

臺灣二〇〇三年國際科學展覽會

科 別：數學科

作品名稱：可表為兩個平方數和的一種特定型式的數及其性質推廣研究~「Concatenating Squares」

得獎獎項：數學科佳作

學 校：臺中市立惠文高級中學

作 者：紀佩文

陳彥鈞

作者簡介



我是紀佩文，就讀台中市惠文高中，今年十六歲是金牛座的女孩個性樂觀開朗從小就對數學非常感興趣，也喜歡些比較具有挑戰性活動。在課餘時，我喜歡聽聽音樂或是從事戶外活動散散心以及從小一直陪伴我的鋼琴偶爾彈上三五首真是個不錯的娛樂活動也讓我的生活多采多姿。



我是陳彥鈞，就讀於台中市的惠文高中，喜歡在閒暇時間閱讀一些課外讀物，尤其是數學類的書籍，對於有人提出來的問題也會詳加思考，不會錯過各種難題挑戰的機會。幸運的是有老師提出這樣的問題並給我們一些相關的指導，而老師對我們的作品也相當滿意。能有機會參與這次活動給我前進的動力，而我以後也會更加努力的！

Abstract

The two examples that I have are

$$0588^2 + 2353^2 = 05882353$$

and

$$\begin{aligned} &05882352941176470588^2 + 23529411764705882353^2 \\ &= 0588235294117647058823529411764705882353 \end{aligned}$$

These were found by the Canadian professor Alf van der Poorten, and he gave a talk on these identities in December at the west coast number theory conference. He was unspecific as to exactly where these identities were coming from, but they are connected with reciprocals of primes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{17} &= \overline{0.0588235294117647} \\ &= 0.0588\underline{2352941176470588235294117647} \Lambda \Lambda \quad (\text{Len}(17) = 16) \end{aligned}$$

Though not mentioning how to obtain these equations, Prof. Poorten demonstrated the relationship between the above examples and the reciprocal of the prime numbers 17 (1/17) without a definitive proof.

Key Words : Number Theory 、 Concatenating Squares 、 Diophantine Equation

可表為兩個平方數和的一種特定型式的數及其性質推廣研究 「Concatenating Squares」

一、研究動機：
給定下面範例：

$$05882352941176470588^2 + 23529411764705882353^2 \\ = 0588235294117647058823529411764705882353,$$

其等式結果與質數 17 的倒數結果(1/17)有某種關聯(卻沒有一個決定性的證據)，意即

$$\frac{1}{17} = \overline{0.0588235294117647} \\ = \overline{0.058823529411764705882352941176470588235294117647 \dots} \quad (\text{Len}(17) = 16)$$

曾經在下列網站上發現過幾組數字(挑戰試題)，引起我們極大的興趣。

http://www.domino.research.ibm.com/Comm/wwwr_pondernsf/challenges/March2000.html
http://www.math.smsu.edu/~les/POW08_96.html

二、研究目的：

- (一) 簡化 $\sum_{k=0}^{n-1} (x_k \cdot r^k) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2$ 之「CIRCLE METHOD」、「SPHERICAL METHOD」。
- (二) 「 $r^2 + 1$ 」、 $r^4 + r^2 + 1$ 」 \sim 「 C_{2n} 」。
- (三) 「 C_{2n} 」之 TABLEAU。
- (四) $10^k + 1$ 之質因數分解：揭露「 C_{2n} 」 \sim 「 $10^{2n} + 1$ 」。
- (五) 證明「 C_{2n} 」之對稱性及其個數是無限多個(包含許多無限多個的子數列)。
- (六) 證明「 C_{2n} 」與其有理數表示成純循環小數的關聯性(「 $1/p$ 」&「 m^2/p 」)。
- (七) 幾何新方法解不定方程： $a^2 + b^2 + c^2 = u^2 (u \neq 0)$ 之整數解探討 \rightarrow 「 C_{2n} 」。
- (八) 探討「 C_{2n} 」更多元化的方法「簡單程序」及其法則。

三、研究設備及器材：

- (一) 紙筆若干。
- (二) 人腦二顆。
- (三) 個人電腦二台(軟體 Visual Basic 6.0)。
- (四) 滑鼠、印表機。

四、研究過程與方法：

符號說明：

A_n ：前(左)半部的 n 位數字。

B_n ：後(右)半部的 n 位數字。

C_{2n} ：代表由 $2n$ 位數字組成的「CONCATENATING SQUARES」。

簡介：

$ar + b = a^2 + b^2$ 之簡化(CIRCLE METHOD)：根據【1】，我們得到關於「 C_{2n} 」的不定方程(DIOPHANTINE EQUATION)之基本概念：

(一) 「 r^2+1 」 ~ 「Concatenating Squares」：

DIOPHANTINE EQUATION	$ar+b=a^2+b^2 \rightarrow r^2+1 = s^2+t^2 = (2a-r)^2 + (2b-1)^2$
	$r^2+1 = (m^2+n^2)(u^2+v^2) ; mu-nv=1, mv+nu=r$
①	$(a,b)=(mv,mu)$
②	$(a,b)=(nu,mu)$
③	$(a,b)=(mv,-nv)$
④	$(a,b)=(nu,-nv)$

(1) 當 $r=10^4$ 時；(C₈)：則 $r^2+1=10^8+1=17 \times 5882353$ ，可驗證 $17 \mid r^2+1$ ，且 $10^8+1=(1^2+4^2)(u^2+v^2)$ ；

$$\text{故 } u=2353 = \frac{4 \cdot 10^4 + 1}{17}, v=0588 = \frac{10^4 - 4}{17}, \text{ 即 } 05882353 = 0588^2 + 2353^2 = \frac{10^8 + 1}{17},$$

$$94122353 = 9412^2 + 2353^2 = \frac{(4 \cdot 10^4 + 1)^2}{17}。$$

(2) 當 $r=10^{64}$ 時；(C₁₂₈)：同理 $257 \mid r^2+1$ 且 $10^{128}+1=(1^2+16^2)(u^2+v^2)$ ，因此

$$u = \frac{16 \cdot 10^{64} + 1}{257}$$

$$= 0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393,$$

$$v = \frac{10^{64} - 16}{257}$$

$$= 0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712;$$

故 $0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712$

$$0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393$$

$$= 0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712^2$$

$$+ 0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393^2$$

$$= \frac{10^{128} + 1}{257},$$

$$9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252917288$$

$$0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393$$

$$= 9961089494163424124513618677042801556420233463035019455252917288^2$$

$$+ 0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393^2$$

$$= \frac{(16 \cdot 10^{64} + 1)^2}{257}。$$

(二) 直接計算法：

由 C_{2n} 的不定方程及令 $r = 10^{\lceil \log b \rceil + 1}$ ；得出

$$a^2 - 10^{\lceil \log b \rceil + 1} \times a + (b^2 - b) = 0,$$

設

$$D = 25 \times 10^{2 \lceil \log b \rceil} - b^2 + b \text{ 爲其判別式，}$$

故

$$a = 5 \times 10^{\lceil \log b \rceil} \pm \sqrt{D}, \text{ 且 } a \text{ 是偶數。}$$

(三) $r^2+1 : 10^{2n}+1$ 之標準分解式(即 $r=10^k$) $\rightarrow 4m+1$ 形狀的質數。

r^2+1 寫成兩個因子之積的觀念是非常重要的，目的在於推廣 $2n$ 位的「CONCATENATING SQUARES」。

(四) 「Concatenating Squares」有多少解：

結論指出的是有多少方法可用來演算 $(10^k + 1)$ 爲兩個平方的總和；答案對數等於

$2^{(F-1)} - 1$ ， C_{2n} 位數的答案對數「最多」可達 $2^{(F-1)} - 1$ ，其中 F 為 $10^{2n} + 1$ 的質因數分解個數。

(五)一般化：

(1) 一組數字等於其依序各三位數(三部份數字)平方的總和(數字串)。

(2) 一組數字等於其依序各 n -th 位數(n 部分數字)的平方總和；

① 由不定方程 $\sum_{k=0}^{n-1} (x_k \cdot r^k) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2$ ，其中 $\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 \leq n(r-1)^2$ ；

② 若 $n \geq 4$ ，則得不出任何答案；此乃因 $\sum_{k=0}^{n-1} (x_k \cdot r^k) \geq r^{n-1} > n(r-1)^2$ ；

③ 當 $n=3$ 時，得出 $(r^2 - 2a)^2 + (2b - r)^2 + (2c - 1)^2 = r^4 + r^2 + 1$ 且對稱性仍然存在，可以用 $(r - b)$ 取代 b ；再改寫成下列式子：

$$r^4 + r^2 + 1 = u^2 + v^2 + w^2, \text{ 其中 } u = r^2 - 2a, v = |2b - r|, w = 2c - 1;$$

或再表示成 $u^2 + v^2 + w^2 + r^2 = (r^2 + 1)^2 = s^2$ ，

亦可由【2】之原理得出不定方程 $u^2 + v^2 + w^2 + r^2 = s^2$ 之整數解；找到 $(r^2 - 2a)^2 + (2b - r)^2 + (2c - 1)^2 = r^4 + r^2 + 1$ 的解。

五、研究結果：

(一) 「Concatenating Squares」之 Tableau： C_4 ， C_6 ， C_8 ， C_{10} ， C_{12} ， C_{14} ， C_{16} ， C_{18}

$2n$	$A_n \cdot 10^n + B_n$	$(10^n - A_n) \cdot 10^n + B_n$
C_{18}	99999900001000000	000001000001000000
	990099010099009901	009900990099009901
	989900010099989901	010099990099989901
C_{16}	9893941210243728	0106058810243728
	9831031212888513	0168968812888513
	9750390015600625	0249610015600625
	9686424017428225	0313576017428225
	9330008825002048	0669991225002048
	9187718827318513	0812281227318513
	8908686031180401	1091314031180401
	8186968838526913	1813031238526913
	7972858840202128	2027141240202128
	7657044042355776	2342956042355776
	7086160045440001	2913840045440001
	6825781246547313	3174218846547313
	6570091247470848	3429908847470848
	6202846048531600	3797154048531600
	5564230049680625	4435770049680625
C_{14}	92318202663025	07681802663025
	91103202846976	08896802846976
	86206903448276	13793103448276
	84651703604525	15348303604525
C_{12}	883212321168	116788321168
	876712328768	123288328768
	999900010000	000100010000
C_{10}	8235038125	1765038125
	7416043776	2584043776
	9901009901	0099009901
C_8	94122353	05882353
C_6	990100	010100
C_4	8833	1233
「兩半」、「平方」、「成對」，Visual Basic6.0執行所得出的結果		

(二) 「 C_{2n} ~平方加總」

(1)

C_{2n}	$a^2 + b^2 = ar + b \Rightarrow (2a - r)^2 + (2b - 1)^2 = r^2 + 1 = s^2 + t^2$	
$r = 10^n$	$10^{n-1} \leq a, b \leq 10^n - 1$	$2a - r = \pm s$ ， $2b - 1 = t$ ， $1 \leq s < r$ ， $1 \leq t < r$
(a, b)	對稱性： $(r - a, b) \leftrightarrow (a, b)$	搜尋簡化成 $(a, b) \rightarrow 2a \geq r$

(2)若 $r^2 + 1$ 為質數，則沒有相對應的 (a, b) ；若 $r^2 + 1$ 為非質數，則一定可寫成兩個整數因子的乘積，

即 $r^2 + 1 = (m^2 + n^2)(u^2 + v^2)$ ， $r^2 + 1$ 的所有質因數都是 $(4k + 1)$ 的形式，

且 $m^2 + n^2 \leq r$ ，

得 $r^2 + 1 = (mu - nv)^2 + (mv + nu)^2$ 或 $(mu + nv)^2 + (mv - nu)^2 \Rightarrow (s, t) \Rightarrow (a, b)$
 \Rightarrow 數組 $C = a^2 + b^2 = (r^2 + 1 + t + sr)/2$; C 為質數時, $t \equiv 1 \pmod{4}$, 否則 C 為偶數。

(三)闡釋「兩半部份數字的平方總和~ C_n 」 $\Leftrightarrow a^2 - 10^n \cdot a + (b^2 - b) = 0$

(1) 兩根和：再既定 b 值下，若答案存在，則其 a 值必然成對，且其總和等於 10^n 。

(2) 兩根積： $b(b-1) \Leftrightarrow 4b(b-1)+1 = 4a(10^n - a)+1 = F(a)$ 是否為完全平方數；

\Rightarrow 將其值模(value modulo)視為質數且檢查二次方程式的剩餘符號(residue symbol)就可達到檢查之目的；

\Rightarrow 指出此運算式中 a 的最後一位數字是多少，便可很快確定 $F(a)$ 是否能成為完全平方；

$\Rightarrow a$ 的最後一位數不可能是 $\{1, 4, 6, 9\}$ ，因 $F(a)$ 以 7 結尾且不可能是平方數；

\Rightarrow 「 C_{2n} 」之 Tableau 中 A_n 的個位數字是 $\{0, 2, 8\}$ 且 B_n 的個位數字是 $\{0, 1, 3, 5, 6, 8\}$ ；

$\Rightarrow r^2 + 1$ 的質因數分解是為了能將其寫成兩組平方和的乘積。

(四)Factorizations of $10^k + 1$ ：由四、研究過程與方法中，如何將 $r^2 + 1 (r = 10^n)$ 寫成兩個平方數之和，或寫成兩個因子之積。(摘自 [ftp:sable.ox.ac.uk/pub/math/cunningham/10+](http://ftp.sable.ox.ac.uk/pub/math/cunningham/10+))

k	$10^k + 1$	Factorizations of $10^k + 1$
● 2	$10^2 + 1$	101
● 4	$10^4 + 1$	73.137
● 6	$10^6 + 1$	9901
● 8	$10^8 + 1$	17.5882353
● 10	$10^{10} + 1$	3541.27961
● 12	$10^{12} + 1$	99990001
● 14	$10^{14} + 1$	29.281.121499449
● 16	$10^{16} + 1$	353.449.641.1409.69857
● 18	$10^{18} + 1$	999999000001
● 20	$10^{20} + 1$	1676321.5964848081
● 22	$10^{22} + 1$	89.1052788969.1056689261
● 24	$10^{24} + 1$	999999900000001

另一種型式：

k	$10^k + 1$	Factorizations of $10^k + 1$
● 2	$10^2 + 1$	101
● 4	$10^4 + 1$	73 · 137
● 6	$10^6 + 1$	101 · 9901
● 8	$10^8 + 1$	17 · 5882353
● 10	$10^{10} + 1$	101 · 3541 · 27961
● 12	$10^{12} + 1$	73 · 137 · 99990001
● 14	$10^{14} + 1$	29 · 101 · 281 · 121499449
● 16	$10^{16} + 1$	353 · 449 · 641 · 1409 · 69857
● 18	$10^{18} + 1$	101 · 9901 · 999999000001
● 20	$10^{20} + 1$	73 · 137 · 1676321 · 5964848081
● 22	$10^{22} + 1$	89 · 101 · 105278969 · 1056689261
● 24	$10^{24} + 1$	17 · 5882353 · 999999900000001

六、討論及其應用：

(一) 由五、研究結果之 C_{2n} 之 Tableau，觀察得出「對稱性」。

1. 性質一： 假如 $X=A \times 10^n + B$ 是 C_{2n} ，則 $(10^n - A) \times 10^n + B$ 必是另一對稱之 C_{2n} 。

2. 性質二： (代表數之推廣) 「 C_{2n} 」與 $1/17$ 之關係： C_{2n} 之個數是無限多個的，且其數列是包含許多無限多個的子數列。

若 $C_8 = A_4^2 + B_4^2 : 0588^2 + 2353^2 = 05882353$ 且 $1/17 = 0.0588235294117647$ ， $\text{Len}(17) = 16$ ；則

$$05882352941176470588^2 + 23529411764705882353^2 = 058823529411764705882353$$

$$= \frac{10^{40} + 1}{17} = A_{20}^2 + B_{20}^2, \text{ 其中 } 05882353 = \frac{10^8 + 1}{17} = C_8;$$

$$a(k) = \frac{(10^8)(10^{16k} - 1)(10^{16k} + 1)}{17} + \langle C_8 \rangle$$

$$= \frac{10^{32k+8} + 1}{17} \text{ 是 } C_{32k+8} \text{ 之「} C_{2n} \text{」, } k \in N。$$

證明：

$$\text{由 } \frac{1}{17} = 0.0588235294117647 = \frac{0588235294117647}{10^{16} - 1} \text{ 及}$$

$$\frac{4}{17} = 0.2352941176470588 = \frac{2352941176470588}{10^{16} - 1},$$

$$\text{且 } A = 0588235294117647 = \frac{10^{16} - 1}{17} \text{ 及 } B = 2352941176470588 = \frac{4(10^{16} - 1)}{17},$$

$$C_{32k+8} = a(k) = \left[\overbrace{A \ A \ \cdots \ A}^k \right]^2 + \left[\overbrace{B \ B \ \cdots \ B}^k \right]^2$$

$$= \left[0588 + \sum_{n=1}^k A \times 10^{16n-12} \right]^2 + \left[2353 + \sum_{n=1}^k B \times 10^{16n-12} \right]^2$$

$$= \left(\frac{10^{16k+4} - 4}{17} \right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 10^{16k+4} + 1}{17} \right)^2 = \frac{10^{32k+8} + 1}{17},$$

$$\text{或 } a(k) = \left[0588 + \sum_{n=1}^k A \times 10^{16n-12} \right] \times 10^{16k+4} + \left[2353 + \sum_{n=1}^k B \times 10^{16n-12} \right];$$

故 $a(k)$ 是 C_{32k+8} 之「Concatenating Squares」， $C_{32k+8} = A_{16k+4}^2 + B_{16k+4}^2$ ， $k \in N$ ；

亦可由同餘式 $\begin{cases} 10^{16} \equiv 1 \pmod{17} \\ 10^8 + 1 \equiv 0 \pmod{17} \end{cases}$ ，可以確定 $10^{32k+8} \equiv -1 \pmod{17}$ ，

$$a(k) = \frac{10^{32k+8} + 1}{17} = \frac{10^8(10^{16k} - 1)(10^{16k} + 1)}{17} + \frac{(10^8 + 1)}{17} = \frac{10^{16} - 1}{17} \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{16l-8} + 05882353。$$

(二) 由「性質二」得知 C_{2n} 之個數是無限多個，揭露 C_{2n} ，再反映出其清晰的無限循環小數之結果，取其循環節之長度為組合位數，便能生成具此特殊性質的數。

1. 性質三：「Concatenating Squares」與 $1/257$ 之關係： $A_{64}^2 + B_{64}^2 = C_{128}$

若 C_{128} : 0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712²
 $+0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393^2$
 $= 0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712$
 $0622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393$,
 $1/257=0.0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712062256809$
 $3385214007782101167315175097276264591439688715953307392996108949416342412$
 $4513618677042801556420233463035019455252918287937743190661478599221789883$
 $2684824902723735408560311284046692607$, $\text{Len}(257)=256$;

則(1) $C_{640} : A_{320}^2 + B_{320}^2 = C_{640}$
 $(00389\dots926070038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712^2)$
 $+ (06225\dots817120622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393^2)$
 $= 00389\dots92607003891050583657587548638132295719844357976653696498054474708$
 $171206225817120622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307393$;
(2) $a(k) = \frac{10^{128} \times (10^{256k} - 1) \times (10^{256k} + 1)}{257} + \langle C_{128} \rangle = \frac{10^{512k+128} + 1}{257}$ 是 $C_{512k+128}$ 之「CONCATENATING
SQUARES」 $k \in \mathbb{N}$; 即 $A_{256k+64}^2 + B_{256k+64}^2 = C_{512k+128}$, ...。

證明：令 $\frac{1}{257} = 0.\overline{00389\dots92607} = 0.\bar{A}$, $A = \frac{10^{256} - 1}{257}$,
 $\frac{16}{257} = 0.\overline{062556\dots81712} = 0.\bar{B}$, $B = \frac{16(10^{256} - 1)}{257}$,

則 $a(k) = C_{512k+128}$:

$$\begin{aligned} & \left[\overline{A \ A \ \dots \ A}_{64} \right]^2 + \left[\overline{B \ B \ \dots \ B}_{64} \right]^2 \\ &= \left[A_{64} + \sum_{n=1}^k A \times 10^{256n-192} \right]^2 + \left[B_{64} + \sum_{n=1}^k B \times 10^{256n-192} \right]^2 \\ &= \left(\frac{10^{256k+64} - 16}{257} \right)^2 + \left(\frac{16 \cdot 10^{256k+64} + 1}{257} \right)^2 \\ &= \frac{10^{512k+128} + 1}{257} \\ &= \frac{10^{128} \times (10^{256k} - 1) \times (10^{256k} + 1)}{257} + \frac{10^{128} + 1}{257} , \end{aligned}$$

或 $a(k) = \left[A_{64} + \sum_{n=1}^k A \times 10^{256n-192} \right] \times 10^{256k+64} + \left[B_{64} + \sum_{n=1}^k B \times 10^{256n-192} \right]$, 故

$$a(k) = \frac{10^{128} \times (10^{256k} - 1) \times (10^{256k} + 1)}{257} + \langle C_{128} \rangle \text{ 是 } C_{512k+128} \text{ 之 } \langle C_{2n} \rangle ;$$

即由下面兩同餘式

$$\begin{cases} 10^{256} \equiv 1 \pmod{257} \\ 10^{128} + 1 \equiv 0 \pmod{257} \end{cases} ,$$

推得其表示式 $10^{512k+128} \equiv -1 \pmod{257}$,

$$\begin{aligned} \text{令 } a(k) &= \frac{10^{512k+128} + 1}{257} = \frac{10^{128} (10^{256k} - 1)(10^{256k} + 1)}{257} + \frac{(10^{128} + 1)}{257} \\ &= (00389105058365758754863813229571984435797665369649805447470817120 \\ &\quad 622568093385214007782101167315175097276264591439688715953307392996 \\ &\quad 108949416342412451361867704280155642023346303501945525291828793774 \\ &\quad 31906614785992217898832684824902723735408560311284046692607) \\ &\quad \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{256l-192} + \langle C_{128} \rangle \circ \end{aligned}$$

2. **性質四**：「Concatenating Squares」與 $1/65537$ 之關係：

若 C_{32768} ： $A_{16384}^2 + B_{16384}^2 = C_{32768} = \frac{10^{32768} + 1}{65537}$ ，且得知 $1/65537$ 之純循環小數表示式(請參閱附錄)，

$$\begin{aligned} &000015258556235409005599890138395105 \cdots 400277705723484443901918000518790912^2 + \\ &003906190396264705433571875429146894 \cdots 471092665212017638891008132810473473^2 \\ &= 000015258556235409005599890138395105 \cdots 400277705723484443901918000518790912 \\ &003906190396264705433571875429146894 \cdots 471092665212017638891008132810473473 \text{ ,} \end{aligned}$$

則(1) $A_{81920}^2 + B_{81920}^2 = C_{163840}$ ， $A_{147456}^2 + B_{147456}^2 = C_{294912}$ ， $A_{212992}^2 + B_{212992}^2 = C_{425984}$ ；

$$(2) a(k) = \frac{10^{32768} \times (10^{65536k} - 1) \times (10^{65536k} + 1)}{65537} + \frac{10^{32768} + 1}{65537} = \frac{10^{131072k+32768} + 1}{65537} \text{ 是 } C_{131072k+32768} \text{ 之}$$

「 C_{2n} 」，且 $k \in \mathbb{N}$ ；即 $A_{65536k+16384}^2 + B_{65536k+16384}^2 = C_{131072k+32768}^2$ 。

證明：承**性質二**及**性質三**之原理(方法)

由同餘式 $\begin{cases} 10^{65536} \equiv 1 \pmod{65537} \\ 10^{32768} + 1 \equiv 0 \pmod{65537} \end{cases}$ ，我們推得 $10^{131072k+32768} \equiv -1 \pmod{65537}$ 。

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{10^{131072k+32768} + 1}{65537} = \left(\frac{10^{65536k+16384} - 256}{65537} \right)^2 + \left(\frac{256 \cdot 10^{65536k+16384} + 1}{65537} \right)^2 \\ &= \frac{10^{32768} (10^{65536k} - 1)(10^{65536k} + 1)}{65537} + \frac{(10^{32768} + 1)}{65537} \\ &= \left(\frac{10^{65536} - 1}{65537} \right) \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{65536l-32768} + \langle C_{32768} \rangle \text{ , 故 } a(k) \\ &= \frac{10^{32768} (10^{65536k} - 1)(10^{65536k} + 1)}{65537} + \langle C_{32768} \rangle \text{ 亦是 } \text{「} C_{2n} \text{」, } k \in \mathbb{N} \text{ .} \end{aligned}$$

(三)由**性質二**、**性質三**、**性質四** 顯示出「Concatenating Squares」~「 r^2+1 」、「費馬小定理」的相互關係；且 $(10^8+1)/17$ 、 $(10^{128}+1)/257$ 、 $(10^{32768}+1)/65537$ 皆可表為「兩半部分數字的平方總和」。

1. **定理**：目的在於詳述「Concatenating Squares」與 $\frac{1}{p}$ 之關聯性(提出了一個決定性的證據)：

設 p 是型如 $F_n = 2^{2^n} + 1$ 的質數，且滿足 $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ；
 又令

$$C_{\frac{p-1}{2}} = A_{\frac{p-1}{4}}^2 + B_{\frac{p-1}{4}}^2 = \frac{10^{\frac{p-1}{2}} + 1}{p} = \begin{matrix} A_{\frac{p-1}{4}} & B_{\frac{p-1}{4}} \\ \hline \hline \end{matrix},$$

即 $10^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ， $C_{\frac{p-1}{2}}$ 表為兩個平方數之和的一種特定形式的數；

$$\text{則 } a(k) = \frac{10^{\frac{(4k+1)(p-1)}{2}} + 1}{p} = \left(\frac{10^{p-1} - 1}{p} \right) \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{\frac{(2l-1)(p-1)}{2}} + \langle C_{\frac{p-1}{2}} \rangle,$$

且 $a(k)$ 是 $C_{\frac{(4k+1)(p-1)}{2}}$ 之「Concatenating Squares」。

$n = \frac{p-1}{4}$	$n = 4$	$n = 64$	$n = 16384$
$r = 10^{\frac{p-1}{4}}$	$r = 10^4$	$r = 10^{64}$	$r = 10^{16384}$
$p 10^{\frac{p-1}{2}} + 1$	$17 10^8 + 1$	$257 10^{128} + 1$	$65537 10^{32768} + 1$
$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$	$10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$	$10^{256} \equiv 1 \pmod{257}$	$10^{65536} \equiv 1 \pmod{65537}$
$p 10^{p-1} - 1$	$17 10^{16} - 1$	$257 10^{256} - 1$	$65537 10^{16} - 1$
$C_{\frac{p-1}{2}} = A_{\frac{p-1}{4}}^2 + B_{\frac{p-1}{4}}^2$	$C_8 = A_4^2 + B_4^2$	$C_{128} = A_{64}^2 + B_{64}^2$	$C_{32768} = A_{16384}^2 + B_{16384}^2$
$C_{\frac{(4k+1)(p-1)}{2}} = \frac{10^{\frac{(4k+1)(p-1)}{2}} + 1}{p}$	$C_{32k+8} = \frac{10^{32k+8} + 1}{17}$	$C_{512k+128} = \frac{10^{512k+128} + 1}{257}$	$C_{\substack{131072k \\ +32768}} = \frac{10^{131072k+32768} + 1}{65537}$

證明：由上述之條件 $\begin{cases} 10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \\ 10^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$ ，得出 $10^{\frac{(4k+1)(p-1)}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ ；所以，可令

$$a(k) = \frac{10^{\frac{(4k+1)(p-1)}{2}} + 1}{p} = \frac{10^{\frac{p-1}{2}} [10^{(p-1)k} - 1] [10^{(p-1)k} + 1]}{p} + \left(\frac{10^{\frac{p-1}{2}} + 1}{p} \right)$$

$$= \left(\frac{10^{p-1} - 1}{p} \right) \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{\frac{(2l-1)(p-1)}{2}} + \langle C_{\frac{p-1}{2}} \rangle$$

$$= C_{\frac{(4k+1)(p-1)}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
2.(1) C_{32k+8} &= A_{16k+4}^2 + B_{16k+4}^2 \\
&= \left(\frac{10^{16k+4} - 4}{17} \right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 10^{16k+4} + 1}{17} \right)^2 \\
&= \frac{(1^2 + 4^2)(10^{32k+8} + 1)}{17^2} = \frac{10^{32k+8} + 1}{17} \\
&= \left(\frac{10^{16k+4} - 4}{17} \right) * 10^{16k+4} + \left(\frac{4 \cdot 10^{16k+4} + 1}{17} \right) \\
&= 0588235294117647 \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{16l-8} + 05882353 \\
&= \boxed{A_{16k+4} \mid B_{16k+4}} \circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) C_{512k+128} &= A_{256k+64}^2 + B_{256k+64}^2 \\
&= \left(\frac{10^{256k+64} - 16}{257} \right)^2 + \left(\frac{16 \cdot 10^{256k+64} + 1}{257} \right)^2 \\
&= \frac{(1^2 + 16^2)(10^{512k+128} + 1)}{257^2} \\
&= \frac{10^{512k+128} + 1}{257} \\
&= \left(\frac{10^{256k+64} - 16}{257} \right) * 10^{256k+64} + \left(\frac{16 \cdot 10^{256k+64} + 1}{257} \right) \\
&= (0038910505836575875486381322957198443579766536964980544747081712 \\
&\quad 06225680933852140077821011673151750972762645914396887159533073929 \\
&\quad 96108949416342412451361867704280155642023346303501945525291828793 \\
&\quad 77431906614785992217898832684824902723735408560311284046692607) \\
&\quad \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{256l-128} + \langle C_{128} \rangle = \boxed{A_{256k+64} \mid B_{256k+64}}
\end{aligned}$$

[註]：綜合「四、研究過程與方法」與「六、討論及其應用」之結果，顯示出 C_{2n} 之毗鄰並列並不一定是單純 $1/p$ 的循環節形式，當然，也是脫離不了 $1/p$ 的循環節形式的。

3. 「CONCATENATING SQUARES」之 (m^2/p) TABLEAU；與有理數表示成純循環小數的關聯性：

C_n	「Concatenating Squares」	$m^2/p = m^2/m^2 + n^2$
C_4	$12^2+33^2=1233$ $(4^2+11^2=137)$	$\frac{11^2}{137} = \frac{121}{137}$
C_4	$88^2+33^2=8833$ $(8^2+3^2=73)$	$\frac{3^2}{73} = \frac{9}{73}$
C_6	$010^2+100^2=10100$ $(1^2+10^2=101)$	$\frac{10^2}{101} = \frac{100}{101}$
C_6	$990^2+100^2=990100$ $(99^2+10^2=9901)$	$\frac{10^2}{9901} = \frac{100}{9901}$
C_8	$0588^2+2353^2=05882353$ $(0588^2+2353^2=05882353)$	$\frac{2353^2}{5882353} = \frac{5536609}{5882353}$
C_8	$9412^2+2353^2=94122353$ $(4^2+1^2=17)$	$\frac{1^2}{17} = \frac{1}{17}$
C_{10}	$99010^2+09901^2=9901009901$ $(10^2+1^2=101)$	$\frac{1^2}{101} = \frac{1}{101}$
C_{10}	$82350^2+38125^2=8235038125$ $(54^2+25^2=3541)$	$\frac{25^2}{3541} = \frac{625}{3541}$
C_{12}	$123288^2+328768^2=123288328768$ $(3^2+8^2=73)$	$\frac{8^2}{73} = \frac{64}{73}$
C_{12}	$883212^2+321168^2=883212321168$ $(11^2+4^2=137)$	$\frac{4^2}{137} = \frac{16}{137}$
C_{14}	$8620690^2+3448276^2=86206903448276$ $(5^2+2^2=29)$	$\frac{2^2}{29} = \frac{4}{29}$
C_{14}	$0889680^2+2846976^2=08896802846976$ $(5^2+16^2=281)$	$\frac{16^2}{281} = \frac{256}{281}$
C_{14}	$9231820^2+2663025^2=92318202663025$ $(52^2+15^2=2929)$ $(2929=29 \times 121)$	$\frac{15^2}{2929} = \frac{225}{2929}$
C_{16}	$55642300^2+49680625^2=5564230049680625$ $(28^2+25^2=1409)$	$\frac{25^2}{1409} = \frac{625}{1409}$
C_{16}	$89086860^2+31180401^2=8908686031180401$ $(20^2+7^2=449)$	$\frac{7^2}{449} = \frac{49}{449}$
C_{16}	$70861600^2+45440001^2=7086160045440001$ $(800^2+513^2=903169)$ $(903169=641 \times 1409)$	$\frac{513^2}{903169} = \frac{263169}{903169}$
C_{16}	$18130312^2+38526913^2=1813031238526913$ $(8^2+17^2=353)$	$\frac{17^2}{353} = \frac{289}{353}$
C_{16}	$02496100^2+15600625^2=0249610015600625$ $(4^2+25^2=641)$	$\frac{25^2}{641} = \frac{625}{641}$

(四) ~ 「 C_{2n} 」 & 「 m^2/p 」 (p 是 $(4k+1)$ 型的質數或是其數個之連乘積) : 強化定理之簡單程序

程序	說明
Step① $10^t \equiv 1 \pmod{p}$; 其中 p 是適當的質數 ($p \equiv 1 \pmod{4}$) 或是其數個之連乘積 , 且一定存在 t 值 ($1 < t < p$) , 使得 $(t, p) = 1$;	$10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ $10^{256} \equiv 1 \pmod{257}$ $10^{65536} \equiv 1 \pmod{65537}$ $10^8 \equiv 1 \pmod{73}$ $10^8 \equiv 1 \pmod{137}$
Step② $10^{\frac{t}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$;	$10^8 + 1 \equiv 0 \pmod{17}$ $10^{128} + 1 \equiv 0 \pmod{257}$ 、 $10^{32768} + 1 \equiv 0 \pmod{65537}$ $10^4 + 1 \equiv 0 \pmod{73}$ $10^4 + 1 \equiv 0 \pmod{137}$
Step③ 由①&② : 得 $10^{(2k+\frac{1}{2})t} \equiv -1 \pmod{p}$, $k \in N$;	$a(k) = \frac{10^{32k+8} + 1}{17}$ $a(k) = \frac{10^{512k+128} + 1}{257}$ 、 $a(k) = \frac{10^{131072k+32768} + 1}{65537}$ $a(k) = \frac{10^{\frac{(4k+1)(p-1)}{2}} + 1}{p} \text{ 是 } C_{\frac{(4k+1)(p-1)}{2}}$ (即 $t = p - 1$ 時 , 此質數 p 稱之為全週期質數)
Step④ 必要時(滿足「 C_{2n} 」) , 得將③所得之同餘式再乘上賦予值 $m^2 (m \in N)$, 使得 $m^2 \cdot 10^{(2k+\frac{1}{2})t} \equiv -m \pmod{p}$, 且能符合 $m^2 \cdot (10^{\frac{t}{2}} + 1) \equiv 0 \pmod{p}$; 並將其 $\frac{m^2(10^{\frac{t}{2}} + 1)}{p}$ 表示成「 C_{2n} 」 , $\frac{m^2(10^{\frac{t}{2}} + 1)}{p} = A_{\frac{t}{4}}^2 + B_{\frac{t}{4}}^2 = \boxed{A_{\frac{t}{4}} \mid B_{\frac{t}{4}}}$;	$10^8 + 1 = 17 \times 05882353$ $= 17 \times \boxed{A_4 \mid B_4}$ $= 17 \times \boxed{v \mid u}$, $\boxed{v \mid u} = \frac{10^8 + 1}{17}$; $10^{128} + 1 = 257 \times \boxed{00389\sim 81712 \mid 06225\sim 07393}$ $= 257 \times \boxed{A_{64} \mid B_{64}}$ $= 257 \times \boxed{v \mid u}$, $\boxed{v \mid u} = \frac{10^{128} + 1}{257}$; <hr/> $10^4 + 1 = 73 \times 137 \Rightarrow 9(10^4 + 1) = 73 \times 1233$ $\Rightarrow 1233 = \frac{9 \cdot (10^4 + 1)}{73} = 33^2 + 12^2$ $= \frac{9 \cdot (3^2 + 8^2)(11^2 + 4^2)}{73}$ $\Rightarrow 9 \cdot (10^4 + 1) \equiv 0 \pmod{73}$ $\Rightarrow \frac{m^2}{p} = \frac{9}{73} = \overline{0.12328767}$ $\rightarrow \frac{24}{73} = \overline{0.32876712}$

		$10^4 + 1 = 73 \times 137 \Rightarrow 121 \cdot (10^4 + 1) = 137 \times 8833$ $\Rightarrow 8833 = \frac{121 \cdot (10^4 + 1)}{137} = 33^2 + 88^2$ $= \frac{121 \cdot (3^2 + 8^2)(11^2 + 4^2)}{137}$ $\Rightarrow 121 \cdot (10^4 + 1) \equiv 0 \pmod{137}$ $\Rightarrow \frac{m^2}{p} = \frac{121}{137} = \overline{0.88321167}$ $\rightarrow \frac{44}{137} = \overline{0.32116788}$
Step⑤	<p>如此，我們便能更多元化的研究「C_{2n}」；即</p> $a(k) = \frac{m^2 \cdot \left[10^{(2k+\frac{1}{2})t} + 1 \right]}{p}$ $= \frac{m^2 \cdot (10^{\frac{t}{2}} + 1)}{p} + \frac{m^2 \cdot \left[10^{(\frac{4k+1}{2})t} - 10^{\frac{t}{2}} \right]}{p}$ $= \langle C_{\frac{t}{2}} \rangle + \left[\frac{m^2 \cdot (10^t - 1)}{p} \right] \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{\frac{(2l-1)t}{2}}$ <p>也就是說；</p> $C_{(2k+\frac{1}{2})t} = a(k)$ $= A^2_{(\frac{4k+1}{4})t} + B^2_{(\frac{4k+1}{4})t}, k \in N。$	$m^2 = \frac{9}{73} : a(k) = \frac{9 \cdot (10^{16k+4} + 1)}{73}$ $= \frac{9 \cdot (10^4 + 1)}{73} + \frac{9 \cdot (10^{16k+4} - 10^4)}{73}$ $= \left[\frac{9 \cdot (10^8 - 1)}{73} \right] \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{4(2l-1)} + 1233$ $m^2 = \frac{121}{137} : a(k) = \frac{121 \cdot (10^{16k+4} + 1)}{137}$ $= \frac{121 \cdot (10^4 + 1)}{137} + \frac{121 \cdot (10^{16k+4} - 10^4)}{137}$ $= \left[\frac{121 \cdot (10^8 - 1)}{137} \right] \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{4(2l-1)} + 8833$

[註]：①當 $t=p-1$ (週期等於 $p-1$)，即恰好與質數的倒數有重要之關係：性質二、性質三、性質四及定理。

② $\frac{10^{\frac{t}{2}} + 1}{p}$ 或 $\left(\frac{m^2(10^{\frac{t}{2}} + 1)}{p} \right)$ ：透過 10^k+1 之標準分解式(表列「 $10^{2n}+1$ 」)，求出代表數 $C_{\frac{t}{2}}$ 。

③得知「Concatenating Squares」與 m^2/p 表示成純循環小數有著密切的關係(p 是某些特定的質數)；如： $m^2/p = \frac{9}{73}, \frac{121}{137}, \frac{100}{9901}, \frac{1}{101}, \frac{625}{3541}, \frac{16}{137}, \frac{4}{29}, \frac{289}{353}, \frac{625}{1409}, \frac{625}{641}, \dots$ 。

例： $p=353$ ， $\text{Len}(353)=32$ ： C_{64k+16} ：

$$\begin{cases} 10^{32} \equiv 1 \pmod{353} \\ 10^{16} + 1 \equiv 0 \pmod{353} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10^{64k+16} \equiv -1 \pmod{353} \\ 289 \times 10^{64k+16} \equiv -289 \pmod{353} \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a(k) &= \frac{289(10^{64k+16} + 1)}{353} \\ &= \frac{289 \times 10^{16} \times (10^{32k} - 1) \times (10^{32k} + 1)}{353} + 8186968838526913 \\ &= \frac{289(10^{16} + 1)}{353} + \frac{289(10^{32} - 1)}{353} \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{32l-16} ; \text{且 } C_{64k+16} = A_{32k+8}^2 + B_{32k+8}^2, k \in N. \end{aligned}$$

(1) 承四，研究過程與方法中(一)： $r^2 + 1 = (m^2 + n^2)(u^2 + v^2)$ ； $mu - nv = 1$ ， $mu + nv = r$ ，其中 $m, n, u, v \in N$ 。

$r = 10^n$ ($n = \log r$)	$m^2 + n^2 \mid r^2 + 1$	(u, v)	$(a, b) = (mv, mu)$	$a^2 + b^2 = C_{2n}$
① r	$m^2 + n^2 \mid r^2 + 1$	$\left(\frac{nr + m}{m^2 + n^2}, \frac{mr - n}{m^2 + n^2} \right)$	$\left(\frac{m^2 r - mn}{m^2 + n^2}, \frac{mnr + m^2}{m^2 + n^2} \right)$	$\frac{m^2(r^2 + 1)}{m^2 + n^2} = C_{2 \log r}$
② r^{4k+1}	$m^2 + n^2 \mid r^{8k+2} + 1$	$\left(\frac{n \cdot r^{4k+1} + m}{m^2 + n^2}, \frac{m \cdot r^{4k+1} - n}{m^2 + n^2} \right)$	$\left(\frac{m^2 \cdot r^{4k+1} - mn}{m^2 + n^2}, \frac{mn \cdot r^{4k+1} + m^2}{m^2 + n^2} \right)$	$\frac{m^2(r^{8k+2} + 1)}{m^2 + n^2} = C_{(8k+2) \log r}$
③ r^{4k-1}	$m^2 + n^2 \mid r^{8k-2} + 1$	$\left(\frac{m \cdot r^{4k-1} + n}{m^2 + n^2}, \frac{n \cdot r^{4k-1} - m}{m^2 + n^2} \right)$	$\left(\frac{n^2 \cdot r^{4k-1} - mn}{m^2 + n^2}, \frac{mn \cdot r^{4k-1} + n^2}{m^2 + n^2} \right)$	$\frac{n^2(r^{8k-2} + 1)}{m^2 + n^2} = C_{(8k-2) \log r}$

不失一般性，可由②得：

$$a^2 + b^2 = \frac{m^2(r^{8k+2} + 1)}{m^2 + n^2} = \frac{m^2(r^2 + 1)}{m^2 + n^2} + \frac{m^2(r^4 - 1)}{m^2 + n^2} \cdot \sum_{l=1}^{2k} r^{2(2l-1)} = \frac{m^2(r^2 + 1)}{p^2} + A \cdot \sum_{l=1}^{2k} r^{2(2l-1)}$$

$$\left(\text{令 } \frac{m^2}{m^2 + n^2} = \frac{m^2}{p} = 0.\bar{A} \Rightarrow A = \frac{m^2(r^4 - 1)}{p}, \text{Len}(p) = 4 \log r \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10^t \equiv 1 \pmod{p} \\ 10^{\frac{t}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}, \text{其中 } t = 4 \log r$$

\Rightarrow 強化定理的簡單程序「 C_{2n} Class」： $C_{\left(\frac{4k+1}{2}\right)_t} = A_{\left(\frac{4k+1}{4}\right)_t}^2 + B_{\left(\frac{4k+1}{4}\right)_t}^2$ ，即

$$C_{(8k+2) \log r} = A_{(4k+1) \log r}^2 + B_{(4k+1) \log r}^2$$

\Rightarrow 產生共軛之「 C_{2n} Class」，如「 $C_{(4k+1)2n}$ 」與「 $C_{(4k-1)2n}$ 」互為共軛之「Concatenating Squares」。

(2)

$r = 10^n$ $m^2 + n^2 \mid r^2 + 1$	(u, v)	$(a, b) = (mv, mu)$	$a^2 + b^2 = C_{2n}$
$r = 10^{8k+2}$	$\left(\frac{8 \times 10^{8k+2} + 3}{73}, \frac{3 \times 10^{8k+2} - 3}{73} \right)$	$\left(\frac{9 \times 10^{8k+2} - 24}{73}, \frac{24 \times 10^{8k+2} + 9}{73} \right)$	C_{16k+4} $= \frac{9(10^{16k+4} + 1)}{73}$
$3^2 + 8^2 \mid 10^{16k+4} + 1$			$= \frac{9(10^4 + 1)}{73}$ $+ \frac{9(10^8 - 1)}{73} \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{8l-4}$
$11^2 + 4^2 \mid 10^{16k+4} + 1$	$\left(\frac{4 \times 10^{8k+2} + 11}{137}, \frac{11 \times 10^{8k+2} - 4}{137} \right)$	$\left(\frac{121 \times 10^{8k+2} - 44}{137}, \frac{44 \times 10^{8k+2} + 121}{137} \right)$	C_{16k+4} $= \frac{121(10^{16k+4} + 1)}{137}$ $= \frac{121(10^4 + 1)}{137}$ $+ \frac{121(10^8 - 1)}{137} \cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{8l-4}$
$r = 10^{8k-2}$	$\left(\frac{3 \times 10^{8k-2} + 8}{73}, \frac{8 \times 10^{8k-2} - 3}{73} \right)$	$\left(\frac{64 \times 10^{8k-2} - 24}{73}, \frac{24 \times 10^{8k-2} + 64}{73} \right)$	C_{16k-4} $= \frac{64(10^{16k-4} + 1)}{73}$
$8^2 + 3^2 \mid 10^{16k-4} + 1$			$= \frac{64(10^{12} + 1)}{73}$ $+ \frac{64(10^8 - 1)}{73} \cdot \sum_{l=1}^{2(k-1)} 10^{8l+4}$
$4^2 + 11^2 \mid 10^{16k-4} + 1$	$\left(\frac{11 \times 10^{8k-2} + 4}{137}, \frac{4 \times 10^{8k-2} - 11}{137} \right)$	$\left(\frac{16 \times 10^{8k-2} - 44}{137}, \frac{44 \times 10^{8k-2} + 16}{137} \right)$	C_{16k-4} $= \frac{16(10^{16k-4} + 1)}{137}$ $= \frac{16(10^{12} + 1)}{137}$ $+ \frac{16(10^8 - 1)}{137} \cdot \sum_{l=1}^{2(k-1)} 10^{8l+4}$

$r = 10^{\frac{65536k}{16384}}$	$\left(\frac{256 \times 10^{\frac{65536k}{16384}} + 1}{65537}, \right.$	$\left(\frac{10^{65536k+16384} - 256}{65537}, \right.$	$\frac{C_{131072k+32768}}{10^{131072k+32768}} + 1$
$1^2 + 256^2 10^{32768} + 1$	$\left. \frac{10^{\frac{65536k}{16384}} - 256}{65537} \right)$	$\left. \frac{256 \times 10^{65536k+16384} + 1}{65537} \right)$	$= \frac{65537}{10^{32768} + 1}$ $= \frac{65537}{10^{65536} - 1}$ $+ \frac{10^{65536} - 1}{65537}$ $\cdot \sum_{l=1}^{2k} 10^{65536l-32768}$
$r = 10^{-\frac{65536k}{16384}}$	$\left(\frac{10^{-\frac{65536k}{16384}} + 256}{65537}, \right.$	$\left(\frac{65536 \times 10^{-\frac{65536k}{16384}} - 256}{65537}, \right.$	$\frac{C_{131072k-32768}}{10^{131072k-32768}}$
$256^2 + 1^2 10^{32768} + 1$	$\left. \frac{256 \times 10^{-\frac{65536k}{16384}} - 1}{65537} \right)$	$\left. \frac{256 \times 10^{-\frac{65536k}{16384}} + 65536}{65537} \right)$	$= \frac{65536(10^{131072k-32768} + 1)}{65537}$ $= \frac{65536(10^{98304} + 1)}{65537}$ $+ \frac{65536(10^{65536} - 1)}{65537}$ $\cdot \sum_{l=1}^{2(k-1)} 10^{\frac{65536l}{32768}}$

- (3) ① 「 C_{2n} 」與有理數(m^2/p)表示成純循環小數的關聯性，即可找出兩個有理數並表成純循環小數，藉此來提高「 C_{2n} 」之組合位數，且結果完全取決於「 C_{2n} 」的基本定義及其研究原理(方法)，且經由整體的計算及數據驗證而得，進而延伸推廣「 C_{2n} Class」。
- ② 研究過程結合了「同餘式的概念及其應用」，發展出新穎方法「強化定理的簡單程序」來探討「 C_{2n} 」。
- ③ 「 C_{2n} 」 \rightarrow 「 $C_{(4k+1)2n}$ 」 \rightarrow 「 $C_{(4k-1)2n}$ 」；即 $r = 10^n \rightarrow r^d = (10^n)^d$ ，且 d 是奇數，即保持 $m^2 + n^2 | r^2 + 1$ 或是 $n^2 + m^2 | r^2 + 1$ ，便能由「 C_{2n} Class」再產生共軛之「 C_{2n} Class」。
- ④ 當 $m = 1$ ，說明了「 $C_{\frac{t}{2}}$ 」與質數的倒數有重要之關係：性質二、性質三、性質四及

定理；且所有得到之代表數 $\frac{10^{\frac{t}{2}} + 1}{p}$ 或 $\frac{m^2(10^{\frac{t}{2}} + 1)}{p}$ 皆須由【1】得出。

- (五)由性質一、性質二、性質三、性質四，得出與「 $1/p : p=17,257,65537$ 」的關聯性，更提出定理來說明這一切事實；再透過「 C_{2n} 」與「有理數表成純循環小數」之對應，再透過強化定理之簡單程序，更可以從無限多的「 C_{2n} 」再推廣至更無限多的「 C_{2n} Class」。

1.

Step①：Circle Method：直接計算出或解二元一次聯立方程組；「 $10^{2n}+1$ 」Method：基本解「 C_{2n} 」代表數。

Step②：應用強化定理之簡單程序：「 C_{2n} 」&「有理數表示成純循環小數」之對應(六、討論及其應用中(四)之「簡單程序」 \rightarrow 計算搜尋 m^2/p)，研究出與「 C_{2n} 」有關之特定有理數，並表示成純循環小數(有理數與純循環小數的互化)，並找出其循環

節之長度。

Step③：應用「性質二」、「性質三」、「性質四」、「定理」及「強化定理之簡單程序」，加以擴充「 C_{2n} Class」。

Step④：最後，應用「性質一」，生成對稱之「 C_{2n} 」→「 C_{2n} Class」→共軛之「 C_{2n} Class」。

Step⑤：結合電腦於研究中，互相驗證其全部結果。(詳細紀錄資料請參閱說明書)

2. 「 C_{2n} 」與 m^2/p 、 $\text{Len}(p)$ ~有理數與純循環小數的互化：(表列 C_{2n} 各組之代表，詳細資料請參閱相關附件。)

C ₄	$\frac{3^2}{73} = 0.\overline{12328767}$; Len (73)=8 $12^2+33^2=1233 \longleftrightarrow 1232876712^2+3287671233^2=12328767123287671233$, $88^2+33^2=8833$; $8767123288^2+3287671233^2=87671232883287671233$ 。	C _{16k+4} (C ₂₀)
C ₆	$\frac{10^2}{9901} = 0.\overline{010099989900}$; Len (9901)=12 $990^2+100^2=990100 \longleftrightarrow 989900010099990^2+099989900010100^2$ $010^2+100^2=010100$; $=989900010099990099989900010100$, $010099989900010^2+099989900010100^2$ $=010099989900010099989900010100$ 。	C _{24k+6} (C ₃₀)
C ₈	$\frac{1^2}{17} = 0.\overline{0588235294117647}$; Len (17)=16 $9412^2+2353^2=94122353 \longleftrightarrow$ $0588^2+2353^2=05882353$; $05882352941176470588^2+23529411764705882353^2$ $=0588235294117647058823529411764705882353$, $94117647058823529412^2+23529411764705882353^2$ $=9411764705882352941223529411764705882353$ 。	C _{32k+8} (C ₄₀)
C ₁₀	$\frac{304^2}{357641} = 0.\overline{25840437757415956224}$; Len (357641)=20 $74160^2+43776^2=7416043776 \longleftrightarrow$ $25840^2+43776^2=2584043776$; $2584043775741595622425840^2+4377574159562242584043776^2$ $=25840437757415956224258404377574159562242584043776$, $7415956224258404377574160^2+4377574159562242584043776^2$ $=74159562242584043775741604377574159562242584043776$ 。	C _{40k+10} (C ₅₀)

C ₁₂	$\frac{41096^2}{13698630137} = \frac{1688881216}{13698630137} = \overline{0.123288328767876711671232};$ <p style="text-align: right;">Len (13698630137)=24</p> $876712^2+328768^2=876712328768 \quad \longleftrightarrow$ $123288^2+328768^2=\underline{123288328768};$ $\begin{array}{r} \boxed{123288328767876711671232}123288^2+ \\ \boxed{328767876711671232123288}328768^2 \\ =\mathbf{123288328767876711671232123288328767876711671232123288328768}, \\ 876711671232123288328767876712^2+ \\ 328767876711671232123288328768^2 \\ =\mathbf{876711671232123288328767876712328767876711671232123288328768} \circ. \end{array}$	C _{32k+8} (C ₄₀)
C ₁₄	$\frac{23255^2}{3523484021} = \frac{540795025}{3523484021} = \overline{0.1534830360452484651696395475};$ <p style="text-align: right;">Len (3523484021)=28</p> $8465170^2+3604525^2=84651703604525 \quad \longleftrightarrow$ $1534830^2+3604525^2=\underline{15348303604525};$ $\begin{array}{r} \boxed{1534830360452484651696395475}1534830^2+ \\ \boxed{3604524846516963954751534830}3604525^2 \\ =\mathbf{15348303604524846516963954751534830360452484651696} \\ \mathbf{39547515348303604525}, \\ 84651696395475153483036045248465170^2+ \\ 36045248465169639547515348303604525^2 \\ =\mathbf{84651696395475153483036045248465170360452484651696} \\ \mathbf{39547515348303604525} \circ. \end{array}$	C _{56k+14} (C ₇₀)
C ₁₆	$\frac{25^2}{1409} = \overline{0.44357700496806245564229950319375}; \text{ Len (1409)=}\mathbf{32}$ $55642300^2+49680625^2=5564230049680625 \quad \longleftrightarrow$ $44357700^2+49680625^2=\underline{4435770049680625};$ $\begin{array}{r} \boxed{44357700496806245564229950319375}44357700^2+ \\ \boxed{49680624556422995031937544357700}49680625^2 \\ =\mathbf{44357700496806245564229950319375443577004968062455} \\ \mathbf{642299503193754435770049680625}, \\ 5564229950319375443577004968062455642300^2 + \\ 4968062455642299503193754435770049680625^2 \\ =\mathbf{55642299503193754435770049680624556423004968062455} \\ \mathbf{642299503193754435770049680625} \circ. \end{array}$	C _{64k+16} (C ₈₀)

(六)一個有趣的聯想：方程式 $a^2+b^2+c^2=u^2$ ($u \neq 0$)之整數解(勾股數問題的推廣)，由【2】中可得出下列新結果：

(1)幾何新方法(Spherical Method 三度空間解析幾何原理)：

首先，我們得到 $(\frac{a}{u})^2+(\frac{b}{u})^2+(\frac{c}{u})^2=1$ ，簡化為「求出方程式 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 的有理解 $(\alpha,$

$\beta, \gamma)$ 」。在 R^3 中的圖形是球面， $(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \frac{2mn}{m^2+n^2}, 0)$ 落在球面上，考慮通過

$(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \frac{2mn}{m^2+n^2}, 0)$ 之直線，且給定其方向以向量 (r, p, q) 表示之，得直線之參數方

程式： $\alpha = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} + rt$ ， $\beta = \frac{2mn}{m^2+n^2} + pt$ ， $\gamma = qt$ ；其中 $r, p, q \in Z$ 且 t 代表參數 ($t \neq 0$)。

得到 $(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} + rt)^2 + (\frac{2mn}{m^2+n^2} + pt)^2 + (qt)^2 = 1$ ，解出參數值 t 如后：

$t = \frac{-2r(m^2-n^2) - 4mnp}{(m^2+n^2)(p^2+q^2+r^2)}$ ；對應的點 (α, β, γ) 即是該直線與球面相交的點。令

$(m^2+n^2)(p^2+q^2+r^2)=u$ ，

得出 $a = (m^2-n^2)(p^2+q^2-r^2) - 4mnp$ ， $b = 2mn(r^2-p^2+q^2) - 2rp(m^2-n^2)$ ，

$c = -2qr(m^2-n^2) - 4mnpq$ ；

又由【4】得下列等式： $(p^2+q^2-r^2-s^2)^2 + [2(pr+qs)]^2 + [2(ps-qr)]^2 = (p^2+q^2+r^2+s^2)^2$ ，提供了不定方程： $a^2+b^2+c^2=u^2$ ， $u \neq 0$ 的完全解(Complete Solution)。

(2)應用相同的方法及技巧，對於不定方程式： $a^2+b^2+c^2+d^2=u^2$ ，我們仍能推得生成整數解之等式；對於更一般化之不定方程式： $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_n^2=u^2$ ，也能推得如前之等式結果。且得知當 $ps-qr=1$ 時，簡化為 $(pr+qs)^2+1=(p^2+q^2)(r^2+s^2)$ ，同時；令 $R = pr+qs = 10^n$ ，則滿足「 C_{2n} 」的整數解 $(a, b) = (pr, ps)$ ， (qs, ps) ， $(pr, -qr)$ ， $(qs, -qr)$ 。

七、結論及未來研究方向：

- (一)「 C_{2n} 」Tableau： $C_{2k} : \{k=2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 之結果都以成對的形式出現，因此顯示「兩半」、「平方」和「成對」。
- (二)解決一些猜想與問題：「 C_{2n} 」與 $1/17$ 、 $1/257$ 、 $1/65537$ 的關聯性，提出完全決定性的證據（性質）。（ $F_n=2^{2^n}+1$ ， $n=0,1,2,3,4,5,\dots$ ； F_n ：質數， $F_2=17$ ， $F_3=257$ ， $F_4=65537$ 。）
- (三)電腦輸出之結果：結果由程式語言 VISUAL BASIC 6.0 電腦程式所得，這是專門為「平方加總」設計的獨立程式。
- (四)探討「 C_{2n} 」之「性質一」、「性質二」、「性質三」、「性質四」、「定理」、「強化定理」之簡單程序。
- (五)如何更多元探討分類「 C_{2n} 」與「有理數表示成純循環小數」之對應，結合可表為兩個平方數之和的一種特定型式的數，即循環節長度(Len(m/p))之分類與其所對應「強化定理」歸納的簡單程序。

(六) 擴充之「 C_{2n} Class」與「 m^2/p & $\text{Len}(m^2/p)$ 」之表列：與有關之特定有理數與純循環小數的互化~

C ₄	C _{16k+4}	Len (73)=8
C ₆	C _{24k+6}	Len (9901)=12
C ₈	C _{32k+8}	Len (17)=16
C ₁₀	C _{40k+10}	Len(101)=4、Len (3541)=20、Len (27961)=20
C ₁₂	C _{48k+12}	Len (73)=8、Len(137)=8
C ₁₄	C _{56k+14}	Len (28381)=28、Len (29)=28、Len (281)=28、Len (2929)=28
C ₁₆	C _{64k+16}	Len (1409)=32、Len (24659521)=32、Len (44778337)=32、 Len (226273)=32、Len (903169)=32、Len (632641)=32、 Len (69857)=32、Len (353)=32

(七) 若將 $r = 10^n$ 改為 $r = q^n$ 時，即可得出 q 進位的「Concatenating Squares」；

如：(二進位)若 $\begin{cases} r = 1000_2 = 8_{10} \\ r^2 + 1 = 65_{10} = 5_{10} \times 13_{10} = (2^2 + 1^2)(2^2 + 3^2) \end{cases}$ ，則 $\begin{cases} 110_2^2 + 100_2^2 = 110100_2^2 \\ 010_2^2 + 100_2^2 = 010100_2^2 \end{cases}$ 。

(八) 一個新的幾何方法解不定方程： $a^2+b^2+c^2=u^2$ ($u \neq 0$)之整數解，並結合「 C_{2n} 」及探討其一般化的不定方程式(推廣)： $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = u^2$ ($u \neq 0$)。

(九) 代數數論：「 C_{2n} 」概念一般化，得 $10^n \cdot A + B = A^2 + B^2$ ，令 $F(A) = 10^n \cdot A - A^2 = (B^2 - B)$ 且 $10^{n-1} \leq A \leq 10^n - 1$ ；並將每個 A 試算值(約 $9 \cdot 10^{n-1}$ 次)計算出 $F(A)$ ，得

$B - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{4F(A) + 1}$ ，即 $\sqrt{F(A)} < B - \frac{1}{2}$ ，假設 b 是 $F(A)$ 的平方根，四捨五入至最近的正整數，得出 $F(A) = b^2 - b$ 。($F(A) \doteq B - 0.5$ ， $b = B$)

(1)等式改寫成 $(10^n)^2 + 1 = (2A - 10^n)^2 + (2B - 1)^2$ ，

(2)由 $(10^{2n} + 1)$ 之標準分解式，即計算要點是在於 $(10^{2n} + 1)$ 的質因數分解，

(3)以各質因子(prime factor)作為平方值的總和，即將其寫成平方和(兩因子之積)，

(4)依據與複數之乘法運算相關聯的法則且結合等式：

$(m^2 + n^2)(u^2 + v^2) = (mv + nu)^2 + (mu - nv)^2$ ，此即為得出 A 值和 B 值之關鍵；且 $(2B - 1)$ 是奇數， $(2A - 10^n)$ 是偶數，則 $(A, B) = (mv, mu)$ ， $(mv, -nu)$ ， (nu, mu) ， $(nu, -nv)$ 滿足不定方程。

(十)使用 VISUAL BASIC 程式解決 C_{20} 的問題時，找到了兩半數字平方總和的質數答案：

00990_09901 (C_{10})及 0000999900_0099990001 (C_{20})；找到一個模式為此類 C_{10k} 產生更多類似的答案。

$$\{0\}2k \{9\}2k \{0\}k _ \{0\}k \{9\}2k \{0\}2k - 1 \{1\}1,$$

且 C_{160} 數字(128 位數)是一個質數： $\{9\}32 \{0\}32 \{9\}32 \{0\}31 \{1\}1$ ；理論上我們要尋找的是具有 $a = t_k \cdot 10^k$ ， $b = t_k \cdot 10^{2k} + 1$ 形式的 a 和 b 答案，若且唯若 $t_k = 10^{2k} - 1$ 。

以下是此類「 C_{2n} 」的結果：(結合了「性質一」、「性質二」、「性質三」之原理)

C_{2n}	$m^2 + n^2$	A_n	B_n	C_{2n}
C_{10k}	$1 + (10^k)^2$	$10^k(10^{2k} - 1)$	$10^{4k} - 10^{2k} + 1$	$\sum_{i=1}^5 (-1)^{i-1} \cdot 10^{2(i-1)k}$
	型式： $\{0\}2k\{9\}2k\{0\}k_ \{0\}k\{9\}2k\{0\}2k-1\{1\}1$			
C_{6k}	$(10^k)^2 + 1$	$10^k(10^{2k} - 1)$	10^{2k}	$\sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} \cdot 10^{2ik}$
	型式： $\{9\}2k\{0\}2k\{0\}k_ \{0\}k-1\{1\}1\{0\}2k$			
C_{8k-2}	$10^2 + 1$	$\frac{10(10^{4k} - 1)}{101}$	$\frac{10^2(10^{4k-2} + 1)}{101}$	$\sum_{i=1}^{4k-1} (-1)^{i-1} \cdot 10^{2(i-1)}$
	型式： $\{9900\}k-1\{990\}1_ \{0990\}k-1\{100\}1$			
C_{8k+2}	$1 + 10^2$	$\frac{10(10^{4k+2} + 1)}{101}$	$\frac{(10^{4k+2} + 1)}{101}$	$101 \left[\sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} \cdot 10^{2(i-1)} \right]^2$
	型式： $\{9900\}k-1\{99010\}1_ \{099\}1\{0099\}k-1\{01\}1$			

(十一)一組數字等於其依序各三部份三次方的總和：

以下是低於 10^{10} 而且符合上述條件的前 23 組數字，且是個永無止盡的排列：153, 370, 371, 407, 165033, 221859, 336700, 336701, 340067, 341067, 407000, 407001, 444664, 487215, 982827, 983221, 166500333, 296584415, 333667000, 333667001, 334000667, 710656413, 828538472, ...

(十二) $n > 4$ 時， F_n 都是合成數？能否再發現任何一個 F_n 是質數，使之能產生「 C_{2n} 」 $\sim 1/p$ 。

八、參考資料及其他:

- 【1】B Suryanarayana Rao, *A Certain Type of Number Expressible as the Sum of Two Squares.*, Mathematics Magazine. Volume 57, Number 4, Page236-237.(1984)
- 【2】Ayoub B. Ayoob, *Integral Solutions to the Equation $x^2 + y^2 + z^2 = u^2$ A Geometrical Approach .*, Mathematics Magazine. Volume 57, Number 4, Page222-223.(1984)
- 【3】余文卿著，高級中學「數學(一)、(二)、(三)」，龍騰文化事業公司編印。
- 【4】單墀著，趣味數論，九章出版社，2000。
- 【5】單墀、余紅兵著，不定方程，凡異出版社 1996。
- 【6】潘承洞、潘承彪著，初等數論，凡異出版社，1999。

九、後記:

此次科展 Generalization of Some Special Forms of Numbers Expressible as the Sum of Two Squares ~ 「Concatenating Squares」之研究過程與方式及其研究結果，在發展上及其延伸方面大致是跟著「數學思考」的角度在進行，而在不斷的研究中發現更多的知識、原理、定理，而陷入了遊戲的樂趣當中。更盼由此次國際科展，激起大家共同思考生活的問題之興趣。

十、附錄：

【附錄一】

(一)電腦輸出結果

1.程式一：直接計算法(Visual Basic 6.0)

```
Dim along, a, D As Double
```

```
Private Sub Command1_Click()
```

```
    howlong = 10 ^ Text1.Text
```

```
    For i = 10 To howlong
```

```
        along = Len(i)
```

```
        a = (25 * 10 ^ (2 * (along - 1)) - (i ^ 2 - i))
```

```
        If a >= 0 Then
```

```
            D = a ^ (1 / 2)
```

```
            If D - Int(D) = 0 Then
```

```
                Text2.Text = ((5 * 10 ^ (along - 1)) + D) & vbCrLf & Text2.Text
```

```
                Text3.Text = i & vbCrLf & Text3.Text
```

```
            End If
```

```
        End If
```

```
    Next i
```

```
End Sub
```

```
Private Sub Command2_Click()
```

```
    Unload Me
```

```
End Sub
```

2.程式二：代表數之推廣(Visual Basic)

```
Option Base 1
```

```
    Dim a(200), b(200), c(200)
```

```
    Dim txt, ans
```

```
    Dim arraya(401), arrayb(401), arrayc(401) As Integer
```

```
Private Sub Command1_Click()
```

```
    For i = 1 To 401
```

```
        arraya(i) = 0: arrayb(i) = 0: arrayc(i) = 0
```

```
    Next i
```

```
    txt = Text1
```

```
    check
```

```
    ansa = ans
```

```
    txt = Text2
```

```
    check
```

```
    ansb = ans
```

```
    longa = Len(ansa)
```

```
    longb = Len(ansb)
```

```
    For i = 1 To longa
```

```
        arraya(i) = Mid(ansa, longa - i + 1, 1)
```

```
    Next i
```

```
    For i = 1 To longb
```

```
        arrayb(i) = Mid(ansb, longb - i + 1, 1)
```

```
    Next i
```

```
    If longa <= longb Then
```

```
        n = longa
```

```

Else
    n = longb
End If
For i = 1 To n
    numa = Val(arraya(i)) + Val(arrayb(i))
    If Len(numa) = 2 Then
        arraya(i + 1) = Val(arraya(i + 1)) + Val(Left(numa, 1))
        arrayc(i) = Right(numa, 1)
    Else
        arrayc(i) = numa
    End If
Next i
For i = 1 To n + 1
    answer = arrayc(i) & answer
Next i
Text3.Text = answer
End Sub

```

```

Private Sub Command2_Click()

```

```

    Unload Me

```

```

End Sub

```

```

Private Sub check()

```

```

    ans = ""

```

```

    For i = 1 To 200

```

```

        a(i) = 0: b(i) = 0: c(i) = 0

```

```

    Next i

```

```

    along = Len(txt)

```

```

    For i = 1 To along

```

```

        a(i) = Mid(txt, along - i + 1, 1)

```

```

        b(i) = Mid(txt, along - i + 1, 1)

```

```

    Next i

```

```

    For i = 1 To along

```

```

        n = -1

```

```

        For j = 1 To along

```

```

            n = n + 1

```

```

            temp = a(i) * b(j)

```

```

            If Len(temp) = 2 Then

```

```

                c(i + n) = c(i + n) + Val(Right(temp, 1))

```

```

                tempb = c(i + n)

```

```

                If Len(tempb) = 2 Then

```

```

                    c(i + n) = Right(tempb, 1)

```

```

                    c(i + n + 1) = c(i + n + 1) + Val(Left(tempb, 1))

```

```

                End If

```

```

                c(i + n + 1) = c(i + n + 1) + Val(Left(temp, 1))

```

```

            Else

```

```

                c(i + n) = c(i + n) + temp

```

```

                tempa = c(i + n)

```

```

                If Len(tempa) = 2 Then

```

```

                    c(i + n) = Right(tempa, 1)

```

```

                    c(i + n + 1) = c(i + n + 1) + Val(Left(tempa, 1))

```

```

                End If

```

```

            End If

```

```

Next j
Next i
For i = 1 To along * 2
  ans = c(i) & ans
Next i
End Sub

```

【附錄二】

$\frac{1}{17}$, $\frac{1}{257}$, $\frac{1}{65537}$ 之純循環小數的表示：「CONCATENATING SQUARES」 \sim 「 $\frac{1}{p}$: $p=17, 257, 65537$ 」

Len(17) = 16 , Len(257) = 256 , Len(65537) = 65536 。

1. $\frac{1}{17} = 0.0588235294117647$

2. $\frac{1}{257} = 0.00389105058365758754863813229571984435797665369649805447470817120622568$
 0933852140077821011673151750972762645914396887159533073929961089494163424124513
 6186770428015564202334630350194552529182879377431906614785992217898832684824902
 723735408560311284046692607

3. $\frac{1}{65537} = 0.0000152585562354090055998901383951050551596807910035552436$

0285029830477440224605947785220562430382837175946411950501243572333185833956391
 0462792010619955139844667897523536322993118391137830538474449547583807620122983
 9632573965851351145154645467445870271754886552634389734043364816821032393914887
 7733188885667638128080321040023193005477821688511833010360559683842714802325403
 9702763324534232570914140104063353525489418191250743854616476189022994644246761
 3714390344385614233181256389520423577521094953995452950241848116331232738758258
 6935624151242809405374063506111051772281306742756000427239574591452156796923875
 0629415444710621480995468208798083525336832628896653798617574805071944092649953
 4614034820025329203350778949295817629735874391565070113065901704380731495185925
 5077284587332346613363443550971207104383783206433007308848436760913682347376291
 2553214214870988907029616857652928879869386758624898912064940415337900727833132
 4290095671147596014465111311167737308695851198559592291377389871370370935502082
 7929261333292643850038909318400292964279719852907517890657186017059065871187268
 2606771747257274516685231243419747623479866335047377817110944962387658879716801
 1962708088560660390313868501762363245189740146787310984634633870943131360910630
 6361292094542014434594198696919297496070921769382181058028289363260448296382196
 3165845247722660481865205914216396844530570517417641942719379892274592978012420
 4647756229305583105726536155148999801638768939682927201428200863634282924149716
 9537818331629461220379327708012267879213268840502311671269664464348383355966858
 4158566916398370386194058318201931733219402780108946091520820299983215588141050
 0938401208477653844393243511298960892320368646718647481575293345743625738132657

8879106458946854448632070433495582647969849092878831804934617086531272411004470
7569769748386407678105497657811617864717640416863756351374032988998580954270106
9624792102171292552298701496864366693623449349222576559805911164685597448769397
4396142636983688603384347773013717442055632696034301234417199444588553031112196
1639989624181759921876192074705891328562491417062117582434350061797152753406472
6795550605001754733967072035643987365915437081343363290965408853014327784305049
0562582968399530036467949402627523383737430764301081831637090498497032210812212
9484108213680821520667714420861498085051192456169797213787631414315577460060729
0538169278422875627508125181195355295481941498695393441872530021209393167218517
7838472923691960266719562994949417886079619146436364191220226742145658177823214
3674565512611196728565543128309199383554328089476173764438408837755771548896043
4563681584448479484871141492591970947708927781253337809176495719974975967773929
2308161801730320277095381235027541694004913255107801699803164624563223827761417
2147031447884401177960541373575232311518684102110258327357065474464806140043029
1285838533957916901902741962555502998306300257869600378412194638143338877275432
1986053679600836168881700413506873979584051757022750507346994827349436196347101
6372430840593863008682118497947724186337488746814776385858370081022933610021819
7354166348780078428979050002288783435311350839983520759265758273952118650533286
5404275447457161603369089216778308436455742557639196179257518653584997787509345
8656941880159299327097670018462853044844896775867067458077116743213757114301844
7594488609487770267177319682011688054076323298289515846010650472252315485908723
3165997833285014571921204815600347895082167325327677495155408395257640722034881
0595541449868013488563712101560950302882341272868761157819247142835344919663701
4205715855165784213497718845842806353662816424309931794253627721744968491081373
8804034362268642141080610952591665776584219601141340006408593618871782351953858
1259441231670659322214932023131971252880052489433449806979263622076079161389749
3019210522300379938050261684239437264446038115873476051695988525565710972427788
8826159268809985199200451653264568106565756748096495109632726551413705235210644
3688298213223064833605444252864793933198040801379373483680974106230068510917496
9864351435067213940216976669667516059630437767978393884370660848070555564032531
2418938919999389657750583639776004394464195797793612768359857790255885988067809
0239101576208859117750278468651296214352197995025710667256664174435814883195752
0179440621328409905854708027526435448677846102201809664769519508064146970413659
4595419381418130216518912980453789462441063826540732715870424340448906724445732
9447487678715839907227978088713245952667958557761264629140790698384118894670186
3069716343439583746585898042327234997024581534095243908021423012954514243862245
7543067274974441918305689915620184018188199032607534675069044966965225750339502
8762378503745975555792910874773028975998291041701634191372812304499748233822115
7514076018127164807665898652669484413384805529700779712223629400186154386071989
8683186596884202816729481056502433739719547736393182477074019256297969086165067
0613546546225796115171582464867174267970764606252956345270610494834978714314051
6044371881532569388284480522452965500404351740238338648397088667470283961731540
9615942139554755329050765216595205761630834490440514518516257991668828295466682
9424599844362726398828142881120588369928437371255931763736515250926957291301097
0901933259075026321009506080534659810488731556220150449364481132795214916764575
7358438744525992950547019241039412850756061461464516227474556357477455483162183
1942261623205212322810015716312922471275767886842546958206814471214733661900910
9358072539176343134412621877717930329432229122480430901628087950318140897508277
7667577093855379404000793444924241268291194287196545462868303401132184872667348
2155118482689167950928483146924637990753314921342142606466576132566336573233440
6518455223766727192273067122388879564215633916718800067137647435799624639516608
9384622427025954804156430718525413125410073698826617025497047469368448357416421

2582205471718266017669408120603628484672780261531653874910355982116972092100645
4369287578009368753528541129438332544974594503868044005676182919572150083159131
4829790805194012542533225506202603109693760776355341257610204922410241542945206
5245586462608907945130231777469215862795062331202221645787875551215344004150327
2960312495231701176434685750034331751529670262599752811388986374109281779757999
2981064131711857424050536338251674626546836138364587942688862779803774966812640
1879854128202389489906465050276942795672673451638006011871156751148206356714527
6713917329142316554007659795230175320811144849474342737690159757083784732288630
8497489967499275218578818072234005218426232509879915162427331125928864610830523
2158933121748020202328455681523414254543235119093031417367288707142530173794955
5213085737827486763202465782687642095304942246364648976913804415826174527366220
6082060515434029632116209164288874986648763294017120100096128904283076735279307
8718891618475059889833223980346979568793200787341501747104688954331141187420846
2395288157834505699070753925263591558966690571738102140775439827883485664586416
8332392389032149777988006774798968521598486351221447426644490898271205578528159
6655324473198345972504081663792971908997970612020690602255214611593451027663762
4547965271526008209103254650045012740894456566519675908265559912721058333460487
9686284083799990844866258754596640065916962936966904191525397866853838289821017
135358652364313288676625417702976944321528296992538566008849962616537223247936
2802691609319926148587820620412896531730167691533027144971542792620962204556204
8918931290721271953247783694706806841936615957398110990738056365106733600866685
9941712315180737598608419671330698689290019378366418969437111860475761783420052
7946045745151593756198788470634908524955368723011428658620321345194317713657933
6863146009124616628774585348734302760272822985489113020126035674504478386255092
5431435677556189633336893663121595434639974365625524512870592184567496223507331
7362711140271907472114988479790042266200772082945511695683354441002792315791079
8480247798953263042250942215847536506095793216045897737156110288844469536292476
0059203198193386941727573736973007614019561469093794345179059157422524680714710
7740665578222988540824267207836794482506065276103575079725956330012054259425973
1144239132093321329935761478248928086424462517356607717777743869875032424432000
2441368997665440895982422143216808825548926560568838976456047728763904359369516
4563528998886125394815142591208019897157330973343302256740467216991928223751468
6360376581167889894258205288615591192761340921921967743412118345362161832247432
7479133924348078184842150235744693837069136518302638204373102217068221004928513
6640371088087645147016189328165768954941483436837206463524421319254772113462624
1665013656407830691060011901673863619024367914307948181943024551016982773090010
2232326777240337519263927247203869569861299723820132139096998641988495048598501
6097776828356500907884096006835833193463234508750782001007064711536994369592749
1340769336405389322062346460777881196881151105482399255382455712040526725361246
3188733082075773990265041121809054427270091703922974808123655339731754581381509
6815539313670140531302928116941574988174618917558020660085142743793582251247386
9722446862077910188137998382593039046645406411645330118864153073836153623144178
0978683796939133619176953476662038237941925934968033324686818133268230160062254
9094404687428475517646520286250514976272945053938996292170834795611639226696369
9894715961975677861360758045073775119398202542075468819140332941697056624502189
6028197811923035842348596975754154141935090101774570090178067351267223095350717
9150708759937134748310114896928452629812167172742115141065352396356256770984329
4627462349512489128278682271083510078276393487648198727436409966888932969162457
8482383996826220303034926835222851213818148526786395471260509330607137952606924
3328196286067412301448036986740314631429574133695469734653707066237392617910493
3091230907731510444481743137464333124799731449410256801501441933564246151029189
6180783374277125898347498359705204693531898011810122526206570334314967117811312

6935929322367517585486061308878953873384500358576071532111631597418252284968796
2524985885835482246669820101621984527823977295268321711399667363474068083677922
3949829867097975189587561224956894578634969559180310359033828219173901765414956
4368219479072890123136548819750675191113416848497795138623983398690815875001907
3195294261256999862672993881318949600988754444054503562872880968002807574347315
2570303797854646993301493812655446541648229244548880784900132749439248058348719
0442040374139798892228817309306193447975952515372995407174573141889314433068343
0733783969360819079298716755420602102629049239360971664861070845476601004013000
2899125684727711063979126295069960480339350290675496284541556677907136426751300
7919190686177273906342981827059523627874330530845171429879304820177914765704869
0052947190136869249431618780231014541404092344782336695301890535117567175793826
3881471535163342844500053404946823931519599615484382867693058882768512443352609
9760440667104078612081724827196850633993011581244182675435250316615041884736866
1977203716984298945633764133237713047591436898240688466057341654332667043044387
1400888047972900804125913606054595114210293422036406915177685887361337870210720
6616109983673344828112364008117551917237590979141553626195889344950180813891389
5967163586981399819949036422173733921296366937760349115766666158048125486366480
0036620534964981613439736332148252132383233898408532584646840715931458565390542
7468452934983291880922227138868120298457359964600149533851107008254878923356272
0295405648717518348413873079329233867891420113828829516151181775180432427483711
4912187008865221172772632253536170407556037047774539573065596533256023315073927
7049605566321314677205242839922486534324122251552558096952866319788821581701939
3624975204846117460365900178525107954285365518714619222729145368265254741596350
1533484901658605062788958908708058043547919495857301982086454979629827425728977
5241466652425347513618261440102537497901948517631261730015105970673054915543891
2370111540046080839830935196911668217953217266582235988830736835680607900880418
6947830996231136609853975616827135816409051375558844622121854830095976318720722
6452233089705052107969543921754123624822619283763370309901277141156903733768710
8045836702931168652822069975738895585699681096174679951782962296107542304347162
6714680256954087004287654302149930573569128889024520499870302271999023452400933
8236416070311427132764697804293757724644094175809084944382562521934174588400445
5498420739429635167920411370676106626790973038131132032287104994125455849367532
8440422967178845537635228954636312312129026351526618551352671010269008346430260
7687260631399057021224651723453926789447182507591131727115980285945343851564764
9419411935242687336924180234066252651174145902314722980911546149503333994537436
8677235759952393304545523902528342768207272227901795932068907639959107069289103
8649922944291011184521720554801104719471443612005432046019805605993560889268657
3996368463615972656667226147061964996871995971741153852022521629003463692265437
8442711750614156888475212475395578070402978470177151837893098555014724506767169
6904038939835512763782290919633184308100767505378641072981674473961273784274531
9437874788287532233700047301524329767917359659429024825670995010452111021255168
8359247448006469627843813418374353418679524543387704655385507423287608526481224
3465523292186093351847048232296260127866701252727466927079359750980362238125028
6097929413918854997940094908219784244014831316660817553443093214520042113615209
7288554556967819704899522407189831698124723438668233211773501991241588720875230
7856630605612096983383432259639592901719639287730594931107618597128339716496025
1461006759540412286189480751331309031539435738590414574972916062682149015060195
0043486885270915665959686894426049407205090254360132444268123350168607046401269
5118787860292659108595144727405892854418114957962677571448189572302668721485573
0350794207852053038741474281703465218121061385171735050429528358026763507636907
3958222073027450142667500801074202358972793994232265743015395883241527686650289
1496406610006561179181225872407952759509895173718662740131528754749225628271052

9929658055754764484184506461998565695713871553473610326990860124814990005645665
8071013320719593512061888704090818926713154401330546103727665288310420068053160
8099241649755100172421685460121763278758563864687123304392938340174252712208370
8439507453804720997299235546332606008819445504066405236736499992370721882295497
2000549308024474724201596044982223781985748508476127988769702610738971878480858
1412026794024749378213833407083021804476860399469002243007766605123823183850344
0804431084730762775226208096189938508018371301707432442742267726627706486412255
6723682805132978317591589483803042556113340555716618093595983947998840349726108
9155744083494819720158078642598837298014861833773288371454292994796832323725529
0904374628072691761905488502677876619314280482780719288340937180523978821123945
2523002273524879075941834383630620870653218792437859529731296824694447411385934
6628621999786380212704273921601538062468529227764468925950226589560095823733158
3685551673100691212597464027953675023269298258998733539832461052535209118513206
2804217464943467049147809634252407037246135770633382669331827822451439644780810
8396783496345575781619543158826311854372339289256450554648519157117353556006530
6620687550543967529792331049636083433785495216442620199276744434441613134565207
4400720203854311305064314814532248958603536933335367807498054534079985351786014
0073546241054671406991470467064406365869661412637136274165738437829012618826006
6832476311091444527518806170560141599401864595571966980484306574911881837740512
9926606344507682683064528434319544684681935395272899278270290065154035125196453
9115308909470985855318369775851808901841707737613866975906739704289180157773471
4741291179028640310053862703510993789767612188534720844713673192242550009918061
5530158536399285899568182858537925141523109083418526938981033614599386606039336
5579748844164365167767825808322016570792071654180081480690297084089903413339029
8609945526954239589850008392205929474953079939576117307780337824435051955383981
5676640676259212353327128187130933671056044677052657277568396478325220867601507
5453560584097532691456734363794497764621511512580679616094725117109419106764117
9791568121824312983505500709522864946518760394891435372385064925156781665318827
5325388711720097044417657201275615301280192868150815569830782611349314127897218
3651982849382791400277705723484443901918000518790912003906190396264705433571875
4291468941208782824969101423623296763660222469749912263301646398217800631704228
1459328318354517295573492836107847475471870851580023498176602529868623830813128
4617849459084181454750751483894593893525794589315958923966614278956925095747440
3771915101393106184292842211269969635473091536078856218624593740940232235225902
9250652303279063734989395303416390741108076353815401986664021850252529105696019
0426781817904389886628927170911088392816271724369440163571722843584540030822283
5955261913117780795581122114225551978271815920777576025756442925370401452614553
6109373331095411752140012512016113035384591909913483986145230938248622915299754
3372446099150098417687718388086119291392648427605779941101972931321238384424065
7948944870836321467262767596929978485435708073302104154904862901872224850084684
9871065199810793902680928330561362283900697316019958191555914979324656301020797
4121488624746326502586325281901826449181378457970306849565894075102613790683125
5626592611807070814959488533194989090132291682560996078551047499885560828234432
4580008239620367120863023940674733356729786227627141919831545539161084578177212
8721180401910371240673207501106245327067152905992035033645116499076857347757755
1612066466270961441628393121442849077620275569525611486641134015899415597296183
8350855242076994674763873842257045638341700108335749271403939759219982605245891
6337336161252422295802371179638982559470222927506599325571814394921952484855882
9363565619421090376428582327540168149289714207241710789325114057707859682316859
1787845034102873186139127515754459313059798281886567892945969452370416711170789
0199429329996795703190564108824023070937027938416467033889253398843401437355997
3755283275096510368188961960419305125349039473884981003097486915788028136777698

0942063261974152005737217144513786105558692036559500740039977417336771594671712
1625951752445183636724293147382394677815585089338846758319727787356760303340097
9599310313258159512946884965744541251506782428246639302989151166516624197018478
1116010803057814669575964722217983734379053054000030517112470818011199780276790
2101103193615820071104872057005966095488044921189557044112486076567435189282390
1002487144666371667912782092558402123991027968933579504707264598623678227566107
6948899095167615240245967926514793170270229030929093489174054350977310526877946
8086729633642064787829775546637777133527625616064208004638601095564337702366602
0721119367685429604650807940552664906846514182828020812670705097883638250148770
9232952378045989288493522742878068877122846636251277904084715504218990799090590
0483696232662465477516517387124830248561881074812701222210354456261348551200085
4479149182904313593847750125883088942124296199093641759616705067366525779330759
7235149610143888185299906922806964005065840670155789859163525947174878313014022
6131803408761462990371851015456917466469322672688710194241420876756641286601461
7696873521827364694752582510642842974197781405923371530585775973877351724979782
4129880830675801455666264858019134229519202893022262233547461739170239711918458
2754779742740741871004165585852266658528770007781863680058592855943970581503578
1314372034118131742374536521354349451454903337046248683949524695973267009475563
4221889924775317759433602392541617712132078062773700352472649037948029357462196
9269267741886262721821261272258418908402886918839739383859499214184353876436211
6056578726520896592764392633169049544532096373041182843279368906114103483528388
5438759784549185956024840929551245861116621145307231029799960327753787936585440
2856401727268565848299433907563666325892244075865541602453575842653768100462334
2539328928696766711933716831713383279674077238811663640386346643880556021789218
3041640599966431176282100187680241695530768878648702259792178464073729343729496
3150586691487251476265315775821291789370889726414086699116529593969818575766360
9869234173062544822008941513953949677281535621099531562323572943528083372751270
2748065977997161908540213924958420434258510459740299372873338724689869844515311
9611822329371194897538794879228527396737720676869554602743488411126539206860246
8834398889177106062224392327997924836351984375238414941178265712498283412423516
4868700123594305506812945359110121000350946793414407128797473183087416268672658
1930817706028655568610098112516593679906007293589880525504676747486152860216366
3274180996994064421624425896821642736164304133542884172299617010238491233959442
7575262828631154920121458107633855684575125501625036239071059096388299739078688
3745060042418786334437035567694584738392053343912598989883577215923829287272838
2440453484291316355646428734913102522239345713108625661839876710865617895234752
8876817675511543097792086912736316889695896974228298518394189541785556250667561
8352991439949951935547858461632360346064055419076247005508338800982651021560339
9606329249126447655522834429406289576880235592108274715046462303736820422051665
4714130948929612280086058257167706791583380380548392511100599661260051573920075
6824389276286677754550864397210735920167233776340082701374795916810351404550101
4693989654698872392694203274486168118772601736423699589544837267497749362955277
1716740162045867220043639470833269756015685795810000457756687062270167996704151
8531516547904237301066573080855089491432320673817843355661687291148511527839235
8515037307169995575018691731388376031859865419534003692570608968979355173413491
6154233486427514228603689518897721897554053435463936402337610815264659657903169
2021300944504630971817446633199566657002914384240963120069579016433465065535499
0310816790515281444069762119108289973602697712742420312190060576468254573752231
5638494285670689839327402841143171033156842699543769168561270732563284861986358
8507255443489936982162747760806872453728428216122190518333155316843920228268001
2817187237743564703907716251888246334131864442986404626394250576010497886689961
3958527244152158322779498603842104460075987610052336847887452889207623174695210

3391977051131421944855577765231853761997039840090330652913621313151349619299021
9265453102827410470421288737659642644612966721088850572958786639608160275874696
7361948212460137021834993972870287013442788043395333933503211926087553595678776
8741321696141111128065062483787783999877931550116727955200878892839159558722553
6719715580511771976135618047820315241771823550055693730259242870439599005142133
4513328348871629766391504035888124265681981170941605505287089735569220440361932
9539039016128293940827318919083876283626043303782596090757892488212765308146543
1740848680897813448891465889497535743167981445595617742649190533591711552252925
8281581396768237789340372613943268687916749317179608465446999404916306819048781
6042846025909028487724491508613454994888383661137983124036803637639806521506935
0138089933930451500679005752475700749195111158582174954605795199658208340326838
2745624608999496467644231502815203625432961533179730533896882676961105940155942
4447258800372308772143979736637319376840563345896211300486747943909547278636495
4148038512595938172330134122709309245159223034316492973434853594152921250591269
0541220989669957428628103208874376306513877656896104490593100080870348047667729
6794177334940567923463081923188427910951065810153043319041152326166898088102903
7032515983337656590933365884919968872545279765628576224117673985687474251186352
7473030501853914582602194180386651815005264201901216106931962097746311244030089
8728962265590429833529151471687748905198590109403848207882570151212292292903245
4949112714954910966324366388452324641042464562003143262584494255153577368509391
6413628942429467323801821871614507835268626882524375543586065886445824496086180
3256175900636281795016555533515418771075880800158688984848253658238857439309092
5736606802264369745334696431023696537833590185696629384927598150662984268428521
2933152265132673146466881303691044753345438454613424477775912843126783343760013
4275294871599249279033217876924485405190960831286143705082625082014739765323405
0994094938736896714832842516441094343653203533881624120725696934556052306330774
9820711964233944184201290873857515601873750705708225887666508994918900773608801
1352365839144300166318262965958161038802508506645101240520621938752155271068251
5220409844820483085890413049117292521781589026046355493843172559012466240444329
1575751102430688008300654592062499046340235286937150006866350305934052519950562
2777972748218563559515998596212826342371484810107267650334925309367227672917588
5377725559607549933625280375970825640477897981293010055388559134534690327601202
3742313502296412713429055342783465828463310801531959046035064162228969894868547
5380319514167569464577261699497993499855043715763614446801043685246501975983032
4854662251857729221661046431786624349604040465691136304682850908647023818606283
4734577414285060347589911042617147565497352640493156537528419060988449272929795
3827608831652349054732441216412103086805926423241832857774997329752658803424020
0192257808566153470558615743778323695011977966644796069395913758640157468300349
4209377908662282374841692479057631566901139814150785052718311793338114347620428
1550879655766971329172833666478477806429955597601354959793704319697270244289485
3288981796542411157056319331064894639669194500816332758594381799594122404138120
4510429223186902055327524909593054305201641820650930009002548178891313303935181
6531119825442116666920975937256816759998168973251750919328013183392587393380838
3050795733707676579642034270717304728626577353250835405953888643056593985077132
0017699925233074446495872560538321863985229717564124082579306346033538306605428
9943085585241924409112409783786258144254390649556738941361368387323191479622198
1476112730213467201733371988342463036147519721683934266139737858003875673283793
8874223720951523566840105589209149030318751239757694126981704991073744602285731
7240642690388635427315867372629201824923325754917069746860552054564597097822604
0252071349008956772510185086287135511237926667378732624319086927994873125104902
5741184369134992447014663472542228054381494422997695958008453240154416589102339
1366708882005584631582159696049559790652608450188443169507301219158643209179547

4312220577688939072584952011840639638677388345514747394601522803912293818758869
0358118314845049361429421548133115644597708164853441567358896501213055220715015
9451912660024108518851946228847826418664265987152295649785617284892503471321543
5555487739750064848864000488273799533088179196484428643361765109785312113767795
2912095457527808718739032912705799777225078963028518241603979431466194668660451
3480934433983856447502937272075316233577978851641057723118238552268184384393548
6824236690724323664494865495826784869615636968430047148938767413827303660527640
8746204434136442009857027328074217617529029403237865633153790988296687367441292
7048842638509544226925248333002731281566138212002380334772723804873582861589636
3886049102033965546180020446465355448067503852785449440773913972259944764026427
8193997283976990097197003219555365671300181576819201367166638692646901750156400
2014129423073988739185498268153867281077864412469292155576239376230221096479851
0764911424081053450722492637746616415154798053008224361810885454018340784594961
6247310679463509162763019363107862734028106260585623388314997634923783511604132
0170285487587164502494773944489372415582037627599676518607809329081282329066023
7728306147672307246288356195736759387826723835390695332407647588385186993606664
9373636266536460320124509818880937485695103529304057250102995254589010787799258
4341669591223278453392739978943192395135572272151609014755023879640508415093763
8280665883394113249004379205639562384607168469719395150830828387018020354914018
0356134702534446190701435830141751987426949662022979385690525962433434548423028
2130704792712513541968658925492469902497825655736454216702015655278697529639745
4872819933777865938324915696476799365244060606985367044570242763629705357279094
2521018661214275905213848665639257213482460289607397348062926285914826739093946
9307414132474785235820986618246181546302088896348627492866624959946289882051360
3002883867128492302058379236156674855425179669499671941040938706379602362024505
2413140668629934235622625387185864473503517097212261775790774676900071715214306
4223263194836504569937592504997177167096449333964020324396905564795459053664342
2799334726948136167355844789965973419595037917512244991378915726993911836062071
8067656438347803530829912873643895814578024627309763950135038222683369699559027
7247966797381631750003814639058852251399972534598776263789920197750888810900712
5745761936005615148694630514060759570929398660298762531089308329645848909776156
9800265498878496116697438088408074827959778445763461861238689595190503074599081
4349146283778628866136686146756793872163815859743351084120420525809847872194332
9722141690953202008026000579825136945542212795825259013992096067870058135099256
9083113355814272853502601583838137235454781268596365411904725574866106169034285
9758609640355829531409738010589438027373849886323756046202908280818468956467339
0603781070235134351587652776294307032668568900010680989364786303919923096876573
5386117765537024886705219952088133420815722416344965439370126798602316248836535
0870500633230083769473732395440743396859789126752826647542609518287379648137693
2114683308665334086088774280177609594580160825182721210919022842058684407281383
0355371774722675740421441323221996734668965622472801623510383447518195828310725
2391778689900361627782779193432717396279963989807284434746784259273387552069823
1533332316096250972732960007324106992996322687947266429650426476646779681706516
9293681431862917130781085493690586996658376184445427773624059691471992920029906
7702214016509757846712544059081129743503669682774615865846773578284022765765903
2302363550360864854967422982437401773044234554526450707234081511207409554907914
6131193066512046630147855409921113264262935441048567984497306864824450310511619
3905732639577643163403878724995040969223492073180035705021590857073103742923844
5458290736530509483192700306696980331721012557791781741611608709583899171460396
4172909959259654851457955048293330485069502723652288020507499580389703526252346
0030211941346109831087782474022308009216167966187039382333643590643453316447197
7661473671361215801760837389566199246227321970795123365427163281810275111768924

4243709660191952637441445290446617941010421593908784350824724964523856752674061
9802554282313807467537421609167340586233730564413995147779117139936219234935990
3565924592215084608694325342936051390817400857530860429986114713825777804904099
9740604543998046904801867647283214062285426552939560858751544928818835161816988
8765125043868349176800891099684147885927033584082274135221325358194607626226406
4574209988250911698735065688084593435769107527045790927262462425805270305323710
2705342020538016692860521537452126279811404244930344690785357889436501518226345
4231960571890687703129529883882387048537467384836046813250530234829180462944596
1823092299006667989074873735447151990478660909104780505668553641454445580359186
4137815279918214138578207729984588858202236904344110960220943894288722401086409
2039611211987121778537314799273692723194531333445229412392999374399194348230770
4045043258006927384530875688542350122831377695042495079115614080595694035430367
5786197110029449013534339380807787967102552756458183926636861620153501075728214
5963348947922547568549063887574957657506446740009460304865953583471931885804965
1341990020904222042510337671849489601293925568762683674870683735904908677540931
0771014846575217052962448693104658437218670369409646459252025573340250545493385
4158719501960724476250057219585882783770999588018981643956848802966263332163510
6886186429040084227230419457710911393563940979904481437966339624944687733646642
3547003982483177441750461571326121122419396676686451927918580343927857546118986
2215237194256679432992050292201351908082457237896150266261806307887147718082914
9945832125364298030120390008697377054183133191937378885209881441018050872026488
8536246700337214092802539023757572058531821719028945481178570883622991592535514
2896379144605337442971146070158841570410607748294856340693043624212277034347010
0859056716053527015273814791644414605490028533500160214840471794558798846453148
6030791766483055373300578299281322001312235836245174481590551901979034743732548
0263057509498451256542105985931611150952896836901292399713139142774310694722065
3981720249629980011291331614202664143918702412377740818163785342630880266109220
7455330576620840136106321619848329951020034484337092024352655751712772937424660
8785876680348505424416741687901490760944199459847109266521201763889100813281047
3472999984741443764590994400109861604894944840319208996444756397149701695225597
7539405221477943756961716282405358804949875642766681416604360895372079893800448
6015533210247646367700688160886216946152555045241619237987701603674260341486488
5484535453255412972824511344736561026595663518317896760608511222668111143323618
7191967895997680699452217831148816698963944031615728519767459602972366754657674
2908585989593664647451058180874925614538352381097700535575323862856096556143857
6681874361047957642247890504600454704975815188366876726124174130643758487571905
9462593649388894822771869325724399957276042540854784320307612493705845552893785
1900453179120191647466316737110334620138242519492805590735004653859651799746707
9664922105070418237026412560843492988693409829561926850481407449227154126676533
8663655644902879289561621679356699269115156323908631765262370874467857851290110
9297038314234707112013061324137510108793505958466209927216686757099043288524039
8553488868883226269130414880144040770862261012862962906449791720707386667073561
4996109068159970703572028014709248210934281398294093412881273173932282527427254
8331476875658025237652013366495262218288905503761234112028319880372919114393396
0968613149823763675481025985321268901536536612905686863908936936387079054579855
6540580130308070250392907823061781894197171063673955170361780368341547522773395
1813479408578360315546942948258235805728062010772540702198757953522437706944168
9427346384485100019836123106031707279857179913636571707585028304621816683705387
7962067229198773212078673115949768832873033553565161664403314158414330836016296
1380594168179806826678059721989105390847917970001678441185894990615987915223461
5560675648870103910767963135328135251842470665425637426186734211208935410531455
5136792956650441735203015090712116819506538291346872758899552924302302516135923

2189450234218838213528235958313624364862596701100141904572989303752078978287074
4770129850313563330637655065077742344019408883531440255123060256038573630163113
9661565222698628255794436730396569876558280055541144696888780383600103758182400
7812380792529410867143750858293788241756564993820284724659352732044493949982452
6603292796435601263408456291865663670903459114698567221569495094374170316004699
6353205059737247661626256923569891816836290950150296778918778705158917863191784
7933228557913850191494880754383020278621236858568442253993927094618307215771243
7249187481880464470451805850130460655812746997879060683278148221615270763080397
3328043700505058211392038085356363580877977325785434182217678563254344873888032
7143445687169080061644567191052382623556159116224422845110395654363184155515205
1512885850740802905229107221874666219082350428002502403222607076918381982696797
2290461876497245830599508674489219830019683537543677617223858278529685521155988
2203945862642476768848131589788974167264293452553519385995697087141614660420830
9809725803744449700169369974213039962158780536185666112272456780139463203991638
3111829958649312602041594824297724949265300517265056380365289836275691594061369
9131788150205227581366251125318522361414162991897706638997818026458336512199215
7102094999771121656468864916001647924073424172604788134946671345957245525428383
9663091078322169156354425744236080382074248134641500221249065413430581198407006
7290232998153714695515510322413293254192288325678624288569815524055113905122297
3282268031798831194592367670171048415398934952774768451409127668340021667149854
2807879518439965210491783267467232250484459160474235927796511894044585501319865
1143628789843904969711765872713123884218075285716465508033629857942841448342157
8650228115415719364633718357569006820574637227825503150891862611959656377313578
5891938904740833422341578039885865999359140638112821764804614187405587683293406
7778506797686802874711994751056655019302073637792392083861025069807894776996200
6194973831576056273555396188412652394830401147443428902757221111738407311900148
0079954834673543189343424325190350489036727344858629476478935563117017867769351
6639455574713520606680195919862062651631902589376993148908250301356485649327860
5978302333033248394036956223202160611562933915192944443596746875810610800006103
4224941636022399560553580420220638723164014220974411401193219097608984237911408
8224972153134870378564780200497428933274333582556418511680424798205593786715900
9414529197247356455132215389779819033523048049193585302958634054045806185818697
8348108701954621053755893617345926728412957565955109327555426705525123212841600
9277202191128675404733204144223873537085920930161588110532981369302836565604162
5341410195767276500297541846590475609197857698704548575613775424569327250255580
8169431008437981598181180096739246532493095503303477424966049712376214962540244
4420708912522697102400170895829836580862718769550025176617788424859239818728351
9233410134733051558661519447029922028777637059981384561392801013168134031157971
8327051894349756626028045226360681752292598074370203091383493293864534537742038
8482841753513282573202923539374704365472938950516502128568594839556281184674306
1171551947754703449959564825976166135160291133252971603826845903840578604452446
7094923478340479423836916550955948548148374200833117170453331705754001556372736
0117185711887941163007156262874406823626348474907304270869890290980667409249736
7899049391946534018951126844377984955063551886720478508323542426415612554740070
4945298075896058714924393853853548377252544364252254451683781680577383767947876
7718998428368707752872423211315745304179318552878526633809908906419274608236568
6558737812228206967056777087751956909837191204968185910249172223324229061446205
9599920655507575873170880571280345453713169659886781512733265178448815173108320
4907151685307536200924668507865785739353342386743366342676655934815447762332728
0772693287761112043578436608328119993286235256420037536048339106153775729740451
9584356928147458687458992630117338297450295253063155164258357874177945282817339
8233059187939637151532721973846834612508964401788302790789935456307124219906312

4647145887056166745502540549613195599432381708042784991684086851702091948059874
5746677449379739689030623922364465874238979507758975845705479347544135373910920
5486976822253078413720493766879777835421212444878465599584967270396875047682988
2356531424996566824847032973740024718861101362589071822024200070189358682881425
7594946366174832537345316386163541205731113722019622503318735981201458717976105
1009353494972305720432732654836199398812884324885179364328547232860826708576834
4599234020476982467918885515052565726230984024291621526771136915025100325007247
8142118192776599478157376749012008483757266887407113538916947678410668782519797
9767154431847658574545676488090696858263271129285746982620504447869142621725132
3679753421731235790469505775363535102308619558417382547263377939179394845659703
6788379083571112501335123670598287989990387109571692326472069212811083815249401
1016677601965302043120679921265849825289531104566885881257915376047118421654943
0092924607473640844103330942826189785922456017211651433541358316676076109678502
2201199322520103147840151364877855257335550910172879442147184033446755268016540
2749591833620702809100202938797930939774478538840654897233623754520347284739917
9089674534995498725910554343348032409173444008727894166653951203137159162000091
5513374124540335993408303706303309580847460213314616171017898286464134763568671
1323374582297023055678471703007461433999115003738346277675206371973083906800738
5141217937958710346826983230846697285502845720737903779544379510810687092787280
4675221630529319315806338404260188900926194363489326639913331400582876848192624
0139158032866930131070998062163358103056288813952423821657994720539542548484062
4380121152936509147504463127698857134137967865480568228634206631368539908753833
7122541465126569723972717701451088697987396432549552161374490745685643224438103
6666310633687840456536002563437447548712940781543250377649266826372888597280925
2788501152020995773379922791705448830431664555899720768420892015197522010467369
5774905778415246349390420678395410226284388971115553046370752399407968018066130
5827242626302699238598043853090620565482094084257747531928528922593344217770114
5917573279216320551749393472389642492027404366998794574057402688557608679066786
700642385217510719135755374826433922822225613012496757556799975586310023345591
0401757785678319117445107343943116102354395227123609564063048354364710011138746
0518485740879198010284266902665669774325953278300807177624853136396234188321101
0574179471138440880723865907807803225658788165463783816775256725208660756519218
1515784976425530616293086348169736179562689778293177899507148633596289119123548
5298381067183423104505851656316279353647557868074522788653737583349863435921693
0893998809832613638097563208569205181805697544898301722690998977676732227596624
8073607275279613043013870027617986786090300135801150495140149839022231716434990
9211590399316416680653676549124921799899293528846300563040725086592306635946106
7793765353922211880311884889451760074461754428795947327463875368112669179242260
0973495887819094557272990829607702519187634466026824541861849031844606863298594
6869707188305842501182538108244197933991485725620641774875261302775531379220898
1186200161740696095335459358835466988113584692616384637685582190213162030608663
8082304652333796176205807406503196667531318186673176983993774509055953125715244
8235347971374948502372705494606100370782916520438836077330363001052840380243221
3863924195492622488060179745792453118085966705830294337549781039718021880769641
5765140302424584585806490989822542990982193264873277690464928208492912400628652
5168988510307154737018783282725788485893464760364374322901567053725376504875108
7172131772891648992172360651235180127256359003311106703083754215176160031737796
9696507316477714878618185147321360452873949066939286204739307566718037139325876
9855196301325968536857042586630453026534629293376260738208950669087690922684895
5551825686253566687520026855058974319849855806643575384897081038192166257228741
0165250164029479530646810198818987747379342966568503288218868730640706776324824
1451393869112104612661549964142392846788836840258174771503120374750141141645177

5333017989837801547217602270473167828860033263652593191632207760501701329020248
1041243877504310542136503044081968964096617178082609823458504356317805209271098
7686345118024932480888658315150220486137601660130918412499809268047057387430001
3732700611868105039901124555594549643712711903199719242565268474296962021453530
0669850618734455345835177075545111921509986725056075194165128095579596258602011
0777118269069380655202404748462700459282542685811068556693165692662160306391809
2070128324457939789737095076063902833513892915452339899598699971008743152722889
3602087370493003951966064970932450371545844332209286357324869920808093138227260
9365701817294047637212566946915482857012069517982208523429513099470528098631307
5056838121976898545859590765521766330469810946488243282420617361185284648366571
5549994659505317606848040038451561713230694111723148755664739002395593328959213
8791827517280314936600698841875581732456474968338495811526313380227962830157010
5436623586676228695240856310175931153394265834566733295695561285991119520270991
9587408639394540488578970657796359308482231411263866212978927933838900163266551
7188763599188244808276240902085844637380411065504981918610861040328364130186001
800509635778262660787036330622396508842333384195187451363351999633794650350183
8656026366785174786761676610159146741535315928406854143460945725315470650167081
1907777286113187970154264003539985046614889299174512107664372797045943512824816
5158612692067076613210857988617117048384881822481956757251628850878129911347788
272273677464638295924439629522546042693440346674397668492607229503944336786853
2279475716007751346567587774844744190304713368021117841829806063750247951538825
3963409982147489204571463448128538077727085463173474525840364984665150983413949
3721104109129194195645208050414269801791354502037017257427102247585333475746524
8638173855989746250209805148236873826998489402932694508445610876298884599539191
6016906480308833178204678273341776401116926316431939209911958130521690037688633
9014602438317286418359094862444115537787814516990402368127927735477669102949478
9203045607824587637517738071623662969009872285884309626623128919541632970688313
4717793002426110441430031890382532004821703770389245769565283732853197430459129
9571234569785006942643087111097547950012969772800097654759906617635839296885728
6723530219570624227535590582419091505561743747806582541159955445015792605703648
3207958862932389337320902696186886796771289500587454415063246715595770328211544
6236477104536368768787097364847338144864732898973099165356973923127393686009429
7877534827654607321055281749240886827288401971405465614843523505805880647573126
6307581976593374734882585409768527701908845385049666600546256313227642400476066
9545447609747165723179272777209820406793109236004089293071089613500770557089888
1547827944519889528052855638799456795398019439400643911073134260036315363840273
4333277385293803500312800402825884614797747837099653630773456215572882493858431
1152478752460442192959702152982284816210690144498527549323283030959610601644872
3621770908036681569189923249462135892701832552603872621572546805621252117124677
6629995269847567023208264034057097517432900498954788897874483116407525519935303
7215618658162564658132047545661229534461449257671239147351877565344767078139066
4815295176770373987213329874727253307292064024901963776187497139020705860811450
0205990509178021575598516868333918244655690678547995788638479027114454430321802
9510047759281016830187527656133176678822649800875841127912476921433693943879030
1661656774036040709828036071226940506889238140287166028350397485389932404595877
1381051924866869096846056426140958542502708393731785098493980499565131147290843
3404031310557395059279490974563986755573187664983139295359873048812121397073408
9140485527259410714558188504203732242855181042769733127851442696492057921479469
6125852571829653478187893861482826494957047164197323649236309260417779269725498
5733249919892579764102720600576773425698460411675847231334971085035933899934388
2081877412759204724049010482628133725986847124525077437172894700703419442452355
1581549353800143430428612844652638967300913987518500999435433419289866792804064

8793811129590918107328684559866945389627233471168957993194683919007583502448998
2757831453987823672124143613531287669560706165982574728779162915604925461952790
0270076445366739399118055449593359476326350000762927811770450279994506919755252
7579840395501777621801425149152387201123029738926102812151914185879732059752506
2178616659291697819552313960053099775699223339487617681614965591955689152692372
2477379190381006149198162869829256755725773227337229351358774432763171948670216
8240841051619695744388665944428338190640401605200115965027389108442559165051802
7984192135740116270198513816622671162854570700520316767627447090956253719273082
3809451149732212338068571951721928071165906281947602117887605474769977264751209
2405816561636937912934678120756214047026870317530555258861406533713780002136197
8729572607839846193753147077223553107404977341043990417626684163144483268993087
8740253597204632497673070174100126646016753894746479088148679371957825350565329
5085219036574759296275386422936661733066817217754856035521918916032165036544242
1838045684117368814562766071074354944535148084288264644399346933793124494560324
7020766895036391656621450478355737980072325556555838686543479255992797961456886
9493568518546775104139646306666463219250194546592001464821398599264537589453285
9300852953293559363413033858736286372583426156217098738117399331675236889085554
7248119382943985840059813540442803301951569342508811816225948700733936554923173
1693547156568045531531806460472710072172970993484596487480354608846910905290141
4468163022414819109815829226238613302409326029571081984222652852587088209713596
8994613729648900621023238781146527915528632680775744999008193844698414636007141
0043181714146207485847689091658147306101896638540061339396066344202511558356348
3223217419167798342920792834581991851930970291591009658666097013900544730457604
1014999160779407052504692006042388269221966217556494804461601843233593237407876
4667287181286906632894395532294734272243160352167477913239849245464394159024673
0854326563620550223537848848741932038390527488289058089323588202084318781756870
1649449929047713505348123960510856462761493507484321833468117246746112882799029
5558234279872438469871980713184918443016921738865068587210278163480171506172085
9972229427651555609808199948120908799609380960373529456642812457085310587912171
7503089857637670323633977753025008773669835360178219936829577185406716816454827
0442650716389215252452812914841997650182339747013137616918687153821505409158185
4524924851610540610647420541068404107603338572104307490425255962280848986068938
1570715778873003036452690846392114378137540625905976776477409707493476967209362
6501060469658360925889192364618459801333597814974747089430398095732181820956101
1337107282908891160718372827563055983642827715641545996917771640447380868822192
0441887788577444802172818407922242397424355707462959854738544638906266689045882
4785998748798388696461540809008651601385476906175137708470024566275539008499015
8231228161191388070860735157239422005889802706867876161557593420510551291636785
3273723240307002151456429192669789584509513709812777514991531501289348001892060
9731907166943863771609930268398004180844408502067534369897920258785113752536734
9741367471809817355081862154202969315043410592489738620931687443734073881929291
8504051146680501090986770831743900392144895250011443917176556754199917603796328
7913697605932526664327021377237285808016845446083891542182278712788195980896287
5932679249889375467293284709400796496635488350092314265224224483879335337290385
5837160687855715092237972443047438851335886598410058440270381616491447579230053
2523612615774295436165829989166425072859606024078001739475410836626638387475777
0419762882036101744052977707249340067442818560507804751514411706364343805789096
2357141767245983185071028579275828921067488594229214031768314082121549658971268
1386087248424554068694020171811343210705403054762958328882921098005706700032042
9680943589117597692906297206158353296611074660115659856264400262447167249034896
3181103803958069487465096052611501899690251308421197186322230190579367380258479
9426278285548621389444130796344049925996002258266322840532828783740482475548163

6327570685261760532218441491066115324168027221264323969665990204006896867418404
8705311503425545874849321757175336069701084883348337580298152188839891969421853
3042403527778201626562094694599996948288752918198880021972320978988968063841799
2889512794299403390451195507881044295588751392343256481071760989975128553336283
3208721790744159787600897203106642049529273540137632177243389230511009048323847
5975403207348520682972977096907090651082594564902268947312205319132703663579352
1217022445336222286647237438393579199536139890443566229763339792788806323145703
9534919205944733509315348581717197918732929490211636174985122907670476219540107
1150647725712193112287715336374872209591528449578100920090940995163037673375345
2248348261287516975143811892518729877778964554373865144879991455208508170956864
0615224987411691105787570380090635824038329493263347422066924027648503898561118
1470009307719303599493415932984421014083647405282512168698597738681965912385370
0962814898454308253353067732731128980575857912324335871339853823031264781726353
0524741748935715702580221859407662846941422402612264827502021758701191693241985
4433373514198086577048079710697773776645253826082976028808154172452202572592581
2899583441414773334147122999221813631994140714405602941849642186856279658818682
5762546347864565054854509666295375131605047530402673299052443657781100752246822
4056639760745838228786792193722629964752735096205197064253780307307322581137372
7817873872774158109159711308116026061614050078581564612356378839434212734791034
0723560736683095045546790362695881715672063109388589651647161145612402154508140
4397515907044875413888337885469276897020003967224621206341455971435982727314341
5170056609243633367410775592413445839754642415734623189953766574606710713032332
8806628316828661672032592276118833635961365335611944397821078169583594000335688
2371789981231975830446923112135129774020782153592627065627050368494133085127485
2373468422417870821062911027358591330088347040603018142423363901307658269374551
7799105848604605032271846437890046843767642705647191662724872972519340220028380
9145978607504157956574148954025970062712666127531013015548468803881776706288051
0246120512077147260326227932313044539725651158887346079313975311656011108228939
3777560767200207516364801562476158505882173428750171658757648351312998764056944
9318705464088987899964905320658559287120252681691258373132734180691822939713444
3138990188748340632009399270641011947449532325251384713978363367258190030059355
7837557410317835726383569586645711582770038298976150876604055724247371713688450
7987854189236614431542487449837496376092894090361170026092131162549399575812136
6556296443230541526160794665608740101011642278407617071272716175595465157086836
4435357126508689747776065428689137433816012328913438210476524711231823244884569
0220791308726368311030410302577170148160581045821444374933243816470085600500480
6445214153836763965393594458092375299449166119901734897843966003936707508735523
4447716557059371042311976440789172528495353769626317957794833452858690510703877
1991394174283229320841661961945160748889940033873994842607992431756107237133222
4544913560278926407983276622365991729862520408318964859544989853060103453011276
0730579672551383188122739826357630041045516273250225063704472282832598379541327
7995636052916673024398431420418999954224331293772983200329584814684834520957626
9893342691914491050856767932618215664433831270885148847216076414849626928300044
2498130826861162396814013458046599630742939103102064482658650838457665135724857
7139631048110227810244594656453606359766238918473534034209683079786990554953690
2818255336680043334299708561575903687993042098356653493446450096891832094847185
5593023788089171002639730228725757968780993942353174542624776843615057143293101
6067259715885682896684315730045623083143872926743671513801364114927445565100630
1783725223919312754627157178387780948166684468315607977173199871828127622564352
9609228374811175366586813555701359537360574942398950211331003860414727558478416
7722050139615789553992401238994766315211254711079237682530478966080229488685780
5514442223476814623800296015990966934708637868684865038070097807345468971725895

2957871126234035735538703327891114942704121336039183972412530326380517875398629
7816500602712971298655721195660466606649678807391244640432122312586783038588888
7193493751621221600012206844988327204479912110716084044127744632802844194882280
2386438195217968475822817644994430626974075712956040099485786654866716511283702
3360849596411187573431801882905839449471291026443077955963806704609609838717060
5917268108091612371637395669621740390924210751178723469185345682591513191021865
5110853411050246425683201855440438225735080946640828844774707417184186032317622
1065962738605673131208325068282039153455300059508369318095121839571539740909715
1227550849138654500511161633886201687596319636236019347849306498619100660695484
9932099424752429925080488884141782504539420480034179165967316172543753910005035
3235576849718479637456703846682026946610311732303889405984405755527411996276912
2785602026336268062315943665410378869951325205609045272136350458519614874040618
2766986587729069075484077696568350702656514640584707874940873094587790103300425
7137189679112562369348612234310389550940689991912965195233227032058226650594320
7653691807681157208904893418984695668095884767383310191189709629674840166623434
0906663411508003112745472023437142377588232601431252574881364725269694981460854
1739780581961334818499473579809878389306803790225368875596991012710377344095701
6647084852831225109480140989059615179211742984878770770709675450508872850450890
3367563361154767535895753543799685673741550574484642263149060835863710575705326
7619817812838549216473137311747562445641393411355417550391381967438240993637182
0498344446648458122892411919984131101515174634176114256069090742633931977356302
5466530356897630346216640981430337061507240184933701573157147870668477348673268
535331186963089552466545615453865755222408715687321665623998657247051284007507
2096678212307551459480903916871385629491737491798526023467659490059050612631032
8516715748355890565634679646611837587927430306544394769366922501792880357660558
1579870912614248439812624929429177411233349100508109922639119886476341608556998
3368173703404183896119749149335489875947937806124784472893174847795901551795169
1410958695088270747821841097395364450615682744098753375955567084242488975693119
9169934540793750095365976471306284999313364969406594748004943772220272517814364
4048400140378717365762851518989273234966507469063277232708241146222744403924500
6637471962402917435952210201870698994461144086546530967239879762576864977035872
8657094465721653417153668919846804095396493583777103010513145246196804858324305
3542273830050200650014495628423638555319895631475349802401696751453377481422707
7833895356821337565039595953430886369531714909135297618139371652654225857149396
5241008895738285243450264735950684346247158093901155072707020461723911683476509
4526755878358789691319407357675816714222500267024734119657597998077421914338465
2944138425622167630498802203335520393060408624135984253169965057906220913377176
2515830752094236843309886018584921494728168820666188565237957184491203442330286
7082716633352152219357004440239864504020629568030272975571051467110182034575888
4294368066893510536033080549918366724140561820040587759586187954895707768130979
4467247509040694569479835817934906999099745182110868669606481834688801745578833
3307902406274318324000183102674824908067198681660741260661916169492042662923234
2035796572928269527137342264674916459404611135694340601492286799823000747669255
5350412743946167813601477028243587591742069365396646169339457100569144147580755
9088759021621374185574560935044326105863863161267680852037780185238872697865327
9826662801165753696385248027831606573386026214199612432671620611257762790484764
3315989441079085096968124876024230587301829500892625539771426827593573096113645
7268413262737079817507667424508293025313944794543540290217739597479286509910432
2748981491371286448876207333262126737568091307200512687489509742588156308650075
5298533652745777194561850557700230404199154675984558341089766086332911179944153
6841784030395044020934739154981155683049269878084135679082045256877794223110609
2741504798815936036132261165448525260539847719608770618124113096418816851549506

3857057845186688435540229183514655843264110349878694477928498405480873399758914
8114805377115217358133573401284770435021438271510749652867845644445122602499351
5113599951172620046691182080351557135663823489021468788623220470879045424721912
8126096708729420022277492103697148175839602056853380533133954865190655660161435
5249706272792468376642202114835894227688176144773181561560645131757633092756763
3550513450417321513038436303156995285106123258617269633947235912537955658635579
9014297267192578238247097059676213436684620901170331263255870729511573614904557
7307475166699726871843386178799761966522727619512641713841036361139508979660344
5381997955353464455193249614721455055922608602774005523597357218060027160230099
0280299678044463432869981842318079863283336130735309824984359979858705769260112
6081450173184613271892213558753070784442376062376977890352014892350885759189465
4927750736225338358484520194699177563818911454598165921540503837526893205364908
3723698063689213726597189373941437661168500236507621648839586798297145124128354
9750522605551062758441796237240032348139219067091871767093397622716938523276927
5371164380426324061217327616460930466759235241161481300639333506263637334635396
7987549018111906251430489647069594274989700474541098921220074156583304087767215
4660726002105680760486442772784839098524497612035949158490623617193341166058867
5099562079436043761539283153028060484916917161298197964508598196438652974655538
0929856416985824801257305033797702061430947403756656545157697178692952072874864
5803134107450753009750217434426354578329798434472130247036025451271800662221340
6167508430352320063475593939301463295542975723637029464272090574789813387857240
9478615133436074278651753971039260265193707371408517326090605306925858675252147
6417901338175381845369791110365137250713337504005371011794863969971161328715076
9794162076384332514457482033050032805895906129362039763797549475868593313700657
6437737461281413552649648290278773822420922532309992828478569357767368051634954
3006240749500282283290355066603597967560309443520454094633565772006652730518638
3264415521003402658040496208248775500862108427300608816393792819323435616521964
6917008712635610418542197537269023604986496177731663030044097227520332026183682
4999618536094114774860002746540122373621007980224911118909928742542380639943848
5130536948593924042907060133970123746891069167035415109022384301997345011215038
8330256191159192517204022155423653813876131040480949692540091856508537162213711
3386331385324320612783618414025664891587957947419015212780566702778583090467979
9197399942017486305445778720417474098600790393212994186490074309168866441857271
4649739841616186276454521873140363458809527442513389383096571402413903596441704
6859026198941056197262615011367624395379709171918153104353266093962189297648656
4841234722370569296733143109998931901063521369608007690312342646138822344629751
1329478004791186657918427758365503456062987320139768375116346491294993667699162
3052626760455925660314021087324717335245739048171262035186230678853166913346659
1391122571982239040541983917481727878908097715794131559271861696446282252773242
5957855867677800326533103437752719837648961655248180417168927476082213100996383
7221722080656728260372003601019271556525321574072661244793017684666676839037490
2726703999267589300700367731205273357034957352335322031829348307063185681370828
6921891450630941300334162381555457222637594030852800707997009322977859834902421
5328745594091887025649633031722538413415322642171597723423409676976364496391351
4503257701756259822695576544547354929276591848879259044509208538688069334879533
6985214459007888673573706455895143201550269313517554968948838060942673604223568
3659612127500495903077650792681996429497840914292689625707615545417092634694905
1680729969330301966827898744220821825838839129041610082853960358270900407403451
4854204495170666951493049727634771197949250041961029647374765399697880586538901
6891221752597769199078383203381296061766635640935654668355280223385263286387841
9823916261043380075377267802920487663457283671818972488823107557562903398080473
6255855470955338205898957840609121564917527503547614324732593801974457176861925

3246257839083265941376626943558600485222088286006378076506400964340754077849153
9130567465706394860918259914246913957001388528617422219509590002593954560019530
9519813235271678593771457344706043914124845507118116483818301112348749561316508
2319910890031585211407296641591772586477867464180539237377359354257900117490883
0126493431191540656423089247295420907273753757419472969467628972946579794619833
0713947846254787372018859575506965530921464211056349848177365457680394281093122
9687047011611761295146253261516395318674946976517081953705540381769077009933320
1092512626455284800952133909089521949433144635854555441964081358621847200817858
6142179227001541114179776309565588903977905610571127759891359079603887880128782
2146268520072630727680546866655477058760700062560080565176922959549567419930726
1546912431145764987716862230495750492088438591940430596456963242138028899705509
8646566061919221203289744724354181607336313837984649892427178540366510520774524
3145093611242504234249355325999053969513404641652806811419503486580099790957779
5748966232815051039870607443123731632512931626409509132245906892289851534247829
4703755130689534156278132963059035354074797442665974945450661458412804980392755
2374994278041411721622900041198101835604315119703373666783648931138135709599157
7276958054228908860643605902009551856203366037505531226635335764529960175168225
5824953842867387887758060332331354807208141965607214245388101377847628057433205
6700794970779864809191754276210384973373819369211285228191708500541678746357019
6987960999130262294581686680806262111479011855898194912797351114637532996627859
0719746097624242794146817828097105451882142911637700840746448571036208553946625
5702885392984115842958939225170514365930695637578772296565298991409432839464729
8472618520835558539450997146649983978515952820544120115354685139692082335169446
2669942170071867799868776416375482551840944809802096525626745197369424905015487
4345789401406838884904710316309870760028686085722568930527793460182797503700199
8870866838579733585608129758762225918183621465736911973389077925446694233791598
6389367838015167004897996551566290797564734424828722706257533912141233196514945
755832583120985092390558005401528907334787982361108991867189526527

評語

1. 畫面報告及展示之版面包含冗長之數字，重要之事：這些數字代表什麼？
2. 可考慮使電腦動畫來輔助解說。