# 臺灣二OO三年國際科學展覽會

科　　別：數學科

作品名稱：無孤力點無交錯分割的區塊細分及七個新的 Riordan 組合結構

得獎獎項：數學科第二名

新加坡第廿六屆青年科學節

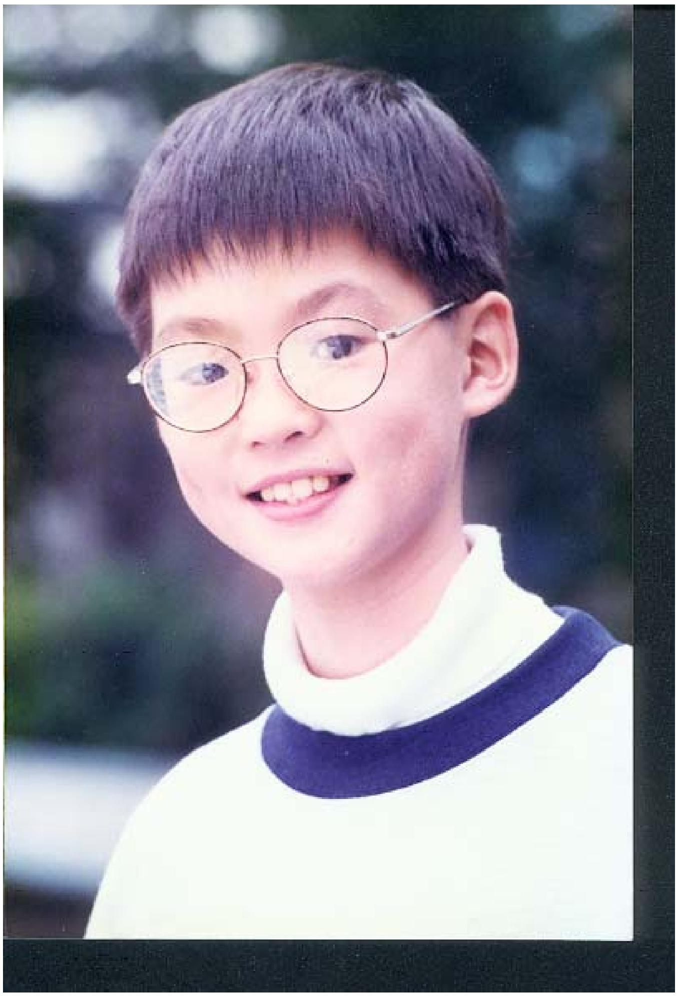
學　　校：臺北市立建國高級中學

作　　者：侯昆邦

洪仕安

# 作 者 簡 介

我的名字是侯昆邦，目前就讀建國中學高中二年級。我覺得我還滿活潑的，很喜歡需要動腦的事情。最擅長的科目是數學、資訊和物理。平時常常會閱讀一些有關數學、資訊的書。閒暇的時候喜歡聽古典音樂，偶而還會下下圍棋。自從上了高中以後，才開始體會排列組合奧妙之處，希望做的這一些研究能真的有些貢獻！



我是洪仕安，現在就讀於建國中學二年級。我平日的興趣就是看看一些有關數學、物理的書。國中時，有幾個較好的同學，我們都對自然科學有些興趣，時常聚在一起討論，或者去參加一些活動，因此就開始熱衷於這些東西。由於這次參加了國際科展，我才能接觸到一些真正作研究的事情，像是到圖書館拼命的翻論文集之類的，這些經歷都讓我深深的體會到作研究的樂趣。

# 無孤立點無交錯分割的區塊細分
# 及七個新的 Riordan 組合結構


## 摘要

將一個集合$\{1,2,\cdots,n\}$分成數個非空的集合（組，區塊），稱為此集合的一個分割。如果可以找到$1\le a<b<c<d\le n$，且$a,c$在同一組（或稱為區塊），$b,d$在另外一組，則稱這兩組有交錯。如果任一組的元素個數都至少是$2$，則稱這個分割是無孤立點的。無交錯的分割在許多領域（RNA 模型，組合計數，資訊科學）上都是個重要的問題。

已知無孤立點無交錯分割以 Riordan 數$\{r_n\}_{n\ge 0}=1,0,1,1,3,6,15,36,\cdots$來計數。在這篇文章中我們研究無孤立點無交錯分割的一些性質。

首先我們考慮無孤立點的無交錯分割按區塊的細分。我們得出：集合$\{1,2,\cdots,n\}$恰含$k$個區塊的無孤立點的無交錯分割的個數為：

$$b_{n,k}=\frac{1}{k}\binom{n-k-1}{k-1}\binom{n}{k-1}$$

其次，我們證明$b_{n,k}$和多邊形的剖分有令人訝異的關連。令$d_{n,k}$是用不相交對角線將凸$n$邊形分成$k$塊的方法。我們用代數方法證出

$$b_{n,k}=d_{n+2-k,k}，$$

也給了一個新的組合證明。

最後，透過對應的方法，我們找出了七個嶄新的組合結構，這些結構都是以 Riordan 數來計數。

# On Block Distribution of Noncrossing Nonsingular Partitions and Seven New Riordan Combinatorial Structures


## Abstract

Partition the set $\{1,2,\cdots,n\}$ into several nonempty sets (blocks) and call it a **partition.** If there exists $1 \le a < b < c < d \le n$ such that $a,c$ are in the same block and $b,d$ are in the same block, then this parition is **crossing**. If the number of elements in each block is greater than 1, then this partition is **nonsingleton.** Noncrossing partitions play an important role in many fields (such as RNA decoding, enumerative combinatorics, computer science, etc.)

It is known that the nonsingleton noncrossing partitions are counted by Riordan numbers $\{r_n\}_{n\ge 0} = 1,0,1,1,3,6,15,36,\cdots$.In this paper we study the properties of them.

First we consider the enumeration of nonsingleton noncrossing partitions in respect to the blocks. We prove that the number of nonsingleton noncrossing partitions of $\{1,2,\cdots,n\}$ with $k$ blocks is

$$b_{n,k} = \frac{1}{k}\binom{n-k-1}{k-1}\binom{n}{k-1}$$

Then we give a connection between nonsingleton noncrossing partitions and polygon dissections. Let $d_{n,k}$ be the ways to dissect an $n$–gon with noncrossing diagonals. We prove that

$$b_{n,k} = d_{n+2-k,k}\,.$$

We also give a combinatorial proof.

Furthermore, by way of the technic of bijection, we find 7 new combinatorial structures counted by Riordan numbers.

# 一、研究動機 及 前言

將一個集合$\{1,2,\cdots,n\}$分成數個非空的集合（組，區塊），稱為此集合的一個分割。如果可以找到$1\le a<b<c<d\le n$，且$a,c$在同一組（或稱為區塊），$b,d$在另外一組，則稱這兩組有交錯。若在分割中，任兩個組不交錯，則稱此種分割（分組方法）為無交錯分割。

無交錯分割的概念首先由 G. Kreweras 提出[K]，迄今已有許多的研究。在 2000 年的一篇綜覽論文中[S]，Rodica Simion 整理出 178 篇迄今為止研究無交錯分割的論文。這些文獻說明了無交錯分割的重要性，和許多學門有有極大的關係，在許多領域上都是個重要的概念。如：正交多項式、雙線型、拓樸學、幾何組合學、格論、機率、生物 dRNA 解碼等等。

雖說如此，但考慮不含孤立點的無交錯分割，則目前的研究卻是出奇地少。在一個分割中，如果任一組的元素個數都至少是2，則稱這個分割是無孤立點的。截至目前為止我們主要知道無孤立點無交錯分割以 Riordan 數$\{r_n\}_{n\ge 0}=1,0,1,1,3,6,15,36,\cdots$來計數[B]。但是關於此結構的探討卻幾乎沒有。

這篇文章的動機就從這裡出發。我們先研究無孤立點的無交錯分割按區塊的細分，然後得出與多邊形分割的一個奇妙關係，最後藉由對應方法找到七個新的組合結構。

第二節之後的大綱如下：在第二節中，我們主要陳述目前已知的事實。第三節中我們考慮集合$\{1,2,\cdots,n\}$恰含$k$個區塊的無孤立點的無交錯分割並求出精確的答案。第四節中我們導出$k$個區塊的無孤立點的無交錯分割與用$n+2-k$條對角線剖分$n$邊形的一個奇妙關係。第五節中我們利用對應方法找出七個與無孤立點的無交錯分割等價的組合結構，據我們所知這些結構都應該還沒有明顯地被整理及表示出來。

# 二、研究內容—預備知識

## 1. 無孤立點無交錯分割

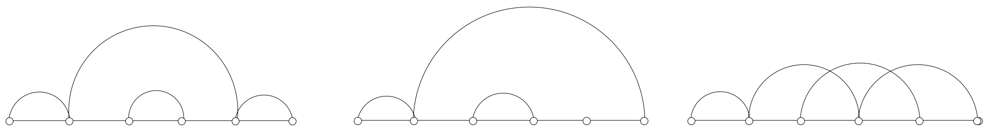
將一個集合$\{1,2,\cdots,n\}$分成數個非空的集合（組，區塊），稱為此集合的一個分割。如果可以找到$1 \le a < b < c < d \le n$，且$a,c$在同一組（或稱為區塊），$b,d$在另外一組，則稱這兩組有交錯。若在分割中，任兩個組不交錯，則稱此種分割（分組方法）為無交錯分割。

例如$\{1,2,3,4,5,6\}$的分割中，$126/34/5$與$1256/34$都是無交錯的，但是$1246/35$是有交錯的。

如果在無交錯分割中，任一組的元素個數都至少是2，則稱這個分割是無孤立點無交錯的。上例中只有$1256/34$是無孤立點無交錯的。

## 2. 無孤立點無交錯分割的圖形表示

我們可用圖形來表示無孤立點無交錯分割（如[Fig 1.a]是$1256/34$）。將$\{1,2,\cdots,n\}$的$n$個元素依序畫在一條直線上，若有兩點是屬於同一組的就將它們用一個在直線之上的弧依序連結起來。無交錯分割是表示則任兩弧不會相交（如[Fig 1.b]是$126/34/5$），而無孤立點就是每一個點都要連出去（如[Fig 1.c]是$1246/35$）。對於上面的三個例子，圖示分別如下：



a. 無孤立點且無交錯　b. 無交錯但有孤立點　c. 無孤立點但有交錯

**Fig 1**

## 3. Riordan 數

若$n = 4$，則4個點的無孤立點無交錯分割一共有3個，如圖[Fig 2]所示。

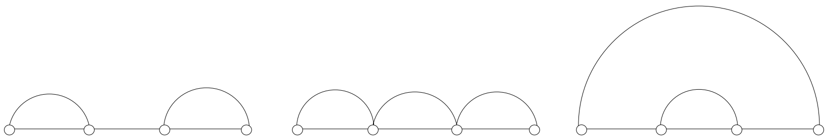


**Fig 2**

當$n$較大時，要一個一個畫完或數完就不太容易。事實上，已知$n$個元素的無孤立點無交錯分割總數是

$$\{r_n\}_{n\geq 0}=1,0,1,1,3,6,15,36,91,\cdots$$

這個數列在 1999 年由 Bernhart 建議稱為 Riordan 數列，我們採用這個名稱。而也是在該文中作者計算了這個總數：根據該文，Riordan 數列的生成函數為

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} r_n x^n &= 1+x^2+x^3+3x^4+6x^5+15x^6+\cdots \\ &= \frac{1+x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2(x+x^2)}\end{aligned}$$

Riordan 數列第$n$項$r_n$原始的定義為：所有自 $(0,0)$ 走到$(n,0)$，且每一步只能選自$\{(1,1),(1,0),(1,-1)\}$（右上，平，右下）。且整個過程中必須保持在上半平面（在$x$軸上不可以有$(1,0)$的步）的所有路徑總數。這樣的路徑稱為 Riordan 路徑。例如$r_4=3$。

## 三、無孤立點無交錯分割按區塊的計數

這一節中，我們考慮無孤立點無交錯分割根據區塊數來分類的計數。我們定義一個無孤立點無交錯分割的<u>區塊數</u>就是此分割分成的組數。例如 1,16/2,8,9,13/3,4,7/5,6/10,11,12/14,15 是一個$\{1,2,\cdots,16\}$的無孤立點無交錯分割，而有六個區塊。

這一節的主要定理是

**定理 1：**

令$b_{n,k}$代表$\{1,2,\cdots,n\}$的，恰含有$k$個區塊的無孤立點無交錯分割總數。則

$$b_{n,k} = \frac{1}{k}\binom{n-k-1}{k-1}\binom{n}{k-1}$$

這個定理的結果是我們畫了很多圖之後猜出來的。為了要證明這個定理，我們需要先引用幾個引理：

**引理 1.1：**

令$B_{n,k}$是所有$\{1,2,\cdots,n\}$的恰含有$k$個區塊的無孤立點無交錯分割所成的集合。令$R_{n,m}$表示$n$步的 Riordan 路徑中恰有$m$步是走$(1,0)$（恰有$m$步走向右）的路徑集合。則$B_{n,k}$和$R_{n,n-2k}$之間有一個組合對應。

**引理 1.1 證明**：我們直接說明對應的方法。

任取$B_{n,k}$中的一個無孤立點無交錯分割，考慮圖形表示。以下點的次序都是由左往右數。我們要把這個分割對應到一個 Riordan 路徑。

由第一個點依序往後解碼，如果

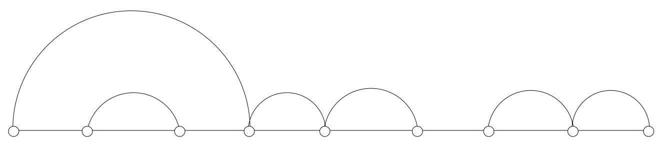
(1) 這個點是區塊中第一個點，就對應到路徑的$(1,1)$（右上）。

(2) 這個點是區塊中最後一個點，就對應到路徑的$(1,-1)$（右下）。

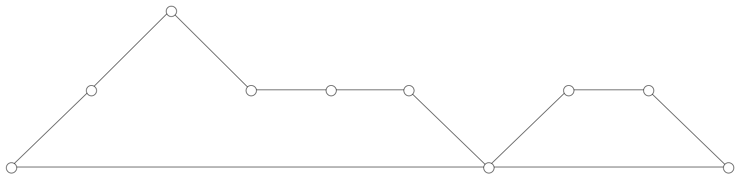
(3) 否則，對應到路徑的$(1,0)$（平）。

因為此分割一共有$k$個區塊，所以也會有$k$步$(1,1)$和$k$步$(1,-1)$，因此有$n-2k$步$(1,0)$。易證反過來亦成立，故這確是一個從$B_{n,k}$到$R_{n,n-2k}$的對應。

例如我們可以將$B_{9,3}$中的一個分割[Fig 3.a]對應到$R_{9,3}$中的一條路徑[Fig 3.b]。



a. 對應前圖形



b. 對應後圖形

**Fig 3**

我們還需要一個引理，要先引進 Dyck 路徑的定義。在 Riordan 路徑中，如果完全沒有使用到(1,0)的步，則這樣的路徑稱為 Dyck 路徑。例如下圖[Fig 4]中是一個長度為 4 的 Dyck 路徑。（注意到 Dyck 路徑的長度是折半計算的，即長度為 4 實際上是走了 8 步）

在一條 Dyck 路徑中，每向下碰到$x$軸我們就稱為一個 return。如上圖的路徑中有 2 個 return。我們要用的是

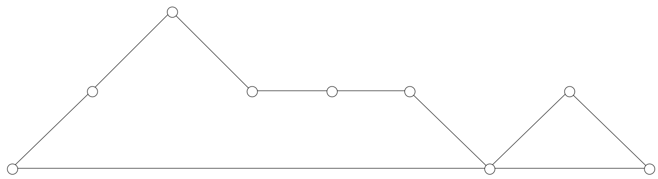


**Fig 4**

**引理 1.2：**

所有長度為$k$（即走$2k$步）且恰含$i$個 return 的 Dyck 路徑的總數是

$$\frac{i}{k}\binom{2k-i-1}{k-1}$$

**引理 1.2 證明：**

這是有名的 Ballot number，證明可參考任一本組合學的書。

我們回到定理 1 的證明：

**定理 1 證明：**

由**引理 1.1**，$B_{n,k}$ 和 $R_{n,n-2k}$ 之間有一個組合對應，因此兩集合的元素個數是一樣的。因此要求 $B_{n,k}$ 的元素個數，只要求 $R_{n,n-2k}$ 的元素個數。

而 $R_{n,n-2k}$ 是 $n$ 步的 Riordan 路徑中有 $n-2k$ 步 $(1,0)$ 平步，剩下 $2k$ 步有 $k$ 步往上，$k$ 步往下；而 $k$ 步往上，$k$ 步往下就是長度為 $k$ 的 Dyck 路徑。因此我們把 $R_{n,n-2k}$ 想成是將 $n-2k$ 步平步插入長度為 $k$ 的 Dyck 路徑之中，而長度為 $k$ 的 Dyck 路徑顯然共有 $2k+1$ 個節點。

我們要計算有多少個節點（位置）可以插入平步。設這個長度為 $k$ 的 Dyck 路徑有 $i$ 個 return。因為 Riordan 路徑在 $x$ 軸上不會有平步，所以在有 $i$ 個 return 的情形下，只有 $(2k+1)-1-i=2k-i$ 個節點（位置）可以插入。

因此共有 $n-2k$ 的平步要插入 $2k-i$ 個節點（位置）中，這是重複組合。因此共有

$$H_{n-2k}^{2k-i}=\binom{(2k-i)+(n-2k)-1}{n-2k}=\binom{n-i-1}{n-2k}$$

種方法插入。

再由**引理 1.2**，所有長度為 $k$（即走 $2k$ 步）且恰含 $i$ 個 return 的 Dyck 路徑的總數是 $\frac{i}{k}\binom{2k-i-1}{k-1}$，因此 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的恰含有 $k$ 個區塊的無孤立點無交錯分割總數有

$$b_{n,k}=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k}\binom{2k-i-1}{k-1}\binom{n-i-1}{n-2k}=\frac{1}{k}\binom{n-k-1}{k-1}\binom{n}{k-1}$$

例如$\{1,2,3,4,5,6,7\}$的恰含3個區塊的無孤立點無交錯分割總數有

$$\frac{1}{3}\binom{7-3-1}{3-1}\binom{7}{3-1}=\frac{1}{3}\binom{3}{2}\binom{7}{2}=21\text{個。}$$

$b_{n,k}$一開始的一些值如下：[Table 1]

| n \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | | | | | | | |
| 3 | 1 | 0 | | | | | | |
| 4 | 1 | 2 | 0 | | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 0 | 0 | | | | |
| 6 | 1 | 9 | 5 | 0 | 0 | | | |
| 7 | 1 | 14 | 21 | 0 | 0 | 0 | | |
| 8 | 1 | 20 | 56 | 14 | 0 | 0 | 0 | |
| 9 | 1 | 27 | 120 | 84 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Table 1

因為每一列的總和是 Riordan 數，因此**定理 1** 的結果是 Riordan 數按區塊的細分。

## 四、無孤立點無交錯分割與多邊形的剖分

這一節中我們要證明無孤立點無交錯分割與多邊形的剖分有一個奇妙的恆等式。

多邊形的剖分是指用在正多邊形內部不相交的對角線將多邊形分成小的多邊形（不一定是三角形）。剖分旋轉和翻轉都視為不同。

令$d_{n,k}$是用不相交對角線將正$n$邊形分成$k$塊的方法數。則從參考資料中我們知道

$$d_{n,k}=\frac{1}{k}\binom{n-3}{k-1}\binom{n+k-2}{k-1}$$

這個式子和**定理 1** 太像了。經過一番變數變換的嘗試，我們馬上得到這一節的主要定理：

**定理 2：**

令$b_{n,k}$代表$\{1,2,\cdots,n\}$的，恰含有$k$個區塊的無孤立點無交錯分割總數；令$d_{n,k}$是用不相交對角線將正$n$邊形分成$k$塊的方法數。則

$$b_{n,k}=d_{n+2-k,k}$$

**定理 2 代數證明**：變數變換即可。

雖然代數上的證明是很明顯的，但是組合證明卻很不顯然！以下我們提出一個組合的對應證明：

**定理 2 組合證明：**

我們的目的是建立由無孤立點無交錯分割到多邊形剖分的對應：

**步驟 1**

由無孤立點無交錯分割出發，對於每一個區塊加入一個點，而且此點必須符合

1.不違反無交錯的規則

2.此點要盡可能的往後

**步驟 2**

由左向右再次重新編號。

**步驟 3**

將整條線折起來變成一個多邊形，再把每個區塊的首尾連起來，成為一個個封閉的形狀，然後在其內部著色。

**步驟 4**

將靠近的兩個著色區域合併起來，中間用一條弦（對角線）隔開，剩下來的圖形就是多邊形的剖分。

若一開始有 $n$ 個點，$k$ 個區塊，因為步驟 1 每一個區塊加一個點，所以步驟一有 $n+k$ 個點，$k$ 個區塊，而步驟 2,3 並沒有增加或減少點數，在步驟 4 因為需要合併兩個區域 $k-1$ 次，而合併兩個區域會減少 2 個點，所以總點數會有 $(n+k)-2(k-1)=n-k+2$ 個，而依然維持 $k$ 個區塊

由於這整個對應的方法是可逆的，因此同樣也可由多邊形剖分對應到無孤立點無交錯分割，所以我們建立了兩者之間的對應

以下[Fig 5]是證明中整個轉換過程的圖示：

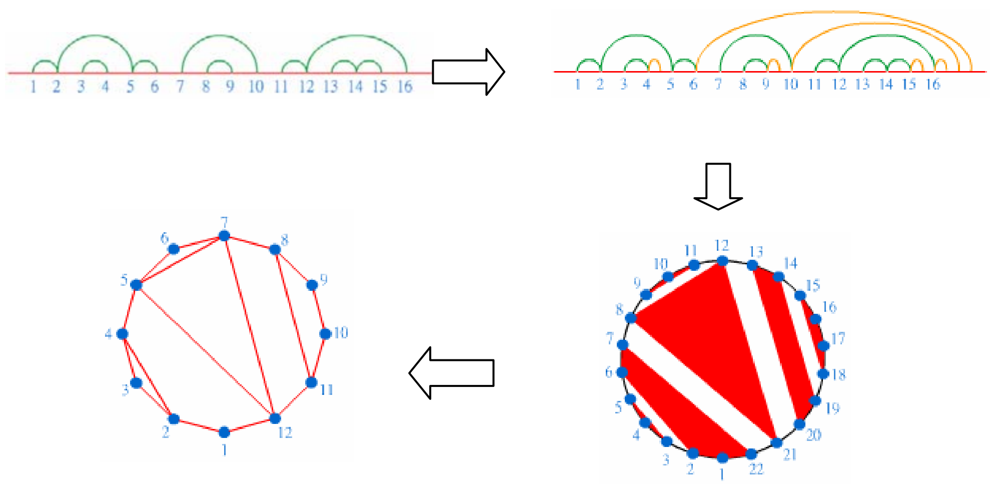


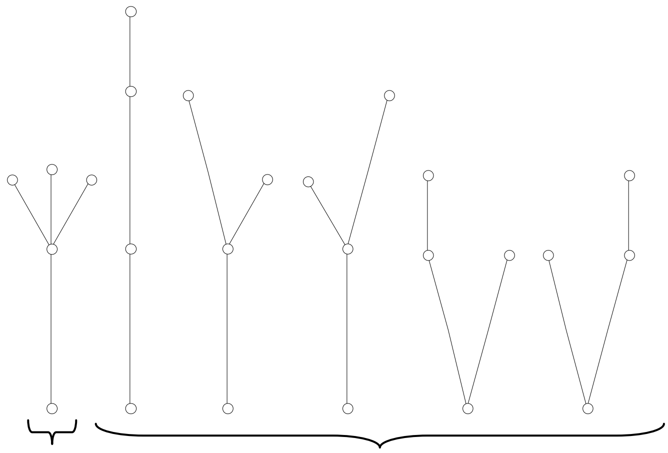
Fig 5

# 五、七個嶄新的組合結構

以下我們將介紹七種新的以 Riordan 數來計數的組合結構，並且闡述$B_{n,k}$與這幾個新的幾何結構上的關係。我們主要用對應到$R_{n,n-2k}$的方式證明這七種結構都等價，再利用**引理 1.1** 將$R_{n,n-2k}$對應到$B_{n,k}$。

(R1) 有 loop 的 rooted plane tree

${}^{1}R_{n,k}$：給定 rooted plane tree，可在根部以外的節點上面加上圓圈 loop，而且符合 2k+b=n( k 代表邊的個數，b 代表 loop 的個數)的 rooted plane tree。



${}^{1}R_{5,1}$ ${}^{1}R_{5,2}$

Fig 6

（短邊代表 loop）

**定理 3：**

${}^{1}R_{n,k}$和$B_{n,k}$可以互相對應。

**定理 3 證明：**

利用下列的對應（如[Fig 7]），我們可以將${}^{1}R_{n,k}$對應到$R_{n,n-2k}$：我們依照由左而右，深度優先的順序將從根出發整個樹繞過一次，往上用 U 代表，往下用 D 代表，遇到 loop 用 B 代表，整個搜尋的過程可以表示為一個由 U, D, B 構成的串列。再將 U, D, B 分別改寫為 Riordan 路徑中的向上，向下，水平，就完成了由${}^{1}R_{n,k}$到$R_{n,n-2k}$對應。再利用**引理 1.1**，將$R_{n,n-2k}$對應到$B_{n,k}$。

經由這種對應$^1R_{n,k}$結構的一條邊，就會對應到 Riordan 路徑的一上一下，又根據**引理 1.1**，就會跟$B_{n,k}$相對應。

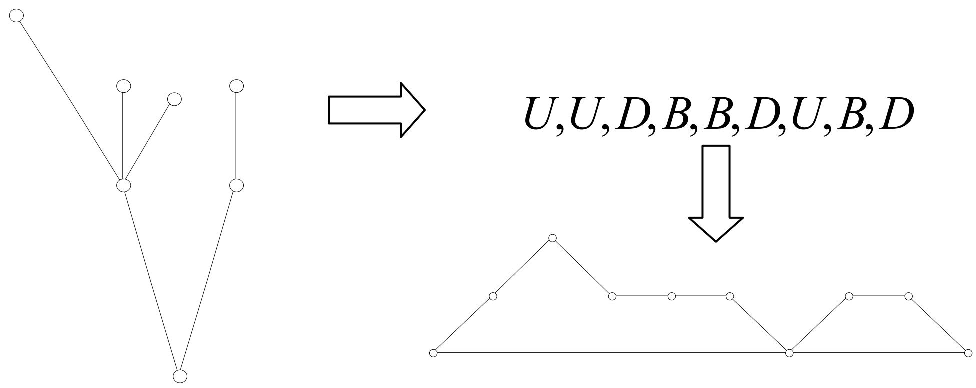



Fig 7

(R2) 一種 increasing matching

$^2R_{n,k}$：考慮一個由{1,2,……n}到{1,2,……n}的 matching，用$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_{n-k},b_{n-k})$表示，且此 matching 必須符合以下條件：

1. $a_i < b_i$（increasing matching）
2. $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-k}, b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-k}$
3. $\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-k},b_1,b_2,\cdots,b_{n-k}\} = \{1,2,\cdots,n\}$

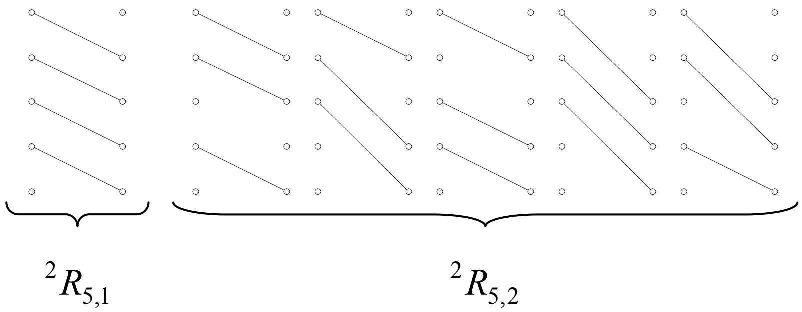



Fig 8

（左邊代表$a_1,a_2,\cdots,a_n$，右邊代表$b_1,b_2,\cdots,b_n$）

**定理 4：**

${}^{2}R_{n,k}$ 和 $B_{n,k}$ 可以互相對應。

**定理 4 證明：**

利用下列的對應（如[Fig 9]），我們可以將 ${}^{2}R_{n,k}$ 對應到 $R_{n,n-2k}$：對於每一個 $1,2,\cdots,n$ 的數，先檢查有沒有在 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 這個集合中，再檢查有沒有在 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 中，如果只有在 A 中出現，則寫下 U，如果只有在 B 中出現，則寫下 D，如果在兩者中都有出現，則寫上 S（由第三個特性知道至少會在 A 或 B 中出現）。再將 U, D, S 分別改寫為 Riordan 路徑中的向上，向下，水平，就完成了由 ${}^{2}R_{n,k}$ 到 $R_{n,n-2k}$ 對應。再利用**引理 1.1**，將 $R_{n,n-2k}$ 對應到 $B_{n,k}$。

經由這種對應 ${}^{2}R_{n,k}$ 結構 $A$ 有一個空點，就會對應到 Riordan 路徑的一上一下，又根據**引理 1.1**，就會跟 $B_{n,k}$ 相對應。

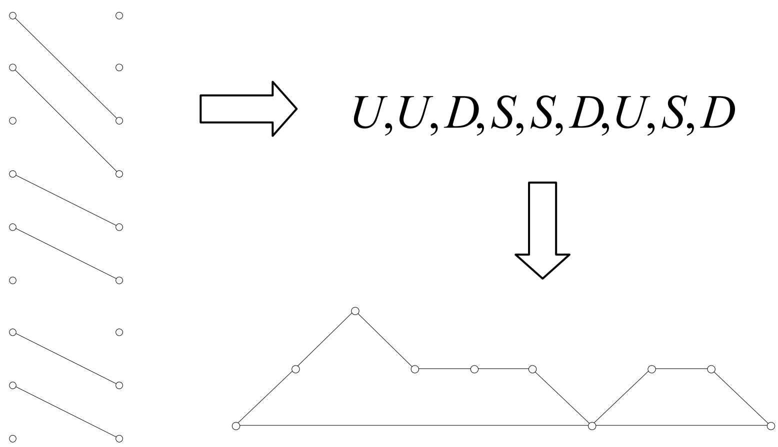



Fig 9

(R3) 另一種 rooted plane tree

${}^{3}R_{n,k}$：rooted plane tree 中，滿足：

1. 根部的點 degree 不可為 1
2. 其餘的點 degree 不可以等於 2
3. 共有 $n$ 條邊且有 $k$ 個點非葉子

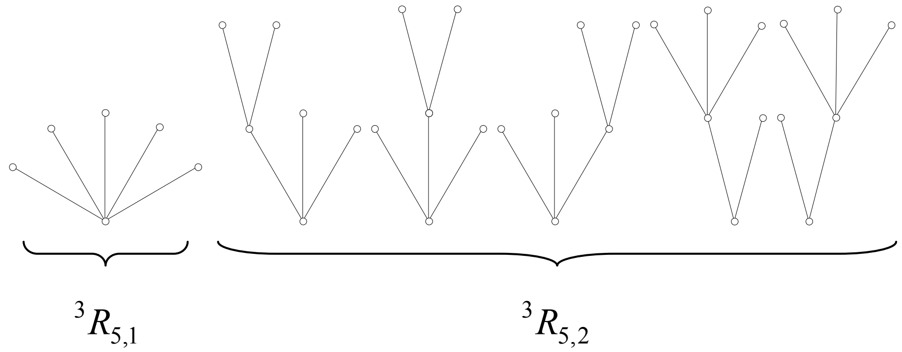



Fig 10

（往右代表 A，往上代表 B）

**定理 5：**

$^3R_{n,k}$ 和 $B_{n,k}$ 可以互相對應。

**定理 5 證明：**

利用下列的對應（如[Fig 11]），我們可以將 $^3R_{n,k}$ 對應到 $R_{n,n-2k}$ ：我們依照由左而右，深度優先的順序將從根出發整個樹繞過一次，在第一次遇到由同一點分枝下去的點時寫下 U，最後一次遇到由同一點分枝下去的點時寫下 D，其餘時候都寫下 L，再將 U, D, L 分別改寫為 Riordan 路徑中的向上，向下，水平，就完成了由 $^3R_{n,k}$ 到 $R_{n,n-2k}$ 對應。再利用**引理 1.1**，將 $R_{n,n-2k}$ 對應到 $B_{n,k}$ 。

經由這種對應 $^3R_{n,k}$ 結構中有 1 個點不是葉子，就會對應到 Riordan 路徑的一上一下，又根據**引理 1.1**，就會跟 $B_{n,k}$ 相對應。

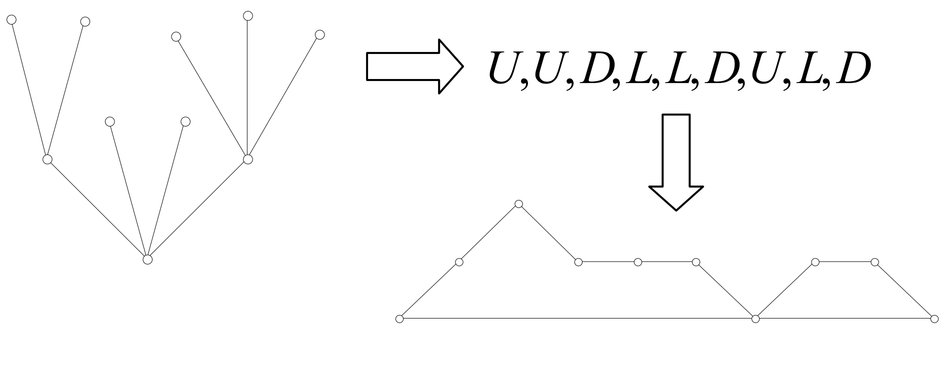
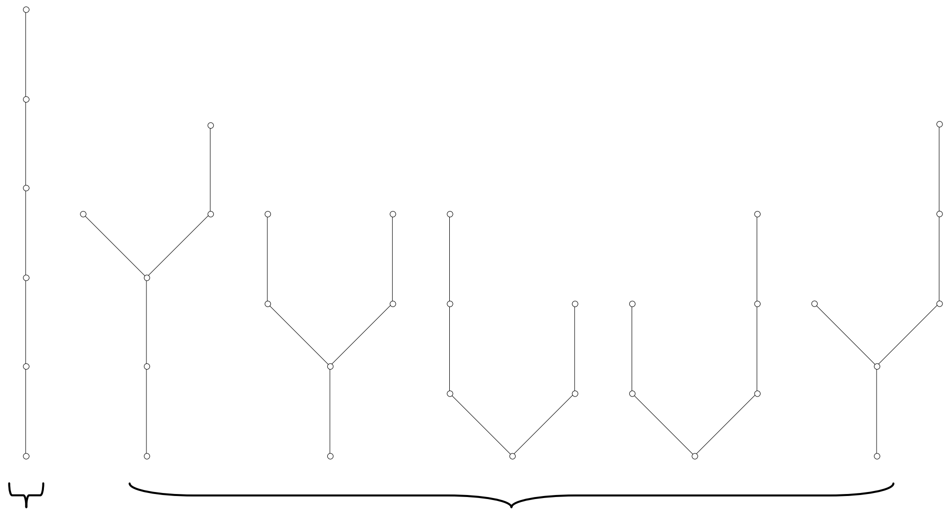



Fig 11

(R4) 特殊的 rooted plane tree

${}^{4}R_{n,k}$ ：rooted plane tree 中，滿足：

1. 所有非根分叉點伸出去的邊,除了最左的邊以外,都不是葉子。
2. 根所伸出去的邊都不是葉子。
3. 共有 n 條邊，k 個葉子。



${}^{4}R_{5,1}$ ${}^{4}R_{5,2}$

Fig 12

**定理 6：**

${}^{4}R_{n,k}$ 和 $B_{n,k}$ 可以互相對應。

**定理 6 證明：**

利用下列的對應（如[Fig 13]），我們可以將 ${}^{4}R_{n,k}$ 對應到之前的 ${}^{3}R_{n,k}$ 。又因為**定理 5**，${}^{3}R_{n,k}$ 跟 $B_{n,k}$ 相對應，所以 ${}^{4}R_{n,k}$ 與 $B_{n,k}$ 相對應。

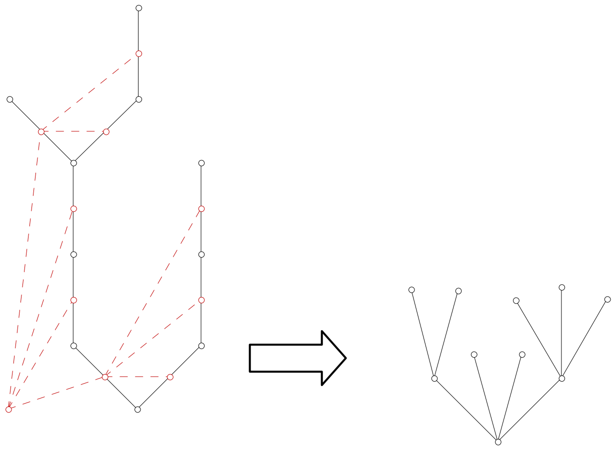


Fig 13

(R5) 一種匹配括號的結構

$^{5}R_{n,k}$ ：將 $n$ 個左、$n$ 個右括號組成有意義的括號表達式，且這些匹配括號必須符合以下條件：

1. 不容許((*))這種情況
   其中*代表的是任何（也可能是空集合）一組完整匹配的括號。
2. 最外面不可以由一層括號所包住
3. 有 $k-1$ 對非最內層括號（例如：對於(()(()()))來說，最內層的匹配括號數（黃底的：()），有三個。）

例如：

$^{5}R_{5,1}$ ➔ ()()()()()

$^{5}R_{5,2}$ ➔ (()())()() ()(()())() ()()(()()) (()()())() ()(()()())

**定理 7：**

$^{5}R_{n,k}$ 和 $B_{n,k}$ 可以互相對應。

**定理 7 證明：**

利用下列的對應（如[Fig 14] ），我們可以將 $^{5}R_{n,k}$ 對應到 $^{3}R_{n',k'}$ ：若遇到”(“寫下 U，若遇到”)“寫下 D，再將 U, D 分別改寫為 $^{3}R_{n',k'}$ 中的向上，向下，就完成了由 $^{5}R_{n,k}$ 到 $^{3}R_{n',k'}$ 的對應。

經由這種對應，顯然$n=n'$，又${}^{5}R_{n,k}$結構的一對非最內層括號，就會對應到${}^{3}R_{n',k'}$中 1 個非根分叉點，所以$k=k'$。再根據**定理 5**，所以會跟$B_{n,k}$相對應。

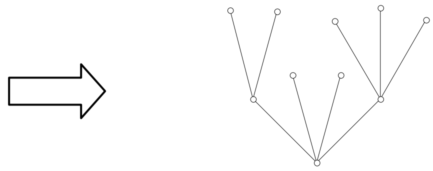
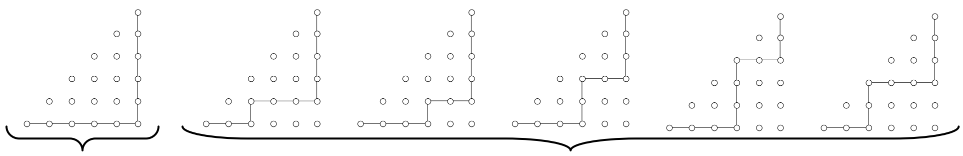
(()())()()(()()()) 

Fig 14

(R6) 一種 ballot problem

${}^{6}R_{n,k}$：考慮一 ballot problem，必須符合下列條件：

1. A 的得票在每一時刻都比 B 的得票多
2. A 每一次得票，一定是連續得 2 票以上
3. 總票數為 2n，且 A 連續得票 k 次



${}^{6}R_{5,1}$ ${}^{6}R_{5,2}$

Fig 15

**定理 8：**

${}^{6}R_{n,k}$和$B_{n,k}$可以互相對應。

**定理 8 證明：**

利用下列的對應（如圖[Fig 16]），我們可以將${}^{6}R_{n,k}$對應到${}^{4}R_{n',k'}$：我們依照得票的順序，若 A 得票寫下 U，若 B 得票寫下 D，再將 U, D 分別改寫為${}^{4}R_{n',k'}$中的向上，向下，就完成了由${}^{6}R_{n,k}$到${}^{4}R_{n',k'}$對應。

經由這種對應，顯然$n=n'$，又${}^{6}R_{n,k}$結構中 A 連續得票 1 次，對應到${}^{4}R_{n',k'}$中的一個葉子，所以$k=k'$。再根據**定理 6**，因此會跟$B_{n,k}$相對應。

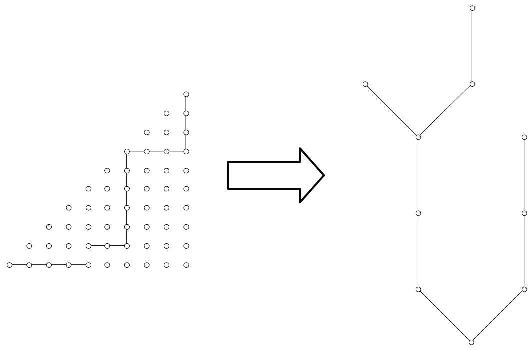


Fig 16

(R7) 另一種 matching

${}^{7}R_{n,k}$：考慮一個由$\{0,1,2,\cdots,n\}$到$\{0,1,2,\cdots,n\}$的 matching，用$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_k,b_k)$表示，且此 matching 必須符合以下條件：

1. $a_i \le b_i$
2. $a_1 < a_2 < \cdots < a_k, b_1 < b_2 < \cdots < b_k$
3. $b_i + 1 < b_{i+1}$，對於 $i=1,2,\cdots,k-1$
4. matching 一定有$(0,0),(n,n)$

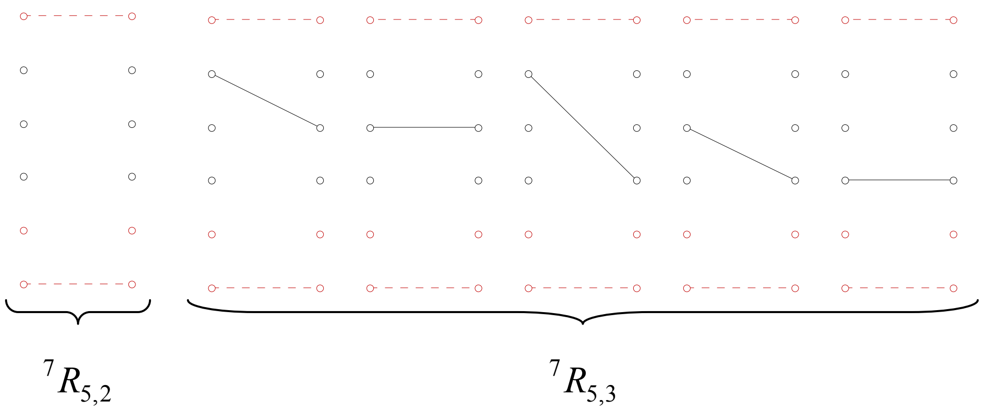



Fig 17

**定理 9：**

$^{7}R_{n,k+1}$ 和 $B_{n,k}$ 可以互相對應。

**定理 9 證明：**

利用下列的對應（如[Fig 18]），我們可以將 $^{7}R_{n,k}$ 對應到 $^{6}R_{n',k'}$：可利用之前的 $^{6}R_{n',k'}$，依照 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_k,b_k)$，在 $^{6}R_{n',k'}$ 的圖上畫出 $(b_1,a_1),(b_2,a_2),\cdots,(b_k,a_k)$ 的點，接著畫一條曲折次數最少，依次經過這些點的路徑，就完成了由 $^{7}R_{n,k}$ 到 $^{6}R_{n',k'}$ 的對應。

經由這種對應，顯然 $n=n'$，又 $^{7}R_{n,k}$ 結構有 k 個 matching，就會對應到(R6)中 k-1 個連續，所以 $k=k'+1$。又根據**定理 8**，所以會跟 $B_{n,k}$ 相對應。

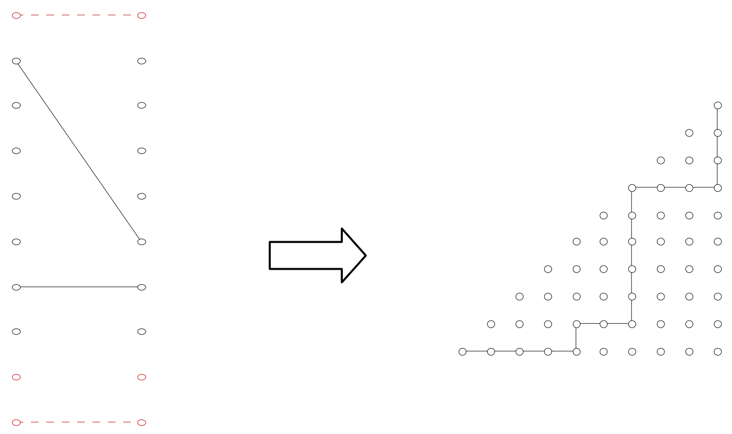


Fig 18

## 六、結論與展望

我們首先證明了無孤立點無交錯分割按區塊的分配計數，得到了新的細分，也和多邊形分割得到新的連結。再利用對應找到七個組合結構。

這篇文章中找出的幾個組合結構，據我們所知都是新的。當然在對應證明的威力下我們可以得到一系列的結果。但除此之外，顯然每一個組合結構都值得個別好好地研究，這也是我們未來努力的方向。

最後我們要感謝我們的指導老師帶我們作真正的數學研究，我們收穫真的很多很多！

## 參考資料

[B] **F.R. Bernhart,** Catalan, Motzkin, and Riordan numbers, *Discrete Math* 204 (1999), 73-112

[K] **G. Kreweras,** Sur les partitions noncroisees d'un cycle, *Discrete Math*. 1 (1972), 333-350

[S] **R. Simion,** Noncrossing partitions, *Discrete Math*. 217 (2000), 367-400

# 評 語

1. 參考資料非常好 ！

2. 請說明該作品之團隊合作之情形。

3. 可用動態模擬之處甚多，可添增展示之生動活潑程度。