

# 臺灣二〇〇三年國際科學展覽會

科 別：數學科

作品名稱：一些 Moiré patterns 的數學性質研究

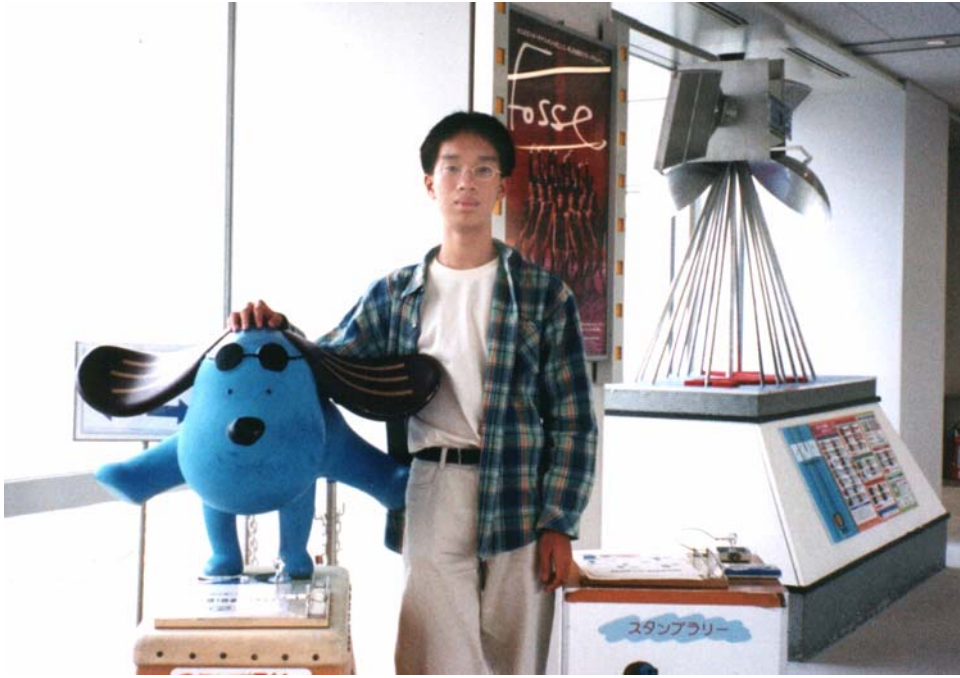
得獎獎項：數學科第二名

紐西蘭二〇〇三年科學展覽會

學 校：國立嘉義高級中學

作 者：陳威任

## 作者簡介



我是陳威任，現在是嘉義高中二年級學生。父母從小就鼓勵我多看課外書籍，加上我從小就喜歡思考問題，因此從小時候的閱讀經驗中我已經培養出對數學的興趣。從國小到現在，我對數學的熱忱不曾減輕，而科展正好給了我一個思考的空間，因此它也成了我喜愛的活動之一。感謝李文堂老師、丁右松老師以及陳崇凱教授的指導，讓我有機會參加這次的國際科展。我想做科展最大的收穫就是自己從中汲取的經驗，因為這讓我成長了不少，也讓我的高中生涯更多采多姿。

# 一些 Moiré pattern 的數學性質研究

## 摘 要

Moiré 為法文，其英譯為 watered，是古代織布技術的一種應用；將印有規律條紋的透明薄片重疊時，稍微移動或轉動其中的一片，會形成極大的圖形變化，稱為 moiré pattern

本作品針對三個 moiré pattern 的數學式加以推導：

- (一)、兩張透明片各印有等間隔平行線，轉動其中一片使兩線的夾角  $\theta$ ，亮紋垂直距離和暗紋垂直距離的比值為  $\tan \frac{\theta}{2} \tan \theta$ 。
- (二)、兩張透明片各印有輻射線，重疊後行成圓系，可由代數或幾何加以證明，利用三角函數可推導出此圓系方程式為：
$$x^2 + \{y - r \tan[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)]\}^2 = \{r \sec[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)]\}^2$$
。
- (三)、透明片 A 印有等間隔平行線，B 印有符合高斯曲線的平行線，AB 重疊時，形成一系列的高斯曲線，AB 的夾角減少時，會增大曲線的曲率，我們進一步討論曲線的曲率和平行線斜率的關係。

## A Study of the Mathematical Analysis of Some Moiré Patterns

### ABSTRACT

Moiré is the French word “watered” and refers to an ancient technique employed in clothmaking. The moiré occurs whenever two or more transparent sheets with periodic strips on them are superposed. The characteristic of moiré patterns is the fact that a slight shift of sheets will create dramatic alternations in the observed patterns.

In the present report, We derive the equations of three different moiré patterns. First of all, take a sheet with equal spaced straight lines and placed it on top of another identical sheet. They are made to intersect and form an angle of  $\theta$ . As the angle changes slightly, it produces huge changes in the spacing of moiré fringes. We can derive a formula related to the interfringe distance. The ratio of bright fringes and dark fringes is  $\tan \frac{\theta}{2} \tan \theta$ .

Secondly, two transparent sheets with radial lines on them are overlapped, forming a pattern similar to the lines of force between point charges. We can find that the pattern is a series of circle by means of algebraic and geometric proofs. And proven by trigonometric functions, we can conclude that they satisfy the equation:  $x^2 + \{y - r \tan[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)]\}^2 = \{r \sec[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)]\}^2$

Thirdly, a set of lines of equal spacing is overlapped with a second set of lines whose spacing are derived from a Gaussian curve. A series of Gaussian curves is reproduced in a moiré pattern. Reducing the angle of intersection between the two figures steepen the curvature. We discussed the relation between the curvature and the slope of inclined lines.

## 壹、前言(研究動機和研究目的)

✧ Moiré 為法文，英譯為“watered”，為紡織工業染布技術的一種。日常生活中常看到兩片薄紗白窗簾，其條紋重疊時形成的條紋即為 moiré patterns。而將有規律變化的條紋，例如同心圓、平行直線，重疊、移動或小角度轉動形成的 moiré patterns 有很大幅度的變化。如下圖，即為日常生活中常見的 moiré patterns。



二、 翻閱國內有關 moiré pattern 的數學性質的研究只有(見參考資料):

- (一)、民國 78 年黃書健：「同心圓平行線重疊形成曲線的研究」(註 1)
- (二)、民國 80 年李文堂：「同心圓平行線波列干涉的研究」(註 2)

三、 國外期刊則偏重於物理演示教學:

- (一)、Gerald Oster (1963) “Moiré patterns” (註 3)
- (二)、T. S. Stein (1982) “Demonstrations of beat as moving interference patterns” (註 4)
- (三)、Bruce Bernero (1989) “The moiré effect in physics teaching” (註 5)

四、 本件作品將針對下列三點作相關性的研究:

- (一)、兩張透明片各印有等間隔平行線，研究線的夾角和條紋間距的關係。
- (二)、兩張透明片各印有輻射線，證明並推導出圓系方程式。
- (三)、透明片 A 印有等間隔平行線，B 印有符合高斯曲線的平行線，AB 重疊時，形成一系列的高斯曲線，AB 的夾角減少時，會增大曲線的曲率，我們進一步討論曲線的曲率和平行線斜率的關係。

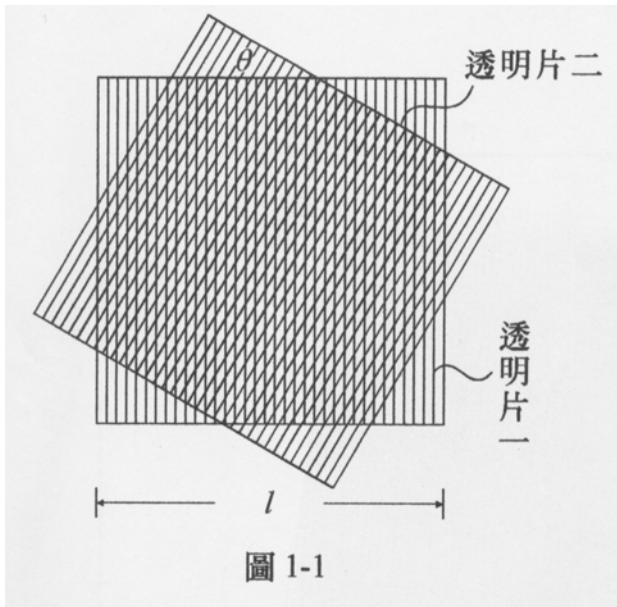
## 貳、研究器材及設備

投影機，印好所需圖片之投影片。

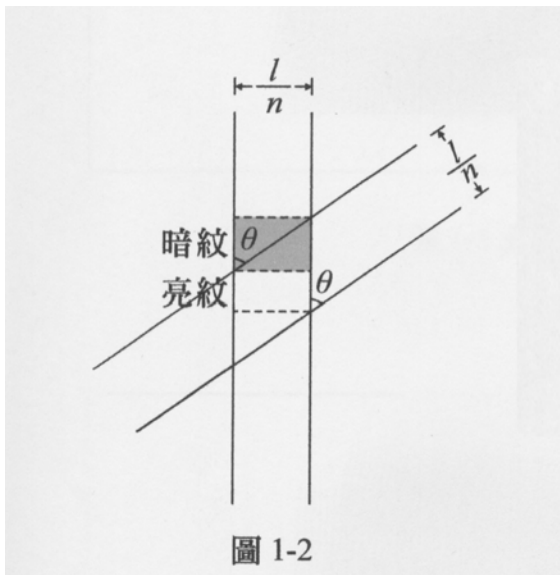
參、研究過程及討論

一、探討間隔相等的直線條紋疊合時,因疊合角的差異產生之亮暗紋的變化

(註：在本例中之兩透明片上之平行線，實際上是”有粗細”的，而線之粗細與相鄰兩線之間隔的比例不可太大，大約 1：1 最好，因為間隔太大將造成干涉出的條紋不明顯甚或看不出來。除了本例外，其餘兩例的線依然是有粗細的，在不影響討論之前提下，我們為討論方便仍將它視為數學上的沒有粗細的線來討論)



如圖 1-1,  
 設兩透明片長度均為  $l$   
 且均等分為  $n$  段,  
 兩透明片疊合時交角  $\theta$   
 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$



如圖 1-2,不難發現:

$$\text{暗紋垂直距離} = \frac{l}{n} \cot \theta = \frac{l}{n \tan \theta}$$

亮紋垂直距離

$$= \frac{l}{n} \csc \theta - \frac{l}{n} \cot \theta = \frac{l}{n} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{l}{n} \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \text{亮紋垂直距離} : \text{暗紋垂直距離} \\ = \tan \frac{\theta}{2} \tan \theta$$

討論: (一)當  $\theta = \frac{\pi}{2}$  時, 暗紋垂直距離 = 0 亮紋垂直距離 =  $\frac{l}{n}$  (單位間隔長)

(二)當  $\theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  時,

$\therefore \tan \theta, \tan \frac{\theta}{2}$  變大  $\therefore$  亮紋垂直距離與暗紋垂直距離比值越來越大

當  $\tan \frac{\theta}{2} \tan \theta = 1$  時,亮紋垂直距離 = 暗紋垂直距離

$$\therefore \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$\therefore \frac{\theta}{2} + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$  即  $\theta = \frac{\pi}{3}$  時, 亮紋垂直距離 = 暗紋垂直距離

(三)由圖 1-3、圖 1-4 可明顯看出  $\theta$  角變化時,亮紋和暗紋的變化情形。

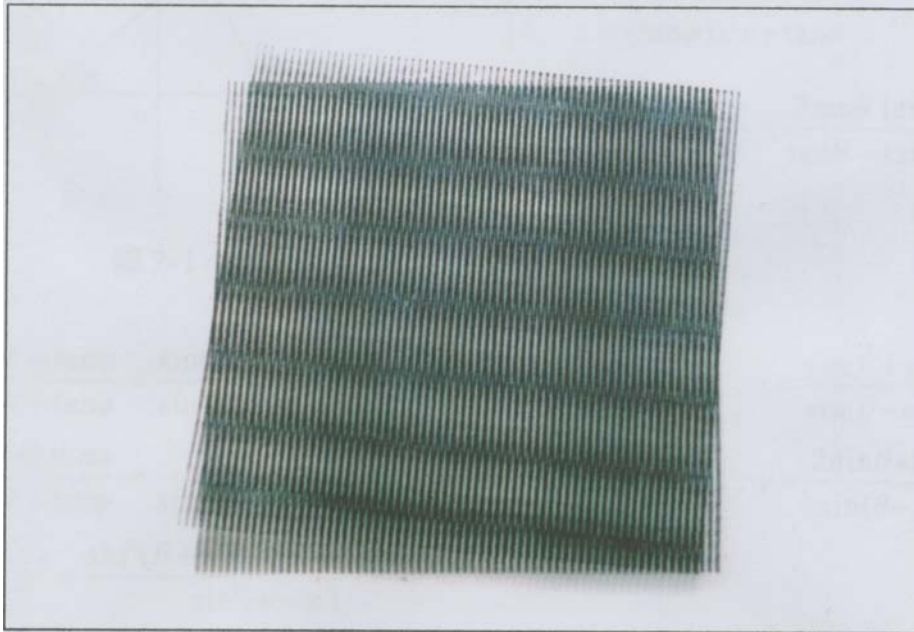


圖 1-3 直線( $\theta$  較小)

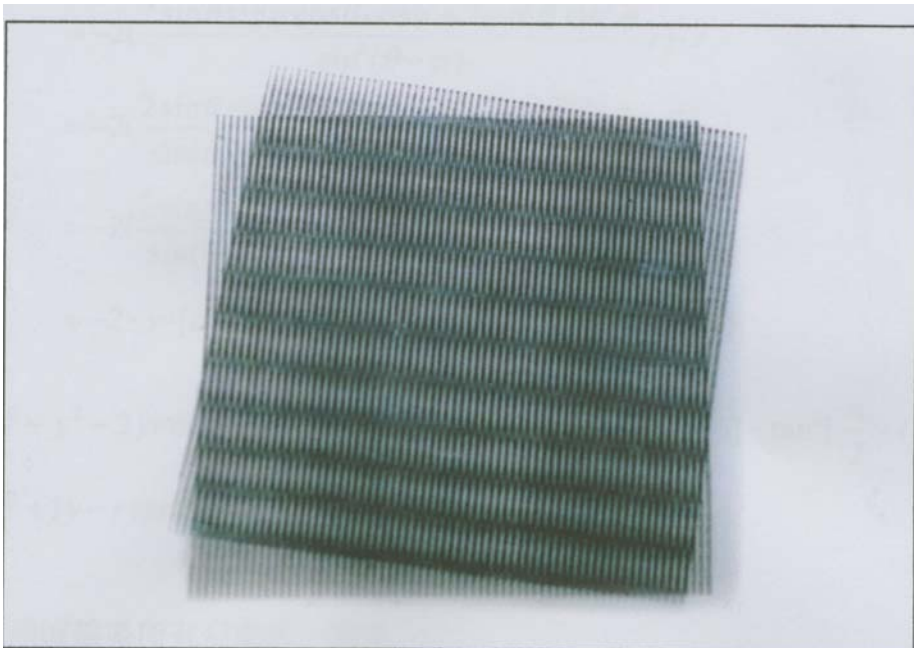
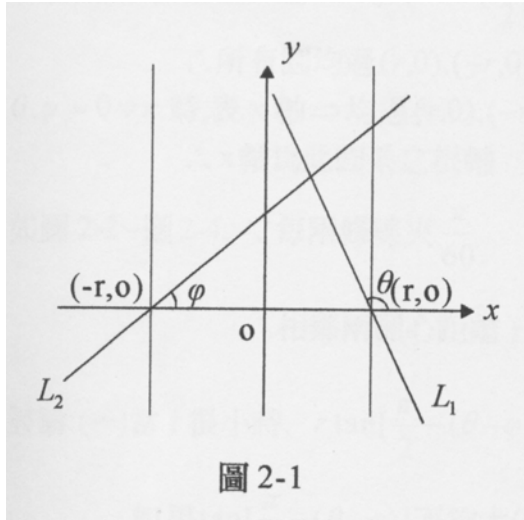


圖 1-4 直線( $\theta$  較大)

二、兩組放射線干涉



如圖 2-1,

$$0 \leq \theta, \varphi \leq \pi \quad \theta, \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} L_1 : y = (\tan \theta)x - r \tan \theta \\ L_2 : y = (\tan \varphi)x + r \tan \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{交點} \left( \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{\tan \theta - \tan \varphi} r, \frac{2 \tan \theta \tan \varphi}{\tan \theta - \tan \varphi} r \right)$$

$$\frac{\tan \theta + \tan \varphi}{\tan \theta - \tan \varphi} = \frac{\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta}{\sin \theta \cos \varphi - \sin \varphi \cos \theta} = \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\sin(\theta - \varphi)} \quad \therefore x = \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\sin(\theta - \varphi)} r$$

$$\frac{2 \tan \theta \tan \varphi}{\tan \theta - \tan \varphi} = \frac{2 \sin \theta \sin \varphi}{\sin \theta \cos \varphi - \sin \varphi \cos \theta} = \frac{2 \sin \theta \sin \varphi}{\sin(\theta - \varphi)} \quad \therefore y = \frac{2 \sin \theta \sin \varphi}{\sin(\theta - \varphi)} r$$

$$x^2 + y^2 = \frac{\sin^2(\theta + \varphi) + 4 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\sin^2(\theta - \varphi)} r^2$$

$$\begin{aligned} \text{兩邊同加} \quad & \frac{\sin^2(\theta - \varphi) - \sin^2(\theta + \varphi) - 4 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\sin^2(\theta - \varphi)} r^2 \\ &= \frac{-4 \sin \theta \sin \varphi \cos \theta \cos \varphi - 4 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\sin^2(\theta - \varphi)} r^2 \\ &= -2 \left( \frac{2 \sin \theta \sin \varphi \cos \theta \cos \varphi + 2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\sin^2(\theta - \varphi)} r \right) \cdot r \\ &= -2 \left( \frac{2 \sin \theta \sin \varphi}{\sin(\theta - \varphi)} r \right) \left( \frac{\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi}{\sin(\theta - \varphi)} \right) \cdot r \\ &= -2 \left( \frac{2 \sin \theta \sin \varphi}{\sin(\theta - \varphi)} r \right) \left( \frac{\cos(\theta - \varphi)}{\sin(\theta - \varphi)} \right) \cdot r \\ &= -2 \cdot y \cdot [\cot(\theta - \varphi) \cdot r] = -2 \cdot y \cdot r \cdot \tan\left[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)\right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2yr \tan\left[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)\right] = r^2 = r^2 \left\{ \sec^2\left[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)\right] - \tan^2\left[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)\right] \right\}$$

$$\Rightarrow x^2 + \{y - r \tan\left[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)\right]\}^2 = \{r \sec\left[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)\right]\}^2$$

表此兩直線系所有交點成一圓系，

$$\text{此圓系之圓的圓心爲} \left( 0, r \tan\left[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)\right] \right) \quad \text{半徑} r \sec\left[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)\right]$$

$\therefore$  所有此圓系之圓心均在 y 軸上

$$(r,0),(-r,0) \text{ 代入} \Rightarrow \text{左} = r^2 + \{r \tan[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)]\}^2 = \{r \sec[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)]\}^2 = \text{右}$$

$\therefore$  所有圓均過  $(r,0), (-r,0)$  兩點

$\theta, \varphi = 0 \vee \pi$  時, 表 x 軸  $\Rightarrow$  均過  $(r,0), (-r,0)$  兩點

$\therefore$  x 軸為此圓系之根軸

如圖 2-2~圖 2-4,  $\therefore$  每兩條線夾  $\frac{\pi}{60}$

$$\therefore \text{相鄰兩圓心距離} r \tan[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)] - r \tan[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi) - \frac{\pi}{60}]$$

討論:(一)當 r 很小時,  $r \tan[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)] - r \tan[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi) - \frac{\pi}{60}]$  的值相對較小

如果  $\tan[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)]$  不夠大(即  $\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)$  很小)時,此時的大部分圓心會聚集在中心,干涉條紋不明顯,如圖 2-2

(二)當 r 漸漸變大時,  $r \tan[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)] - r \tan[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi) - \frac{\pi}{60}]$  的值也相對變大,此時干涉條紋會漸漸變得明顯,如圖 2-3

(三)當 r 很大時,  $r \tan[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)] - r \tan[\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi) - \frac{\pi}{60}]$  的值相對較大

此時  $\frac{\pi}{2} - (\theta - \varphi)$  不必太大,兩圓心的間距就很大,可清楚分辨之圓會變得很多,亮暗帶間的差異不明顯,干涉出來的條紋就不明顯,如圖 2-4

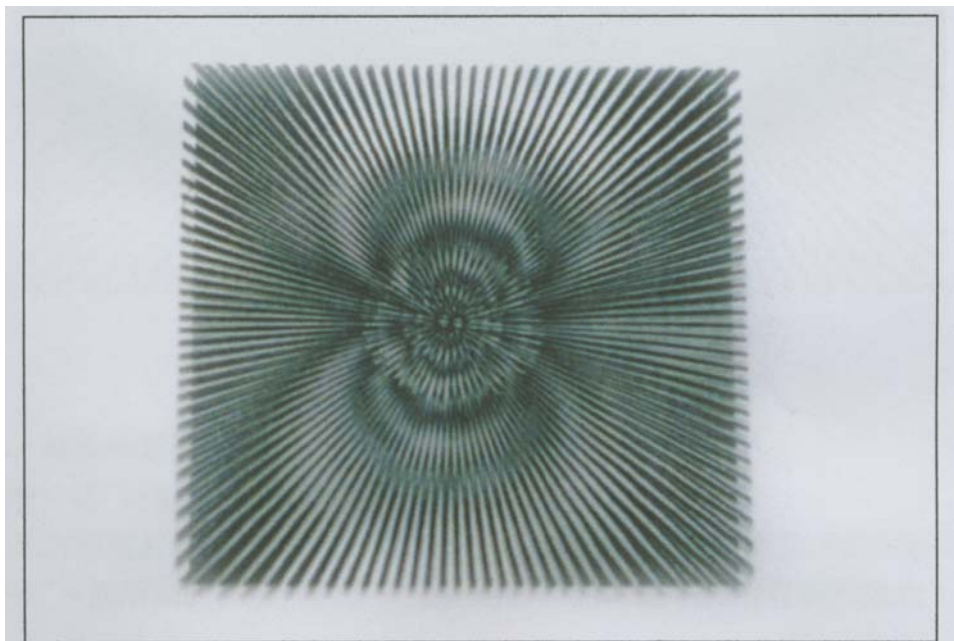


圖 2-2 橢性束(r 很小)

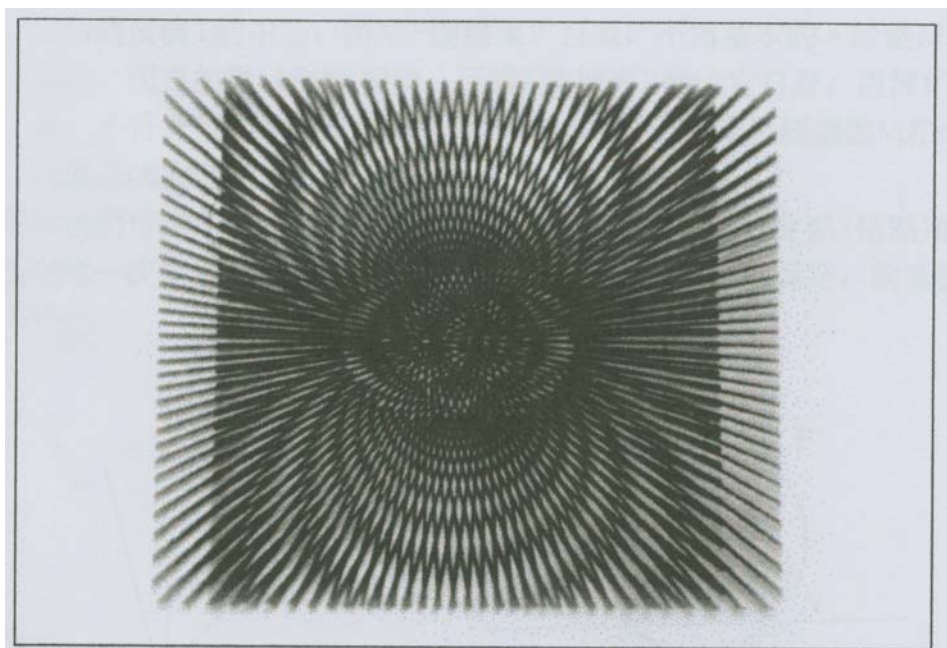


圖 2-3 橢性束( $r$  漸大)

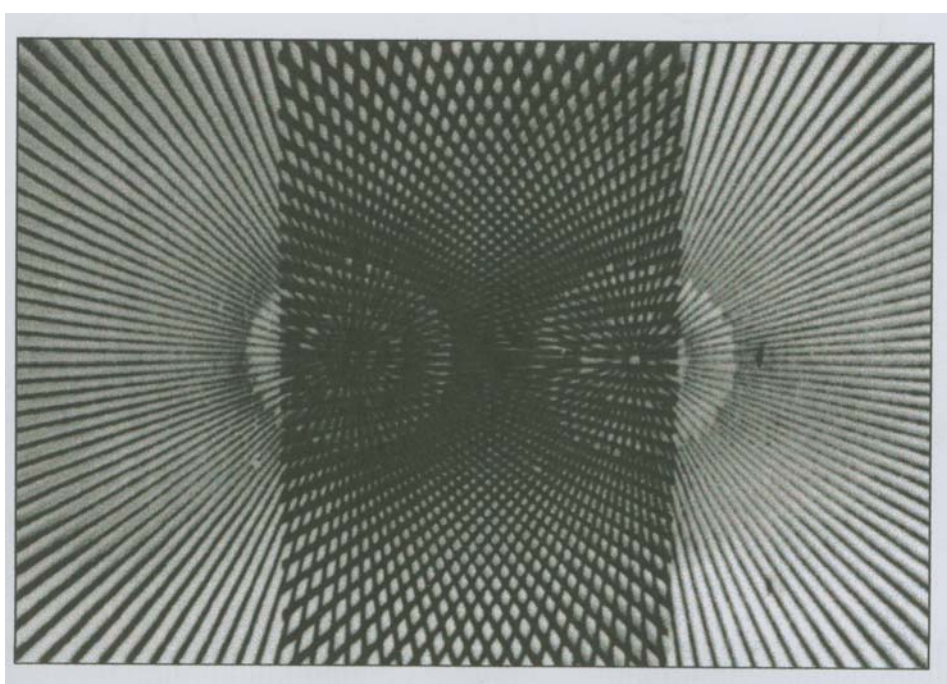


圖 2-4 橢性束( $r$  很大)

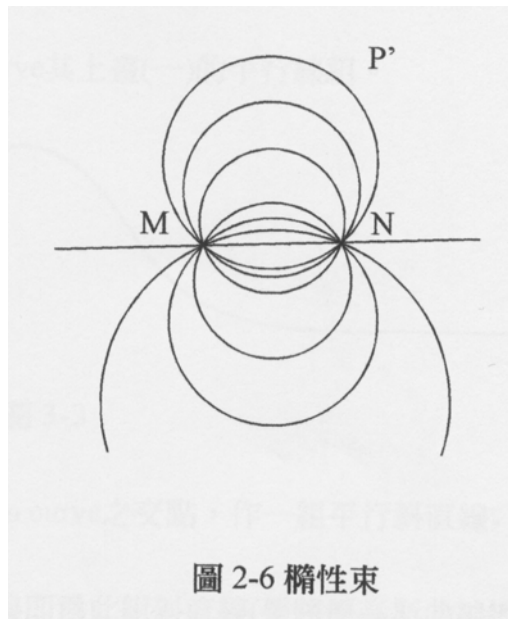
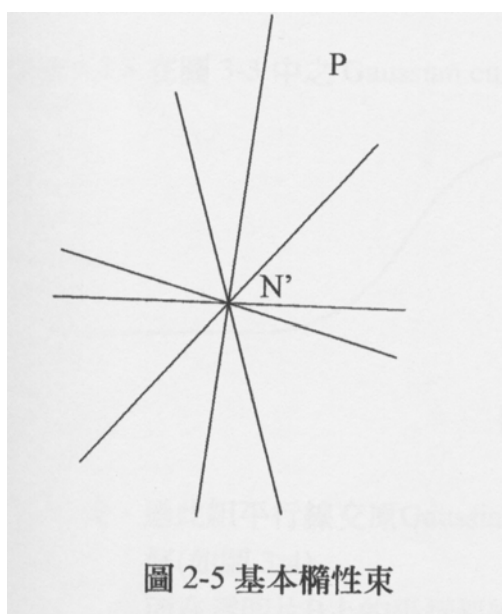
※ 本題另一種數學看法:  
若以數學中的”反演”(或”仿射”, inversion)的觀點來看

本題原來的兩放射線，為兩具有結點的”基本橢性束”，而干涉出來的條紋則為一”非基本橢性束”。而所謂的非基本橢性束是經過兩非無窮遠點的所有圓的集合。簡單證明如下：

[pf]:若束  $P$  是一具有結點  $N'$  的基本橢性束，則  $P$  是經過點  $N'$  和  $O_{\infty}$  (無窮遠點) 的所有圓的集合，即  $P$  為經過點  $N'$  的直線的集合。(如圖 2-5)

設  $M$  是反演  $T$  的中心，將束  $P$  變為束  $P'$  且束  $P'$  不為基本的。於是  $M$  和  $N'$  是不相同的，因為如果  $M$  和  $N'$  相同，反演  $T$  將把束  $P$  變成它自身，這樣  $P'$  為基本橢性束，不符合我們的要求。由於束  $P$  在反演  $T$  之下的像是經過點  $M$  和  $N=T(N')$  的圓的集合(如圖 2-6)，於是得到證明。

而從中我們可推出，由於每一個橢性束能定義為經過兩固定點(結點)的圓的集合，故結點唯一決定橢性束，所以干涉出來的條紋只要兩結點固定，則其圖形是唯一的。



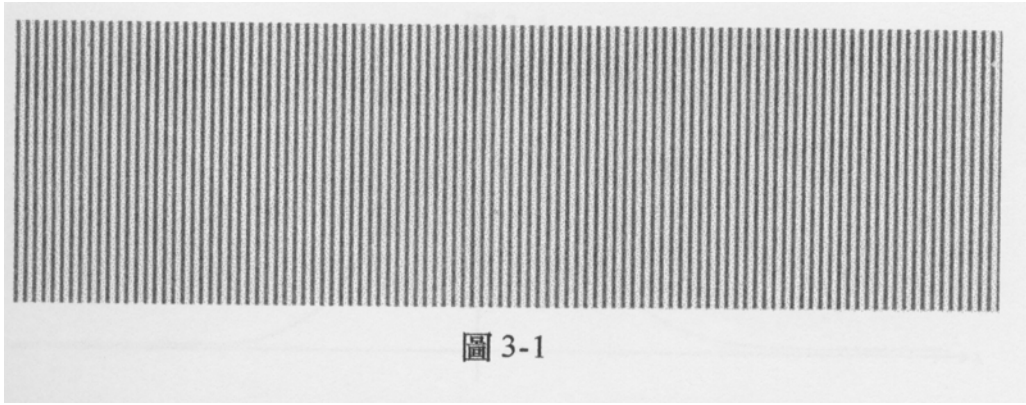
其實這種干涉圖形即為我們在前言中提到的電風扇上可見之 moiré patterns。

### 三、高斯分配(或常態分配, Gaussian curve)曲線干涉:

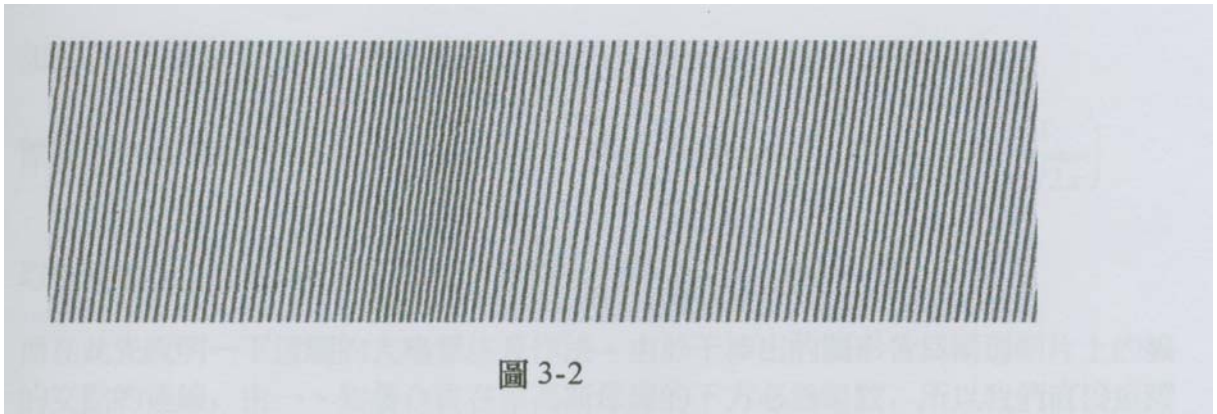
在高中數學教材第四冊的敘述統計中有提到常態分配圖。接下來，我們將以透明片來模擬一些常態分配圖(以下稱為”高斯曲線”)的鐘型的變化。

本例中兩透明片之作法較為特殊，茲將作法詳列如下：

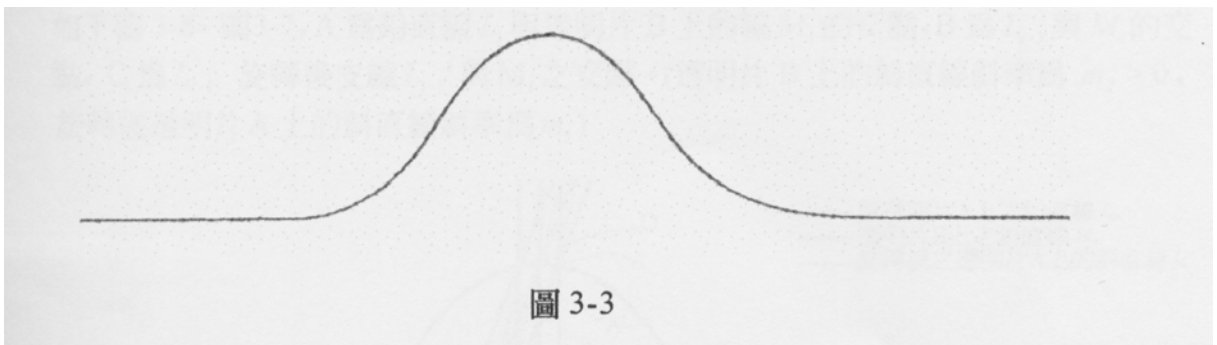
(一) 透明片 A：等距且垂直  $x$  軸之平行線。(如圖 3-1)



(二) 透明片 B：一組平行斜直線(如圖 3-2，此斜線做法較特殊，作法如下)



作法：1、在圖 3-3 中之 Gaussian curve 其上畫(一)的平行線組。



2、過此組平行線交原 Gaussian curve 之交點，作一組平行斜直線(如圖 3-4)而在透明片 B 上的平行斜線即為此組斜直線(要將原高斯曲線擦掉，將它”隱藏”起來，但它”仍”在那裡)。

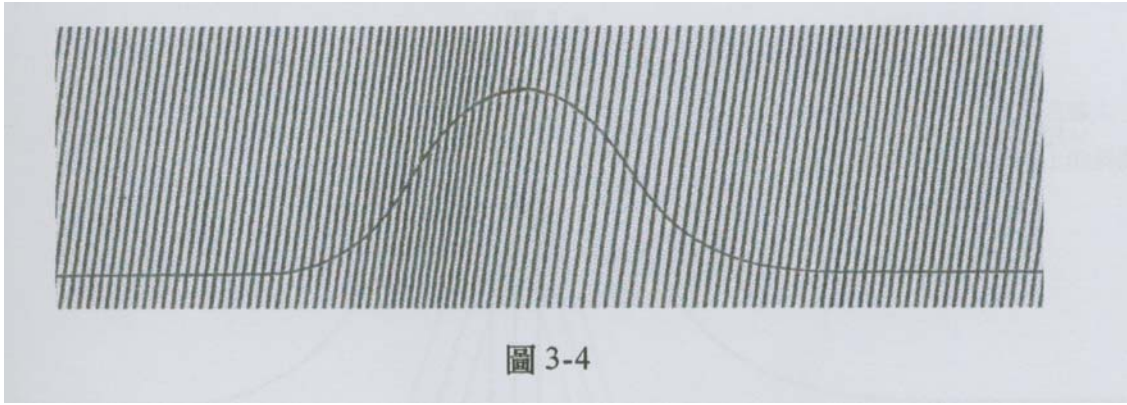


圖 3-4

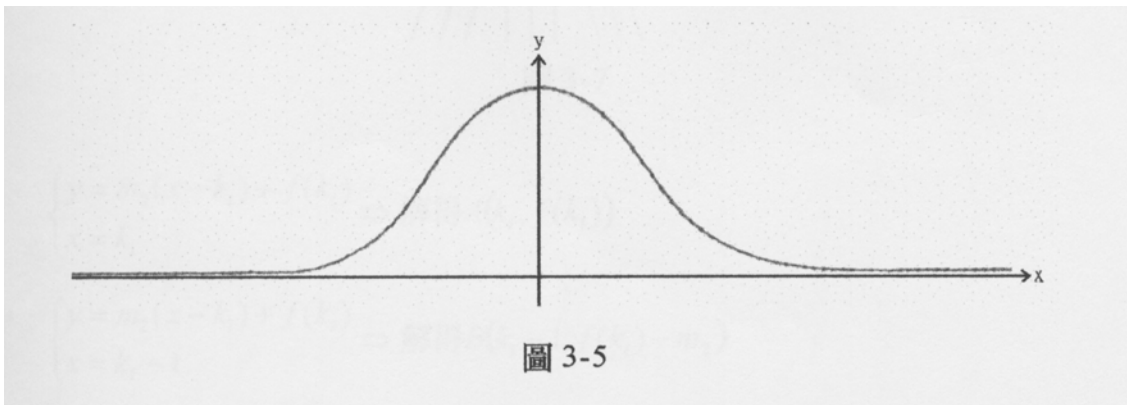


圖 3-5

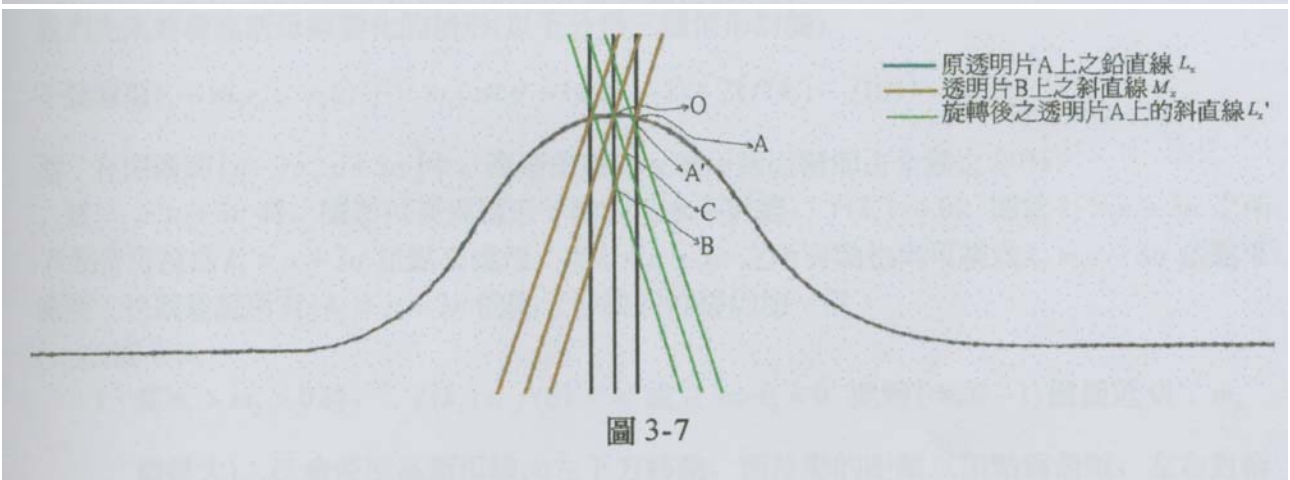
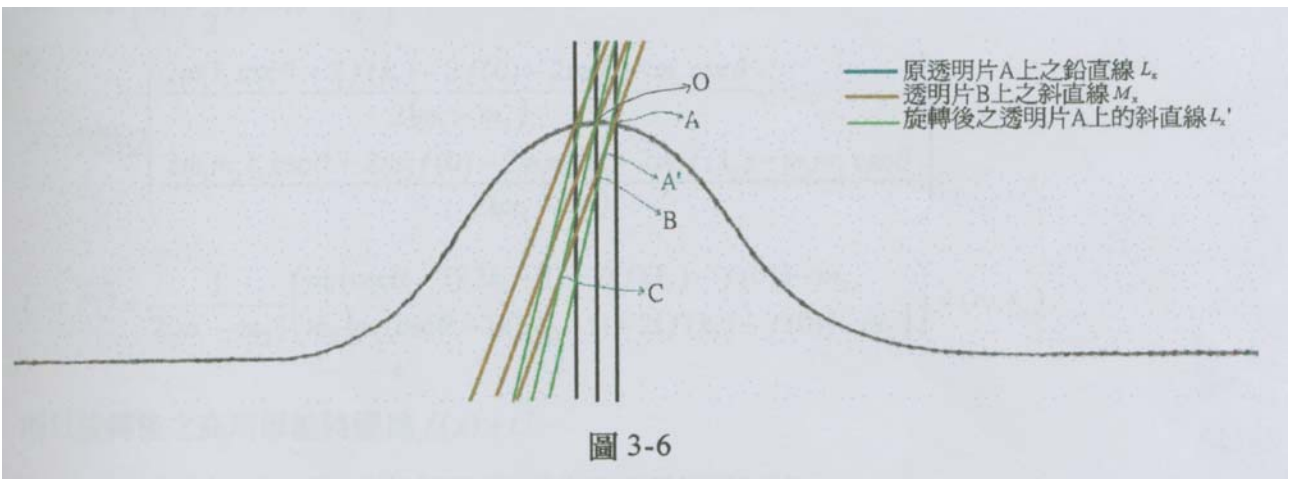
如圖 3-5,取此高斯曲線之漸近線為  $x$  軸,  $\mu = 0$  為  $y$  軸,建立一直角座標系

$$\text{原高斯母線(隱藏)} \Gamma: f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{軸: } x = 0 \quad \text{頂點 } A_0\left(0, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

$$\text{取旋轉中心 } O \text{ 為原高斯曲線母線之頂點 } A_0\left(0, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) = f(0)$$

而在此先說明一下這題的大略想法及作法。由於干涉出的圖形皆為兩透明片上的線的交點的連線，由一、知疊合後在原高斯母線的下方必為暗紋，所以我們直接追蹤這些暗紋的中點連線即可得知干涉出的高斯母線會有何變化。

如下圖 3-6、圖 3-7,  $A$  為鉛直線  $L_i$  與透明片 B 上的線  $M_i$  的交點,  $B$  為  $L_{i-1}$  與  $M_i$  的交點,  $C$  為  $L_{i-1}$  旋轉後支線  $L_{i-1}'$  與  $M_i$  之交點。(透明片 B 上的斜直線斜率為  $m_2 > 0$ , 旋轉後透明片 A 上的斜直線斜率為  $m_1$ )



$$\begin{cases} y = m_2(x - k_i) + f(k_i) \\ x = k_i \end{cases} \Rightarrow \text{解得 } A(k_i, f(k_i))$$

$$\begin{cases} y = m_2(x - k_i) + f(k_i) \\ x = k_i - 1 \end{cases} \Rightarrow \text{解得 } B(k_i - 1, f(k_i) - m_2)$$

$$\begin{cases} y = m_2(x - k_i) + f(k_i) \\ y = m_1[x - (k_i - 1)] + f(0) \end{cases} \Rightarrow \text{解得 } C\left(k_i + \frac{f(k_i) - f(0) - m_1}{m_1 - m_2}, f(k_i) + m_2\left(\frac{f(k_i) - f(0) - m_1}{m_1 - m_2}\right)\right)$$

由於在透明片 A 上的兩相鄰的直線間隔與線之粗細大約為 1 : 1(比例差太多干涉出的條紋亮暗紋即不明顯)，而在此我們將這些“有粗細”的線當成數學上的線處理(即粗細=0)，會有誤差問題。實際上圖中的 A' 與 A 間的距離是可忽略的。

$$\overline{AB} \text{ 中點 } P\left(k_i - \frac{1}{2}, f(k_i) - \frac{m_2}{2}\right)$$

$$\overline{A'C} \text{ 中點} = \overline{AC} \text{ 中點 } Q\left(k_i + \frac{f(k_i) - f(0) - m_1}{2(m_1 - m_2)}, f(k_i) + m_2\left(\frac{f(k_i) - f(0) - m_1}{2(m_1 - m_2)}\right)\right)$$

$$\vec{U} = \overline{PQ} = \frac{1}{2(m_1 - m_2)} [f(k_i) - f(0) - m_2, m_2(f(k_i) - f(0) - m_2)] = (r_x, r_y)$$

所以旋轉後之高斯母線將變為  $f(x) + \vec{U}$

我們先來看看高斯母線變化的情形(以下分為三種情形討論):

(一)如圖 3-6,

1、當  $m_1 > m_2 > 0$  時,  $\because f(k_i) \leq f(0) = "$ 成立  $\Leftrightarrow k_i = 0$

$\therefore \vec{U}$  會使原高斯母線向左下方移動, 而移動的距離以頂點為最短, 左右對稱越來越長, 造成高斯母線的鐘型將變陡。而  $m_1 - m_2$  之值如果愈接近 0, 相鄰兩點移動的相對距離變大, 故鐘型愈陡。

2、當  $m_1 - m_2 = 0$  時,  $\vec{U}$  將使高斯母線移動無限大的距離, 此時看不出高斯母線的鐘型。

3、當  $m_2 > m_1 > 0$  時,  $\vec{U}$  將使高斯母線向右上方移動, 而移動的距離以頂點為最短, 左右對稱越來越長, 將造成一倒立的高斯曲線。 $m_1 - m_2$  之值如果愈接近 0, 相鄰點移動的相對距離變大, 將使鐘型愈陡。

(二)如圖 3-7,

$m_1 < 0$  時,  $\because m_1 - m_2 < 0 \therefore \vec{U}$  將使高斯母線往左下方移動且此時  $|m_1 - m_2|$  將比

(一)1、中皆大, 相鄰兩點移動的相對距離皆比(一)1、中來得小, 故鐘型將較平而緩。

(三)當透明片 A 上的平行線組為鉛直線時, 此時  $m_1 = \infty$

$$\vec{U} = \frac{1}{m_1} \frac{1}{2(1 - \frac{m_2}{m_1})} [f(k_i) - f(0) - m_2, m_2(f(k_i) - f(0) - m_2)] = (0, 0) \text{ 即原高斯母線不動。}$$

最後, 由於在  $\vec{U}$  中  $r_y = m_2 r_x$ , 所以我們可以藉由斜率  $m_2$  來追蹤透明片 A、B 上其他交點的圖形。

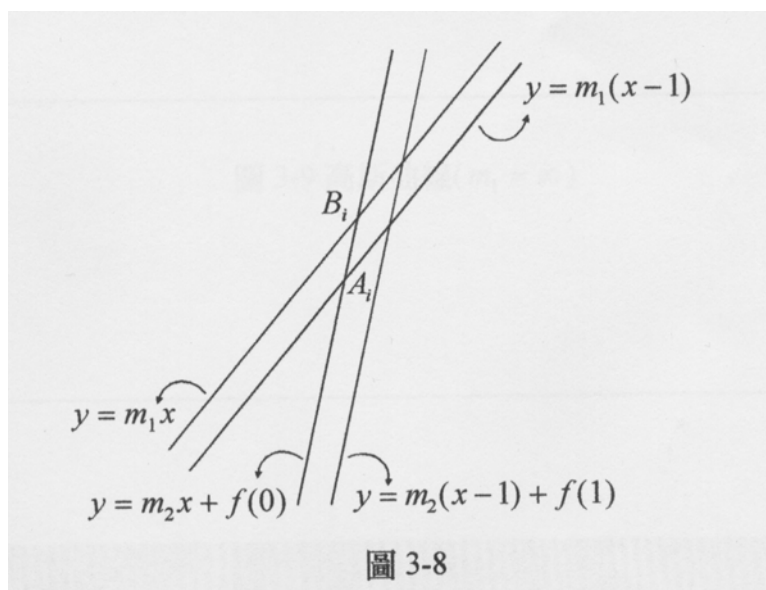


圖 3-8

∵透明片 A、B 上分別各為一組平行線，其交點可產生無限個平行四邊形  
如圖 3-8，設  $A_i$  為高斯母線上的點，其往  $m_2$  方向的第一個交點為  $B_i$

可想而知的是高斯母線會藉由  $\vec{V} = \overrightarrow{A_i B_i}$  平移，而  $\vec{V}$ ，如圖 3-8，可藉由

$$y = m_1 x \quad y = m_1(x-1) \quad y = m_2 x + f(0) \quad \text{三線求得為} \quad \vec{V} = \left( \frac{-m_1}{m_1 - m_2}, \frac{-m_1 m_2}{m_1 - m_2} \right)$$

故干涉出的圖形除了高斯母線外，尚有高斯母線藉由  $n \cdot \vec{V} \quad n \in Z$  平移出的高斯子線

∴干涉出的完整圖形為一高斯曲線組，其中任二高斯曲線必全等，且所有高斯曲線的頂點

連線為  $y = m_2 x + \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$ 。

下列的圖 3-9~圖 3-12 即為不同角度所得之高斯曲線組：

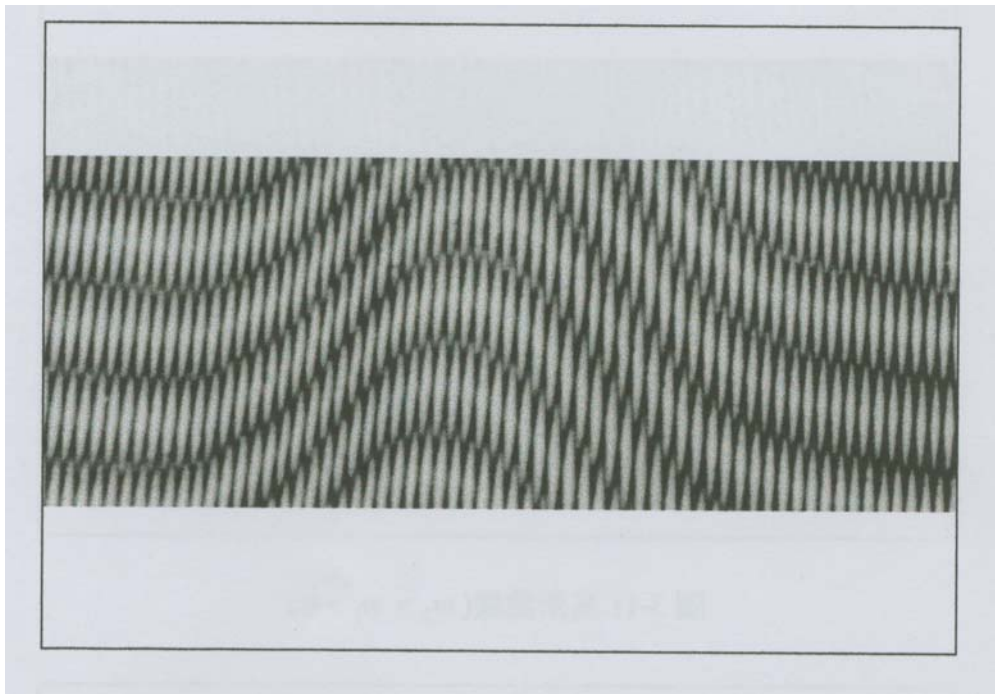


圖 3-9 高斯曲線( $m_1 = 0$ )

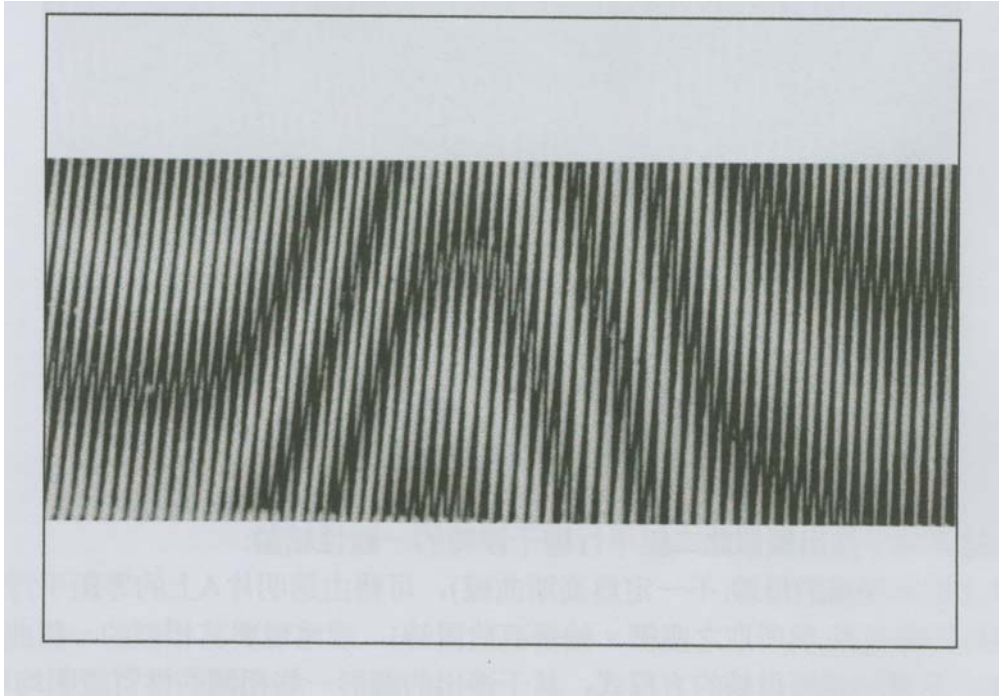


圖 3-10 高斯曲線( $\infty > m_1 > m_2 > 0$ )

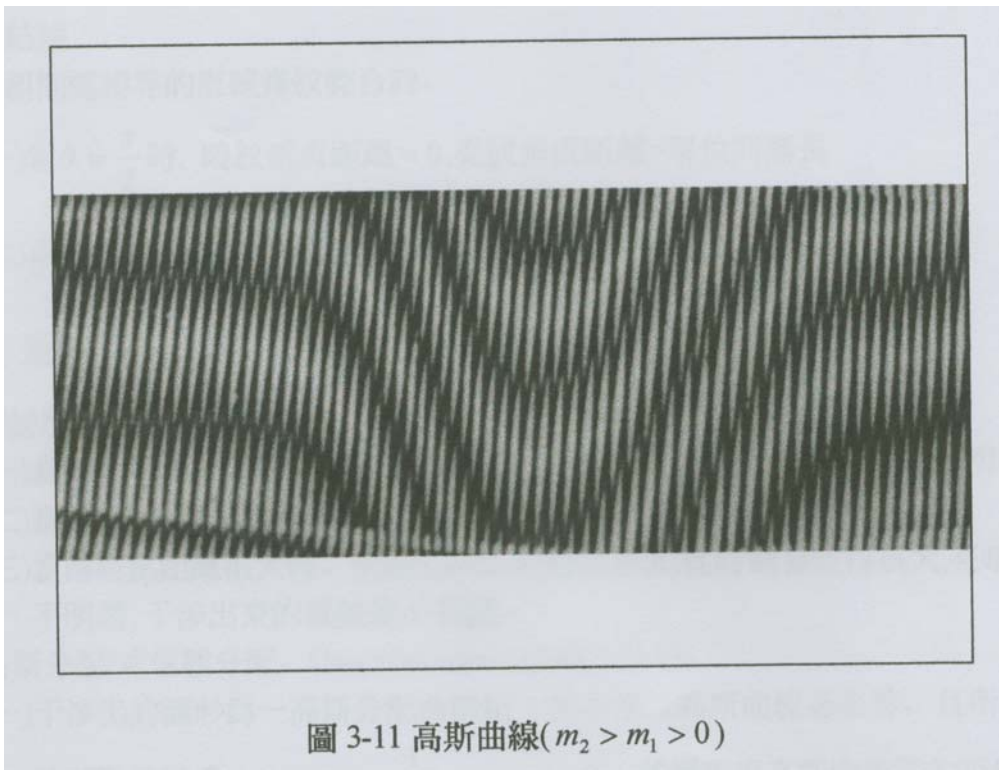


圖 3-11 高斯曲線( $m_2 > m_1 > 0$ )

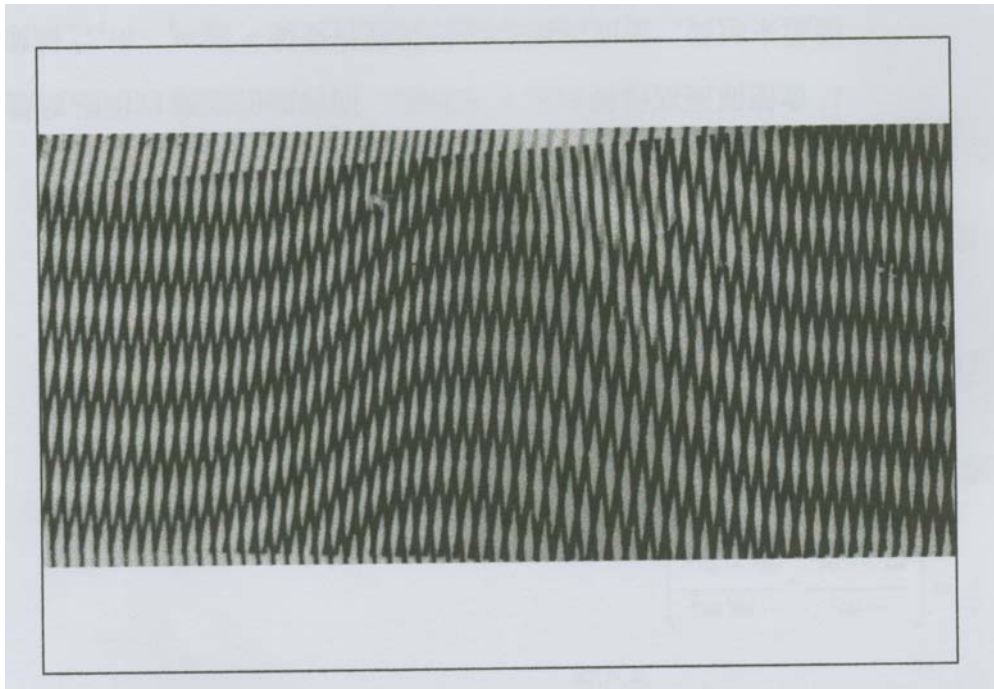


圖 3-12 高斯曲線( $m_1 < 0$ )

我們可由這個例子推出類似此二組平行線干涉時的一般性結論：

透明片 B 上的所隱藏的母線(不一定為高斯曲線)，可藉由透明片 A 上的等距平行線使之重現一組與原母線全等(與所取之座標 x 軸垂直放置時)，或重現與其相似的一組曲線(不為垂直放置時)，只要知道原母線的方程式，其干涉出的圖形一些相關的性質證明均可仿上例，利用向量追蹤證明之。

而相反的，如果將透明片 A 疊至一透明片 B(方程式已知)上，而得到一組全等曲線，取與透明片 A 上之線垂直的線當 x 軸，建立座標系，應可找出此曲線的方程式。

#### 肆、研究結果

一、兩組間隔相等的直線條紋疊合時，

(一)當  $\theta = \frac{\pi}{2}$  時，暗紋垂直距離 = 0, 亮紋垂直距離 = 單位間隔長

(二)當  $\theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  時，亮紋垂直距離與暗紋垂直距離比值越來越大

而  $\theta = \frac{\pi}{3}$  時，亮紋垂直距離 = 暗紋垂直距離

二、兩組放射線干涉時，

(一)當兩結點距離小時，此時的大部分圓心會聚集在中心，干涉條紋不明顯。

(二)當兩結點距離漸漸變大時，此時干涉條紋會漸漸變得明顯。

(三)當兩結點距離很大時，兩圓心間的距離就很大,此時圓會變得很大,亮暗帶間的差異不明顯,干涉出來的條紋就不明顯。

三、高斯分配(或常態分配, Gaussian curve)曲線干涉時，

(一)干涉出的圖形為一高斯分配曲線組。其中任二高斯曲線必全等，且所有高斯曲線

的頂點連線為  $y = m_2x + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  ,  $m_2 > 0$  。其相鄰兩高斯曲線間의 平移向量為

$$\vec{V} = \left( \frac{-m_1}{m_1 - m_2}, \frac{-m_1m_2}{m_1 - m_2} \right)$$

(二) 旋轉後之高斯母線將變為  $f(x) + \vec{U}$  , 其中

$$\vec{U} = \frac{1}{2(m_1 - m_2)} [f(k_i) - f(0) - m_2, m_2(f(k_i) - f(0) - m_2)]$$

而有關  $\vec{U}$  對高斯母線的影響又可細分為三:

1、(1)當  $m_1 > m_2 > 0$  時,  $\because f(k_i) \leq f(0)$  "="" 成立  $\Leftrightarrow k_i = 0$

$\therefore \vec{U}$  會使原高斯母線向左下方移動, 而移動的距離以頂點為最短, 左右對稱越來越長, 造成高斯母線的鐘型將變陡。而  $m_1 - m_2$  之值如果愈接近 0, 相鄰兩點移動的相對距離變大, 故鐘型愈陡。

(2)當  $m_1 - m_2 = 0$  時,  $\vec{U}$  將使高斯母線移動無限大的距離, 此時看不出高斯母線的鐘型。

(3)當  $m_2 > m_1 > 0$  時,  $\vec{U}$  將使高斯母線向右上方移動, 而移動的距離以頂點為最短, 左右對稱越來越長, 將造成一倒立的高斯曲線。而  $m_1 - m_2$  之值如果愈接近 0, 相鄰點移動的相對距離變大, 將使鐘型愈陡。

2、 $m_1 < 0$  ,  $m_2 > 0$  時,  $\because m_1 - m_2 < 0 \therefore \vec{U}$  將使高斯母線往左下方移動且此時

$|m_1 - m_2|$  的值將比 1、中皆大, 相鄰兩點移動的相對距離皆比 1、中來得小, 故鐘型將較平而緩。

3、當透明片 A 上的平行線組為鉛直線時, 此時  $m_1 = \infty$

$$\vec{U} = \frac{1}{2(1 - \frac{m_2}{m_1})} [f(k_i) - f(0) - m_2, m_2(f(k_i) - f(0) - m_2)] = (0,0)$$

即原高斯母線不動。

(二) 透明片 B 上的所隱藏的母線(不一定為高斯曲線), 可藉由透明片 A 上的等距平行線使之重現一組與原母線全等(與所取之座標 x 軸垂直放置時), 或重現與其相似的一組曲線(不為垂直放置時), 只要知道原母線的方程式, 其干涉出的圖形一些相關的性質證明均可仿上例, 利用向量追蹤證明之。

而相反的, 如果將透明片 A 疊至一透明片 B(方程式已知)上, 而得到一組全等曲線, 取與透明片 A 上之線垂直的線當 x 軸, 建立座標系, 應可找出此曲線的方程式。

#### 伍、參考資料

- 一、黃書健：同心圓平行線重疊形成曲線的研究，第廿九屆中小學科學展覽會優勝作品專輯，民國 78 年，P.155~P.158。
- 二、李文堂：同心圓平行線波列干涉的研究，科學教育月刊 137，民國 80 年，P.41~P.52。
- 三、Gerald Oster and Yasunori Nishijima, "Moiré patterns", Sci. Ame. **208** 54~63 (1963)
- 四、T. S. Stein and L.G. Dishman, "Demonstration of beats as moving interference patterns", Am. J. Phys. **50**, 136~145 (1982)
- 五、Bruce Bernero, "The moiré effect in physics teaching", The Phys. teach, 602~608 (1989)

## 評語

1. 可考慮用數位相機拍一些 Mpire Pattern 的圖片附上 poster。
2. 臺灣近年在 TFT-LCL 之製作甚有規模，可考慮 Mpire Pattern 與這些產物之關係。
3. 加強語文訓練。