臺灣二 OO 三年國際科學展覽會

科　　別：數學科

作品名稱：關於 1234-, 2143-, 3412- Avoiding Involution
排列的統計量探討

得獎獎項：數學科佳作

學　　校：臺北市立建國高級中學

作　　者：沈定

作 者 簡 介

我的名字是沈定，目前就讀於台北市立建國高級中學二年級數理資優班，興趣是數學和電腦。國中和高一時也作過幾件數學科展。這次是我第一次參加國際科展，題目是關於 1234-, 2143-, 3412- Avoiding Involution 排列的統計量探討。特別感謝游森棚老師的指導，讓我能順利完成這件作品，希望大家能滿意。

關於 1234-, 2143-, 3412-
Avoiding Involution 排列
的統計量探討

摘要

令 S_n 為 $\{1,2,\ldots,n\}$ 任意排列所成的集合，$\pi \in S_n$ 為其中的一個元素，我們記 $\pi = (\pi(1), \pi(2),\ldots, \pi(n))$。今給定 $\pi \in S_n$，若對所有 $i, 1 \le i \le n$，都有 $\pi(\pi(i)) = i$ 時，我們稱 π 為 involution。假設 $\pi \in S_n$，並給定 $\sigma \in S_m (m \le n)$，當 π 中任取 m 項，其大小關係的順序都和 σ 不同，我們稱 π 避開 σ，或稱 π 是一個 σ-avoiding 排列。

在這篇報告中，我們主要分析了 2143-avoiding involution，1234-avoiding involution，和 3412-avoiding involution 中的一些統計量，給出了十數個結果與幾個猜想。

On the statistics of 1234-, 2143-, 3412-avoiding involutions

Abstract

Let S_n be the set of permutations on $\{1,2,\ldots,n\}$ and $\pi \in S_n$ be an element in S_n. Denote π as π = (π(1), π(2),…, π(n)). We say that π is an involution if π(π(i)) = i for every i, $1 \leq i \leq n$. Given $\pi \in S_n$ and $\sigma \in S_m (m \leq n)$, we say that π avoids σ (or π is an σ-avoiding permutation) if π does not contain any m-term subsequence in the order of σ.

In this paper, we discuss some classic statistics on 2143-avoiding involutions, 1234-avoiding involutions and 3412-avoiding involutions. We get many new results in this field and give some interesting conjectures.

一、前言

1. one stack sortable 排列與 231 avoiding 排列

在電腦科學中，有一個重要的資料排序問題：考慮$\{1,2,\ldots,n\}$的所有$n!$個排列。由右方輸入，這$n!$個排列之中有幾個，可以經過一個 stack 而到達左方時是順序？這裡的 stack 高度沒有限制，但是寬度只有 1，即利用此 stack 時資料必須依循後進先出的原則。

如下圖的兩例子：右方輸入排列 2314 和 3124，目的是可以利用一個 stack 使得到達左方時是順序 1234。在這兩個例子中，2314 辦不到，但 3124 辦得到。我們稱 3124 是 one-stack sortable。

容易證得：一個排列是 one-stack sortable 若且唯若這個排列不含順序為”中大小”的子序列。我們稱此時π是一個 231-avoid 排列.數學家[K]已證出 231-avoid 排列的個數是$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。

2. σ- avoiding 排列

由此我們可以推廣 avoid 的概念，考慮給定$\sigma \in S_m (m \le n)$的 σ-avoiding 排列。

先定義一些名詞如下：令 S_n 為$\{1,2,\ldots,n\}$任意排列所成的集合，$\pi \in S_n$為其中的一個元素，我們記$\pi = (\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n))$。假設$\pi \in S_n$，並給定$\sigma \in S_m (m \le n)$，當$\pi$中任取 m 項，其大小關係的順序都和 σ 不同時，我們稱 π avoid σ，或稱 π 是一個 σ-avoiding 排列。舉例來說，234518769 avoids 312 和 2413。但是沒有 avoid 1243。

關於 σ-avoiding 排列的計數和分析，不論從哪方面來看都是非常非常困難的問題，也是近十年來組合數學中一個引起許多討論和研究的問題。給定$\sigma \in S_3$，則 σ-avoiding 排列的計數在 1980 年解決，數學家證明只有一類：就是以$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$來計數[SS]。但是給定$\sigma \in S_4$，則 σ-avoiding 排列的計數到目前為止只知道可以分成八類，其中有一類到現在完全沒有進展。此外，數學家已經證明出一般而言要判斷一個

排列是不是 avoid 另一個給定的排列是 NP 完備問題。

3. 1234 avoiding involution, 2143 avoiding involution, vexillary

今給定 $\pi \in S_n$，若對所有 i ,$1 \leqq i \leqq n$，都有 $\pi(\pi(i))=i$ 時，我們稱 π 為一個 involution。如果以上的整個問題都在 involution 上討論，則迄今只有非常少的結果。在 1980 年 Simion 和 Schmidt 求出了 σ-avoiding Involution($\sigma \in S_3$)的數量和分類[SS]，然而 $\sigma \in S_4$ 的相關問題結果目前為止幾乎沒有。1981 年 Regev 證明了 1234-avoiding Involution 的數量有

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} ,$$

這正好是 Motzkin number[R]。另外，在 1999 數學家 Guibert, Pergola, Pinzani 證明了 2143-avoiding Involution (因為某些理由，也稱為 vexillary involution)的數量也是 Motzkin number[GPP]。至於其他的問題，短期之內看來離解決還有一點距離。

4. Motzkin number

我們稍微介紹 Motzkin numbers 如下。

Motzkin numbers $\{m_n\}$ = 1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, …是組合學中最重要的數列之一。m_n 原始定義是計算 n 條邊的 unitary-binary(即每個接頭都接一或二個點)根樹數目。

它沒有一般項公式的明顯表達式，最簡單的是

$$m_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} ,$$

但是已知生成函數是：

$$M = M(x) = \sum\nolimits_{k \geq 0} m_k x^k = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x} ,$$

並且滿足函數方程 $M = 1 + xM + x^2 M^2$。

5. 這一篇報告

我們的這一篇報告討論 1234 avoiding involution, 2143 avoiding involution(vexillary involution)，3412 avoiding involution 的統計量。我們將按照不同參數對這三種 involution 分類，得到一些結果，以及一些猜測。截至目前為止，據我們的瞭解，這篇報告上的結果應該都是這個領域上的新結果。

二、4-letter pattern avoiding involution

本節我們證明二個結果，這兩個定理不僅僅是應用在 1234 avoiding involution, 2143 avoiding involution，而是對於所有 4-letter avoiding Involution 皆適用!

Theorem 2.1

設 $I_n(\tau)$ 表示所有 n 位數的 τ-avoiding involution 排列的集合，$M_n^k(\tau)$ 表示最大值在第 k 項之 n 位數 τ-avoiding involution 排列的數量。如果 τ 的最大值在第 l 項($l \geqq 2$)，則

$$M_n^1(\tau) = M_n^2(\tau) = \ldots = M_n^{l-1}(\tau) = \left|I_{n-2}(\tau)\right| 。$$

證明：

設 $\sigma \in I_n(\tau)$ 且 τ 的最大值在第 k 項。

設計一個變換如下。將 σ 按下列方法變換：

①在 $\sigma(i\text{-}1)$和 $\sigma(i)$之間插入一數 n+2，$\sigma(i)$之後的數照順序往後挪。

②在 σ 的最後面加一項 $\sigma(n+2)=i$

③除了 $\sigma(n+2)$外，σ 中大於 i 的數加一，得到新的一組排列σ'

則當 $i<l$ 時，因為新加入的兩數並不影響 τ-avoiding，所以 $\pi \in I_{n+2}(\tau)$ 。

得證

例：變換的例子。

令 n=5，i=3。則 σ=35142 → σ' =4671523

Theorem 2.2

對所有的 4-letter pattern avoiding involution，按最小值位置和第一項值分類是 equidistributed.

證明：

對所有 $\pi \in I_n(\tau)$，由 involution 的定義，若 π(1)=*k*，則 π(*k*)=1。因此 π 的最小值位置和第一項值都恰好是 *k*。

得證

三、1234-avoiding 的 Involution 統計量

3.1 fix point

將 1234-avoiding involution 按照 fix point 分類，可得到一表格如下圖(一)：

fix point								
3			1	0	6	0	36	0
2		1	0	6	0	36	0	232
1	1	0	3	0	15	0	91	0
0	0	1	0	3	0	15	0	91
	1	2	3	4	5	6	7	8

圖(一) 1234-avoiding involution 按 fix point 分類

Theorem 3.1：

定義 $I_n^k(\sigma)$ 為 σ-avoiding involution 中，長度為 *n* 且固定點有 *k* 個的排列所成的集合，$i_n^k(\sigma)$ 為 $I_n^k(\sigma)$ 中元素的數量。

在 $I_n^k(1234)$ 中，顯然 0≦*k*≦3。令 *t* 為非負整數，r_i 是 Riordan Number 的第 *i* 項，可得：

1. $i_{2t}^1(1234) = i_{2t}^3(1234) = i_{2t+1}^0(1234) = i_{2t+1}^2(1234) = 0$ 。
2. $i_{2t-1}^1(1234) = i_{2t}^0(1234) = r_{2t}$ 。
3. $i_{2t}^2(1234) = i_{2t+1}^3(1234) = r_{2t+1}$ 。

證明：

在以下的證明中，我們會用到以下三項 Young tableaux 的性質。設 y_π 為 $\pi \in I_n(1234)$ 經由 Robinson-Schensted algorithm 所對應的 Young tableaux。設 y_π 的形狀為 $\lambda = (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge ......)$，$\lambda_i$ 表示 y_π 中第 i 列的長度。

1. λ_1 是 π 中最大遞減字串的長度

2. y_π 中列的數量等於 π 中最大遞增字串的長度，所以當 $\pi \in I_n(1234)$ 時 y_π 最多只有三列。

3. 如果 π 是 involution，則固定點的數量等於 λ 中值是奇數的數量。

接下來，用 bijection 證明 $i_{2t-1}^1(1234) = i_{2t}^0(1234)$ 和 $i_{2t}^2(1234) = i_{2t+1}^3(1234)$

方法如下：

1. 令 $\pi \in I_{2t-1}^1(1234)$，由上面的性質可得 y_π 最多只有三列，長度分別為 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，且 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中只有一項是奇數。

對 y_π 中長度是奇數的那一列最後面加上一個數字 $2t$，得到一個新的 Young tableaux y_π'。

因為 y_π' 的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都是偶數，所以將 y_π' 經由 Robinson-Schensted algorithm 反運算得到的 π' 必屬於 $I_{2t}^0(1234)$。

2. 方法和上面的類似。令 $\pi \in I_{2t}^2(1234)$，顯然 y_π 最多只有三列，長度分別為 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，且 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中只有一項是偶數。

對 y_π 中長度是偶數的那一列最後面加上一個數字 $2t+1$，得到一個新的 Young tableaux y_π'。

因為 y_π' 的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都是奇數，所以將 y_π' 經由 Robinson-Schensted algorithm 反運算得到的 π' 必屬於 $I_{2t+1}^3(1234)$。

由上面的 bijection 可推得 $i_{2t-1}^1(1234) = i_{2t}^0(1234)$，$i_{2t}^2(1234) = i_{2t+1}^3(1234)$。

又已知 $i_n(1234) = m_n$，$i_1^1(1234) = 1$。由歸納法和 Motzkin number 的性質可證明 $i_{2t-1}^1(1234) = i_{2t}^0(1234) = r_{2t}$ 和 $i_{2t}^2(1234) = i_{2t+1}^3(1234) = r_{2t+1}$

得證

另外，關於 1234-avoiding involution 的 fix points, number of cycles 等四個統計量初稿已完成，正在準備投搞[ES]。

3.2 最大值

將 1234-avoiding involution 按照最大值的位置分類，得到下圖(二)：

9									70
8								35	35
7							20	20	54
6						10	10	29	77
5					6	6	15	39	100
4				3	3	8	19	47	118
3			2	2	4	9	21	51	127
2		1	1	2	4	9	21	51	127
1	1	1	1	2	4	9	21	51	127
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

圖(二) 1234-avoiding involution 按照最大值的位置分類

我們有以下結果：

Theorem 3.2：

設 $M_n^k(\sigma)$ 表示在 σ-avoiding involution 中，最大值在第 k 項且長度為 n 的排列的數量，則

1. $M_n^1(1234) = M_n^2(1234) = M_n^3(1234) = m_{n-2}$ (n≧4)
2. $M_n^n(1234) = M_{n+1}^n(1234) = C_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{n-1}$ 。

證明：

1.同 theorem 2.1，這是 theorem 2.1 的一個系。

2. $M_n^n(1234)$ 和 $M_{n+1}^n(1234)$ 的數量剛好等於 $i_n(123)$。因為這兩種情況時，最大值都在後面二項，只須考慮前面 n-1 項是否有 123-pattern 即可。但已知 123- avoiding involution 的數量為

$C_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{n-1}$ 。

得證

圖(二)中間部分到目前為止還沒找出任何規律。這會是我們以後研究的方向之一。

3.3 最小值

將 1234-avoiding involution 按照最小值的位置(或數列中第一項的值)分類，可得到圖(三)：

9									127
8								51	127
7							21	51	127
6						9	21	51	118
5					4	9	21	47	100
4				2	4	9	19	39	77
3			1	2	4	8	15	29	54
2		1	1	2	3	6	10	20	35
1	1	1	2	3	6	10	20	35	70
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

圖(三) 1234-avoiding involution 按最小值的位置分類

因此我們有

Theorem 3.3

設 $m_n^k(\sigma)$ 表示在 σ-avoiding involution 中，最小值在第 k 項且長度為 n 的排列的數量，則

1. $m_n^{n-1}(1234) = m_n^{n-2}(1234) = m_n^{n-3}(1234) = m_{n-2}$ (n≧4)。
2. $m_n^1(1234) = m_{n+1}^2(1234) = C^{n-1}_{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}$ 。

證明：類似 Theorem 3.2。為節省篇幅，從略。

注意到這張圖跟圖(二)的結構完全一樣，只是上下顛倒過來而已。
但是對於 4 letters-avoiding involution，這並不是普遍的性質：

Open problem 3.1

經過我們大量的資料分析，在所有的 4 letters-avoiding involution 中，1324, 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4231, 4312, 4321-avoiding involution 才有這項特性。為什麼？而這些排列有什麼關連性?

3.4 (Descent)相鄰關係是"大小"的個數

Descent 是組合數學上極重要的統計量。一個 descent 是指一組相鄰兩個數，其關係是"大小"。我們分析 1234-avoiding involution 按 descent 個數分類：

這個表是由附錄的電腦程式跑出來的，而結果令我們大吃一驚，因為呈現出恐怖的不規則狀態！我們完全無法切入，有待未來持續研究。

5								3
4						1	9	54
3					2	12	48	144
2			1	4	12	8	57	105
1		1	2	4	6	9	12	16
0	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8

圖(四) 1234-avoiding involution 按 descent 的個數分類

Open problem 3.2

1234-avoiding involution 按 descent 的個數分類有什麼規律？

四、2143-avoiding 的 Involution 統計量

在 O.Guibert, E.Pergola, R.Pinzani 的一篇論文中，他們證明了 2143-avoiding Involution 的數量也是 Motzkin number[GPP]。在那篇論文中，他們問：2143-avoiding involutions 按照 fixed point 分類，有什麼結果？以下是我們關於這個主題的一些成果。

4.1 fix point

9									1
8								1	0
7							1	0	36
6						1	0	28	0
5					1	0	21	0	127
4				1	0	15	0	125	0
3			1	0	10	0	65	0	398
2		1	0	6	0	29	0	146	0
1	1	0	3	0	10	0	40	0	183
0	0	1	0	2	0	6	0	23	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

圖(五) 2143-avoiding involution 按 fixed point 分類

Theorem 4.1

設 $i_n^k(2143)$ 為 2143-avoiding 中，長度為 n 且固定點有 k 個的排列的數量，則

1. $i_n^n(2143)=1$
2. $i_n^{n-2}(2143)=C_2^n$
3. $i_n^{n-4}(2143)=2C_4^n-C_4^{n-2}$
4. $i_n^{n-6}(2143)=6C_6^n-2C_6^{n-1}-8C_6^{n-2}+6C_6^{n-3}-C_6^{n-4}$

Proposition 4.1

在 π 中，設 $\pi(a_1),...,\pi(a_k)$ 為非固定點，則在判斷 π 是否屬於 2143-avoiding involution 時，$\pi(1)\sim\pi(a_1-1)$ 和 $\pi(a_k+1)\sim\pi(n)$ 可不必考慮。

證明：

設所有的非固定點依序為 $\pi(a_1),\ldots,\pi(a_k)$，則顯然 $\pi(a_1)$之前和 $\pi(a_k)$之後所有的數皆為順序排列，必不會出現 2143 pattern。

得證

由以上證明可以推出更一般的結果：

・如果 $\sigma(1)\neq 1$，則判斷時可先排除 $\pi(1)\sim\pi(a_1-1)$

・如果 $\sigma(4)\neq 4$，則判斷時可先排除 $\pi(a_k+1)\sim\pi(n)$

在以下的證明中，我們可能會用圖來表示 π，圖的規則如下：

對所有符合 involution 條件的排列 π，我們可將 π 中每個點的交換情形以圖案表示。以一組橫向排列的點表示 $\pi(1),\ldots,\pi(n)$，若 $\pi(i)=j$，則在代表 $\pi(i)$, $\pi(j)$的點上面畫一弧線。如  代表 3412。

證明：

1. 固定點 n 個只有一種情況，即 $\pi=123\ldots n$。

2. 給定一組排列 π，令 $\pi(i)=j$，$\pi(j)=i$ $(j>i)$，且對以異於 i , j 的數字 k，$\pi(k)=k$。則顯然 π 的 fixed point 數=2。

由 proposition 4.1，我們只需考慮 $\pi(i)$到 $\pi(j)$是否出現 2143 pattern。

又因為 $\pi(i)$為 $\pi(i)$到 $\pi(j)$中最大的數，相當於 2143 中的 4，可是 $\pi(i)$是 $\pi(i)$到 $\pi(j)$中的第一項，所以不可能出現 2143 pattern

所以任取兩個相異的數 i , j 交換位置，都不會出現 2143 pattern。

則 $i_n^{n-2}(2143)=C_2^n$ ，得證。

3.考慮所有可能的情況，共三種：

(1) 

必出現 2143，可不必考慮。

(2) 

設四個非固定點依序為 $\pi(a_1),\ldots,\pi(a_4)$，

考慮 $\pi(a_1)\sim\pi(a_4)$ 中間這段：

$\pi(a_1)$ 為最大項，$\pi(a_4)$ 為最小項，又兩者都在最外層，所以不必考慮。$\pi(a_1)\sim\pi(a_2)$ 會小於 $\pi(a_2)\sim\pi(a_4)$，所以不必考慮。

同理，在一層層排除之後，可確定整段都不會出現 2143。

共 C_4^n 種。

(3) 

設四個非固定點依序為 $\pi(a_1),\ldots,\pi(a_4)$，

則當 $\pi(a_1)\sim\pi(a_2)$ 和 $\pi(a_3)\sim\pi(a_4)$ 間都至少有一項時，必會出現 2143 pattern。反之，當 $\pi(a_1)\sim\pi(a_2)$ 或 $\pi(a_3)\sim\pi(a_4)$ 間沒有其它數字的，則必不出現 2143 pattern。

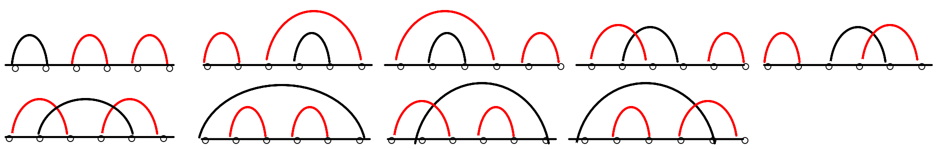
證明方法同上，一層層把不可能出現 2143 pattern 的區段排除，即得證。

共 $C_4^n-C_4^{n-2}$ 種

綜合(1)(2)(3)，可得 $i_n^{n-4}(2143)=2C_4^n-C_4^{n-2}$

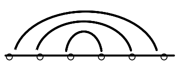
得證

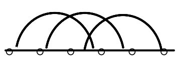
4. 方法同上，考慮所有可能的情況，共十五種，分成六類：

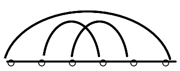
(1) 

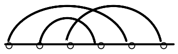
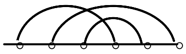
這九種一定會出現 2143 pattern，所以不必考慮。

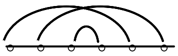
以下五類只要仿照上面 $i_n^{n-4}(2143)$ 的證明，分項討論，即可算出答案。此處省略。

(2)  共 C_6^n 種。

(3)  共 $C_6^n-4C_6^{n-2}+4C_6^{n-3}-C_6^{n-4}$ 種。

(4)  共 $C_6^n-C_6^{n-2}$ 種。

(5)   共$(C_6^n - C_6^{n-1} - C_6^{n-2} + C_6^{n-3}) \times 2$ 種。

(6)  共 $C_6^n - C_6^{n-2}$ 種。

將上面 6 項相加，即得$i_n^{n-6}(2143) = 6C_6^n - 2C_6^{n-1} - 8C_6^{n-2} + 6C_6^{n-3} - C_6^{n-4}$。

得證。

由上面討論，我們可以確定不管固定點有多少個，在計算時只要考慮所有非固定點的交換關係和二個非固定點間是否有固定點即可。

可得到$i_n^{n-k}(2143) = \sum_{i=0}^{k} a_i C_k^{n-i}$，我們只要有足夠的數據即可求出所$a_i$的值。

這幾個結果顯現了令人困惑的規律和聯想(參看以下的 open problem)。在 k 變大之後的情形到底是如何？目前完全吸引了我們的注意力，我們希望能找出一個更好的方法和切入角度來解決這個問題。

Open problem 4.1

$i_n^{n}(2143), i_n^{n-2}(2143), i_n^{n-4}(2143), i_n^{n-6}(2143), \ldots$之間應該存在著某種規律? 他們是二項式係數的線性組合嗎？如果是的話係數又是多少？

4.2 最大值

將 2143-avoiding involution 按照最大值的位置分類，得到下圖(六)：

9								
8								127
7							51	1
6						21	1	6
5					9	1	5	9
4				4	1	4	12	29
3			2	1	3	7	16	39
2		1	1	2	4	9	21	51
1	1	1	1	2	4	9	21	51
	1	2	3	4	5	6	7	8

圖(六) 2143-avoiding involution 按照最大值的位置分類

Theorem 4.2

設$M_n^k(2143)$表示在 2143-avoiding involution 中，最大值在第 k 項且長度為 n 的排列的數量，則

1. $M_n^1(2143) = M_n^2(2143) = m_{n-2}$ 。

2. $M_n^n(2143) = m_{n-1}$ 。

3. $M_n^{n-1}(2143) = 1$ 。

4. $M_n^{n-2}(2143) = n-2$ 。

證明：

1. 同 theorem 2.1。

2. 最大值出現在最後一項並不影響前面 n-1 項是否出現 2143 pattern，所以 $M_n^n(2143) = m_{n-1}$ 。

3. $\pi(n-1) = n \Rightarrow \pi(n) = n-1$。在 π 中，$\pi(n-1), \pi(n)$ 可視為 2143 中的 4,3。所以前面只能按順序排列(不出現 21 pattern)，只有一種可能。

4. 道理同上，在 π 中，$\pi(n-2), \pi(n)$ 可視為 2143 中的 4,3。此時，π(1), π(2),…, π(n-3)中最多只能出現 1 組 21 pattern，並包含 n-1。所以 n-1 能出現在 π(2),…, π(n-3), π(n-1)中任何位置，且其它項照順序排列，共 n-2 種。

4.3 最小值

將 2143-avoiding involution 按照最小值的位置分類，得到下圖(七)：

9								
8								51
7							21	51
6						9	21	39
5					4	9	16	29
4				2	4	7	12	19
3			1	2	3	4	5	6
2		1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	4	9	21	51	217
	1	2	3	4	5	6	7	8

圖(七) 2143-avoiding involution 按照最小值的位置分類

Theorem 4.3

設 $m_n^k(2143)$ 表示在 2143-avoiding involution 中，最小值在第 k 項且長度為 n 的排列的數量，則

1. $m_n^n(2143) = m_n^{n-1}(2143) = m_{n-2}$ 。
2. $m_n^1(2143) = m_{n-1}$ 。
3. $m_n^2(2143) = 1$ 。
4. $m_n^3(2143) = n-2$ 。

證明：證明方式大致上同 theorem 4.2 。

1. 同 theorem 2.1。

2. 最小值出現在第一項並不影響後面 n-1 項是否出現 2143 pattern，所以 $m_n^1(2143) = m_{n-1}$ 。

3. $\pi(2) = 1 \Rightarrow \pi(1) = 2$ 。在 π 中，π(1), π(2)可視為 2143 中的 2,1。所以後面只能按順序排列(不出現 21 pattern)，只有一種可能。

4. 道理同上，在 π 中，$\pi(1), \pi(3)$ 可視為 2143 中的 2,1。此時，π(4), π(5),…, π(n)中最多只能出現 1 組 21 pattern，並包含 2。所以 2 能出現在 π(2), π(4), π(5)…, π(n)中任何位置，且其它項照順序排列，共 n-2 種。

五、3412-avoiding 的 Involution 統計量

5.1 fix point

9									1
8								1	0
7							1	0	36
6						1	0	28	0
5					1	0	21	0	378
4				1	0	15	0	140	0
3			1	0	10	0	70	0	420
2		1	0	6	0	30	0	140	0
1	1	0	3	0	10	0	35	0	126
0	0	1	0	2	0	5	0	14	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

圖(八) 3412-avoiding involution 按 fixed point 分類

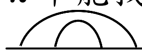
Theorem 5.1

設 $i_n^k(3412)$ 為 3412-avoiding 中，長度為 n 且固定點有 k 個的排列的數量，則

$$i_n^{n-k}(3412)=\frac{1}{\frac{n-k}{2}+1}C_{\frac{n-k}{2}}^{n-k}C_k^n$$ 。

證明：

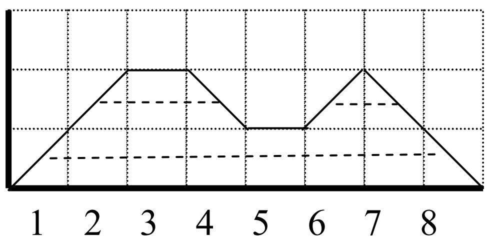
已知 $\frac{1}{\frac{n-k}{2}+1}C_{\frac{n-k}{2}}^{n-k}C_k^n$ 是在 n 個點中取 k 個點兩兩連線，且為 non crossing pair 的數量。所以我們只需證明 3412-avoiding 跟 non crossing pair 能兩兩對應的話即可。

假設 π 中能找到 3412 pattern 中的 3 和 2，扣掉  之後，剩下兩種  和  都不可能出現 3412。所以 3412-avoiding 跟 non crossing pair 的數量相等。

得證

另外，我們也可將(0,0)到(n,0)的 Motzkin path 經由一個 bijection 對應到 $I_n(3412)$。方法如下：

從 motzkin path 的左邊開始，將每一個”／”和同高度中最靠近的”＼”上面的數字交換。”－”代表一個固定點，不必動。

例：  → $84325761\in I_n(3412)$

5.2 最大值和最小值

Theorem 5.2

設 $M_n^k(3412)$ 為 3412-avoiding 中，長度為 n 且最大值在第 k 項的排列的數量，$m_n^k(3412)$ 為 3412-avoiding 中，長度為 n 且最小值在第 k 項的排列的數量，則

$$M_n^k(3412)=m_n^{k+1}(3412)=m_{k-1}m_{n-k-1}$$ 。

證明：

假設最大值在第 k 項，即 π(k)=n，我們可將 π(k)和 π(n)以一弧線連接起來，將圖形分成兩塊。又由 5.1 的證明，可知圖形中的弧線不能交叉。所以我們可將 π(1)~ π(k-1)，π(k+1)~ π(n-1)看成兩組獨立的排

列，分別有 $m_{k\text{-}1}$ 和 $m_{n\text{-}k\text{-}1}$ 種組合，兩個相乘即可得出公式。

同理，最小值也可用同方式證明。

得證

六、4321-avoiding 的 Involution 統計量

6.1 fix point

9									1
8								1	0
7							1	0	36
6						1	0	28	0
5					1	0	21	0	378
4				1	0	15	0	140	0
3			1	0	10	0	70	0	420
2		1	0	6	0	30	0	140	0
1	1	0	3	0	10	0	35	0	126
0	0	1	0	2	0	5	0	14	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

圖(九) 4321-avoiding involution 按 fixed point 分類

Theorem 6.1

設 $i_n^k(4321)$ 為 4321-avoiding 中，長度為 n 且固定點有 k 個的排列的數量，則

$$i_n^{n-k}(4321)=\frac{1}{\frac{n-k}{2}+1}C_{\frac{n-k}{2}}^{n-k}C_k^n$$

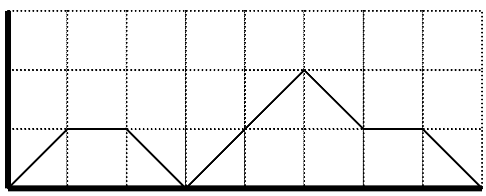
證明：

這張表格跟上面 3412-avoiding 的完全一樣。所以我們將用 bijection 的方式證明。

將 motzkin path 對應到 $I_n(4321)$ 的方法如下：

左邊開始，第一個”／”和第一個”＼”為一組；第二個”／”和第二個”＼”為一組；…依此類推。每一組斜線上的數字互相交換。”—”代表一個固定點，不必動。

例：



1 2 3 4 5 6 7 8

→ $32168475 \in I_n(4321)$。

七、結論及展望

這個題目還有太多東西可以發展下去，目前的初步結果明顯只是一個開端。雖然我們在這篇文章中只呈現了 1234，2143，3412- pattern avoiding involutions 關於四個參數的幾個結果。然而事實上，對於 24 個 4-letter 的 pattern avoiding involutions 我們都有做了研究，並且已經得到了大量的數據和許多結果，更有大量的猜想。限於篇幅，在以後報告再呈現出來。

八、後記

誠如內文所報告，這篇文章所探討的問題是目前組合學界最受矚目的問題之一，而我們切入的角度是新的角度。因此文中所有的小結果都是這個領域上的新結果。我最要感謝我的指導老師，帶我做真正的數學研究，這個專題完全跳出以往我作品的深度，也讓我眼界大開，非常興奮。在研究過程中，我也完全體會到與以往國小國中科展不同的經驗，感受到數學的深刻與奧妙。

九、附錄

參考資料

[B] F.R. Bernhart, *Catalan, Motzkin, and Riordan numbers*, Discrete Math. 204(1999), 73-112

[ES] S-P. Eu and D. Shen, *On the statistics of 1234-avoid involutions*, preprint.

[GPP] O.Guibert, E.Pergola and R.Pinzani; *Vexillary involutions are enumerated by Motzkin Numbers,*Annals of Combinatorics (2001), 200-211.

[K] Knuth, *The Art of computer programming*, vol. 3, Addison-Wesley, 1973.

[R] A Regev, *Asymptotic values for degrees associated with stripps of Young diagrams* Adv, In Math 41(1981),115-136.

[SS] R. Simion and F. W. Schmidt, *Restricted permutations*. European Journal of Combinatorics, 6 (1985) 383-406.

評 語

1. 請注意科展之中「展」字很重要，科展並不只是論文之展示。

2. 可添加動態模擬。