。



#### a. 2(1) 2(-1)



前	①	②	③	④
後	①	1	-1	-1
	②	1	-1	-1
	③	-1	-1	1
	④	-1	-1	1

-4

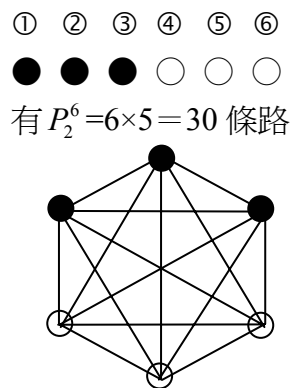
	數	值	種
● → ●	1	1	2
● → ○	2	-1	2
○ → ○	1	1	2
○ → ●	2	-1	2
Sum = $1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 = -4$			

(上左表格：示意圖。

上中表格：考慮每兩兩棋子關係，以前項除以後項(縱除以橫)。

上右表格：以第一行為例，若從黑棋出發(前項)，欲使後項也為黑棋，可能「數」是 1，前項除以後項的「值」為 1，此種情形個數為「種」。

#### b. 3(1) 3(-1)



前	①	②	③	④	⑤	⑥
後	①	1	1	-1	-1	-1
	②	1	1	-1	-1	-1
	③	1	1	-1	-1	-1
	④	-1	-1	-1	1	1
	⑤	-1	-1	-1	1	1
	⑥	-1	-1	-1	1	1

-6

	數	值	種
● → ●	2	1	3
● → ○	3	-1	3
○ → ○	2	1	3
○ → ●	3	-1	3
Su = -			
m 6			

#### c. n(1) n(-1)

有  $P_2^n = n(n-1)$  條路

	數	值	種
● → ●	(n-1)	1	n
● → ○	n	-1	n
○ → ○	(n-1)	1	n
○ → ●	n	-1	n
Sum = -2n			

## 2. $n_1$ 黑 $n_2$ 白

使黑白棋子個數不固定：

a. 1(1) 2(-1) , 有  $P_2^3 = 6$  條路

	①	②	③
	●	○	○
前	①	②	③
後	①	-1	-1
	②	-1	1
	③	-1	-1

-2

	數	值	種
● → ●	0	1	1
● → ○	2	-1	1
○ → ○	1	1	2
○ → ●	1	-1	2
Sum	=-2		

b. 2(1) 1(-1) , 有  $P_2^3 = 6$  條路

	①	②	③
	●	●	○
前	①	②	③
後	①	1	-1
	②	1	-1
	③	-1	-1

-2

	數	值	種
● → ●	1	1	2
● → ○	1	-1	2
○ → ○	0	1	1
○ → ●	2	-1	1
Sum	=-2		

c.  $n_1(1) n_2(-1)$  , 有  $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2 - 1)$  條路

	數	值	種
● → ●	$(n_1 - 1)$	1	$n_1$
● → ○	$n_2$	-1	$n_1$
○ → ○	$(n_2 - 1)$	1	$n_2$
○ → ●	$n_1$	-1	$n_2$
Sum	$= n_1(n_1 - 1) + n_2(n_2 - 1) - n_1 n_2$		

\*  $n_1$  黑  $n_2$  白推回

①  $n_1 = n_2 = n$  :

$$\text{Sum} = n(n-1) + n(n-1) - 2n^2 = -2n$$

② 直線 :

$$\begin{aligned} & [n_1(n_1 - 1) + n_2(n_2 - 1) - 2n_1 n_2] \times \frac{(n_1 + n_2 - 1)}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)} \\ &= \frac{(n_1 - 1)n_1 + n_2(n_2 - 1) - 2n_1 n_2}{n_1 + n_2} \end{aligned}$$

直線中每一排列的總數

平面中所有路徑的總數

### 3. $n_1$ 黑 $n_2$ 白 $n_3$ 紅

由三個顏色的排列(黑、白、紅)，我們令黑色為 1，白色為  $\omega$ ，紅色為  $\omega^2$ ，即分別為  $x^3=1$  的三個根。

$k_1$	$k_2$	$k_3$
●	○	●
1	$\omega$	$\omega^2$

a.  $2(k_1) 1(k_2) 1(k_3)$ ，有  $4 \times 3 = 12$

	①	②	③	④
$k_1$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	
1	1	$\omega$	$\omega^2$	
前 ①	1	$\omega^2$	$\omega$	
②	1	$\omega^2$	$\omega$	
③	$\omega$	$\omega$	$\omega^2$	
④	$\omega^2$	$\omega^2$	$\omega$	
後				

		數	值	種
$k_1$	$\rightarrow k_1$	1	1	2
$k_1$	$\rightarrow k_2$	1	$\omega^2$	2
$k_1$	$\rightarrow k_3$	1	$\omega$	2
$k_2$	$\rightarrow k_1$	2	$\omega$	1
$k_2$	$\rightarrow k_2$	0	1	1
$k_2$	$\rightarrow k_3$	1	$\omega^2$	1
$k_3$	$\rightarrow k_1$	2	$\omega^2$	1
$k_3$	$\rightarrow k_2$	1	$\omega$	1
$k_3$	$\rightarrow k_3$	0	1	1
		Sum=2+5 $\omega$ +5 $\omega^2$		

b.  $1(k_1) 2(k_2) 1(k_3)$ ，有  $4 \times 3 = 12$

	①	②	③	④
$k_1$	$k_2$	$k_2$	$k_3$	
1	$\omega$	$\omega$	$\omega^2$	
前 ①	$\omega^2$	$\omega^2$	$\omega$	
②	$\omega$	1	$\omega^2$	
③	$\omega$	1	$\omega^2$	
④	$\omega^2$	$\omega$	$\omega$	
後				

		數	值	種
$k_1$	$\rightarrow k_1$	0	1	2
$k_1$	$\rightarrow k_2$	2	$\omega^2$	2
$k_1$	$\rightarrow k_3$	1	$\omega$	2
$k_2$	$\rightarrow k_1$	1	$\omega$	1
$k_2$	$\rightarrow k_2$	1	1	1
$k_2$	$\rightarrow k_3$	1	$\omega^2$	1
$k_3$	$\rightarrow k_1$	1	$\omega^2$	1
$k_3$	$\rightarrow k_2$	2	$\omega$	1
$k_3$	$\rightarrow k_3$	0	1	1
		Sum=2+5 $\omega$ +5 $\omega^2$		

c.  $n_1(k_1)n_2(k_2)n_3(k_3)$ 有 $(n_1+n_2+n_3)(n_1+n_2+n_3-1)$

		數	值	種	
$k_1$	$\rightarrow$	$k_1$	$(n_1-1)$	1	$n_1$
$k_1$	$\rightarrow$	$k_2$	$n_2$	$\omega^2$	$n_1$
$k_1$	$\rightarrow$	$k_3$	$n_3$	$\omega$	$n_1$
$k_2$	$\rightarrow$	$k_1$	$n_1$	$\omega$	$n_2$
$k_2$	$\rightarrow$	$k_2$	$(n_2-1)$	1	$n_2$
$k_2$	$\rightarrow$	$k_3$	$n_3$	$\omega^2$	$n_2$
$k_3$	$\rightarrow$	$k_1$	$n_1$	$\omega^2$	$n_3$
$k_3$	$\rightarrow$	$k_2$	$n_2$	$\omega$	$n_3$
$k_3$	$\rightarrow$	$k_3$	$(n_3-1)$	1	$n_3$

$$1 : n_1(n_1-1)+n_2(n_2-1)+n_3(n_3-1)$$

$$\omega : n_3n_1+n_1n_2+n_2n_3$$

$$\omega^2 : n_2n_1+n_3n_2+n_1n_3$$

$$\text{Sum} = n_1(n_1-1)+n_2(n_2-1)+n_3(n_3-1)-(n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1)$$

\*  $n_1$  黑  $n_2$  白  $n_3$  紅推回直線：

$$\begin{aligned} \text{Sum} &\times \frac{(n_1+n_2+n_3-1)}{(n_1+n_2+n_3)(n_1+n_2+n_3-1)} \\ &= \frac{n_1(n_1-1)+n_2(n_2-1)+n_3(n_3-1)-(n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1)}{n_1+n_2+n_3} \end{aligned}$$

#### 4. $n_1$ 黑 $n_2$ 白 $n_3$ 紅 $n_4$ 黃

令  $n_1+n_2+n_3+n_4=s$ ；黑色為 1，白色為  $i$ ，紅色為  $i^2=-1$ ，黃色為  $i^3=-i$ ，即分別為  $x^4=1$  的四個根。

	數	值	種
$k_1 \rightarrow k_1$	$(n_1-1)$	1	$n_1$
$k_1 \rightarrow k_2$	$n_2$	$\omega^3$	$n_1$
$k_1 \rightarrow k_3$	$n_3$	$\omega^2$	$n_1$
$k_1 \rightarrow k_4$	$n_4$	$\omega$	$n_1$
$k_2 \rightarrow k_1$	$n_1$	$\omega$	$n_2$
$k_2 \rightarrow k_2$	$(n_2-1)$	1	$n_2$
$k_2 \rightarrow k_3$	$n_3$	$\omega^3$	$n_2$
$k_2 \rightarrow k_4$	$n_4$	$\omega^2$	$n_2$
$k_3 \rightarrow k_1$	$n_1$	$\omega^2$	$n_3$
$k_3 \rightarrow k_2$	$n_2$	$\omega$	$n_3$
$k_3 \rightarrow k_3$	$(n_3-1)$	1	$n_3$
$k_3 \rightarrow k_4$	$n_4$	$\omega^3$	$n_3$
$k_4 \rightarrow k_1$	$n_1$	$\omega^3$	$n_4$
$k_4 \rightarrow k_2$	$n_2$	$\omega^2$	$n_4$
$k_4 \rightarrow k_3$	$n_3$	$\omega$	$n_4$
$k_4 \rightarrow k_4$	$(n_4-1)$	1	$n_4$

$$\text{Sum} \leftarrow \left. \begin{array}{l} r : n_1(n_1-1)+n_2(n_2-1)+n_3(n_3-1)+n_4(n_4-1) \\ i : n_4n_1+n_1n_2+n_2n_3+n_3n_4 \\ i^2 : n_3n_1+n_4n_2+n_1n_3+n_2n_4 \\ i^3 : n_2n_1+n_3n_2+n_4n_3+n_1n_4 \end{array} \right\} \Rightarrow 0$$

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 n_i n_{i-1} \\ \sum_{i=1}^4 n_i n[(i+1) \bmod 4] \\ \sum_{i=1}^4 n_i n[(i+2) \bmod 4] \\ \sum_{i=1}^4 n_i n[(i+3) \bmod 4] \end{array}$$

---


$$\text{Sum} = n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1) + n_3(n_3-1) + n_4(n_4-1) - (n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_1 + n_4n_2)$$

$$\text{直線} = \text{Sum} / n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$

#### 5. $n_1$ 黑 $n_2$ 白 $n_3$ 紅 $n_4$ 黃 $n_5$ 藍

令  $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=s$ ；黑色為 1，白色為  $\omega$ ，紅色為  $\omega^2$ ，黃色為  $\omega^3$ ，藍色為  $\omega^4$ ，即分別為  $x^5=1$  的五個根。

$$\begin{array}{l} 1 : n_1(n_1-1)+n_2(n_2-1)+n_3(n_3-1)+n_4(n_4-1)+n_5(n_5-1) \\ \omega : n_1n_2+n_2n_3+n_3n_4+n_4n_5+n_5n_1 \\ \omega^2 : n_1n_3+n_2n_4+n_3n_5+n_4n_1+n_5n_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \sum_{i=1}^5 n_i n_{i-1} \\ \sum_{i=1}^5 n_i n[(i+1) \bmod 5] \\ \sum_{i=1}^5 n_i n[(i+2) \bmod 5] \end{array}$$

$$\omega^3 : n_1n_4+n_2n_5+n_3n_1+n_4n_2+n_5n_3 \qquad \sum_{i=1}^5 n_i n_{[(i+3) \bmod 5]}$$

$$\omega^4 : n_1n_5+n_2n_1+n_3n_2+n_4n_3+n_5n_4 \qquad \sum_{i=1}^5 n_i n_{[(i+4) \bmod 5]}$$

$$\text{Sum} = \sum_{i=1}^5 n_i n_{i-1} + \sum_{i=1}^5 n_i n_{[(i+1) \bmod 5]} + \sum_{i=1}^5 n_i n_{[(i+2) \bmod 5]} + \sum_{i=1}^5 n_i n_{[(i+3) \bmod 5]} + \sum_{i=1}^5 n_i n_{[(i+4) \bmod 5]}$$

### 6. r 個顏色

n 個數，r 顏色  $\rightarrow n_1(k_1)n_2(k_2)n_3(k_3)\dots, n_r(k_r)$

$k_i$  色為  $\omega^{-1}$ ；即分別為  $x^r=1$  的 r 個根。

				數	值	種	
第一類 (值=1)	$k_1$	$\rightarrow$	$k_1$	$(n_1-1)$	1	$n_1$	$\sum_{i=1}^r n_i n_{[(i+0) \bmod r]}$
		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$k_r$	$\rightarrow$	$k_r$	$(n_r-1)$	1	$n_r$	
第二類 (值= $\omega^{r-1}$ )	$k_1$	$\rightarrow$	$k_2$	$n_2$	$\omega^{k-1}$	$n_1$	$\sum_{i=1}^r n_i n_{[(i+1) \bmod r]}$
		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$k_r$	$\rightarrow$	$k_1$	$n_1$	$\omega^{k-1}$	$n_r$	
第三類 (值= $\omega^{r-2}$ )	$k_1$	$\rightarrow$	$k_3$	$n_3$	$\omega^{k-2}$	$n_1$	$\sum_{i=1}^r n_i n_{[(i+2) \bmod r]}$
		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$k_r$	$\rightarrow$	$k_2$	$n_2$	$\omega^{k-2}$	$n_r$	
$\vdots$							
第 r 類 (值= $\omega$ )	$k_1$	$\rightarrow$	$k_r$	$n_r$	$\omega$	$n_1$	$\sum_{i=1}^r n_i n_{[(i+r-1) \bmod r]}$
		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$k_r$	$\rightarrow$	$k_{r-1}$	$n_{r-1}$	$\omega$	$n_r$	
$\text{Sum} = \sum_{i=1}^r n_i n_{[(i+0) \bmod r]} + \sum_{i=1}^r n_i n_{[(i+1) \bmod r]} + \sum_{i=1}^r n_i n_{[(i+2) \bmod r]} + \dots + \sum_{i=1}^r n_i n_{[(i+r-1) \bmod r]}$							

## 七、推廣 4：變異數

### 1. n 黑 n 白

$$a = -1$$

$$\begin{aligned} Var &= \frac{n}{2n} \left[ (1-a)^2(n-1) + (-1-a)^2 n \right] + \frac{n}{2n} \left[ (1-a)^2(n-1) + (-1-a)^2 n \right] \\ &= \left[ (1-a)^2(n-1) + (-1-a)^2 n \right] \\ &= 2^2(n-1) + 0^2 n \\ &= 4n - 4 \end{aligned}$$

### 2. n<sub>1</sub> 黑 n<sub>2</sub> 白

$$\text{令 } a = -1 + t \quad t = \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$\begin{aligned} Var &= \frac{n_1}{n_1 + n_2} \left[ (1-a)^2(n_1-1) + (-1-a)^2 n_2 \right] + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \left[ (1-a)^2(n_2-1) + (-1-a)^2 n_1 \right] \\ &= \frac{n_1}{n_1 + n_2} \left[ (n_1 + n_2 - 1)t^2 - 4(n_1 - 1)t + 4(n_1 - 1) \right] \\ &\quad + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \left[ (n_1 + n_2 - 1)t^2 - 4(n_2 - 1)t + 4(n_2 - 1) \right] \\ &= (n_1 + n_2 - 1)t^2 + 4t - \frac{4t(n_1^2 + n_2^2)}{n_1 + n_2} + \frac{4(n_1^2 + n_2^2)}{n_1 + n_2} - 4 \\ &= \left[ 4 \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 + n_2} - 4 \right] + (n_1 + n_2 - 1)t^2 + 4t \left( 1 - \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 + n_2} \right) \\ &= \left[ 4 \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 + n_2} - 4 \right] + t \left[ (n_1 + n_2 - 1)t + 4 \left( 1 - \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 + n_2} \right) \right] \\ &= \left[ 4 \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 + n_2} - 4 \right] + \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 + n_2} \left[ (n_1 + n_2 - 1) \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 + n_2} + 4 \left( 1 - \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 + n_2} \right) \right] \end{aligned}$$

### 3. n 黑 n 白 n 紅 n 黃.....(r 個顏色)

$$\text{令 } a = -1 \quad s = r \cdot n$$

$$\begin{aligned} Var &= \frac{n}{s} \left[ (\omega - a)^2 \cdot n + (\omega^2 - a)^2 \cdot n + (\omega^3 - a)^2 + \dots + (\omega^{r-1} - a)^2 + (1-a)^2 \cdot (n-1) \right] \times r \\ &= (1 + \omega)^2 \cdot n + (1 + \omega^2)^2 \cdot n + (1 + \omega^3)^2 \cdot n + \dots + (1 + \omega^{r-1})^2 \cdot n + 4(n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \cdot \left[ (1 + \omega)^2 + (1 + \omega^2)^2 + (1 + \omega^3)^2 + \dots + (1 + \omega^{r-1})^2 \right] + 4n - 4 \\
&= n \cdot \left[ (r-1) \cdot 1 + 2(\omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{r-1}) + (\omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \dots + \omega^{2r-2}) \right] + 4n - 4 \\
&= n \cdot \left[ r-1-2 + (\omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \dots + \omega^{2r-2}) \right] + 4n - 4 \\
&= n \cdot \left[ r + (1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \dots + \omega^{2r-2}) \right] - 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{令 } f(x) &= 1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2r-2} = \frac{x^{2r-1}-1}{x-1} \\
f(\omega) &= 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\dots+\omega^{2r-2} \\
f(-\omega) &= 1-\omega+\omega^2-\omega^3+\dots+\omega^{2r-2} \\
\Rightarrow f(\omega) + f(-\omega) &= 2(1+\omega^2+\omega^4+\dots+\omega^{2r-2}) \\
2(1+\omega^2+\omega^4+\dots+\omega^{2r-2}) &= \frac{\omega^{2r-1}-1}{\omega-1} + \frac{-\omega^{2r-1}-1}{-\omega-1} \\
&= \frac{(\omega+1)\left(\frac{1}{\omega}-1\right) + (\omega-1)\left(\frac{1}{\omega}+1\right)}{\omega^2-1} \\
&= 0 \\
\therefore \text{Var} &= rn - 4
\end{aligned}$$

#### 4. $n_1$ 黑 $n_2$ 白 $n_3$ 紅

$$\text{令 } a = -1 + t \quad t = \frac{(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_3 - n_1)^2}{2(n_1 + n_2 + n_3)}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var} &= \frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3} \left[ (1-a)^2(n_1-1) + (\omega-a)^2 \cdot n_3 + (\omega^2-a)^2 \cdot n_2 \right] \\
&\quad + \frac{n_2}{n_1 + n_2 + n_3} \left[ (1-a)^2(n_2-1) + (\omega-a)^2 \cdot n_1 + (\omega^2-a)^2 \cdot n_3 \right] \\
&\quad + \frac{n_3}{n_1 + n_2 + n_3} \left[ (1-a)^2(n_3-1) + (\omega-a)^2 \cdot n_2 + (\omega^2-a)^2 \cdot n_1 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ast (1-a)^2(n_1-1) + (\omega-a)^2 \cdot n_3 + (\omega^2-a)^2 \cdot n_2 \\
&= (t-2)^2(n_1-1) + [t-(1+\omega)]^2 \cdot n_3 + [t-(1+\omega^2)]^2 \cdot n_2 \\
&= (t^2 - 4t + 4)^2(n_1-1) + n_2(t+\omega)^2 + n_3(t+\omega^2)^2 \\
&= (n_1 + n_2 + n_3 - 1)t^2 + (-4n_1 + 4 + 2n_2\omega + 2n_3\omega^2)t + (4n_1 - 4 + n_2\omega^2 + n_3\omega) \\
&= (n_1 + n_2 + n_3 - 1)t^2 + (-4n_1 + 4)t + (4n_1 - 4) + (2n_2t + n_3)\omega + (2n_3t + n_2)\omega^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore Var &= \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3} \left\{ n_1 \left[ (n_1 + n_2 + n_3 - 1)t^2 + (-4n_1 + 4)t + (4n_1 - 4) + (2n_2t + n_3)\omega \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (2n_3t + n_2)\omega^2 \right] + n_2 \left[ (n_1 + n_2 + n_3 - 1)t^2 + (-4n_2 + 4)t + (4n_2 - 4) + (2n_3t + n_1)\omega \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (2n_1t + n_3)\omega^2 \right] + n_3 \left[ (n_1 + n_2 + n_3 - 1)t^2 + (-4n_3 + 4)t + (4n_3 - 4) + (2n_1t + n_2)\omega \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (2n_2t + n_1)\omega^2 \right] \right\} \\
&= (n_1 + n_2 + n_3 - 1)t^2 + 4t - 4 + \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3} \left[ -4(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)t + 4(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \right. \\
&\quad \left. + (2n_1n_2t + 2n_2n_3t + 2n_3n_1t + n_1n_3 + n_2n_1 + n_3n_2)\omega \right. \\
&\quad \left. + (2n_1n_2t + 2n_2n_3t + 2n_3n_1t + n_1n_3 + n_2n_1 + n_3n_2)\omega^2 \right] \\
&= (n_1 + n_2 + n_3 - 1)t^2 + 4t - 4 + \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3} \left[ (-4n_1^2 - 4n_2^2 - 4n_3^2 - 2n_1n_2 - 2n_2n_3 - 2n_3n_1) \cdot t \right. \\
&\quad \left. + (4n_1^2 + 4n_2^2 + 4n_3^2 - n_1n_2 - n_2n_3 - n_3n_1) \right] \\
&= (n_1 + n_2 + n_3 - 1)t^2 + 4t - 4 + \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3} \left\{ -2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \cdot t - (n_1 + n_2 + n_3) \cdot t \right. \\
&\quad \left. + 3(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + \frac{1}{2} \left[ (n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_3 - n_1)^2 \right] \right\} \\
&= \left[ 3 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 + n_2 + n_3} - 4 \right] + (n_1 + n_2 + n_3 - 1)t^2 + \left[ 4 - (n_1 + n_2 + n_3) - 2 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 + n_2 + n_3} \right] t \\
&\quad + \frac{(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_3 - n_1)^2}{2(n_1 + n_2 + n_3)} \\
&= \left[ 3 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 + n_2 + n_3} - 4 \right] + t \left[ (n_1 + n_2 + n_3 - 1)t - (n_1 + n_2 + n_3) - 2 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 + n_2 + n_3} + 5 \right] \\
&= \left[ 3 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 + n_2 + n_3} - 4 \right] + \frac{(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_3 - n_1)^2}{2(n_1 + n_2 + n_3)} \left[ - (n_1 + n_2 + n_3) \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 + n_2 + n_3} + 5 + (n_1 + n_2 + n_3 - 1) \frac{(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_3 - n_1)^2}{2(n_1 + n_2 + n_3)} \right]
\end{aligned}$$

5.  $n_1$  黑  $n_2$  白  $n_3$  紅  $n_4$  黃

$$\text{令 } s = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \quad a = -1 + t \quad t = \frac{(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2}{s}$$

$$\begin{aligned} Var &= \frac{n_1}{s} \left[ (1-a)^2 (n_1 - 1) + (i^3 - a)^2 n_2 + (i^2 - a)^2 n_3 + (i - a)^2 n_4 \right] \\ &+ \frac{n_2}{s} \left[ (1-a)^2 (n_2 - 1) + (i^3 - a)^2 n_3 + (i^2 - a)^2 n_4 + (i - a)^2 n_1 \right] \\ &+ \frac{n_3}{s} \left[ (1-a)^2 (n_3 - 1) + (i^3 - a)^2 n_4 + (i^2 - a)^2 n_1 + (i - a)^2 n_2 \right] \\ &+ \frac{n_4}{s} \left[ (1-a)^2 (n_4 - 1) + (i^3 - a)^2 n_1 + (i^2 - a)^2 n_2 + (i - a)^2 n_3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times & (1-a)^2 (n_1 - 1) + (i^3 - a)^2 n_2 + (i^2 - a)^2 n_3 + (i - a)^2 n_4 \\ &= (t-2)^2 (n_1 - 1) + [t - (1-i)]^2 n_2 + n_3 t^2 + [t - (1+i)]^2 n_4 \\ &= (n_1 - 1)(t^2 - 4t + 4) + n_2 [t^2 - 2(1-i)t + (-2i)] + n_3 t^2 + n_4 [t^2 - 2(1+i)t + 2i] \\ &= (s-1)t^2 + [-4n_1 - 2n_2 - 2n_4 - 4 + 2i(n_2 - n_4)]t + [4n_1 - 4 + 2i(-n_2 + n_4)] \\ &= (s-1)t^2 + (-4n_1 - 2n_2 - 2n_4 - 4)t + (4n_1 - 4) + 2i(n_2 - n_4)(t-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore Var &= \frac{n_1}{s} \left[ (s-1)t^2 + (-4n_1 - 2n_2 - 2n_4 - 4)t + (4n_1 - 4) + 2i(n_2 - n_4)(t-1) \right] \\ &+ \frac{n_2}{s} \left[ (s-1)t^2 + (-4n_2 - 2n_3 - 2n_1 - 4)t + (4n_2 - 4) + 2i(n_3 - n_1)(t-1) \right] \\ &+ \frac{n_3}{s} \left[ (s-1)t^2 + (-4n_3 - 2n_2 - 2n_4 - 4)t + (4n_3 - 4) + 2i(n_4 - n_2)(t-1) \right] \\ &+ \frac{n_4}{s} \left[ (s-1)t^2 + (-4n_4 - 2n_1 - 2n_3 - 4)t + (4n_4 - 4) + 2i(n_1 - n_3)(t-1) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (s-1)t^2 - 4t - 4 + \frac{n_1}{s} \left[ (-4n_1 - 2n_2 - 2n_4)t + 4n_1 + 2i(n_2 - n_4)(t-1) \right] \\ &+ \frac{n_2}{s} \left[ (-4n_2 - 2n_3 - 2n_1)t + 4n_2 + 2i(n_3 - n_1)(t-1) \right] \\ &+ \frac{n_3}{s} \left[ (-4n_3 - 2n_2 - 2n_4)t + 4n_3 + 2i(n_4 - n_2)(t-1) \right] \\ &+ \frac{n_4}{s} \left[ (-4n_4 - 2n_1 - 2n_3)t + 4n_4 + 2i(n_1 - n_3)(t-1) \right] \end{aligned}$$

$$= (s-1)t^2 - 4t - 4 + \frac{1}{s} (4n_1^2 + 4n_2^2 + 4n_3^2 + 4n_4^2) + \frac{n_1}{s} \left[ (-4n_1 - 2n_2 - 2n_4)t + 2i(n_2 - n_4)(t-1) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n_2}{s} [(-4n_2 - 2n_3 - 2n_1)t + 2i(n_3 - n_1)(t-1)] + \frac{n_3}{s} [(-4n_3 - 2n_2 - 2n_4)t + 2i(n_4 - n_2)(t-1)] \\
& + \frac{n_4}{s} [(-4n_4 - 2n_1 - 2n_3)t + 2i(n_1 - n_3)(t-1)] \\
& = 4 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2}{s} - 4 + (s-1)t^2 + \frac{t}{s} (-4n_1^2 - 2n_1n_2 - 2n_1n_4 - 4n_2^2 - 2n_2n_3 - 2n_1n_2 - 4n_3^2 \\
& \quad - 2n_3n_4 - 2n_2n_3 - 4n_4^2 - 2n_1n_4 - 2n_3n_4) \\
& \quad + 2i(t-1)(n_1n_2 - n_1n_4 + n_2n_3 - n_1n_2 + n_3n_4 - n_2n_3 + n_1n_4 - n_3n_4) \\
& = 4 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2}{s} - 4 + (s-1)t^2 + \frac{-4t}{s} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_1) \\
& = 4 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2}{s} - 4 + (s-1)t^2 + \frac{-2t}{s} [(n_1 + n_2)^2 + (n_2 + n_3)^2 + (n_3 + n_4)^2 + (n_4 + n_1)^2] \\
& = 4 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2}{s} - 4 + t \left\{ (s-1)t + \frac{-2}{s} [(n_1 + n_2)^2 + (n_2 + n_3)^2 + (n_3 + n_4)^2 + (n_4 + n_1)^2] \right\}
\end{aligned}$$

### 6. $n_1$ 黑 $n_2$ 白 $n_3$ 紅 $n_4$ 黃 $n_5$ 藍

$$\text{令 } s = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 \quad a = -1 + t$$

$$\begin{aligned}
t & = \frac{-1}{s} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^2 \cos \frac{2j\pi}{5} (n_i - n_{i+j(\text{mod}5)})^2 \\
& = \frac{-1}{s} \left\{ [(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_3 - n_4)^2 + (n_4 - n_5)^2 + (n_5 - n_1)^2] \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \right. \\
& \quad \left. + [(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + (n_3 - n_5)^2 + (n_4 - n_1)^2 + (n_5 - n_2)^2] \cdot \cos \frac{4\pi}{5} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var} & = \frac{n_1}{s} [(1-a)^2(n_1-1) + (\omega-a)^2n_5 + (\omega^2-a)^2n_4 + (\omega^3-a)^2n_3 + (\omega^4-a)^2n_2] \\
& \quad + \frac{n_2}{s} [(1-a)^2(n_2-1) + (\omega-a)^2n_1 + (\omega^2-a)^2n_5 + (\omega^3-a)^2n_4 + (\omega^4-a)^2n_3] \\
& \quad + \frac{n_3}{s} [(1-a)^2(n_3-1) + (\omega-a)^2n_2 + (\omega^2-a)^2n_1 + (\omega^3-a)^2n_5 + (\omega^4-a)^2n_4] \\
& \quad + \frac{n_4}{s} [(1-a)^2(n_4-1) + (\omega-a)^2n_3 + (\omega^2-a)^2n_2 + (\omega^3-a)^2n_1 + (\omega^4-a)^2n_5] \\
& \quad + \frac{n_5}{s} [(1-a)^2(n_5-1) + (\omega-a)^2n_4 + (\omega^2-a)^2n_3 + (\omega^3-a)^2n_2 + (\omega^4-a)^2n_1] \\
& = -(1-a)^2 + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 n_i \cdot n_j (\omega^{i-j} - a)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ast \sum_{j=1}^5 n_j (\omega^{1-j} - a)^2 \\
&= (1-a)^2 n_1 + (\omega - a)^2 n_5 + (\omega^2 - a)^2 n_4 + (\omega^3 - a)^2 n_3 + (\omega^4 - a)^2 n_2 \\
&= (t-2)^2 n_1 + (t-(1+\omega))^2 n_5 + (t-(1+\omega^2))^2 n_4 + (t-(1+\omega^3))^2 n_3 + (t-(1+\omega^4))^2 n_2 \\
&= st^2 - 2t[2n_1 + (1+\omega)n_5 + (1+\omega^2)n_4 + (1+\omega^3)n_3 + (1+\omega^4)n_2] \\
&\quad + [4n_1 + (1+\omega)^2 n_5 + (1+\omega^2)^2 n_4 + (1+\omega^3)^2 n_3 + (1+\omega^4)^2 n_2] \\
&= st^2 - 2st + s - 2t[n_1 + n_5\omega + n_4\omega^2 + n_3\omega^3 + n_2\omega^4] \\
&\quad + [3n_1 + 2n_5\omega + n_5\omega^2 + 2n_4\omega^2 + n_4\omega^4 + 2n_3\omega^3 + n_3\omega + 2n_2\omega^4 + n_2\omega^3] \\
&= st^2 - 2st + s + 3n_1 - 2n_1t + \omega(-2n_5t + 2n_5 + n_3) + \omega^2(-2n_4t + 2n_4 + n_5) \\
&\quad + \omega^3(-2n_3t + 2n_3 + n_2) + \omega^4(-2n_2t + 2n_2 + n_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore Var &= (s-1)t^2 + (4-2s)t + (s-4) + \frac{1}{s} \{ 3(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2) - 2t(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2) \\
&\quad + \omega[-2t(n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_5 + n_5n_1) + 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_5 + n_5n_1) \\
&\quad + (n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_1 + n_5n_2)] + \omega^2[-2t(n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_1 + n_5n_2) \\
&\quad + 2(n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_1 + n_5n_2) + (n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_5 + n_5n_1)] \\
&\quad + \omega^3[-2t(n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_1 + n_5n_2) + 2(n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_1 + n_5n_2) \\
&\quad + (n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_5 + n_5n_1)] + \omega^4[-2t(n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_5 + n_5n_1) \\
&\quad + 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_5 + n_5n_1) + (n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_1 + n_5n_2)] \\
&= (s-4) + (s-1)t^2 + (4-2s)t + \frac{1}{s} \{ -2t[(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2) \\
&\quad + (\omega + \omega^4)(n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_5 + n_5n_1) + (\omega^2 + \omega^3)(n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_1 + n_5n_2)] \\
&\quad + 3(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2) + (\omega + \omega^4)[2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_5 + n_5n_1) \\
&\quad + (n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_1 + n_5n_2)] + (\omega^2 + \omega^3)[2(n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_1 + n_5n_2) \\
&\quad + (n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_5 + n_5n_1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (s-4) + (s-1)t^2 + (4-2s)t + \frac{2t}{s} \left\{ \cos \frac{2\pi}{5} [(n_1-n_2)^2 + (n_2-n_3)^2 + (n_3-n_4)^2 + (n_4-n_5)^2 \right. \\
&\quad \left. + (n_5-n_1)^2] + \cos \frac{4\pi}{5} [(n_1-n_3)^2 + (n_2-n_4)^2 + (n_3-n_5)^2 + (n_4-n_1)^2 + (n_5-n_2)^2] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{s} \left\{ 2 \cos \frac{2\pi}{5} [-3(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2) + 2(n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_5 + n_5n_1) \right. \\
&\quad \left. + (n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_1 + n_5n_2)] + 2 \cos \frac{4\pi}{5} [-3(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2) \right. \\
&\quad \left. + 2(n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_5 + n_4n_1 + n_5n_2) + (n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + n_4n_5 + n_5n_1)] \right\} \\
&= (s-4) + (s-1)t^2 + (4-2s)t - 2t^2 - \frac{1}{s} \left\{ \cos \frac{2\pi}{5} [2((n_1-n_2)^2 + (n_2-n_3)^2 + (n_3-n_4)^2 \right. \\
&\quad \left. + (n_4-n_5)^2 + (n_5-n_1)^2) + ((n_1-n_3)^2 + (n_2-n_4)^2 + (n_3-n_5)^2 + (n_4-n_1)^2 + (n_5-n_2)^2] \right\} \\
&\quad + \cos \frac{4\pi}{5} [2((n_1-n_3)^2 + (n_2-n_4)^2 + (n_3-n_5)^2 + (n_4-n_1)^2 + (n_5-n_2)^2) + ((n_1-n_2)^2 \\
&\quad \left. + (n_2-n_3)^2 + (n_3-n_4)^2 + (n_4-n_5)^2 + (n_5-n_1)^2) \right\} \\
&= (s-4) + (s-3)t^2 + (4-2s)t + 2t - \frac{1}{s} \left\{ \cos \frac{2\pi}{5} [(n_1-n_3)^2 + (n_2-n_4)^2 + (n_3-n_5)^2 + (n_4-n_1)^2 \right. \\
&\quad \left. + (n_5-n_2)^2] + \cos \frac{4\pi}{5} [(n_1-n_2)^2 + (n_2-n_3)^2 + (n_3-n_4)^2 + (n_4-n_5)^2 + (n_5-n_1)^2] \right\} \\
&= (s-4) + (s-3)t^2 + (6-2s)t + \frac{-1}{s} \left\{ \cos \frac{2\pi}{5} [(n_1-n_3)^2 + (n_2-n_4)^2 + (n_3-n_5)^2 + (n_4-n_1)^2 \right. \\
&\quad \left. + (n_5-n_2)^2] + \cos \frac{4\pi}{5} [(n_1-n_2)^2 + (n_2-n_3)^2 + (n_3-n_4)^2 + (n_4-n_5)^2 + (n_5-n_1)^2] \right\}
\end{aligned}$$

## 7. r 個顏色

$$\text{令 } s = n_1 + n_2 + \cdots + n_r \quad a = -1 + t$$

$$r \text{ 爲奇數時} \quad t = \frac{-1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{2j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, r \geq 3$$

$$r \text{ 爲偶數時} \quad t = \frac{1}{2s} \sum_{i=1}^r \left( n_i - n_{i+\frac{r}{2}(\text{mod } r)} \right)^2 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{2j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, r \geq 4$$

$$\begin{aligned}
Var &= \frac{n_1}{s} \left[ (1-a)^2 (n_1 - 1) + (\omega - a)^2 n_r + (\omega^2 - a)^2 n_{r-1} + \cdots + (\omega^{r-1} - a)^2 n_2 \right] \\
&\quad + \frac{n_2}{s} \left[ (1-a)^2 (n_2 - 1) + (\omega - a)^2 n_1 + (\omega^2 - a)^2 n_r + \cdots + (\omega^{r-1} - a)^2 n_3 \right] \\
&\quad + \cdots + \frac{n_r}{s} \left[ (1-a)^2 (n_r - 1) + (\omega - a)^2 n_{r-1} + (\omega^2 - a)^2 n_{r-2} + \cdots + (\omega^{r-1} - a)^2 n_1 \right] \\
&= -(1-a)^2 + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r n_i \cdot n_j (\omega^{i-j} - a)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ast \sum_{j=1}^r n_j (\omega^{1-j} - a)^2 \\
&= (1-a)^2 n_1 + (\omega - a)^2 n_r + (\omega^2 - a)^2 n_{r-1} + \cdots + (\omega^{r-1} - a)^2 n_2 \\
&= (t-2)^2 n_1 + (t - (1+\omega))^2 n_r + (t - (1+\omega^2))^2 n_{r-1} + \cdots + (t - (1+\omega^{r-1}))^2 n_2 \\
&= st^2 - 2t[2n_1 + (1+\omega)n_r + (1+\omega^2)n_{r-1} + \cdots + (1+\omega^{r-1})n_2] + (4n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_r) \\
&\quad + 2(n_r \omega + n_{r-1} \omega^2 + \cdots + n_2 \omega^{r-1}) + (n_r \omega^2 + n_{r-1} \omega^4 + \cdots + n_2 \omega^{2r-2}) \\
&= st^2 - 2st + s + 3n_1 - 2t \sum_{k=1}^r n_k \cdot \omega^{1-k} + 2 \sum_{k=2}^r n_k \cdot \omega^{1-k} + \sum_{k=2}^r n_k \cdot \omega^{2(1-k)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore Var &= -(t-2)^2 + st^2 - 2st + s + \frac{1}{s} \left[ 3 \sum_{i=1}^r n_i^2 - 2t \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r n_i \cdot n_j \cdot \omega^{i-j} + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (n_i \cdot n_j \cdot \omega^{i-j} - n_i^2) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (n_i \cdot n_j \cdot \omega^{2(i-j)} - n_i^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (s-1)t^2 + (4-2s)t + (s-4) + \frac{1}{s} \left[ 3 \sum_{i=1}^r n_i^2 - 2t \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r n_i \cdot n_j \cdot \omega^{i-j} \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (n_i \cdot n_j \cdot \omega^{i-j} - n_i^2) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (n_i \cdot n_j \cdot \omega^{2(i-j)} - n_i^2) \right] \\
&= (s-4) + t \left[ (s-1)t + (4-2s) - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r 2n_i \cdot n_j \cdot \omega^{i-j} \right] + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r 2n_i \cdot n_j \cdot \omega^{i-j} \\
&\quad + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r n_i \cdot n_j \cdot \omega^{2(i-j)}
\end{aligned}$$

就  $r$  值之奇偶分兩種情形討論：

(i)  $r = 2v + 1$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r 2n_i \cdot n_j \cdot \omega^{i-j} \\
= & \frac{1}{s} \left[ 2 \sum_{i=1}^r n_i^2 + 2\omega(n_1n_2 + n_2n_3 + \cdots + n_rn_1) + 2\omega^2(n_1n_3 + n_2n_4 + \cdots + n_rn_2) \right. \\
& \left. + \cdots + 2\omega^{r-1}(n_1n_2 + n_2n_3 + \cdots + n_rn_1) \right] \\
= & \frac{1}{s} \left[ 2 \sum_{i=1}^r n_i^2 + 2 \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right) (n_1n_2 + n_2n_3 + \cdots + n_rn_1) + 2 \left( \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right) (n_1n_3 + n_2n_4 + \cdots + n_rn_2) \right. \\
& \left. + \cdots + 2 \left( \omega^v + \frac{1}{\omega^v} \right) (n_1n_{v+1} + n_2n_{v+2} + \cdots + n_rn_v) \right] \\
= & \frac{-1}{s} \left\{ \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right) [(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_r - n_1)^2] \right. \\
& + \left( \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right) [(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_r - n_2)^2] \\
& \left. + \cdots + \left( \omega^v + \frac{1}{\omega^v} \right) [(n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_r - n_v)^2] \right\} \\
= & \frac{-2}{s} \left\{ \cos \frac{2\pi}{r} [(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_r - n_1)^2] \right. \\
& + \cos \frac{4\pi}{r} [(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_r - n_2)^2] \\
& \left. + \cdots + \cos \frac{2v\pi}{r} [(n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_r - n_v)^2] \right\} \\
= & \frac{-2}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^v \cos \frac{2j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, v \geq 1 \\
= & \frac{-2}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{2j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, r \geq 3 \\
= & 2t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r n_i \cdot n_j \cdot \omega^{2(i-j)} \\
= & \frac{1}{s} \left[ \sum_{i=1}^r n_i^2 + \omega^2(n_1n_2 + n_2n_3 + \cdots + n_rn_1) + \omega^4(n_1n_3 + n_2n_4 + \cdots + n_rn_2) \right. \\
& \left. + \cdots + \omega^{2r-2}(n_1n_2 + n_2n_3 + \cdots + n_rn_1) \right] \\
= & \frac{1}{s} \left[ \sum_{i=1}^r n_i^2 + \left( \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right) (n_1n_2 + n_2n_3 + \cdots + n_rn_1) + \left( \omega^4 + \frac{1}{\omega^4} \right) (n_1n_3 + n_2n_4 + \cdots + n_rn_2) \right. \\
& \left. + \cdots + \left( \omega^{2v} + \frac{1}{\omega^{2v}} \right) (n_1n_{v+1} + n_2n_{v+2} + \cdots + n_rn_v) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2s} \left\{ \left( \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right) [(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_r - n_1)^2] \right. \\
&\quad + \left( \omega^4 + \frac{1}{\omega^4} \right) [(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_r - n_2)^2] \\
&\quad \left. + \cdots + \left( \omega^{2v} + \frac{1}{\omega^{2v}} \right) [(n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_r - n_v)^2] \right\} \\
&= \frac{-1}{s} \left\{ \cos \frac{4\pi}{r} [(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_r - n_1)^2] \right. \\
&\quad + \cos \frac{8\pi}{r} [(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_r - n_2)^2] \\
&\quad \left. + \cdots + \cos \frac{4v\pi}{r} [(n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_r - n_v)^2] \right\} \\
&= \frac{-1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^v \cos \frac{4j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, v \geq 1 \\
&= \frac{-1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{4j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, r \geq 3
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Var} = (s-4) + t[(s-1)t + (4-2s) - 2t] + 2t + \frac{-1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{4j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, r \geq 3$$

$$= (s-4) + t[(s-3) \cdot t + (6-2s)] - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{4j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, r \geq 3$$

(ii)  $r = 2v$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r 2n_i \cdot n_j \cdot \omega^{i-j} \\
&= \frac{1}{s} \left[ 2 \sum_{i=1}^r n_i^2 + 2\omega(n_1n_2 + n_2n_3 + \cdots + n_rn_1) + 2\omega^2(n_1n_3 + n_2n_4 + \cdots + n_rn_2) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + 2\omega^{r-1}(n_1n_2 + n_2n_3 + \cdots + n_rn_1) \right] \\
&= \frac{1}{s} \left[ 2 \sum_{i=1}^r n_i^2 + 2 \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right) (n_1n_2 + n_2n_3 + \cdots + n_rn_1) \right. \\
&\quad + 2 \left( \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right) (n_1n_3 + n_2n_4 + \cdots + n_rn_2) + \cdots \\
&\quad \left. + 2 \left( \omega^{v-1} + \frac{1}{\omega^{v-1}} \right) (n_1n_v + n_2n_{v+1} + \cdots + n_rn_{v-1}) + 2\omega^v(n_1n_{v+1} + n_2n_{v+2} + \cdots + n_rn_v) \right] \\
&= \frac{-1}{s} \left\{ \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right) [(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_r - n_1)^2] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right) \left[ (n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_r - n_2)^2 \right] \\
& + \cdots + \left( \omega^{v-1} + \frac{1}{\omega^{v-1}} \right) \left[ (n_1 - n_v)^2 + (n_2 - n_{v+1})^2 + \cdots + (n_r - n_{v-1})^2 \right] \\
& + \omega^v \left[ (n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_r - n_v)^2 \right] \\
& = \frac{1}{s} \left[ (n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_r - n_v)^2 \right] \\
& - \frac{2}{s} \left\{ \cos \frac{2\pi}{r} \left[ (n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_r - n_1)^2 \right] \right. \\
& + \cos \frac{4\pi}{r} \left[ (n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_r - n_2)^2 \right] \\
& + \cdots + \left. \cos \frac{2(v-1)\pi}{r} \left[ (n_1 - n_v)^2 + (n_2 - n_{v+1})^2 + \cdots + (n_r - n_{v-1})^2 \right] \right\} \\
& = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{2v} (n_i - n_{i+v(\bmod 2v)})^2 - \frac{2}{s} \sum_{i=1}^{2v} \sum_{j=1}^{v-1} \cos \frac{2j\pi}{2v} (n_i - n_{i+j(\bmod 2v)})^2, v \geq 2 \\
& = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \left( n_i - n_{i+\frac{r}{2}(\bmod r)} \right)^2 - \frac{2}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r}{2}-1} \cos \frac{2j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\bmod r)})^2, r \geq 4 \\
& = 2t \\
& \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r n_i \cdot n_j \cdot \omega^{2(i-j)} \\
& = \frac{1}{s} \left[ \sum_{i=1}^r n_i^2 + \omega^2 (n_1 n_2 + n_2 n_3 + \cdots + n_r n_1) + \omega^4 (n_1 n_3 + n_2 n_4 + \cdots + n_r n_2) \right. \\
& + \cdots + \left. \omega^{2r-2} (n_1 n_2 + n_2 n_3 + \cdots + n_r n_1) \right] \\
& = \frac{1}{s} \left[ \sum_{i=1}^r n_i^2 + \left( \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right) (n_1 n_2 + n_2 n_3 + \cdots + n_r n_1) + \left( \omega^4 + \frac{1}{\omega^4} \right) (n_1 n_3 + n_2 n_4 + \cdots + n_r n_2) \right. \\
& + \cdots + \left. \left( \omega^{r-2} + \frac{1}{\omega^{r-2}} \right) (n_1 n_v + n_2 n_{v+1} + \cdots + n_r n_{v+1}) + \omega^r (n_1 n_{v+1} + n_2 n_{v+2} + \cdots + n_r n_v) \right] \\
& = \frac{-1}{2s} \left\{ \left( \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right) \left[ (n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_r - n_1)^2 \right] \right. \\
& + \left( \omega^4 + \frac{1}{\omega^4} \right) \left[ (n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_r - n_2)^2 \right] \\
& + \cdots + \left( \omega^{r-2} + \frac{1}{\omega^{r-2}} \right) \left[ (n_1 - n_v)^2 + (n_2 - n_{v+1})^2 + \cdots + (n_r - n_{v-1})^2 \right] \\
& + \left. \left[ (n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_r - n_v)^2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2s} \left[ (n_1 - n_{v+1})^2 + (n_2 - n_{v+2})^2 + \cdots + (n_r - n_v)^2 \right] \\
&\quad - \frac{1}{s} \left\{ \cos \frac{4\pi}{r} \left[ (n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + \cdots + (n_r - n_1)^2 \right] \right. \\
&\quad \quad + \cos \frac{8\pi}{r} \left[ (n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2 + \cdots + (n_r - n_2)^2 \right] \\
&\quad \quad \left. + \cdots + \cos \frac{2(r-2)\pi}{r} \left[ (n_1 - n_v)^2 + (n_2 - n_{v+1})^2 + \cdots + (n_r - n_{v-1})^2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{2s} \sum_{i=1}^r (n_i - n_{i+v(\text{mod } r)})^2 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{v-1} \cos \frac{4j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, v \geq 2$$

$$= \frac{-1}{2s} \sum_{i=1}^r \left( n_i - n_{i+\frac{r}{2}(\text{mod } r)} \right)^2 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r}{2}-1} \cos \frac{4j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, r \geq 4$$

$$\therefore Var = (s-4) + t[(s-1)t + (4-2s) - 2t] + 2t + \frac{-1}{2s} \sum_{i=1}^r \left( n_i - n_{i+\frac{r}{2}(\text{mod } r)} \right)^2$$

$$- \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r}{2}-1} \cos \frac{4j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, r \geq 4$$

$$= (s-4) + t[(s-3)t + (6-2s)] - \frac{1}{2s} \sum_{i=1}^r \left( n_i - n_{i+\frac{r}{2}(\text{mod } r)} \right)^2 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r}{2}-1} \cos \frac{4j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2, r \geq 4$$

## 伍、結論

1. 一開始我們以組合數解出  $a_{(n_1, n_2)}$  值 ( $n_1$  黑  $n_2$  白)

	$a_{(n_1, n_2)}$ 值
規定第一個為黑色	$(-1) + \frac{(n_1 - n_2)(n_1 - n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 1}$
不規定第一個為黑色	$(-1) + \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 + n_2}$

2. 後來以+1 代表黑棋，-1 代表白棋，由除法概念定義兩種棋子間的關係，以更簡單的化簡過

程直接求得  $a_{(n_1, n_2)}$  值。則可以更簡潔的方法求得  $a_{(n_1, n_2)}$  值，並可以此方法推出  $r$  個顏色棋子的一般式。

$a_{(n_1, n_2, \dots, n_r)}$  值：

$$n_1 \text{ 黑 } n_2 \text{ 白} \quad (-1) + \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$n_1 \text{ 黑 } n_2 \text{ 白 } n_3 \text{ 紅} \quad (-1) + \frac{(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_3 - n_1)^2}{2(n_1 + n_2 + n_3)}$$

$$n_1 \text{ 黑 } n_2 \text{ 白 } n_3 \text{ 紅 } n_4 \text{ 黃} \quad (-1) + \frac{(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}$$

$n_1 \text{ 黑 } n_2 \text{ 白 } n_3 \text{ 紅} \dots (r \text{ 個顏色且 } r \geq 3)$

$$r \text{ 為奇數時} \quad (-1) + \frac{-1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{2j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2$$

$$r \text{ 為偶數時} \quad (-1) + \frac{1}{2s} \sum_{i=1}^r \left( n_i - n_{i+\frac{r}{2}(\text{mod } r)} \right)^2 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{2j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2$$

3. 推廣至平面時，將所有棋子的對應關係列表，則發現此表涵蓋住平面排列及直線排列。

Sum 值：

$n$ 黑 $n$ 白	$-2n$
$n_1$ 黑 $n_2$ 白	$n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1) - n_1n_2$
$n_1$ 黑 $n_2$ 白 $n_3$ 紅	$n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1) + n_3(n_3-1) - (n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_1)$
$n_1$ 黑 $n_2$ 白 $n_3$ 紅 $n_4$ 黃	$n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1) + n_3(n_3-1) + n_4(n_4-1) - (n_1n_3 + n_2n_4 + n_3n_1 + n_4n_2)$
$\vdots$	$\vdots$
$r$ 個顏色	$\sum_{i=1}^r n_i n_{[(i+0) \text{ mod } r]} + \sum_{i=1}^r n_i n_{[(i+1) \text{ mod } r]} + \sum_{i=1}^r n_i n_{[(i+2) \text{ mod } r]} + \dots + \sum_{i=1}^r n_i n_{[(i+r-1) \text{ mod } r]}$

4. 變異數： $n$  黑  $n$  白時  $\text{Var} = 4n-4$

$r$  個顏色且每個顏色皆為  $n$  個時， $a=-1$ ， $\text{Var} = rn-4$  ( $r>2$ )

$r$  個顏色時，令  $a=-1+t$ ，則當每個顏色皆為  $n$  個時， $t=0$ ，

$\text{Var}$  便可表為  $(x-4)+kt+w$ ，(每個顏色皆為  $n$  個時， $t=w=0$ ， $x=rn$ )

Var 值：

$n$  黑  $n$  白：

$$4n - 4$$

$n$  黑  $n$  白  $n$  紅.....( $r$  個顏色且  $r \geq 3$ ) :

$$rn - 4$$

$n_1$  黑  $n_2$  白 :

$$\left[ 4 \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 + n_2} - 4 \right] + t \left[ (n_1 + n_2 - 1)t + 4 \left( 1 - \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 + n_2} \right) \right] \quad t = \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$n_1$  黑  $n_2$  白  $n_3$  紅 :

$$\left[ 3 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 + n_2 + n_3} - 4 \right] + t \left[ (n_1 + n_2 + n_3 - 1)t - (n_1 + n_2 + n_3) - 2 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{n_1 + n_2 + n_3} + 5 \right]$$

$$t = \frac{(n_1 - n_2)^2 + (n_2 - n_3)^2 + (n_3 - n_1)^2}{2(n_1 + n_2 + n_3)}$$

$n_1$  黑  $n_2$  白  $n_3$  紅  $n_4$  黃 :

$$4 \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2}{s} - 4 + t \left\{ (s-1)t + \frac{-2}{s} \left[ (n_1 + n_2)^2 + (n_2 + n_3)^2 + (n_3 + n_4)^2 + (n_4 + n_1)^2 \right] \right\}$$

$$t = \frac{(n_1 - n_3)^2 + (n_2 - n_4)^2}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4} \quad s = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$

$n_1$  黑  $n_2$  白  $n_3$  紅.....( $r$  個顏色且  $r \geq 3$ ) :

$r$  為奇數時

$$(s-4) + t[(s-3)t + (6-2s)] - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{4j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2$$

$$t = \frac{-1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{2j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2$$

$$s = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$$

$r$  為偶數時

$$(s-4) + t[(s-3)t + (6-2s)] - \frac{1}{2s} \sum_{i=1}^r \left( n_i - n_{i+\frac{r}{2}(\text{mod } r)} \right)^2 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{4j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2$$

$$t = \frac{1}{2s} \sum_{i=1}^r \left( n_i - n_{i+\frac{r}{2}(\text{mod } r)} \right)^2 - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\frac{r-1}{2}} \cos \frac{2j\pi}{r} (n_i - n_{i+j(\text{mod } r)})^2$$

$$s = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$$