

# 臺灣二〇〇三年國際科學展覽會

科 別：數學科

作品名稱：3D 立體建構模擬之研究

得獎獎項：數學科佳作

學 校：台北市立第一女子高級中學

作 者：蔡沛羽

## 作者簡介



從小數學對我來說就是一個神奇有趣又富挑戰的科目，玩數學是一種說不出的快樂，在每一次想出解法或與別人不同的思路時，那種無與倫比的感覺總是深深吸引著我！

非常高興有機會參加這次的科學展覽，它讓我的研究有了一個希望的光環，使我在一次次的推演中獲得了好多的快樂與成就。要謝謝戴青田老師與蘇麗敏老師不辭辛勞的指導，以及同學怡靜和丹菁一路上的幫忙，為我分憂解勞，不斷地鼓勵我支持我，才能如願將這份作品成功地展現於此！

# 3D 立體建構模擬之研究

## 壹、研究動機

現在的市面上，四處充斥著各式各樣的電玩或是 3D 立體動畫，但是在呈現動畫的時候，依然存在著很多地方的不足，與狀況表現上的矛盾情形！於是令我興起：一個普通的高中學生，是否也有機會運用所學的知識，創造出自己的虛擬實境？

我嘗試地寫出各種物體架構的函數，再對這函數圖形所呈現出的立體加工處理，使它能自由的運動，甚至使它能多采多姿就有如我們在現實生活中所看見的一般，有著自己的花紋與圖案！

期望在架構完整之後，有一天，我們這些學生可以不再被那些軟體公司牽著走，花大把的錢買電腦動畫中種種的不合理，而可以自己擁有自己的 3D 世界！！

## 貳、研究目的

我從基本的圖形開始寫起，再將這些不同圖形的函數加以組合，而使它成為生活中多樣化的造型。而後再將這些物體的表面進行一些圖案的設計，使得一些我們已有的圖案能依照合理的方式於物體的表面上呈現出來，讓這個物體更逼真，更有實在感。

未來的發展希望能再考慮到於不同種的光源下，物體的光影明暗變化，而使其具有立體感，或是自己進行繪圖著色，好似真的在空間中畫畫一般，以沿用成新一代的 3D 繪畫。

## 參、設備器材

紙、筆、黑板、電腦、隨意的物品。

## 肆、研究流程

- 一、寫出基本圖形函數(參數式)
- 二、基本物體函數(參數式)
- 三、利用平移、迴轉、曲移(曲線移動)，建構組合各種基體成為立體模型
- 四、建立物體的網格面(座標化)
- 五、利用陣列，重組頂點(表面座標)資料
- 六、建立貼圖(在立體表面呈現預設的圖形之圖案對應)→尋找對應函數

## 伍、研究方法

立體的建構，可以看作是平面移動的變化；複雜的圖形，也可以視為是許多基本圖形的組合。

在我的研究主題中，我先將基本常見的立體圖形，寫出一個適合讓電腦進行快速運算的式子，並考慮將圖形以「頂點連線、由中心角度掃描」這兩種方式寫出參數式，方便我對圖形作設定與調整；做出基本的物體(簡稱基體)後，我就可以或者是取點作相對的平移(整個物體跟著點平移)，或者是取線做角度的旋轉，寫函數將不同的基本形體串聯起來，要是取面做迴轉的話，則可改變點在面上的位置，這就稱為『立體建構(簡稱建體)』。

接著嘗試以不同的方向進行反覆的思考，來為立體圖形的表面，尋求一種適當的繪圖方式：若我已經預先設定好一種圖案，我該如何將它在物體上呈現？我稱這種尋求圖案對應方式的研究為『貼圖研究』！

然後再進行資料的整理，稱『資料重組』。將蒐集的頂點以新的方式重新組合，使

它們成爲區域資料，方便以後做部分的調整。或許呀！可以幫人的臉整形喔！

### 一、建構圖形部分(建體)

- 1.基體構造(基本物體樣式的函數推導)
- 2.平移、迴轉、曲移建構(用以將圖形拖曳或移動，使之成爲立體的圖形)
- 3.雙函數法(另一種使平面拓至空間的方法，此種容易控制但會使設定複雜)
- 4.組合(將基本構造出的形狀拼湊，用範圍函數的方法，組合成複雜的圖形)

### 二、圖案對應部分(貼圖) (一種根據長度的差異作比例換算的方法)

- 1.平行掃描對應(以平行線條當作相對位置的參考)
  - (1)投影對應法 (2)水平線對應法
- 2.放射掃描對應(以放射線條當作相對位置的參考)
  - (1)放射點對應法 (2)等長度對應

## 陸、研究內容

### 一、建構圖形部分(建體)

- 1.基體構造(基本物體樣式的函數推導)

※ 注意：

於(1)(3)(4)中， $r$  皆爲圓(外接圓)半徑， $O(O_x, O_y)$  表圓心，

$P_i(x_i, y_i) i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  表第  $i$  個頂點，速率爲  $v$ ，

每單位移動角度  $\theta = \frac{v}{r} \begin{cases} \text{順時針} + \\ \text{逆時針} - \end{cases}$ ，移動時間爲  $t$ ，位置爲  $P_t(x_t, y_t)$ 。

#### (1) 多邊形

➤ 頂點參數法：

設定規律條件：圓心取爲原點  $O(0,0)$   $\overline{OP_0}$  與  $y$  軸夾角爲  $\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2} (\because n \geq 3)$

(設定此規律條件後，正  $n$  邊形將正放於  $xy$  平面中央(原點))

設正  $n$  邊形原始第  $k$  個頂點爲  $P_k'(x_k', y_k') = (r \cos \frac{2k\pi}{n}, r \sin \frac{2k\pi}{n}) \forall k = 0, 1, \dots, n-1$

則在規律條件下， $(\because \frac{2k\pi}{n} - (\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{2n}) = \frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2})$

正  $n$  邊形的第  $k$  個頂點爲

$$P_k(x_k, y_k) = (r \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), r \sin(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2})) \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

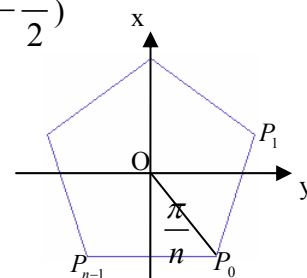
➤ 描邊法：

在正  $n$  邊形上取頂點  $P_0$ ，設此時  $\overline{OP_0}$  方向角爲  $\alpha$ ，

易知  $\overline{OP_t} = (O_x + r(t\theta) \cos(\alpha + t\theta), O_y + r(t\theta) \sin(\alpha + t\theta))$ ，若設  $\varphi = \frac{\pi}{n}$ ，

我又觀察出  $r(t\theta)$  週期是一個圓心角  $2\varphi$  即  $\frac{2\pi}{n} (\because \triangle P_i O P_{i+1} \cong \triangle P_j O P_{j+1} \forall i, j = 0, 1, \dots, n-2)$

同頂點法設立規律條件，



使圓心為原點(0,0)，取  $P_0$  與 y 軸夾角為  $\varphi$  即  $\overline{OP_0}$  方向角  $-\frac{\pi}{2} + \varphi$

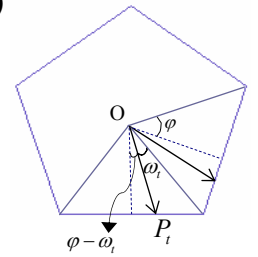
則可得一 xy 平面上的規律正多邊形的第 k 個頂點參數式為

$$P_k(r \cos(\varphi - \frac{\pi}{2} + k2\varphi), r \sin(\varphi - \frac{\pi}{2} + k2\varphi)) = (r \sin(\varphi + k2\varphi), -r \cos(\varphi + k2\varphi))$$

設  $t\theta = k2\varphi \pm \omega_i, k \in N \cup \{0\} \wedge 0 \leq \omega_i < \varphi \rightarrow r(t\theta) = r(2k\varphi \pm \omega_i) = r(\omega_i)$

如圖可得  $r(\omega_i) = r \cos(\frac{2\pi}{n} \times \frac{1}{2}) \sec(\varphi - \omega_i) = r \cos \varphi \sec(\varphi - \omega_i)$

$$\text{結論：} \begin{cases} t\theta = 2k\varphi \pm \omega_i, k \in N \cup \{0\} \wedge 0 \leq \omega_i < \varphi \\ r(\omega_i) = r \cos \varphi \sec(\varphi - \omega_i) \\ P_t(r(\omega_i) \sin(\varphi + t\theta), -r(\omega_i) \cos(\varphi + t\theta)) \end{cases}$$



若不限定規律情況，則參數式可直接設為

$$\begin{cases} t\theta = 2k\varphi \pm \omega_i, k \in N \cup \{0\} \wedge 0 \leq \omega_i < \varphi \\ r(\omega_i) = r \cos \varphi \sec(\varphi - \omega_i) \\ P_t(O_x + r(\omega_i) \cos(\alpha + t\theta), O_y + r(\omega_i) \sin(\alpha + t\theta)) \end{cases}$$

### (2) 正 n 角星(每邊之截點為二之情形下)

如圖對正 n 角星之頂點設定，

因為正 n 角星共計有 2n 個頂點，可分為內外二層。

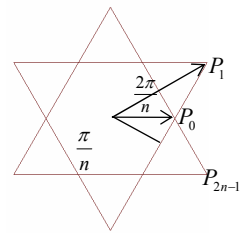
若在已知外層半徑 R 且圓心位於原點之情形下，

可推導出內層半徑  $r = R \cos \frac{2\pi}{n} \sec \frac{\pi}{n}$

由於當頂點  $P_k(x_k, y_k)$  的 k 值是偶數時為內層點，奇數時為外層點，

設定函數  $r(k) = \frac{R + r - (-1)^k R + (-1)^k r}{2}$  則

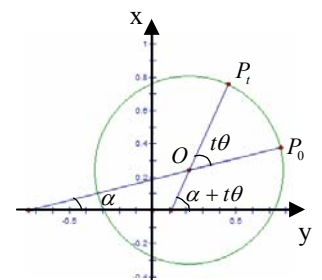
$$P_k(r(k) \cos \frac{k\pi}{n}, r(k) \sin \frac{k\pi}{n}) = (\frac{R + r - (-1)^k R + (-1)^k r}{2} \cos \frac{k\pi}{n}, \frac{R + r - (-1)^k R + (-1)^k r}{2} \sin \frac{k\pi}{n})$$



### (3) 平面圓

若設  $\overline{OP_t}$  方向角  $\varphi = \alpha + t\theta = \alpha + \frac{tv}{r}$  則點參數為

$$\begin{cases} x_t = O_x + r \cos(\alpha + t\theta) \\ y_t = O_y + r \sin(\alpha + t\theta) \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x_t = O_x + r \cos(\alpha + \frac{tv}{r}) \\ y_t = O_y + r \sin(\alpha + \frac{tv}{r}) \end{cases}$$

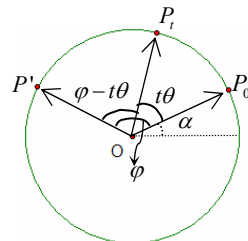


### (4) 空間圓

➤ 三點圓(條件：三點不共線)：

a. 若已知點  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  繞點  $O(O_x, O_y, O_z)$  旋轉經  $P'(x', y', z')$

$$\text{設 } \overline{OP'_t} = p\overline{OP_0} + q\overline{OP'} \dots\dots \star \quad \text{且令 } \cos \varphi = \frac{\overline{OP_0} \cdot \overline{OP'}}{|\overline{OP_0}| |\overline{OP'}|} = \frac{\overline{OP_0} \cdot \overline{OP'}}{r^2}$$



當  $P_0 \rightarrow P'_t$   $\overline{OP_0}$  與  $\overline{OP'_t}$  夾角為  $|t\theta|$  則易由

$$\begin{cases} \overline{OP'_t} \cdot \overline{OP_0} = p|\overline{OP_0}|^2 + q\overline{OP_0} \cdot \overline{OP'} \\ \overline{OP'_t} \cdot \overline{OP'} = p\overline{OP_0} \cdot \overline{OP'} + q|\overline{OP'}|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 \cos t\theta = pr^2 + qr^2 \cos \varphi \\ r^2 \cos(\varphi - t\theta) = pr^2 \cos \varphi + qr^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos t\theta \cos \varphi = p \cos \varphi + q \cos^2 \varphi \\ \cos(\varphi - t\theta) = p \cos \varphi + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t\theta \cos \varphi - \cos(\varphi - t\theta) = q(\cos^2 \varphi - 1) \\ \cos(\varphi - t\theta) \cos \varphi - \cos t\theta = p(\cos^2 \varphi - 1) \\ \cos t\theta = p + q \cos \varphi \end{cases}$$

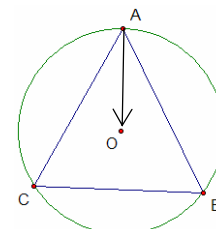
$$\Rightarrow \begin{cases} q = \frac{\cos t\theta \cos \varphi - \cos \varphi \cos t\theta - \sin \varphi \sin t\theta}{-\sin^2 \varphi} = \frac{\sin t\theta}{\sin \varphi} \\ p = \frac{\cos \varphi \cos t\theta \cos \varphi + \sin \varphi \sin t\theta \cos \varphi - \cos t\theta}{-\sin^2 \varphi} = \frac{\cos t\theta \sin \varphi - \sin t\theta \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin(\varphi - t\theta)}{\sin \varphi} \end{cases}$$

$$\text{解得 } p = \frac{\sin(\varphi - t\theta)}{\sin \varphi}, q = \frac{\sin t\theta}{\sin \varphi} \quad \text{即 } \overline{OP'_t} = \frac{\sin(\varphi - t\theta)}{\sin \varphi} \overline{OP_0} + \frac{\sin t\theta}{\sin \varphi} \overline{OP'} \dots\dots \star$$

(但此時  $\sin \varphi \neq 0 \Rightarrow \varphi \neq n\pi, n \in N$  當  $\varphi = n\pi$  時三點共線(不合))

b. 已知圓周上三點 A, B, C

$$\text{若設 } a = \overline{BC}, b = \overline{AC}, c = \overline{AB} \quad \text{則易知 } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$



令  $\overline{AO} = \alpha \overline{AB} + \beta \overline{AC}$  同前法可算得

$$\alpha = \frac{b^2(a^2 - b^2 + c^2)}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}, \beta = \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

後來又進階討論到三點弧的問題：因為夾角是以向量的方式求得，我無法直接由式中看出有過第三點的是優弧或是劣弧，所以必須再加上判斷式，來決定選取轉動角度的範圍限制！

➤ 三點弧( $\widehat{ACB}$  逆時針排列—取為起點 A→C→B 終點)：

$$\text{計算 } \cos \varphi = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OA}| |\overline{OB}|} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{r^2}$$

由前☆式即得  $\overline{OP}_t = \frac{\sin(\varphi - t\theta)}{\sin \varphi} \overline{OA} + \frac{\sin t\theta}{\sin \varphi} \overline{OB}$

尋找範圍：

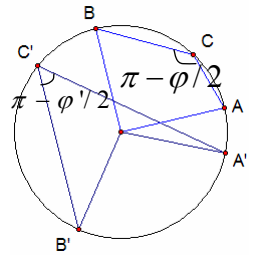
若  $\widehat{ACB} = \varphi < \pi$  則  $\overline{OA}$  及  $\overline{OB}$  夾角取正，即逆時針方向為正向

$$\Rightarrow 0 \leq t\theta \leq \varphi$$

若  $\widehat{ACB} = \varphi > \pi$  則  $\overline{OA}$  及  $\overline{OB}$  夾角取負，此時順時針為正向

$$\Rightarrow 0 \leq -t\theta \leq 2\pi - \varphi \Rightarrow \varphi - 2\pi \leq t\theta \leq 0$$

$$\text{又 } \widehat{ACB} = 2\pi - 2\angle ACB \Rightarrow \begin{cases} \angle ACB \text{ 銳角} \rightarrow \widehat{ACB} = \varphi > \pi \\ \angle ACB \text{ 鈍角} \rightarrow \widehat{ACB} = \varphi < \pi \end{cases}$$



$$\text{結論： } \overline{OP}_t = \frac{\sin(\varphi - t\theta)}{\sin \varphi} \overline{OA} + \frac{\sin t\theta}{\sin \varphi} \overline{OB} \quad \begin{cases} \overline{AC} \cdot \overline{BC} < 0 \Rightarrow 0 \leq t\theta \leq \varphi \\ \overline{AC} \cdot \overline{BC} > 0 \Rightarrow \varphi - 2\pi \leq t\theta \leq 0 \end{cases}, \varphi \neq \pi$$

### (5) 球體

➤ 緯線建球(定義緯度  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ )

空間中一半徑為  $r$  球心在原點的球，定義它為一個球模( $r$ )。在緯度上取  $m+1$  個等分點，令每一等分之緯度分別代表一層(即確定一緯線)，再將緯線均勻分割，每層分割數為  $n$ (即同正  $n$  邊形上的  $n$  個頂點)則：第  $j$  層的頂點為

$$P_{jk}(x_{jk}, y_{jk}, z_{jk})_{xyz} = (r \sin \frac{j\pi}{m} \cos \frac{2k\pi}{n}, r \sin \frac{j\pi}{m} \sin \frac{2k\pi}{n}, r \sin(\frac{j\pi}{m} - \frac{\pi}{2}))_{xyz}$$

$$\forall_{j=0.1.2\dots m, k=0.1.2\dots n-1}$$

證明：引用正  $n$  邊形參數式內容知

$$P_{jk}(x_{jk}, y_{jk}, z_{jk})_{xyz} = (r \cos \frac{2k\pi}{n}, r \sin \frac{2k\pi}{n}, h)_{xyz} \quad \forall k = 0.1.2\dots n-1 \dots \#$$

其中  $r$  為第  $j$  層緯線構成的圓周的半徑長， $h$  為離  $xy$  平面的有向距離

尋找  $r$  長度函數  $r(j)$  此時第  $j$  層緯度為  $\theta_j$

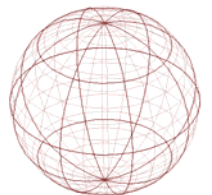
$$\theta_j = \pi \times \frac{j}{m} - \frac{\pi}{2} = \frac{j\pi}{m} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow r(j) = r \cos \theta_j = r \cos(\frac{j\pi}{m} - \frac{\pi}{2}) = r \sin \frac{j\pi}{m}$$

$$h = r \sin \theta_j = r \sin(\frac{j\pi}{m} - \frac{\pi}{2}) \quad \forall j = 0.1.2\dots m$$

代回#得

$$P_{jk}(x_{jk}, y_{jk}, z_{jk})_{xyz} = (r \sin \frac{j\pi}{m} \cos \frac{2k\pi}{n}, r \sin \frac{j\pi}{m} \sin \frac{2k\pi}{n}, r \sin(\frac{j\pi}{m} - \frac{\pi}{2}))_{xyz}$$

➤ 球體運動式



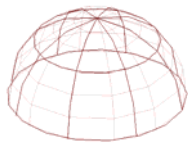
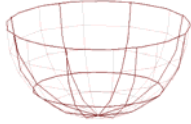
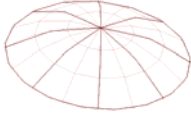
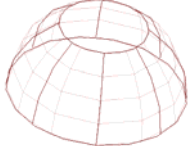
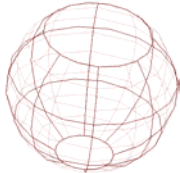
### A. 建構截面函數

$$\text{設 } P_{\theta}(x_{\theta}, y_{\theta}, z_{\theta})_{xyz} \text{ 爲球模}(r)\text{截面(取 } xz \text{ 平面即 } y=0\text{)上動點} \begin{cases} x_{\theta} = r \cos \theta \\ y_{\theta} = 0 \\ z_{\theta} = r \sin \theta \end{cases}$$

B. 迴轉：繞 z 軸迴轉  $\alpha$  角時，z 座標不變  $\Rightarrow z_{\alpha\theta} = z_{\theta} = r \sin \theta$

$$\text{由緯線建球法可知此時 } P_{\alpha\theta} \begin{cases} x_{\alpha\theta} = r \cos \alpha \cos \theta \\ y_{\alpha\theta} = r \sin \alpha \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ z_{\alpha\theta} = r \sin \theta \end{cases}$$

結論：球體參數式  $P_{\alpha\theta}(x_{\alpha\theta}, y_{\alpha\theta}, z_{\alpha\theta})_{xyz} = (r \cos \alpha \cos \theta, r \sin \alpha \cos \theta, r \sin \theta)_{xyz}$   
 $0 \leq \alpha \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

種類	上半球	下半球	冠	台	甕
圖形					
條件	$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$	$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq 0$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$	$0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$	$0 \leq \alpha \leq \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$	$-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

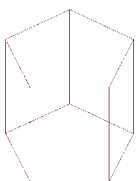
### 2. 模體構造(柱、錐、台函數)

I、方法：頂點連線(在此假設全部立體的高爲 h)

◎正 n 角模體頂點參數式：

定義：空間中正 n 角模體第 i 層平面點  $P_k$  以  $P_{ki}(X_{ki}, Y_{ki}, Z_{ki})_{xyz}$  表示，其中  $P_{k0}$  爲  $P_{k1}$  對 xy 平面投影點； $O_i$  爲第 i 層的外接圓圓心。

#### A. 正 n 角柱

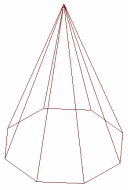


$$\text{第 } 0 \text{ 層(底面)：} P_{k0}(x_{k0}, y_{k0}, z_{k0})_{xyz} = (r \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), r \sin(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), 0)_{xyz}$$

$$\text{第 } 1 \text{ 層(頂面)：} P_{k1}(x_{k1}, y_{k1}, z_{k1})_{xyz} = (r \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), r \sin(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), h)_{xyz}$$

當  $n \rightarrow \infty$  爲圓柱

#### B. 正 n 角錐



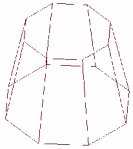
第 0 層(底面) :  $P_{k0}(x_{k0}, y_{k0}, z_{k0})_{xyz} = (r \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), r \sin(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), 0)_{xyz}$

第 1 層(頂點) :  $P_{01}(x_{01}, y_{01}, z_{01})_{xyz} = (0, 0, h)_{xyz}$  ( $\because P_o$  投影點為原點  $O \Rightarrow P_o = O_1$ )

當  $n \rightarrow \infty$  為圓錐

### C. 正 n 角台

設第 i 層外接圓半徑為  $r_i$  且  $r_i = r_0 + (r_1 - r_0)i$



第 0 層(底面) :  $P_{k0}(x_{k0}, y_{k0}, z_{k0})_{xyz} = (r_0 \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), r_0 \sin(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), 0)_{xyz}$

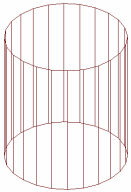
第 1 層(頂面) :  $P_{k1}(x_{k1}, y_{k1}, z_{k1})_{xyz} = (r_1 \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), r_1 \sin(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), h)_{xyz}$

當  $n \rightarrow \infty$  為圓台

II、方法：角度掃描(註:  $t$  取值範圍  $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\theta}$  其中  $\theta$  為角速度(定值))

### A. 圓柱

$\forall P_{i\theta_1}, P_{i\theta_0}$  皆為其對  $xy$  平面投影點 設高度為  $h$

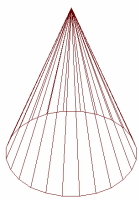


引用平面圓結論得  $P_{i\theta_0}(x_{i\theta_0}, y_{i\theta_0}, z_{i\theta_0})_{xyz} = (r \cos t\theta, r \sin t\theta, 0)_{xyz}$  (忽略起始點限定)

結果 :  $\begin{cases} P_{i\theta_0}(x_{i\theta_0}, y_{i\theta_0}, z_{i\theta_0})_{xyz} = (r \cos t\theta, r \sin t\theta, 0)_{xyz} \\ P_{i\theta_1}(x_{i\theta_1}, y_{i\theta_1}, z_{i\theta_1})_{xyz} = (r \cos t\theta, r \sin t\theta, h)_{xyz} \end{cases}$

### B. 圓錐

引用平面圓結論得  $P_{i\theta_0}(x_{i\theta_0}, y_{i\theta_0}, z_{i\theta_0})_{xyz} = (r \cos t\theta, r \sin t\theta, 0)_{xyz}$  (忽略起始點限定)



第一層為一點  $P_{01} = O_1$  其投影點為  $O_0$  設高為  $h$

若已知任意側邊與中心軸  $\overline{O_0O_1}$  之夾角  $\varphi$  則  $h = \frac{r}{\tan \varphi}$  或  $r = h \tan \varphi$

結果 :  $\begin{cases} P_{i\theta_0}(x_{i\theta_0}, y_{i\theta_0}, z_{i\theta_0})_{xyz} = (r \cos t\theta, r \sin t\theta, 0)_{xyz} \\ P_{i\theta_1}(x_{i\theta_1}, y_{i\theta_1}, z_{i\theta_1})_{xyz} = (0, 0, h)_{xyz} \end{cases}$

藉由  $h = \frac{r}{\tan \varphi}$  或  $r = h \tan \varphi$  對於  $h$ 、 $r$ 、 $\varphi$  任知其中二者皆可得

### C. 圓台

設第 0 層(即頂面)半徑  $r_0$  第 1 層(即頂面)半徑  $r_1$  高為  $h$

引用平面圓結論得

$$P_{t\theta_0}(x_{t\theta_0}, y_{t\theta_0}, z_{t\theta_0})_{xyz} = (r_0 \cos t\theta, r_0 \sin t\theta, 0)_{xyz} \text{ (忽略起始點限定)}$$

$$P_{t\theta_1}(x_{t\theta_1}, y_{t\theta_1}, z_{t\theta_1})_{xyz} = (r_1 \cos t\theta, r_1 \sin t\theta, h)_{xyz} \text{ (忽略起始點限定)}$$

若已知側面(曲面)與底面夾角  $\varphi$  (同兩面角定義)

$$\text{則 } \tan \varphi = \frac{h}{(r_0 - r_1)} \Rightarrow r_1 = r_0 - \frac{h}{\tan \varphi}, h = (r_0 - r_1) \tan \varphi$$

$$\text{結果: } \begin{cases} P_{t\theta_0}(x_{t\theta_0}, y_{t\theta_0}, z_{t\theta_0})_{xyz} = (r_0 \cos t\theta, r_0 \sin t\theta, 0)_{xyz} \\ P_{t\theta_1}(x_{t\theta_1}, y_{t\theta_1}, z_{t\theta_1})_{xyz} = (r_1 \cos t\theta, r_1 \sin t\theta, h)_{xyz} \end{cases}$$

$$\text{藉由 } \tan \varphi = \frac{h}{(r_0 - r_1)} \Rightarrow r_1 = r_0 - \frac{h}{\tan \varphi}, h = (r_0 - r_1) \tan \varphi$$

知對於  $h$ 、 $r$ 、 $\varphi$  任知其中二者皆可得

對其後的貼圖研究而言，為尋找相對應之函數，以角度掃描較能掌握住其上之

任意點，但有圓周增長作用，可再以  $\theta = \frac{v}{r}$  (參照圓周運動部分) 代替。

## 二、圖案對應部分(貼圖)

(一種根據長度的差異作比例換算的方法)

**基礎理論：**

A. 設  $A$  為一線形集合，其長度為  $l(A)$ ，首位元素為  $A_0$ ，末位元素為  $A_{l(A)}$ ； $B$  為一線

形集合，長度為  $l(B)$ ，首位元素為  $B_0$ ，末位元素為  $B_{l(B)}$  取映成函數  $f$  使得：

$$f(A_k) = B_t \quad k = \frac{l(A)}{l(B)}t \quad \{t, k \mid 0 \leq t \leq l(B), 0 \leq k \leq l(A)\}$$

B. 由於貼圖對應為離散取值，討論

- 若  $l(A) > l(B)$  則  $f$  形成蓋射函數，而造成壓縮效應
- 若  $l(A) = l(B)$  則  $f$  形成對射函數，圖形不變形(此時效果最佳)
- 若  $l(A) < l(B)$  則  $f(B)$  將對映不完全而產生馬賽克效應(解析度降低)

因尚處於研究基礎階段，我以球模作球面貼圖當試驗，原因在於可同時討論大小及投影面夾角變化的問題。

### 1. 平行掃描對應(又稱緯線貼圖法)

(1) 同心圓對應法(投影法)

對於  $P_\theta(x_\theta, y_\theta, z_\theta)_{xyz}$ ，設定  $\alpha$  為緯線的參數角 ( $0 \leq \alpha \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ )

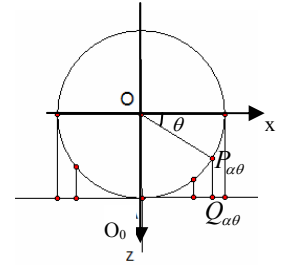
在欲貼圖面上取中心點  $O_0$ ，執行圖形掃描得資料群  $Q_{\alpha\theta}$ ：

$$Q_{\alpha\theta}(x_{\alpha\theta}, y_{\alpha\theta})_{xy} = (R \cos \alpha \cos \theta, R \sin \alpha \cos \theta)_{xy}$$

在目的球面執行緯線掃描得資料群  $P_{\alpha\theta}$  :

$$P_{\alpha\theta}(x_{\alpha\theta}, y_{\alpha\theta}, z_{\alpha\theta})_{xyz} = (R \cos \alpha \cos \theta, R \sin \alpha \cos \theta, R \sin \theta)_{xyz}$$

取函數  $f_{\alpha\theta}(Q_{\alpha\theta}) = P_{\alpha\theta}$  ( $0 \leq \alpha \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) 執行貼圖



## (2) 水平線對應法

定義：在球模(R)裡， $|\overline{OP_N}| = R, P_N = P_{\frac{\pi}{2}}$  為北極， $|\overline{OP_S}| = R, P_S = P_{-\frac{\pi}{2}}$  為南極

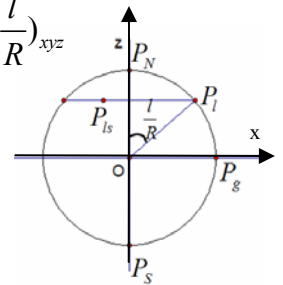
在 xz 平面上取  $\widehat{P_N P_g P_S}$  為基準掃描弧，令  $P_l$  為其上一動點，且  $\widehat{P_N P_l} = l$  其中

$0 \leq l \leq \pi R$ ，定平面  $z = R \cos \frac{l}{R}$  與球模面之交集緯線  $C_l$  為層掃描圓。

令  $P_s$  為  $C_l$  上一動點，使得  $\widehat{P_s P_l} = s$  且  $0 \leq s \leq 2\pi R \sin \frac{l}{R}$  則

$$(i) P_{ls}(x_{ls}, y_{ls}, z_{ls})_{xyz} = (R \sin \frac{l}{R} \cos \frac{s}{R \sin \frac{l}{R}}, R \sin \frac{l}{R} \sin \frac{s}{R \sin \frac{l}{R}}, R \cos \frac{l}{R})_{xyz}$$

$$(0 < l < \pi R, 0 \leq s \leq 2\pi R \sin \frac{l}{R})$$

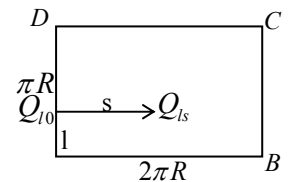


(ii)  $l = 0$  or  $l = \pi$  時,  $P_{ls}$  分別為北極  $P_N$  或南極  $P_S$

取矩形區域 ABCD 為欲貼圖形，使  $\overline{AB} = 2\pi R, \overline{AD} = \pi R$

$$\text{再取 } \overline{AQ_{l_0}} = \frac{l}{\pi R} \overline{AD}, \overline{Q_{l_0} Q_{ls}} = \frac{s}{2\pi R} \overline{AB}$$

(iii)  $\overline{AQ_{ls}} = \overline{AQ_{l_0}} + \overline{Q_{l_0} Q_{ls}} = \frac{l}{\pi R} \overline{AD} + \frac{s}{2\pi R} \overline{AB}$  其中  $0 \leq l \leq \pi R, 0 \leq s \leq 2\pi R \sin \frac{l}{R}$



取函數  $f_{ls}$  定義  $f_{ls}(Q_{\frac{l}{\sin \frac{l}{R}}}) = P_{ls}$  ( $0 \leq l \leq \pi R, 0 \leq s \leq 2\pi R \sin \frac{l}{R}$ ) 且  $l, s \in Z$

執行貼圖

## 2. 放射掃描對應

### (1) 放射點法(又稱極點貼圖法)

取  $B(0, 0, -R)_{xyz}$  為放射中心 再令  $A(0, 0, R)_{xyz}$  為貼圖之不動點

以 A 向四周延經線包裹球模(R)

如圖可得

$$\overline{CD} = 2R \times 2 = 4R \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AD} = 2R$$

$$\angle ABP_{\alpha 2\theta} = \varphi \Rightarrow \angle AOP_{\alpha 2\theta} = 2\varphi \text{ 其中令 } 2\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

$$\overline{AQ_{\alpha 2\theta}} = 2R \tan \varphi \Rightarrow Q_{\alpha 2\theta} (2R \tan \varphi \cos \alpha, 2R \tan \varphi \sin \alpha, R)_{xyz}$$

$$\Leftrightarrow P_{\alpha 2\theta} (R \cos 2\theta \cos \alpha, R \cos 2\theta \sin \alpha, R \sin 2\theta)_{xyz}$$

$$P_{\alpha 2\theta} (R \cos \alpha \cos 2\theta, R \sin \alpha \cos 2\theta)_{xy} \Leftrightarrow Q_{\alpha 2\theta} (2R \tan \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \cos \alpha, 2R \tan \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \sin \alpha)_{xy}$$

$$\text{結論 } P_{\alpha 2\theta} (R \cos \alpha \cos 2\theta, R \sin \alpha \cos 2\theta)_{xy} \Leftrightarrow Q_{\alpha 2\theta} (2R \tan(\frac{\pi}{4} - \theta) \cos \alpha, 2R \tan(\frac{\pi}{4} - \theta) \sin \alpha)_{xy}$$

$$(\because R \sin 2\theta_1 \neq R \sin 2\theta_2 \quad \text{當 } 0 \leq 2\theta < \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$$

接著在目的球面(可見區域)執行掃描得資料群  $P_{\alpha 2\theta}$  :

$$P_{\alpha 2\theta} (R \cos 2\theta \cos \alpha, R \cos 2\theta \sin \alpha)_{xy} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\text{取 } f_{\alpha 2\theta}(Q_{\alpha 2\theta}) = P_{\alpha 2\theta} \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} & P_{\alpha 2\theta} (R \cos \alpha \cos 2\theta, R \sin \alpha \cos 2\theta)_{xy} \\ 0 \leq \alpha \leq 2\pi & Q_{\alpha 2\theta} (2R \cos \alpha \tan(\frac{\pi}{4} - \theta), 2R \sin \alpha \tan(\frac{\pi}{4} - \theta))_{xy} \end{cases}$$

### (2) 等長度法(又稱弧長貼圖)

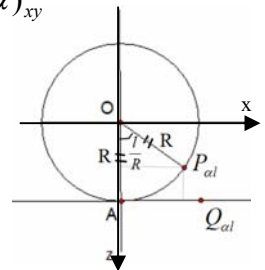
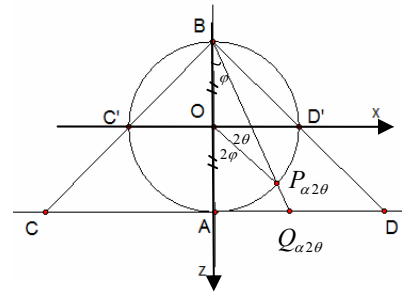
同樣令  $A(0,0,R)_{xyz}$  為貼圖之不動點 設  $\widehat{A_0 P_{al}} = l, \overline{A_0 Q_{al}} = l$

則此時可得對於所有在圖上 Q 點座標  $Q_{al} (x'_{al}, y'_{al})_{xy} = (l \cos \alpha, l \sin \alpha)_{xy}$

在球面取等長後, 皆可找到一球面上之 P 點

$$P_{al} (x_{al}, y_{al})_{xy} = (R \sin \frac{l}{R} \cos \alpha, R \sin \frac{l}{R} \sin \alpha)_{xy} \quad (0 \leq l \leq \frac{\pi R}{2}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi)$$

則可對於函數  $f_{al}(Q_{al}) = P_{al}$  執行貼圖



### 三、資料重組

設頂點資料點群為  $P_{ij} \quad \forall_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n, i \in Z, j \in Z}$  (原始元素)

1. 取函數  $F_{P_{ij}}$  使得  $F_{P_{ij}}(P_{i+k, j+t}) = B_{ij}(k, t) \quad k, t = 0, 1 \quad \forall_{0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1}$

$$2. \text{取函數} \begin{cases} F_{B_{ij}}(B_{ij}(0,0)) = A_{ij}(0) \\ F_{B_{ij}}(B_{ij}(0,1)) = A_{ij}(1) \\ F_{B_{ij}}(B_{ij}(1,1)) = A_{ij}(2) \\ F_{B_{ij}}(B_{ij}(1,0)) = A_{ij}(3) \end{cases} \quad \begin{matrix} P_{ij} & \bullet & \bullet & P_{i, j+1} & A_{0\bullet} \rightarrow A_1 \\ & & & & \uparrow & \downarrow \\ & & & & A_{\bullet} & \leftarrow A_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} P_{11}^* & P_{12}^* & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & P_{45} \end{matrix}$$

3. 由 1.2.  $F_{B_{ij}}(F_{P_{ij}}(P_{i+k, j+t})) = A_{ij}(v) \quad \text{其中 } v = 0, 1, 2, 3 \quad k, t = 0, 1 \quad \forall_{0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1}$

4.稱  $A_j(v)$  為區域資料

5.以  $A_j$  建立之物模表面(網格式),可做局部之更動,修正與變形的效果,將較原始所設之參數點列,用途更為多元。

#### 四、工具函數

➤ n 階圓軌跡參數式 (擺線研究)

設第 k 階軌道圓心為  $O_k(O_{Xk}, O_{Yk})$  其始點為  $P_k(x_k, y_k)$

(其餘符號以此類推,參照之前的設定方式)

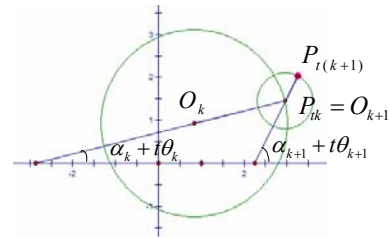
$$\text{易知 } P_{tk}(x_{tk}, y_{tk}) \begin{cases} x_{tk} = O_{Xk} + r_k \cos(\alpha_k + t\theta_k) \\ y_{tk} = O_{Yk} + r_k \sin(\alpha_k + t\theta_k) \end{cases}$$

又第 k 階動點為第 k+1 階之圓心 即  $P_k = O_{k+1}$  故得動點  $P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$

$$\begin{cases} x_{t(k+1)} = O_{X(k+1)} + r_{k+1} \cos(\alpha_{k+1} + t\theta_{k+1}) \\ y_{t(k+1)} = O_{Y(k+1)} + r_{k+1} \sin(\alpha_{k+1} + t\theta_{k+1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{t(k+1)} = x_{tk} + r_{k+1} \cos(\alpha_{k+1} + t\theta_{k+1}) \\ y_{t(k+1)} = y_{tk} + r_{k+1} \sin(\alpha_{k+1} + t\theta_{k+1}) \end{cases}$$

整理可得第 n 階軌道參數式為

$$\begin{cases} x_m = O_{X1} + \sum_{i=1}^n r_i \cos(\alpha_i + t\theta_i) \\ y_m = O_{Y1} + \sum_{i=1}^n r_i \sin(\alpha_i + t\theta_i) \end{cases}$$



其中第二階圓軌跡即為常見的擺線

➤ 正多邊形變換(邊長  $a = 2r \sin \frac{\pi}{n}$ ,討論規律狀況)

1.削角工具

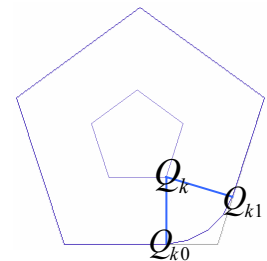
決定削角半徑  $r'(0 \leq r' \leq r \cos \frac{\pi}{n})$  對於多邊形頂點

$$P_k(r \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), r \sin(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2})) \text{ 找點}$$

$$Q_k((r - r' \sec \frac{\pi}{n}) \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), (r - r' \sec \frac{\pi}{n}) \sin(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2})) \text{ 與之對應,}$$

對每個  $Q_k$  點取  $\overline{u_{ki}} = (r' \cos(\frac{2\pi}{n}(k+i) - \frac{\pi}{2}), r' \sin(\frac{2\pi}{n}(k+i) - \frac{\pi}{2}))$   $i=0,1$ , 使得到

點集  $Q = \{Q_k | \overline{OQ_{ki}} = \overline{OQ_k} + \overline{u_{ki}}, i=0,1, k=0,1, \dots, n-1\}$ , 執行  $Q_{k1}$  與  $Q_{(k+1)0}$  間的連線,



對於  $Q_{k0}$  與  $Q_{k1}$  之間，執行描點

$$Q_{k\theta} \left( (r - r' \sec \frac{\pi}{n}) \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}) + r' \sec \theta, (r - r' \sec \frac{\pi}{n}) \sin(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}) + r' \csc \theta \right),$$

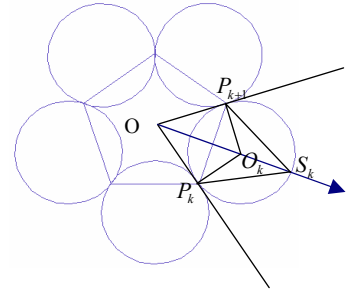
其中  $\frac{2\pi}{n}k - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}(k+1) - \frac{\pi}{2}$ ,  $k=0,1,\dots,n-1$ ，則可達成削角弧的設定。

## 2. 弧瓣工具

於各邊中垂向量上，取向量上一點  $S_k$  為弧瓣控制點

(  $S_k$  取點限制  $r \cos \frac{\pi}{n} \leq \overline{OS_k} \leq r(\tan \frac{\pi}{n} + \sec \frac{\pi}{n})$ ，且

$$\overline{OS_k} // \text{中垂向量}(\cos(\frac{2(k+1)}{n} - \frac{1}{2})\pi, \sin(\frac{2(k+1)}{n} - \frac{1}{2})\pi))$$



藉此來決定弧的大小，再使  $r_k = \overline{S_k O_k} = \frac{\overline{S_k P_k}}{2} \sec \angle OS_k P_k = \frac{\overline{S_k P_k}^2 \overline{S_k O}}{2 \overline{S_k P_k} \cdot \overline{S_k O}}$ ，

得點  $O_k$  為弧瓣圓心，計算  $\varphi = \cos^{-1} \frac{\overline{O_k S_k} \cdot \overline{O_k P_k}}{\overline{O_k S_k} \overline{O_k P_k}}$ ，執行描點：

$$\left\{ R_{k\theta} \left| \overline{OR_{k\theta}} = \overline{OO_k} + r_k (\sec \theta, \csc \theta), (\frac{2(k+1)}{n} - \frac{1}{2})\pi - \varphi \leq \theta \leq (\frac{2(k+1)}{n} - \frac{1}{2})\pi + \varphi, k = 0, 1, \dots, n-1 \right. \right\}$$

## 柒、討論與應用

### 一、討論

#### 1. 貼圖研究

類型	平行掃描(緯線對應)		放射掃描(經線對應)	
	同心圓(投影)	水平線	放射點(極點)	等長度(弧長)
縮放	$l(A) < l(B)$	$l(A) > l(B)$	$l(A) \doteq l(B)$	$l(A) = l(B)$
大小	半徑相同之圓面	長 $\pi R$ 寬 $2\pi R$ 的矩形	半徑為兩倍的圓面	半徑升為 $\pi/2$ 倍
效應	放大; 解析度降低	縮小; 壓縮效應	大約相同; 有扭曲	相同; 有扭曲

#### 2. 立體研究

於建體部分僅考慮基體的建構，是由於任何基體皆可以平移加上旋轉，來改變它的位置及偏轉角度，為使討論方便，只考慮規律情況。

空間中任意立體圖的構造，主要是先由平面構造一函數，再加上它的鉛直方向上的改變量(此又為一新的函數)，藉由函數設定的不同，就可以走出不同的圖形，以圓柱體而言若使用單變數拓展法以時間為主軸一邊繞環一邊上升，則成為螺旋狀，若雙變數則因彼此不干涉，則側部變為一光滑面。

對於任何平面圖形參數式，在角度掃描與頂點設定兩種不同情況下，有兩種不同的功用：

- (1) 角度掃描(描邊法)情況下，若底面描點參數式為  $(f(r,t), g(r,t))$ ，則擴至立體空間時可使用曲移，將圖形拉動為  $(f(r,t) + h_1(u), g(r,t) + h_2(u), h_3(u))$ ，同前述若  $h(u) = h(t)$  則再描底面時將使圖形同時改變位置，而有螺旋效應，側面不緊密，若  $h(u) = h(s)$  參數與底面不相關時，則側面移動規律，接合較平整。亦可將底面描點參數之  $r$  換為長度函數  $r(u)$  亦可對於圖形大小作變動， $u$  的設定影響同前述。
- (2) 頂點設定(頂點連線)的情況下，則擴至空間時將重新設定頂點終點位置，以這種方式作出的立體造型將較呆滯，但繪製快速，可避免浪費不必要的時間。若在移動時，採取同(1)之方法亦可，缺失之處為不亦對『邊』的設定直接調整。

說例：

- (1) 對於平面上的圓，若使其增加  $z$  方向，並隨著時間改變則可塑出螺旋狀的圖形。
- (2) 若在上升時加入半徑的改變，使其隨著一個函數變遷，則可改變圓的大小，而塑造出像龍捲風般的圖形。
- (3) 事實上對於任意平面上的函數，皆可以將它以一個空間中的向量方向拖曳使成為立體圖形。



## 二、推廣與展望

1. 期望能將正多邊形推廣到圓錐曲面甚至任意圖形。
2. 期望能再加上光影明暗的變化，或自行於其上進行著色，使圖形立體化。
3. 考慮物體移動時的形變與轉動時的圖形轉化，以及空間物體的遮蔽現象，設計出物體環境。
4. 設計完整的物體運動式，完成動畫。

## 三、應用

可用於電腦動畫繪圖之上。利用此種方法，可以模擬出較逼真的動畫，並處理掉一些現有動畫中常見的不合理的現象。也可以藉由頂點的掃描將現實中的物體，精確地掃入電腦中，進行局部調整、變動。

## 捌、公式整理

### 一、基體構造

#### (1) 正多邊形

$$P_k(x_k, y_k) = (r \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2}), r \sin(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2})) \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

#### (2) 正多角星

$$P_k(r(k)\cos\frac{k\pi}{n}, r(k)\sin\frac{k\pi}{n}) = (\frac{R+r-(-1)^k R+(-1)^k r}{2}\cos\frac{k\pi}{n}, \frac{R+r-(-1)^k R+(-1)^k r}{2}\sin\frac{k\pi}{n})$$

(3) 平面圓

$$\begin{cases} x_t = O_X + r\cos(\alpha + t\theta) \\ y_t = O_Y + r\sin(\alpha + t\theta) \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x_t = O_X + r\cos(\alpha + \frac{tv}{r}) \\ y_t = O_Y + r\sin(\alpha + \frac{tv}{r}) \end{cases}$$

(4) 空間圓(弧)

$$\overline{OP_t} = \frac{\sin(\varphi - t\theta)}{\sin\varphi}\overline{OA} + \frac{\sin t\theta}{\sin\varphi}\overline{OB} \begin{cases} \overline{AC} \cdot \overline{BC} < 0 \Rightarrow 0 \leq t\theta \leq \varphi \\ \overline{AC} \cdot \overline{BC} > 0 \Rightarrow \varphi - 2\pi \leq t\theta \leq 0 \end{cases} \quad \varphi \neq \pi$$

(5) 球體

$$P_{jk}(x_{jk}, y_{jk}, z_{jk})_{xyz} = (r\sin\frac{j\pi}{m}\cos\frac{2k\pi}{n}, r\sin\frac{j\pi}{m}\sin\frac{2k\pi}{n}, r\sin(\frac{j\pi}{m} - \frac{\pi}{2}))_{xyz}$$

$$P_{\alpha\theta}(x_{\alpha\theta}, y_{\alpha\theta}, z_{\alpha\theta})_{xyz} = (r\cos\alpha\cos\theta, r\sin\alpha\cos\theta, r\sin\theta)_{xyz} \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

二、貼圖函數

(1) 投影對應

$$f_{\alpha\theta}(Q_{\alpha\theta}) = P_{\alpha\theta} \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

$$P_{\alpha\theta} = (R\cos\alpha\cos\theta, R\sin\alpha\cos\theta)_{xy} \quad Q_{\alpha\theta} = (R\cos\alpha\cos\theta, R\sin\alpha\cos\theta)_{xy}$$

(2) 水平線對應

$$f_{ls}(Q_{l\frac{s}{\sin\frac{l}{R}}}) = P_{ls} \quad (0 \leq l \leq \pi R, 0 \leq s \leq 2\pi R \sin\frac{l}{R}) \text{ 且 } l, s \in Z$$

$$\text{對於矩形 } ABCD \quad \overline{AQ_{ls}} = \overline{AQ_{l0}} + \overline{Q_{l0}Q_{ls}} = \frac{l}{\pi R}\overline{AD} + \frac{s}{2\pi R}\overline{AB}$$

$$P_{ls}(x_{ls}, y_{ls}, z_{ls})_{xyz} = (R\sin\frac{l}{R}\cos\frac{s}{R\sin\frac{l}{R}}, R\sin\frac{l}{R}\sin\frac{s}{R\sin\frac{l}{R}}, R\cos\frac{l}{R})_{xyz}$$

(3) 放射點對應

$$f_{\alpha 2\theta}(Q_{\alpha 2\theta}) = P_{\alpha 2\theta} \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$$

$$P_{\alpha 2\theta} = (R\cos\alpha\cos 2\theta, R\sin\alpha\cos 2\theta)_{xy} \quad Q_{\alpha 2\theta} = (2R\cos\alpha\tan(\frac{\pi}{4} - \theta), 2R\sin\alpha\tan(\frac{\pi}{4} - \theta))_{xy}$$

(4) 等長度對應

$$f_{\alpha l}(Q_{\alpha l}) = P_{\alpha l} \quad (0 \leq l \leq \frac{\pi R}{2}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi)$$

$$P_{\alpha l} \left( R \sin \frac{l}{R} \cos \alpha, R \sin \frac{l}{R} \sin \alpha \right)_{xy} \quad Q_{\alpha l} (l \cos \alpha, l \sin \alpha)_{xy}$$

### 三、工具函數

#### (1) n 階圓軌跡函數

$$P_m \begin{cases} x_m = O_{X1} + \sum_{i=1}^n r_i \cos(\alpha_i + t\theta_i) \\ y_m = O_{Y1} + \sum_{i=1}^n r_i \sin(\alpha_i + t\theta_i) \end{cases}$$

#### (2) 削角工具

$$Q_{k\theta} \left( (r - r' \sec \frac{\pi}{n}) \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \right) + r' \sec \theta, (r - r' \sec \frac{\pi}{n}) \sin \left( \frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \right) + r' \csc \theta \right),$$

$$\text{其中 } \frac{2\pi}{n} k - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n} (k+1) - \frac{\pi}{2}, k=0,1,\dots,n-1$$

#### (3) 弧瓣工具

$$\left\{ R_{k\theta} \left| \overline{OR_{k\theta}} = \overline{OO_k} + r_k (\sec \theta, \csc \theta), \left( \frac{2(k+1)}{n} - \frac{1}{2} \right) \pi - \varphi \leq \theta \leq \left( \frac{2(k+1)}{n} - \frac{1}{2} \right) \pi + \varphi, k = 0, 1, \dots, n-1 \right. \right\}$$

$$\text{其中 } \varphi = \cos^{-1} \frac{\overline{O_k S_k} \cdot \overline{O_k P_k}}{\overline{O_k S_k} \overline{O_k P_k}}$$

## 評語

1. 科展之題材可以利用網路作資料索尋。
2. 3D 模擬有豐富的數學題材作為進一步之研究目標。