臺灣二OO三年國際科學展覽會

科　　別：數學科

作品名稱：滿足$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}$=0之M點是否為重心之探索

學　　校：國立臺灣師大附中

作　　者：鄭元博

作 者 簡 介

我叫鄭元博，現就讀於國立臺灣師大附中高三。我是看「小叮噹」漫畫與「十萬個爲什麼」卡通長大的，從小就對周遭的事物充滿好奇心與求知慾，也爲往後學習生涯所應具有的觀察及推理能力打下相當的根基。

這次在均值點與重心的探索過程中，使我領略到些許向量的統整威力及幾何的神秘吸引力。藉由 GSP 作圖軟體的協助，有幸能獲致一點心得與大家分享，是我最感高興的事。

作品名稱：滿足$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}=0$之 M 點是否為重心之探索

中文摘要:

滿足$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}=0$之 M 點，我們稱之爲 P_i(i=1…n)的均值點。當 n=3，M 恰爲△$P_1P_2P_3$的重心(G); n=4 時，M 亦爲三角錐 $P_1P_2P_3P_4$的重心！因此不免引人遐思：滿足$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}=0$之 M 點是否皆爲其重心？

我們藉由電腦幾何作圖軟體 GSP 協助觀察，掌握了圖形變化間之不變性，再配合向量解析及推理，得以發現均值點、多邊形的重心、以至多面體的重心、及平行多邊形的一般性作法。附帶又發現：任意相鄰三頂點即可決定一平行 n 邊形。並進而證實：平行四邊形爲四邊形 M＝G 的充要條件。但當 n≧5 時，平行 n 邊形只是 n 邊形 M＝G 的充分非必要條件！一般而言，具有對稱中心 O 的 n 個點所構成的圖形必可使 M 與 G 重合於 O 點上。

英文摘要:

The point M satisfying $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}=\vec{0}$ is called “the mean point of P_i(i=1…n)”. As n=3, M is the center of gravity (G) of the △$P_1P_2P_3$. If n=4, then M is also the center of gravity of the triangular pyramid $P_1P_2P_3P_4$. Therefore, I began to wonder if the following assumption stands: The point M that satisfies $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}=\vec{0}$ is always a center of gravity.

By using the computer software GSP (The Geometer’s Sketchpad) to observe figures. It is found that when a figure is changing there is still constancy. Furthermore, supported by the analysis based on vectors, general constructions can be established concerning the mean point, the center of gravity of polygon, the center of gravity of polyhedron, and the parallel polygon. Also, I find that any three neighboring vertexes decide a parallel polygon. And thus it is verified that the parallelogram is the sufficient and necessary condition for quadrilateral M=G. As n≧5, the parallel n-sides shape is the sufficient, not necessary condition, for n-sides shape M=G. In general, a central figure of n points having the center of symmetry O can make M and G meet on O.

作品名稱：滿足$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}=0$之 M 點是否為重心之探索

一. 前　　言

(一).研究動機

滿足$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=0$的 M 點，是爲 AB 的中點；滿足$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$的 M 點，則恰爲△ABC 的重心。這些眾所皆知的事，引發我們進一步聯想：當$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=0$成立時，M 的位置與 ABCD 四點間的關聯何在？是否仍扮演著四邊形 ABCD 的重心角色？若繼續推廣到一般自然數 n，則滿足$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}=0$之 M 點芳蹤何處尋？就是這一連串的問題，挑動我們一探究竟的好奇心；循著點、線、面跨進未知的立體空間，我們有幸得窺幾何殿堂中的些許奧秘，謹此提出心得報告願與大家分享，敬請多多賜教。

滿足$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}=0$之 M 點，即$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP_i}$；其中 O 點表原點時，M 點座標是爲 P_i(i=1…n)之算術平均值。爲了方便起見，我們在下文提起時，都稱之爲 P_i(i=1…n)的**均值點**。

(二).研究目的

1. 尋求均值點 M 的一般作法；
2. 尋求重心 G 的一般作法；
3. 探查 M 及 G 間的區野與關聯所在。

二. 研究方法及過程

(一).研究方法

我們由紙筆作圖著手構思，輔以電腦幾何作圖軟體 GSP(THE GEOMETER'S SKETCHPAD)爲觀察利器，發揮其物件導向及動態展示之優勢，掌握**圖形變化間之不變所在**；再配合演繹推理及向量解析，得能抽絲剝繭窺得堂奧。

(二).研究過程

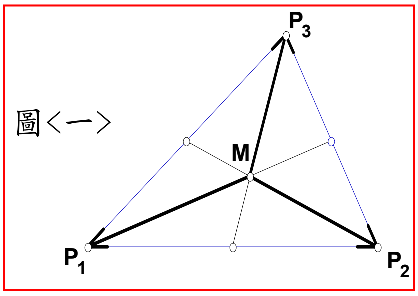
1.均值點 M 的位置探討

(1).n=2 時，由$\overrightarrow{MP_1}+\overrightarrow{MP_2}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OP_2}=0$得$\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2})/2$，故 M 在$\overline{P_1P_2}$的中點位置，也正是$\overline{P_1P_2}$的重心所在。

(2).n=3 時，仿上由$\overrightarrow{MP_1}+\overrightarrow{MP_2}+\overrightarrow{MP_3}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OP_3}=0$可知

註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

$\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3})/3$，這是大家都熟知的重心公式，故 M 恰在△$P_1P_2P_3$的重心上，參見圖〈一〉所示。

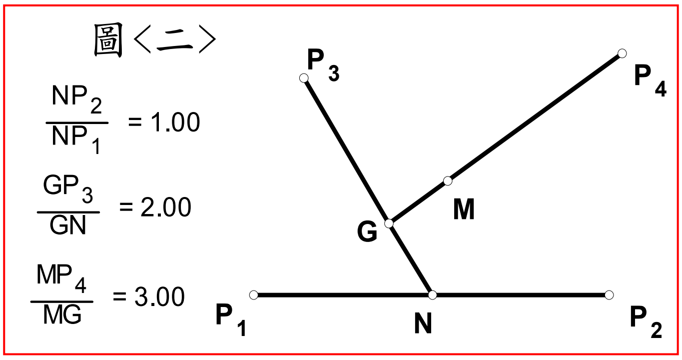


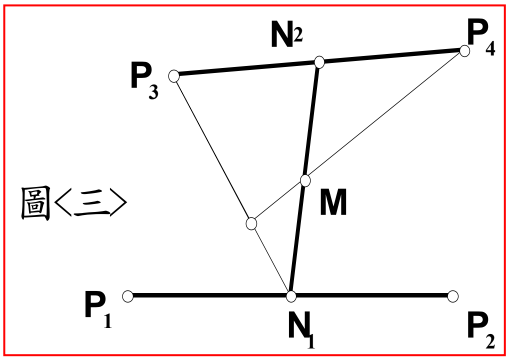
若先取$\overline{P_1P_2}$中點 N，再由$\overline{NP_3}$上求得內分點$\overline{MP_3}$ ：$\overline{MN}$=2：1 之 M 亦可。這樣的作圖觀點，有延續 n=2 作法的味道。在向量解析上則可視同$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP_1}/3+(2/3)[(\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3})/2]$所衍生的結果。

(3).n=4 時，在策略上可分二種處理方式：

甲. 延續 n=3 之作法，見圖〈二〉所示，取$\overline{P_1P_2}$中點 N，作$\overline{NP_3}$的內分點$\overline{GP_3}$ ：$\overline{GN}$=2：1，再連接$\overline{GP_4}$求內分點$\overline{MP_4}$ ：$\overline{MG}$=3：1 即得均值點 M 之位置。

就解析式來說，可視為





$$\overrightarrow{OM}=(3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OP_4})/4=(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4})/4=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OP_i}$$ 的具體呈現。

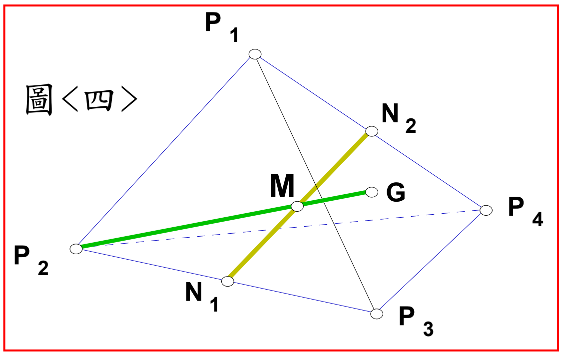
乙.參見圖〈三〉，分別作$\overline{P_1P_2}$及$\overline{P_3P_4}$的中點 N_1、N_2，再求$\overline{N_1N_2}$的中點 M 即為均值點；這可由

$$\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{ON_1}+\overrightarrow{ON_2})/2=(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4})/4=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OP_i}$$ 得到印證。

上述作法中，尚有兩點須補充說明的地方：

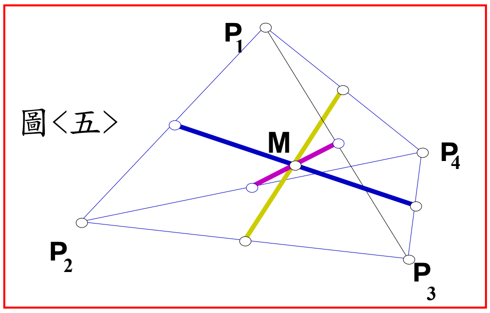
(A).***P_i點間之 i 只作區別性，不用於順序解讀。***更明白地說，甲法可由任三點取 G 後再與第四點求 3：1 的內分點 M；乙法則將四點任意分二組，分別取中點連線$\overline{N_1N_2}$後再取中點即為 M。

(B).***這四點並未被限制在同一平面上！***上文所演示之向量解析式適用於任何空間。參見圖〈四〉所示：空間四點 P_1、P_2、P_3、P_4分佈呈一四面體，N_1、N_2分別為歪斜線$\overline{P_2P_3}$及$\overline{P_1P_4}$的中點，G 為△



註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

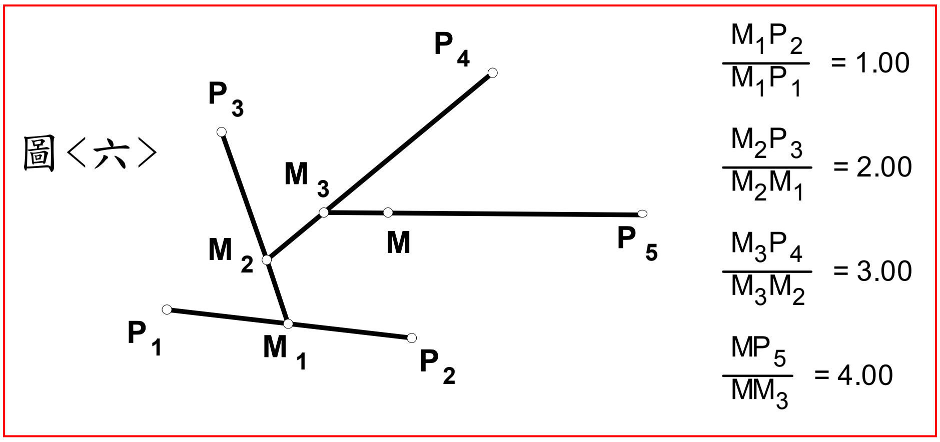
$P_1P_4P_3$ 的重心，則 $\overline{N_1N_2}$ 的中點恰爲 $\overline{P_2G}$ 的內分點 M，$\overline{MP_2}$ ： $\overline{MG}$ =3：1。由此又可附帶發現：任意四面體的三組呈歪斜的稜線，每一組的中點連線必共點且互相平分！情況如圖<五>所示。



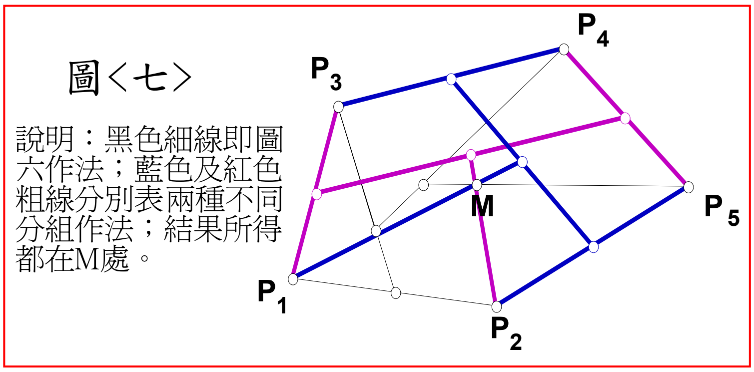
(4).n≧5 時，對於空間中任意 n 點，其均值點 M 的一般性作法可概述如下：

先由 $\overline{P_1P_2}$ 取中點 M_1 開始，再由 $\overline{M_1P_3}$ 上取 $\overline{M_2P_3}$ ： $\overline{M_2M_1}$ =2：1 的內分點 M_2，又從 $\overline{M_2P_4}$ 上取的內分點 M_3($\overline{M_3P_4}$ ： $\overline{M_3M_2}$ =3：1)；如此一點一點逐步往下進行，直至 $\overline{M_{n-2}P_n}$ 上取內分點 M，使得 $\overline{MP_n}$ ： $\overline{MM_{n-2}}$ =(n-1)：1，即得 $P_i(i=1\ldots n)$的均值點 M，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP_i}$ 。

以 n=5 爲例，參見圖<六>所示。



當然，也可以分組求局部均值點，再進一步加以整合，如圖<七>即爲其二例：



以向量式子解析之，則分別爲 $\overrightarrow{OM}=(4/5)[(\frac{\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_3}}{2}+\frac{\overrightarrow{OP_4}+\overrightarrow{OP_5}}{2})/2]+\overrightarrow{OP_2}/5=(1/5)(\overrightarrow{OP_1}+$

註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

$\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}+\overrightarrow{OP_5}$)=$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\overrightarrow{OP_i}$ ，及$\overrightarrow{OM}$=(4/5)[($\frac{\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}}{2}$+ $\frac{\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_5}}{2}$)/2] +$\overrightarrow{OP_1}$/5=

(1/5)（$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}+\overrightarrow{OP_5}$)=$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\overrightarrow{OP_i}$ 。

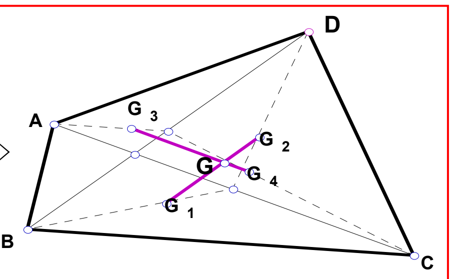
2．重心 G 的位置探討

在基本理念上，一物體的重心是仿如全體重量的集中點；對於一均質物體的重心 G 是否也正是它的均值點 M？這要先能確定所在位置才得以回答。
三角形的重心在三中線的交點處，將各中線內分為 2：1，這已是大眾常識了，無需贅述。一般多邊形的重心何處尋？多面體的情形又將如何？**四邊形重心的作法在此正扮演著由三角形重心跨躍進入多邊形以致多面體重心之鑰**。因此我們視四邊形重心的作法為本文的主題之一：
(1).四邊形的重心

四邊形 ABCD 的對角線 AC 將之分割為△ABC 及△ADC 兩部分，先找出它們的重心 G_1 及 G_2；因 G_1 及 G_2 分別表△ABC 及△ADC 重量的集中點，若在$\overline{G_1G_2}$上取得一平衡支點 G，使得$\overline{G\,G_1}$：$\overline{G\,G_2}$=△ABC：△ADC，則 G 點應為四邊形 ABCD 的重心所在。 同理，對另一對角線 BD 作同步思考，G_3 及 G_4 分別表△ABD 及△CBD 的重心，則 G 點亦在$\overline{G_3G_4}$上。故只要求得$\overline{G_1G_2}$及$\overline{G_3G_4}$的交點，就是 G 的正確位置了！如圖<八>所示：

茲簡述作法如下：

＜作法一＞
i.分別取△ABC、△ADC、△ABD 及△CBD 的重心，得 G_1、G_2、G_3 及 G_4；
ii.連$\overline{G_1G_2}$及$\overline{G_3G_4}$ ，則交點 G 即為所求。

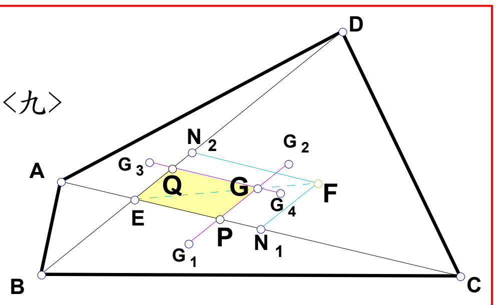


圖<八>

從向量解析來看，則為

$\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG_1}$=($\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$)/3－($\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$)/3=($\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}$)/3＝$\overrightarrow{BD}$/3

這顯現$\overline{G_1G_2}$ // $\overline{BD}$且$\overline{G_1G_2}=\overline{BD}$/3；同理可證$\overline{G_3G_4}$ // $\overline{AC}$且$\overline{G_3G_4}=\overline{AC}$/3。由此可得知圖<九>中的 EPGQ 為一平行四邊形，而 PE：PN_1＝2：1＝QE：QN_2。因此引出利用對角線交點畫重心的作法二：



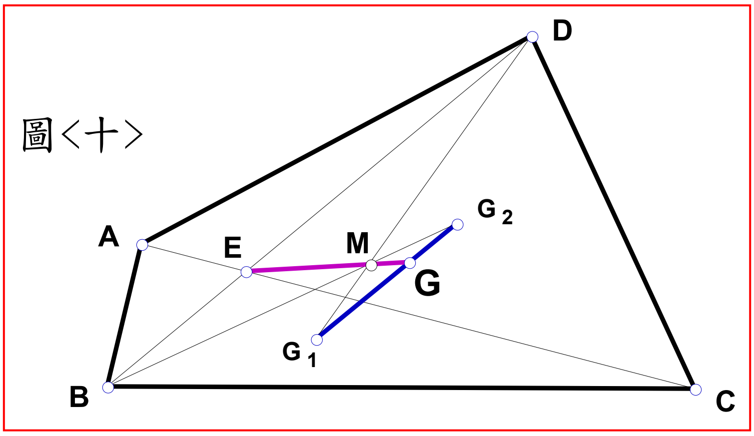
圖<九>

＜作法二＞
i.設四邊形 ABCD 的兩對角線 AC、BD 交於 E。分別取 AC、BD 的中點 N_1、N_2；
ii.過 N_1 作 BD 的平行線，與過 N_2 作 AC 的平行線交於 F，則 E N_1F N_2 為一平行四邊形；
iii.取 EF 的內分點 G，EG：GF＝2：1，G 即為所求。

註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

若連接 BG_2、DG_1 交於 M 點，自 AC、BD 交點 E 向 M 連線與 $\overline{G_1G_2}$ 相交於 G，如圖<十>所示。

因△BEM～△G_2GM、△DEM～△G_1GM，則 DE：GG_1＝EM：MG＝EB：GG_2；而 GG_1：GG_2＝DE：EB＝△ADC：△ABC，故知 G 爲四邊形 ABCD 的重心。

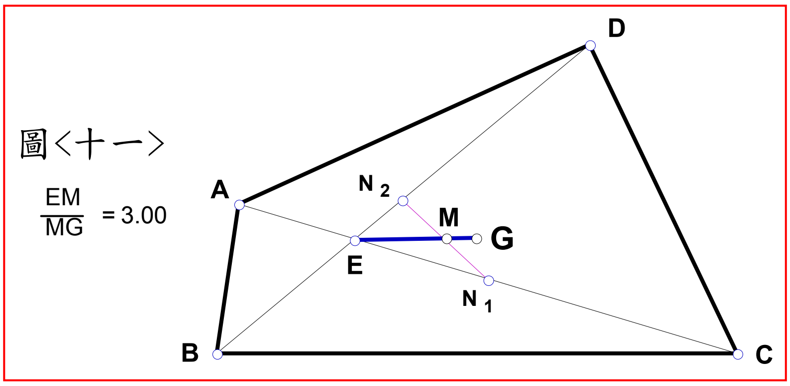


我們由此獲得另一利用對角線交點畫重心的作圖法：

＜作法三＞ i.分別取△ABC、△ADC 的重心 G_1、G_2； ii.連接 BG_2、DG_1，兩者交於 M 點； iii.自 AC、BD 交點 E 向 M 引直線與 $\overline{G_1G_2}$ 相交於 G，G 即爲所求。

這裡的 M 點也正是 ABCD 的均值點，理由是 $\overline{G_1M}$ ：$\overline{MD}$ ＝ $\overline{G_1G_2}$ ：$\overline{BD}$ ＝1：3，依據圖<二>作法可知 M 是 ABCD 的均值點。因此，又衍生出第四種重心作圖法，參見圖<十一>所示：

＜作法四＞ i.分別取 AC、BD 的中點 N_1、N_2；連接 N_1N_2，取中點 M； ii.自 AC、BD 交點 E 向 M 連線至 G，使得 $\overline{EM}$：$\overline{MG}$ ＝3:1，則 G 即爲 ABCD 重心。



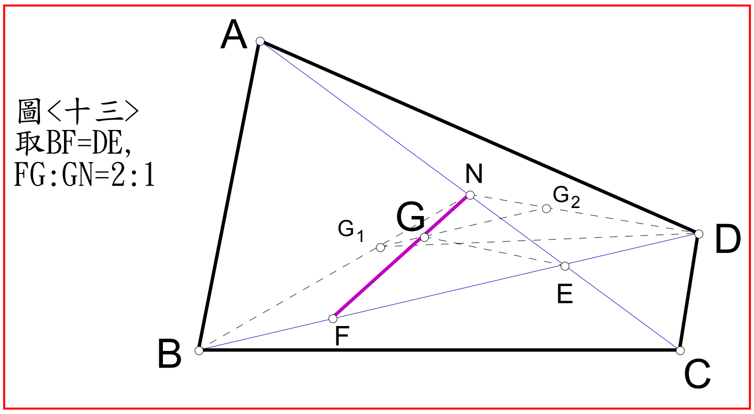
有關均值點與重心間的討論，我們留待下文再仔細深入探索。

還有一種利用邊上中點連線的作法也蠻有趣味的，參見圖<十二>所示。由於 EF //BD //G_1G_2，故知 G_1G：EQ＝AG：AQ＝AR：AP＝RG_2：PF＝2:3；又由圖<十>知，G_1G＝OD/3，而 RG_2＝(2/3)PF＝(2/3)(OD/2)＝OD/3；所以有 G_1G＝RG_2 且 EQ＝PF 可加以利用！因此而得＜作法五＞如下：

註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

＜作法五＞
i.分別取 BC、CD 的中點 E、F，連接 EF 交 AC 於 P 點；
ii.在 EF 上取 Q 使得 EQ＝PF，連接 AQ；
iii.在 AQ 上取 G，使得 AG：GQ＝2：1，G 即為所求。

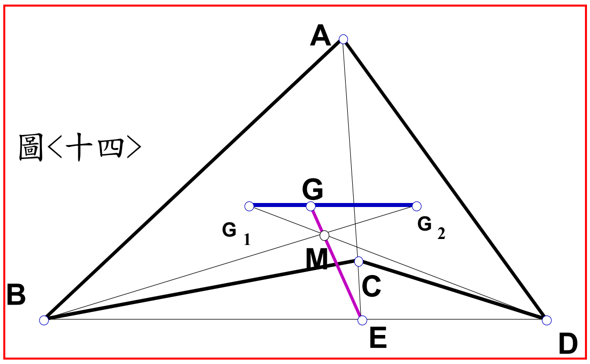
綜合作法四、五兩者特點，又可衍生出＜作法六＞來，參見圖〈十三〉所示。圖中 G_1G＝DE/3，又 G_1G：BF＝NG：NF＝NG_1：NB＝1：3，故有 BF＝$3G_1G$＝DE 及 FG：GN＝2：1 得以利用。



圖〈十三〉
取BF=DE,
FG:GN=2:1

＜作法六＞
i.在 BD 上取 F，使得 BF＝DE；
ii. 取 AC 中點 N，連接 FN；
iii.在 FN 上取 G，使得 FG：GN＝2：1，G 即為所求。

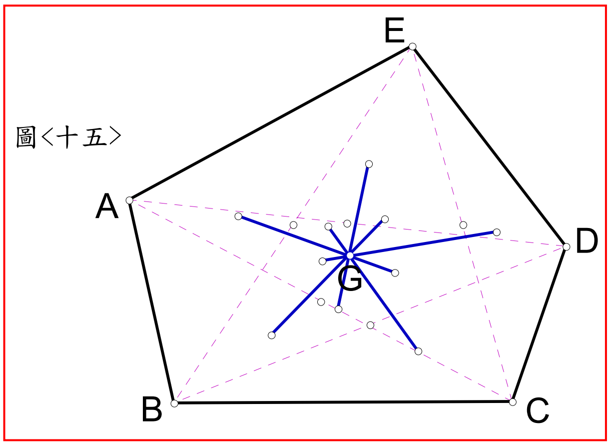
以上種種作法各有千秋，也都能據此類推到一般多邊形的重心作圖上。在加以推廣之前，特意提醒大家：它們同時適用於凹四邊形的作圖。我們擇用＜作法三＞為例，參見圖〈十四〉所示。事實上，在 GSP 的作圖上，只要利用滑鼠拖曳即可發揮動態展示功能，清楚顯現無論四邊形為凹或凸，都可以用同樣的作法畫出重心。凹四邊形的重心與凸四邊形的最大不同點在於：它可能跑到凹四邊形的外部去！



圖〈十四〉

(2).一般多邊形的重心

我們由五邊形的重心談起。凸五邊形的任一對角線將五邊形分割為一四邊形及一三角形；有了上述重心作法為基礎，我們只要就兩條對角線分別作四邊形及三角形的重心連線，則它們的交點應該就是五邊形的重心所在！為了印證起見，圖〈十五〉特別就五條對角線分別作圖，結果確認這樣的想法無誤：

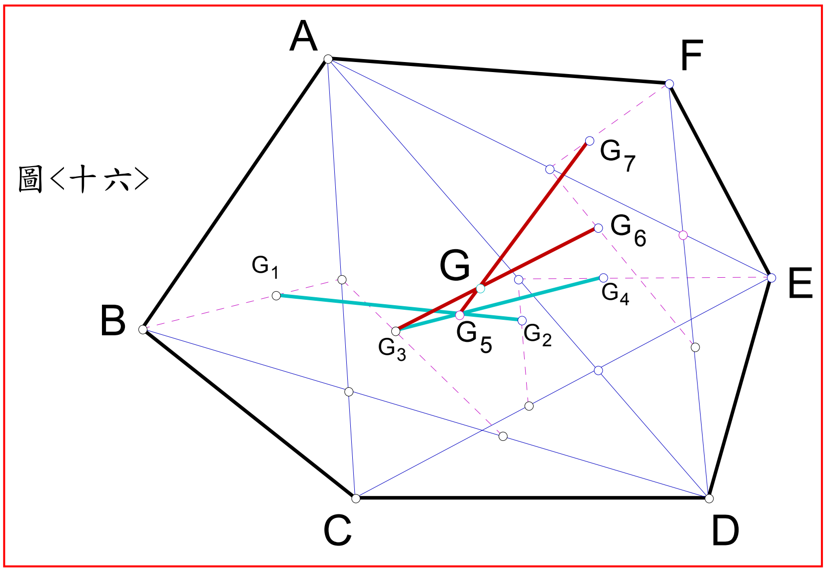


圖〈十五〉

如何將重心作法推廣到一般多邊形呢？我們以六邊形為例，利用＜作法六＞自四邊形作重心起推衍至六邊形，這樣可以顯示「以

註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

此類推」至一般多邊形上的可行性與正確性。參見圖<十六>所示：由於 G_1 為△ABC 的重心，G_2 為四邊形 ACDE 的重心，G_3 為四邊形 ABCD 的重心，G_4 為△ADE 的重心，故得 G_1G_2 及 G_3 G_4 的交點為五邊形 ABCDE 的重心 G_5；再作△AEF 的重心 G_7 及四邊形 ADEF 的重心 G_6，則 G_5G_7 及 G_3 G_6 的交點即為六邊形 ABCDEF 的重心 G。

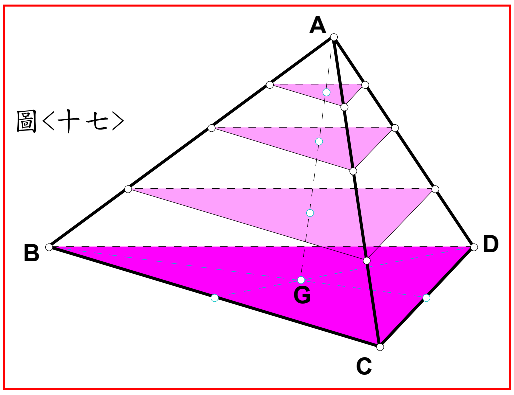


圖<十六>

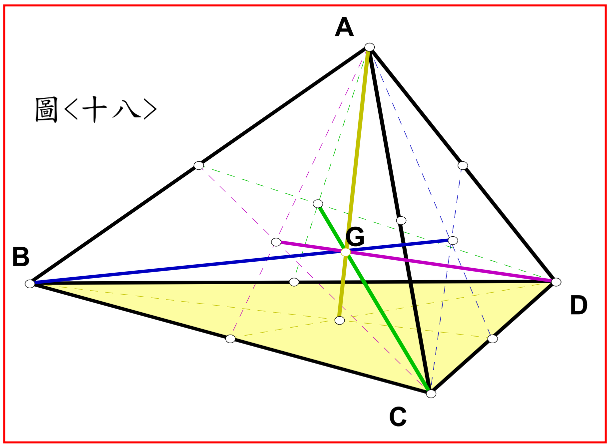
當邊數繼續增加時，則延續作新增的三角形重心 G_8 及四邊形重心 G_9，再連 GG_8 及 G_5 G_9 得其交點即為七邊形的重心。**一般而論，由 n 邊形推廣至 n+1 邊形時，即多作一個三角形重心及一個四邊形重心，再由【原 n 邊形重心連新三角形重心】與【之前的 n-1 邊形重心連新四邊形重心】的交點得到新 n+1 邊形的重心。**對於同一平面上的 n 點 $P_i(i=1\ldots n)$，其所圍成的 n 邊形的重心所在，至此已被完全掌握。

(3).四面體的重心

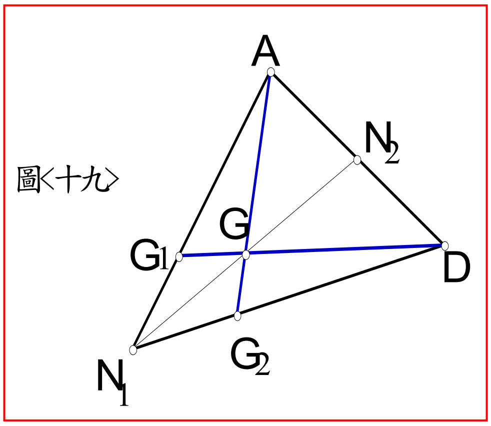
若已知的四點並不共面，則此四點所構成的四面體的重心如何決定？我們將它想像成如圖<十七>所示般，由無限多個平行於底面的橫切面所構成；而每一橫切面都是相似三角形，它們的重心很整齊地排列在一直線上，即頂點到底面的重心連線。這告訴我們：一四面體的重心應在每一頂點到其對應的底面的重心連線的交點上！進一步說，**一四面體的四個頂點到其對應的底面的重心連線必共點，而此交點即為此四面體的重心**。參見圖<十八>所示：



圖<十七>



圖<十八>



圖<十九>

註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

我們希望能簡化四面體重心的尋求過程，於是對圖<十八>中 G 所在的一截面 AN_1D 進行探索，其中 N_1 爲 BC 稜線的中點；對照<十八>及<十九>兩圖來看，G_1 爲△ABC 的重心，G_2 爲△BCD 的重心，則 $AG_1：G_1N=2：1=DG_2：G_2N$，設 $AG=k\,GG_2$，則

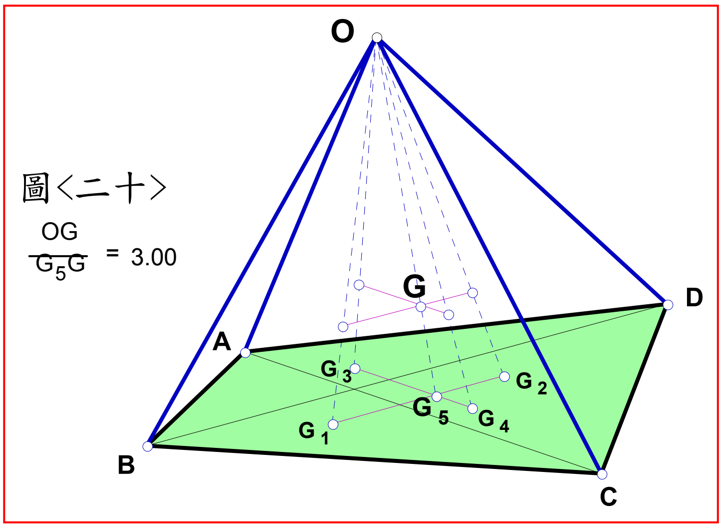
$$\overrightarrow{N_1G}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{N_1A}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{N_1G_2}=\frac{3}{k+1}\overrightarrow{N_1G_1}+\frac{k}{3(k+1)}\overrightarrow{N_1D}$$

由 G_1-G-D 三點共線知 $\frac{3}{k+1}+\frac{k}{3(k+1)}=1$，故得 k＝3。

這結果成功地簡化了四面體重心作法：只要**由四面體任一頂點到其對應的底面的重心連線段上取 3：1 的內分點位置就是 G 點所在。**

(4).一般角錐的重心

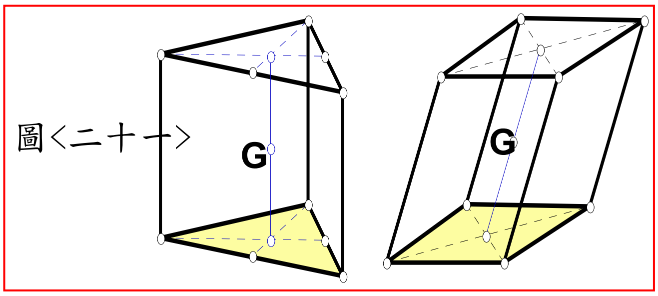
以四面體(三角錐)的重心爲基礎，進一步探查底面爲多邊形的角錐的重心時，已成一件輕易的工作了！以四角錐爲例，參見圖<二十>所示：底面四邊形 ABCD 被對角線 AC 分割爲二，而整個四角錐被平面 OAC 分割爲兩個三角錐，它們的重心分別在 OG_1 及 OG_2 的 3：1 的內分點位置；同理，四角錐被平面 OBD 分割成的兩個三角錐的重心，亦分別在 OG_3 及 OG_4 的 3：1 的內分點位置；因此，由上述兩者連線的交點即爲四角錐的重心，其位置同樣也在 OG_5 的 3：1 的內分點位置！簡單地說：**任意四角錐的重心都在它的頂點到其對應的底面的重心連線段上取 3：1 的內分點位置。**



當角錐的底面爲五邊以上時，上述推理仍舊屹立不搖，這可由圖<二十>清楚看出。事實上，**頂點 O 扮演著伸縮變換的中心，把推求底面上重心的作法向中心點縮小為原來的 3/4 處，就得到角錐的重心了！**因此，只要利用(2)中一般多邊形重心的作法，就可以順利解決一般角錐的重心問題。

(5).一般柱體的重心

柱體的情形算是較單純的。不管是直的或斜的角柱，由於其截面都相同，柱體的重心顯然就在其上下底面多邊形重心的聯線中點處！因此，只要多邊形重心作法解決了，一般柱體的重心也跟著解決了。平行六面體是爲柱體的一種，自不待言。參見圖<二十一>：

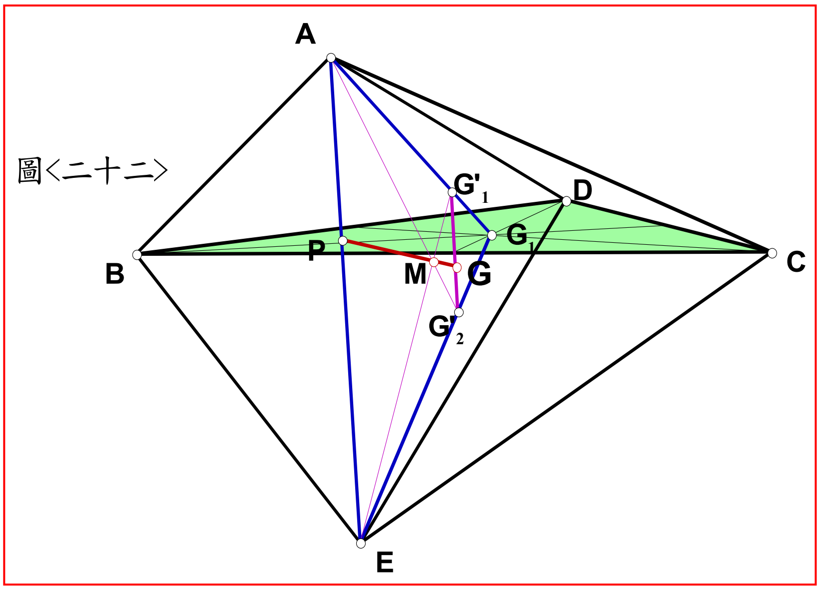


註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

(6).一般多面體的重心

一般多面體除了上述柱體及錐體外，未見其他進一步的分類；不管就面數或頂點數考量，都相當不易建立簡明的分類體系。因此，我們僅舉例解說其重心的基本尋求策略。在理論上說來，三角形是平面上所有直線形的基本單位，三角錐則是所有多面體的基本單位；更明白地說，任意多面體都可切割成三角錐的組合，就像任意多邊形都可切割成三角形的組合一般。如果我們能像處理四邊形般把兩個三角錐的組合的重心找出來，就可以據此作法仿上多邊形方式推廣到一般多面體了！

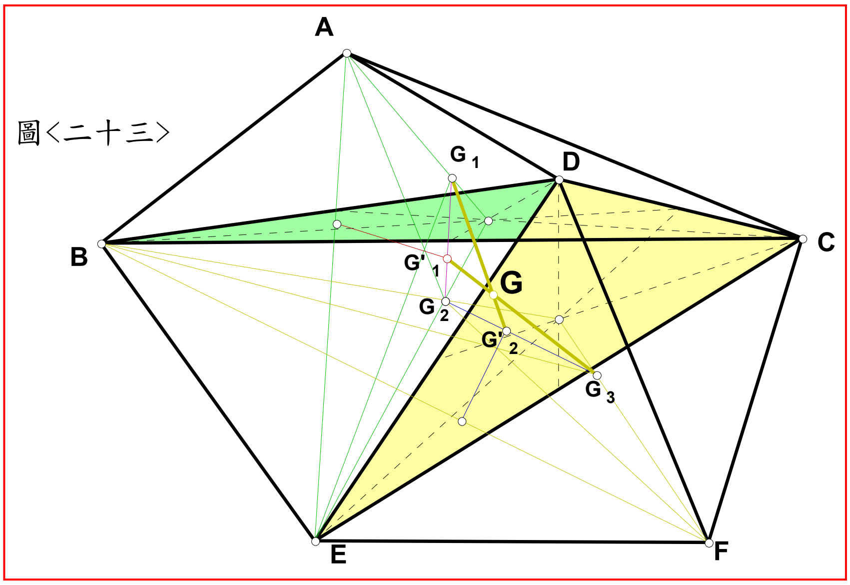
如圖<二十二>所示，當兩個三角錐 A-BCD 及 E-BCD 組合成一個六面體時，△BCD 是它



圖<二十二>

們的接合面；先取△BCD 的重心 G_1，則在 AG_1 及 EG_1 上分別取 3：1 的內分點，即得三角錐 A-BCD、E-BCD 的重心 G'_1、G'_2；此六面體的重心 G 應在 $G'_1G'_2$ 連線上某處，使得 GG'_1：GG'_2＝(三角錐 E-BCD 體積)：(三角錐 A-BCD 體積)。設 AE 與接合面 BCD 的交點為 P，因為兩個三角錐有相同的底面，所以(三角錐 A-BCD 體積)：(三角錐 E-BCD 體積)＝PA：PE。利用如同上文四邊形重心＜作法三＞的原理，連接 AG'_2 及 EG'_1，得交點 M；再自 P 點向 M 引直線與 $G'_1G'_2$ 的交點就是六面體重心 G 的正確位置，＜作法三＞的妙用令人讚嘆。

三個三角錐 A-BCD、E-BCD 及 F-CDE 組合成一個八面體 ABCDEF 的情形則如圖<二十三>所示，其中 BCD 及 CDE 為兩接合面；G_1、G_2、G_3 分別為三角錐 A-BCD、E-BCD 及 F-CDE 的重心，G'_1、G'_2 則表六面體 ABCDE 及 BCDEF 的重心；是故 $G_1G'_2$ 及 G'_1G_3 的交點即為八面體 ABCDEF 的重心！



圖<二十三>

有了上述兩種機能，再仿照一般多邊形重心的推廣方式處理，將多面體分割為數個三角錐的組合，即可循理求得一般多面體的重心。

註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

3. 探尋 M 及 G 的關聯與區野

三角形的均值點 M 與重心 G 兩者重合爲一，四邊形是否也如此？一般多邊形以至於多面體的情況又如何？這是我們進一步要探索的目標。

(1).四邊形的 M 與 G

由圖<十>及<作法三>之後的討論已可獲知，一般四邊形的均值點 M 與重心 G 並不是同一點；兩者間的關聯所在，由兩對角線交點出發最爲適切；**圖<十>中 E、G、M 三點共線，且 $\overline{EM}:\overline{MG}=\overline{MD}:\overline{G_1M}=\overline{BD}:\overline{G_1G_2}=3:1$，將 M 及 G 的關聯與區野作相當程度的展現。**

若利用向量解析處理，視交點 E 爲原點，則由均值點的定義知

$$\overrightarrow{EM}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED})/4$$

$$\text{故}\quad \overrightarrow{EG}=(4/3)\,\overrightarrow{EM}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED})/3$$

這結果極其簡潔有力，它進一步告訴我們：**四邊形的 M 與 G 的區別只在於上述二式分母的 4 與 3！**

我們更關心的是：怎樣的四邊形會使 M 與 G 重合？換句話說，我們想找出使四邊形的 M 與 G 重合的充要條件。利用 GSP 軟體，以滑鼠點選圖<十>中四邊形的某一頂點，進行拖曳方式可任意改變四邊形的形狀；如此即可發現，唯有當四邊形成爲平行四邊形時 M 與 G 才會重合！而平行四邊形的 M 與 G 顯然是重合的，它們都在兩對角線的交點處；以向量關係式來看，則因 $\overrightarrow{EM}=0=\overrightarrow{EG}$，故有 E=M=G 之自然結果。至此可知：**四邊形為一平行四邊形是其 M 與 G 重合的充要條件。**

若以物理的觀點來解釋，**一四邊形的均值點 M 是：四個質量相等的質點分別在四個頂點位置的質量中心；而重心 G 則為：將四邊形視為一均質平板下的質量中心所在。**這樣看來，兩者間的分合與關聯也是極爲正常的事。此觀點可類推至 n 點情形。

(2).一般多邊形的 M 與 G

藉由四邊形的探討經驗，我們自然不再期待一般多邊形的 M 與 G 都會重合；現在的觀注焦點，已集中到平行四邊形的特殊表現上。我們高度盼望：「n 邊形爲一平行 n 邊形是其 M 與 G 重合的充要條件」可以被證實，如此似可對數學的圓滿與完美多一項註腳。爲了這個目標，我們首須釐清所謂『平行多邊形』的定義。

甲.平行五邊形

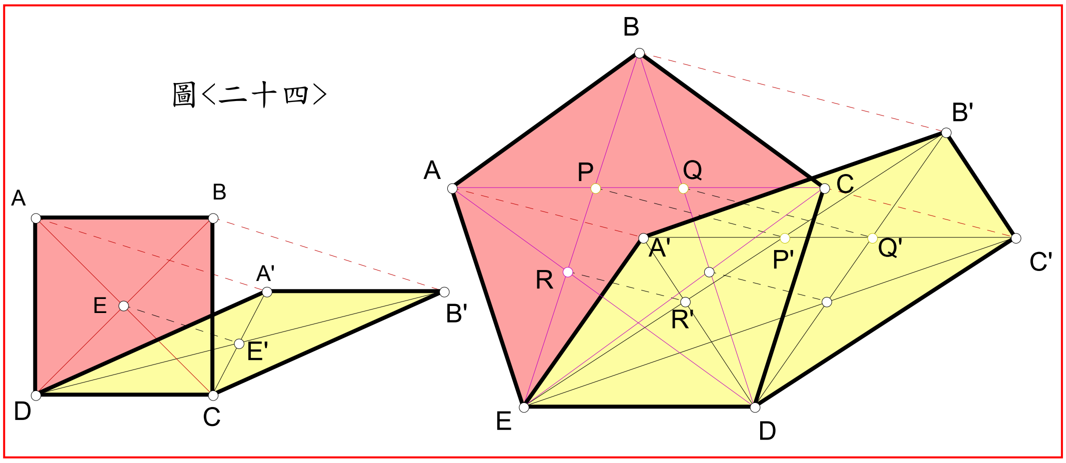
根據參考資料[3]，平行五邊形的定義爲：

「設 ABCDE 表凸五邊形，對任一組不相鄰之二邊(如 BC 與 ED)如果順次連接此二邊端點之線段(如 BE 與 CD)爲平行線段，稱此五邊形爲平行五邊形。」

實質上的平行五邊形長成何等模樣？我們未延用該文所提供之作法，而由其已獲致「平行五邊形任一對角線被其他對角線分割而成之二段爲黃金分割」的初步結果引發奇想，由正方形依據一種特殊變換觀點取得平行四邊形的作法加以推廣，順利尋得平行 n 邊形的一般性畫法，可視爲該文之後續探討工作上的一項突破。

如圖<二十四>所示，ABCD 爲一正方形，將下底 CD 固定，任意**平行推移**上底 AB 至另一位置 A'B'，則可得一平行四邊形 A'B'CD。這樣的圖形變換隱含一個重要的不變性在內，是我們在此亟欲闡述的重點：對角線間互相分割的比例始終維持不變！原正方形的對角線互相分割爲 1：1，圖形變換成平行四邊形後，對角線保持互相平分的特性。

註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.



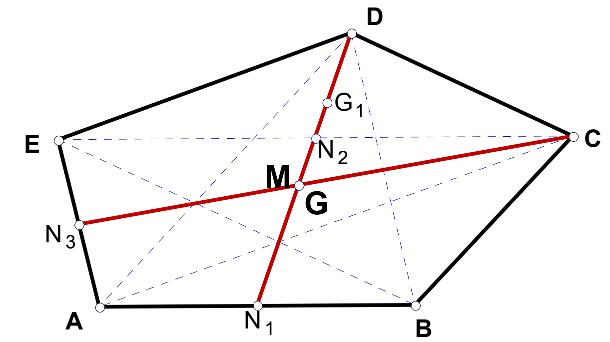
圖<二十四>

類似於上述作法，將正五邊形 ABCDE 的下底 DE 固定，**平行推移**對角線 AC 至 A'C'（ AC ＝A'C'），使得 A'P'：P'Q'：Q'C'＝AP：PQ：QC；因為 BB' // PP' // RR'，所以 ER'：R'P'：P'B'＝ER：RP：PB；其餘對角線亦可類推得知，被分割的比例同時都維持不變，與正五邊形者（黃金分割比）相同；實際數值（以 AC 為例）為

$$AP：PC=1：\frac{\sqrt{5}+1}{2}，AQ：QC=\frac{\sqrt{5}+1}{2}：1，AP：PQ：QC=1：\frac{\sqrt{5}-1}{2}：1；$$

變換所得 A'B'C'DE 顯然為一平行五邊形。

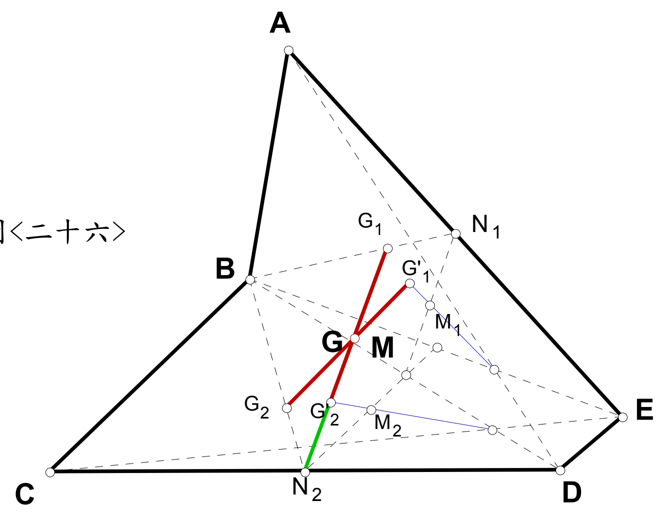
平行五邊形的 M 與 G 是否重合？我們的答案是肯定的！參見圖<二十五>所示：



圖<二十五>

設 N_1 為 AB 中點，N_2 為 CE 中點，N_3 為 AE 中點；對於與 AB 邊平行方向的任一截線來說，它截平行五邊形所得的線段的中點都落在 DN_1 上！因此可知，平行五邊形的重心 G 必在 DN_1 上。同理，G 也應在 CN_3 上；故知 DN_1 與 CN_3 的交點就是重心 G。另一方面，因 N_1 為 AB 的均值點，N_2 為 CE 的均值點，則 ABCDE 五點的均值點 M 必在 DN_1 上。同理，M 也應在 CN_3 上；顯然 M＝G！

M 與 G 重合的五邊形是否為必平行五邊形？很可惜，這個答案是否定的，我們發現像圖<二十六>這樣的反例。因此，平行五邊形未能成為 M 與 G 重合的充要條件，只是它的充分條件罷了！



圖<二十六>

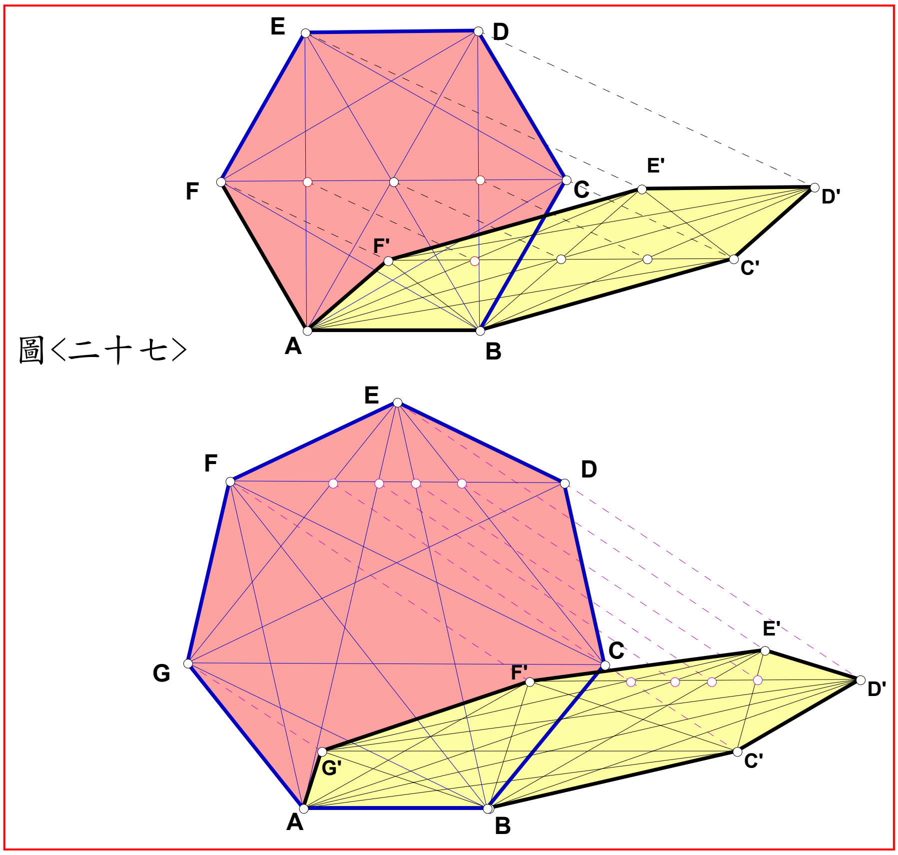
圖中 G_1N_2 的 2∶3 內分點 M 與 $G_1G'_2$、

註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

G'_1G_2的交點 G 重合。

乙.平行多邊形

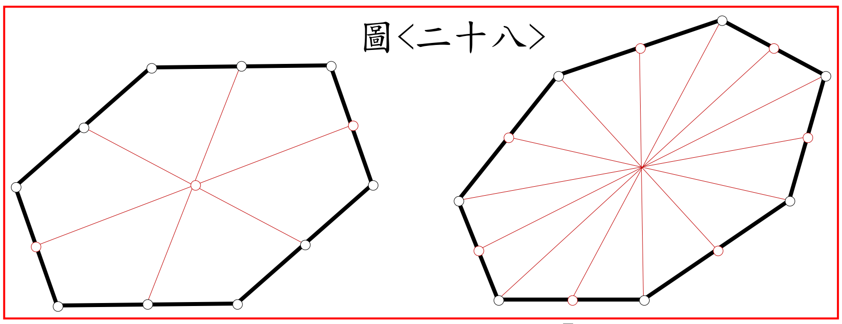
一般平行 n 邊形之定義可據正五邊形加以推廣而得。仿照圖<二十四>來作做，平行 n 邊形畫法的一般性要訣在於：利用正 n 邊形也是一種平行 n 邊形的優勢，經由上述平行推移的變換後，其符合平行 n 邊形定義的特徵未受破壞（由對角線間互相分割的比例維持不變可以推論出此多邊形必爲平行多邊形），因此所得到的 n 邊形仍爲平行 n 邊形；而每一平行多邊形也一定可以經由它的逆變換回推成一正多邊形！爲求確認起見，再以上法畫平行六邊形及平行七邊形作印證，如圖<二十七>所示。



圖<二十七>

平行推移時，只要抓住某條對角線保持原有的分割比，就可以成功。上圖中平行六邊形抓的是 CF，而平行七邊形抓的是 DF。事實上，只要已知一平行 n 邊形的任意相鄰三頂點位置，就可以掌握一條對角線；再利用正 n 邊形的對角線的分割比加以分割，整個平行 n 邊形隨即被完全確定！

一般平行 n 邊形的 M 與 G 是否重合？這個答案也是肯定的。它的理由與圖<二十五>所展現者雷同，奇數邊者的 M 與 G 都在兩頂點向對邊中點連線的交點上；偶數邊者的 M 與 G 則在兩組對邊中點連線的交點上。如圖<二十八>所示：

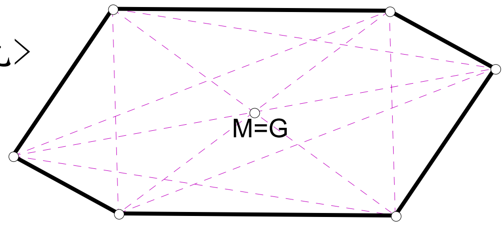

圖<二十八>

上圖的 M 與 G，和平行四邊形的情形像極了，予人一種「對稱中心」的聯想。這個念頭頗

註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

爲發人省思，我們頓時領悟：**具有對稱中心的 n 個點所構成的圖形必可使 M 與 G 重合！**平行 n 邊形只是這當中的特例，像圖<二十九>的六邊形並非平行六邊形，但它具有對稱中心，故可使 M 與 G 重合。

圖<二十九>



由上文已然得知：M 與 G 重合的五邊形不必爲平行五邊形，M 與 G 重合的 n 邊形當然也不完全是平行 n 邊形；再加上圖<二十九>的佐證，更可確定「**平行 n 邊形只是使 n 邊形 M 與 G 重合的充分條件，非充要條件**」。

(3).四面體的 M 與 G

再進入三度空間來討論四面體。回頭看圖<十八>及<十九>，即可發現：四面體 ABCD 的重心 G 是由△ABC 的重心 G_1 向頂點 D 連線段取 1︰3 的內分點而得。因 G_1 同時是 A、B、C 三點的均值點，則 G_1D 的 1︰3 內分點正是 A、B、C、D 四點的均值點 M！故而確認「**四面體的 M=G**」。

若以向量解析方式呈現，也極爲簡明：

$$\overrightarrow{OG}=\frac{3\overrightarrow{OG_1}}{4}+\frac{\overrightarrow{OD}}{4}=(\frac{3}{4})(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3})+\frac{\overrightarrow{OD}}{4}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}=\overrightarrow{OM}$$ 。

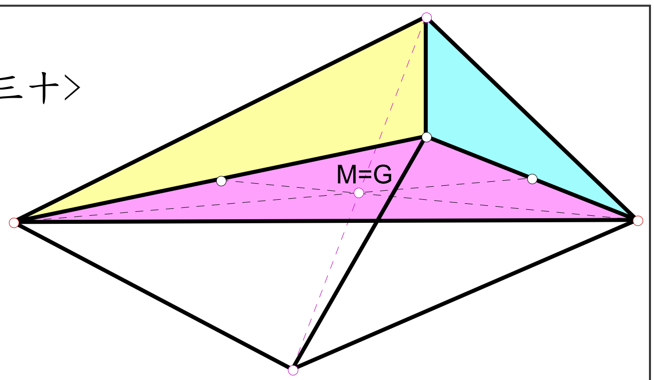
三角形的 M 與 G 必然重合，四面體又再起效顰；也許這只是因爲「三角形是平面上直線形的基本單位，而四面體是空間中多面體的基本單位」所造成的一種巧合，否則爲何一般四邊形的 M 與 G 就不必然重合？更遑論一般多邊形了。空間中一般多面體的表現又將如何？這正是我們拭目以待的。

(4).多面體的 M 與 G

由於一般多面體尚缺明確的分類體系，我們只舉數例概略論述。正多面體唯有五種，都具有對稱中心，常見的平行六面體也是對稱圖形，它們的 M 與 G 當然會重合；以多邊形爲底面的角錐，由上文重心的作法知：**任意多角錐的重心都在它的頂點到底面的重心連線段上取 3︰1 的內分點位置；而它的均值點則在 4︰1 的位置，顯然不可能重合。**至於一般柱體的 M 與 G 會重合，又是一目瞭然的事，自不待言。須要討論的是，形如圖<二十二>的兩個錐體組合成一個多面體的情形。參見圖<三十>所示，**若上、下兩頂點恰好對稱於底面三角形的重心處，則多面體的 M 與 G 必重合。**

更一般地來看，圖<二十二>中的 M 點正是六面體的均值點－－這是因爲 G'_2 是三角錐

圖<三十>



註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

E-BCD 的重心，也是 E、B、C、D 四質點的均值點，而 AM：M G'_2＝AE：$G'_1G'_2$＝AG_1：G_1 G'_1＝4：1，故 M 正是 A、B、C、D、E 的均值點。此種 P-M-G 三點共線與圖<十>相當類似，但比例已由 3：1 改為 4：1，正合所需。由此（P-M-G 三點共線）可見，欲得 M＝G 結果，恐須同時有 P＝M＝G 才行。也就是說，**上、下兩頂點恰好對稱於底面三角形的重心處是形如圖<三十>之類多面體的 M 與 G 重合的充要條件！**
這種情況正類似於平行四邊形是四邊形 M 與 G 重合的充要條件一般。
圖<三十>對我們還有另一種啓示，它沒有對稱中心，可是 M 與 G 仍能重合；換句話說，具有對稱中心仍只是 M 與 G 重合的充分條件，非必要條件！在空間中，有沒有可能像平面上將平行四邊形推廣到平行多邊形般把上述多面體的討論推廣下去？我們目前無法對此作太多想像，但就正多面體唯有五種，而正多邊形卻對任意 n≧4 的自然數都存在這點看來，空間顯然不同於平面上作法，只好留待日後再繼續研究。

三. 結 論 與 展 望

經歷冗長的討論後，我們把過程中較具代表性的成果整理出來，做為本文的結論：

1. 均值點(滿足 $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MP_i}=0$ 之 M)的作法：先由 $\overline{P_1P_2}$ 取中點 M_1，再自 $\overline{M_1P_3}$ 上取 $\overline{M_2P_3}$ ： $\overline{M_2M_1}$ =2：1 的內分點 M_2，又從 $\overline{M_2P_4}$ 上取的內分點 M_3， $\overline{M_3P_4}$ ： $\overline{M_3M_2}$ =3：1；如此逐步往下進行，直至 $\overline{M_{n-2}P_n}$ 上取內分點 M，使得 $\overline{MP_n}$：$\overline{MM_{n-2}}$ =(n-1)：1，即得 $P_i(i=1\ldots n)$ 的均值點 M。也可以分數組求局部均值點，再進一步加以整合。
2. 四邊形的兩對角線交點 E、均值點 M 與重心 G 三點共線；且 $\overrightarrow{EM}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED})/4$； $\overrightarrow{EG}=(4/3)\overrightarrow{EM}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED})/3$ 。
3. 利用邊上中點或對角線中點，甚至對角線交點可引出四邊形重心。本文提供六種四邊形重心的作法，各有千秋；同時亦適用於凹四邊形的作圖。
4. 以四邊形及三角形的重心作法為基礎，可以推廣到作一般多邊形的重心。由 n 邊形推廣至 n+1 邊形時，即多作一個三角形重心及一個四邊形重心，再由【原 n 邊形重心連新三角形重心】與【之前的 n-1 邊形重心連新四邊形重心】的交點得到新 n+1 邊形的重心。
5. 平行四邊形為四邊形 M＝G 的充要條件。
6. 平行 n 邊形的一般性畫法：利用正 n 邊形經由平行推移的變換後，其對角線間互相分割的比例維持不變可以推論出此多邊形必為平行多邊形；而每一平行多邊形也一定可以經由它的逆變換回推成一正多邊形。
7. 一平行 n 邊形的任意**相鄰三頂點**可以掌握一條對角線；再利用正 n 邊形對角線的分割比加以分割，整個平行 n 邊形隨即被完全確定！
8. 平行 n 邊形為奇數邊者的 M 與 G 都在兩頂點向對邊中點連線的交點上；偶數邊者的 M 與 G 則在兩組對邊中點連線的交點上。
9. 平行 n 邊形(n≧5)只是使 n 邊形 M 與 G 重合的充分條件，非充要條件。
10. 四面體的三組歪斜線，每一組的中點連線必共點且互相平分。
11. 四面體的四個頂點到其對面的重心連線必共點，此交點即為四面體的重心。

註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.

12. 四面體的 M 與 G 重合。
13. 將一般多面體分割爲數個三角錐的組合，即可利用角錐的重心作法加以組合求得多面體的重心。
14. 由一角錐的頂點到底面 n 邊形的重心連線段上取 3∶1 的內分點位置就是角錐的重心；而它的均值點則在 n：1 的位置，顯然 n＞3 時即不可能重合。
15. 上、下兩頂點恰好對稱於底面三角形的重心處爲此多面體的 M 與 G 重合的充要條件！
16. 具有對稱中心的 n 個點所構成的圖形必可使 M 與 G 重合！但仍只是充分條件，非必要條件。

在均值點 M 的作法上，並未限制 P_i 是否同一平面，甚至空間；透過向量表示，更顯得它的一致性與易於掌握。重心 G 的作法則富於變化而多樣；以 M 與 G 的一般作圖法來比較，均值點 M 顯然比重心 G 容易得多。若能釐清哪些圖形的 M 與 G 會重合，在需要求取重心時，即可考慮以作均值點方法替代。
空間的情形遠比平面複雜許多，尤其在未具完善的分類體系下，無法清楚掌握推廣方向。雖然在一般的均值點及重心作法上，都已完全掌握；但在兩者重合的必要條件上，仍未澈底釐清，只好留待日後再繼續研究。
平行多邊形是另一個值得深入探索的好題材，但因希望針對本文主題加以論述，未能著墨太多；只好留待日後另作專題，再向大家進行詳細報告。
GSP 的動態展示功能對本文的探索過程提供很大助益。由圖形變化之間觀察其不變所在，可以告訴我們許多意外訊息。根據上結果引發的想法或作法，仍可再利用它來進行印證。當動態展示出的結果符合預期時，真是令人振奮與慰藉！它引導我們過關斬將一路奮戰不懈，終能小有成果提出報告，敬請不吝賜教。

四. 參 考 資 料

[1].THE GEOMETER'S SKETCHPAD User Guide and Reference Manual　Windows Version 3. 1995
[2].王哲麒、翁士傑--尋找多邊形重心 全國第三十一屆科展優勝專輯(國中組) 國立臺灣科學教育館 P.107~120 中華民國八十年六月
[3].陳勇至等四人--平行五邊形 全國第二十一至三十屆科展優勝專輯(高中組數學科合訂本) 國立臺灣科學教育館 P.202~220 中華民國八十四年六月
[4].幼獅數學大辭典　幼獅文化事業公司印行　中華民國七十一年十月出版

註:符號釋疑-- $\overrightarrow{MA}$ 表向量 MA,0 表零向量.