

台灣二〇〇二年國際科學展覽會

科 別：環境科學科

作品名稱：灰色預測在雨量長期趨勢分析之應用

學 校：苗栗縣私立建臺高級中學

作 者：彭祺恩

作者簡介



姓名：彭祺恩

出生年月日：1985.1.8

就讀學校：苗栗縣建台高中二年級自然組

興趣：電腦、圍棋

專長：繪畫、彈琴

經驗：曾經進入 AMC10 級的複賽,參加國際學科測評,獲得全國前百分之十八,也陸續參加一些校內校外的比賽。

科展參加經過：從去年得知此次的科展活動後就開始尋找研究題目,題目確定後即開始著手搜集各項相關資料,也經常利用晚上或假日的時間去學校找老師討論及驗證,希望能在這次的科展中有所獲得及學習。

灰色預測在雨量長期趨勢分析之應用

中文摘要

灰色理論近來廣泛應用於各行各業的管理資訊科學上，本研究乃應用灰色理論的一階微分中輸入變數為一項之GM(1,1)模型，來預測台灣中部地區土石流主要因素雨量的月平均量值。本文運用三筆以上的歷史資料，作最近一年歷史性資料的預測，藉以驗證獲得其誤差($\pm\Delta e$)之校正參考依據值，比利用殘差檢驗所得的誤差校正數據，更能修正出精確的預測值，接著再做台灣中部雨量未來之預測，以作為未來雨水、土石流防治之參考。為了能迅速產生所要的灰色預測值，研究中並以VB程式語言及以Petri-net分析其動態處理行為，藉GM(1,1)模型的專屬處理支援程式，以做為未來雨量自動化處理警示與預測之支援機制。

關鍵字：灰色預測理論、灰色模型(GM)、派翠西網路

ABSTRACT

Applied Grey Theory to precipitation

Recently Grey Theory has been widely applied to management information science in all kinds of areas. This research applies the first level differential of the Grey Theory to put a variable in GM(1,1) model to forecast the monthly average value of the most common precipitation, in the midland Taiwan earth-stone flood zone. This paper uses more than three historical data to forecast the most recent year's historical data, which can be used to verify and acquire referential correction data of its errors ($\pm\Delta e$). The aforementioned method can correct forecast data more precisely than the differential inspection. In addition, this method can then forecast future precipitation in midland Taiwan earth-stone flood zone and the results can serve as reference for future precipitation control. To rapidly receive the needed Grey forecast values, the research analyzes its dynamic process method by utilizing VB program and Petri-net to build a dedicated process-support program of GM(1,1) model. This program will serve as a support mechanism for future automatic precipitation warning and forecast.

Key word: Grey system theory、Gray Model、Petri-nets

研究報告

一、前言

灰色理論近來廣泛應用於各行各業的管理資訊科學，舉凡生命科學、教育、氣候、土木、水利、戰爭……(鄧聚龍、郭洪，民85)。灰色預測法是由鄧聚龍教授在灰色系統理論中所提出的一種預測方法，其主要的作用是在於對灰色系統的發展趨勢進行預測。灰色系統定義如下：若系統內部訊息為部份已知部分未知，則這類系統便稱為灰色系統。灰色系統理論的主要目的，是希望能充分運用諸多灰色系統中，部份已知的信息，透過系統分析、灰色建模、灰色預測、灰色決策與灰色控制等方法，來釐清隱藏其中的問題，找尋系統的發展規律，進而提出解決之道(江金山等人，民87)。在雨量預測上雖有考慮氣象因子納入模式進行預測，而本文則嘗試以灰色理論之GM(1,1)來預測台灣地區土石流主要因素雨量月平均量值，以作為未來政府單位決策之重要參數。

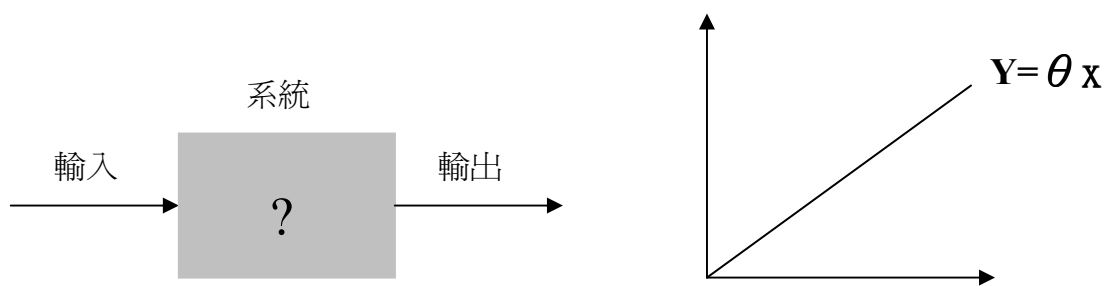
二、研究方法

(一)灰色預測理論

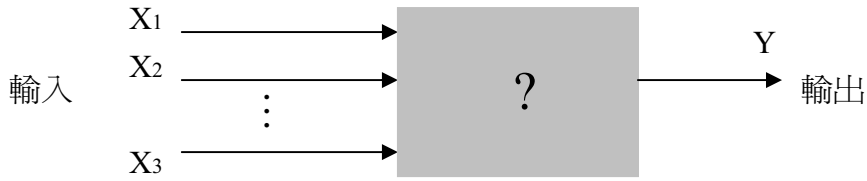
預測乃是根據客觀事物的過去與現在所發展的規律，經由科學的方法與技術，對未來的發展趨勢和狀況進行描述與分析，形成科學的假設及判斷。而大部份的預測方法是根據大量的歷史數據，按照統計的方法分析其規律，但此種做法不僅受數據量之限制，而且準確度不高。灰色預測理論，透過原始數據的處理，將原始數據白化為規率性較強的生成數據，此種過程突破了概率統計的侷限性，便於從系統內部挖掘信息並充分利用信息，從而確立系統在未來發展的變化趨勢。

(二)灰色預測的數學基礎

灰色預測所應用的數學基礎是最小平方法(Least-Square Method)。最小平方法主要的目的是從系統之輸入與輸出的資料中，找出其輸入與輸出間的關係式 $y = \theta x$ ，其中 θ 即是待定的系統參數，如圖一所示。圖二表多輸入單輸出系統，圖中輸入為 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ，輸出為 y (鄧聚龍,1987)。



圖一單輸入系統線性回歸



圖二 多輸入、單輸出系統

圖 1 中之多輸入單輸出系統其輸出與輸入之間的關係假定可以(1)表示：

$$Y = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \dots + \theta_n X_n \quad (1)$$

爲了求得系統的參數 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ，設在 m 個時刻，分別對輸入及輸出進行了 m 次的觀測， m 值需遠大於 n ，即 $m \gg n$ ，設觀測所得數據爲：

$$Y(i), X_1(i), X_2(i), \dots, X_n(i), \quad i=1, 2, \dots, m$$

可得如下 m 個代數方程式

$$Y(i) = \theta_1 X_1(i) + \theta_2 X_2(i) + \dots + \theta_n X_n(i) \quad (2)$$

(2)寫成下列矩陣形式得， $y = X \odot$ (3)

$$\text{其中 } Y = \begin{pmatrix} Y(1) \\ Y(2) \\ \vdots \\ Y(m) \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1(1) & X_2(1) & \dots & X_n(1) \\ X_1(2) & X_2(2) & \dots & X_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1(m) & X_2(m) & \dots & X_n(m) \end{pmatrix} \quad \odot = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix}$$

由於實際測量時， X 與 Y 可能有儀表或人爲的測量誤差，所以實際上(3)是中的等式應不成立，爲了解決並表示此問題，定義一誤差向量

$$\varepsilon = [e_1, e_2, \dots, e_m]^T \quad (4)$$

其中 $e_i = y(i) - [\theta_1 X_1, \theta_2 X_2, \dots, \theta_n X_n]$, $i=1, 2, \dots, m$ ，由(2)(3)式知

$$\varepsilon = Y - X \odot \quad (5)$$

接著求 $\|\varepsilon\|^2 \doteq \varepsilon^T \varepsilon = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_m^2$ 之極小值，將 $\|\varepsilon\|^2$ 對 \odot 作偏微分，並令其值爲零，即：

$$\frac{\delta \|\varepsilon\|^2}{\delta \odot} \Big|_{\odot=\odot} \quad (6)$$

由(5)(6)式可得：

$$\begin{aligned} & \frac{\delta \| \varepsilon \|^2}{\delta \odot} \Big|_{\odot=\odot} = \frac{\delta}{\delta \odot} \left[(Y-X\odot)^T(Y-X\odot) \right]_{\odot=\odot} \\ & = \frac{\delta}{\delta \odot} \left[Y^T Y - (X^T Y)^T \odot - \odot^T X^T Y + \odot^T X^T X \odot \right]_{\odot=\odot} \\ & = -X^T Y - X^T Y + X^T X \odot + X^T X \odot \end{aligned}$$

令上式為零，經由計算可求得預測參數 \odot 為

$$\odot = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (7)$$

(三)灰色預測的基本運算

由於環境因素對於系統產生干擾，使得表示系統行為特徵之原始數據序列產生雜為之現象，而灰色系統的建模就是利用較少的或不確切的離散時間序列數據，經生成運算後變為有序的生成數據，而後建立數學模型，尋找生成數據之規律，再將運算結果還原。

1.生成運算

灰色系統常用的數據生成方式可分為下列三種：

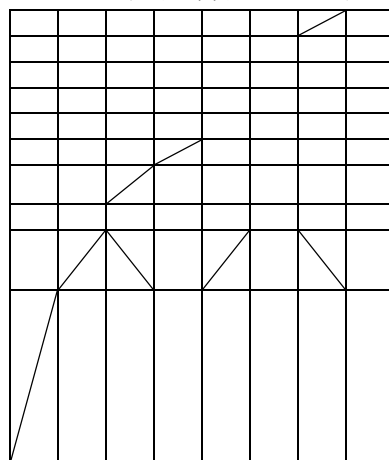
(1)累加生成(Accumulated Generating Operation 簡稱 AGO)

表現系統行為特徵之原始數列，是構造系統數學模型的依據，但在信息貧乏的情形下，用概率統計方法尋求統計規律，或用模糊統計方法尋求其隸屬規律，一個自然的想法就是強化規律性成份和弱化不確定成分；而利用累加生成正好可將資料少、無規律性的數據轉化為單調遞增數列，強化其規律性並減少其隨機性。其公式如(8)所示：

時間序列， $\{X^{(0)}(i)\}, X^{(0)}(i) \geq 0, i=1,2,\dots,n$ ，通過累加生成運算得：

$$X^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k X^{(0)}(i) \quad (8)$$

若一次累加生成後得新數據列仍無明顯規律可循，可以在做累加生成直到成明顯規律為止，生成分佈如圖三所示。



圖三 累加生成分佈圖

(2)逆累加生成(Inverse Accumulated Generating Operation 簡稱 IAGO)

灰色系統建立的不是原始數據模型，而是生程序列的數據模型，所以通過生成序列的數據灰色模型得到的預測值，必須做逆累加生成處理，其公式如(9)所示。

設 $X^{(r)}(k)$ 為 r 次累加生成數列， $I^{(p)}(X^{(r)}(k))$ 為 $X^{(r)}(k)$ 之 p 次逆累加生成數列，則轉換公式為

$$I^{(p)}(X^{(r)}(k))=I^{(p-1)}(X^{(r)}(k))-I^{(p-1)}(X^{(r)}(k-1)) \quad (9)$$

(3)映射生成(Mapped Generating Operation 簡稱 MGO)

凡累加生成、逆累加生成以外的生成方式通稱為映射生成。例如對序列求相鄰兩數據平均值的均值生成，記為 MEAN，即為一種映射生成，對於 $X=\{X(1),X(2),\dots,X(n)\}$ ，有：

$$Z(k)=0.5X(k)+0.5X(k-1), k=2,\dots,n \quad (10)$$

其中， $Z(k)$ 即為 $X(k)$ 與 $X(k-1)$ 的均值生成。

2.灰色建模

灰差分方程式

經累加生成後的數據序列呈現規律的指數形式，應此可建立一微分方程式來近似，而建立的灰色模型(Gray Model 簡稱 GM)以 $GM(n,m)$ 來表示，其中 n 表系統階次(order)， m 表系統變量個數。微分方程式中，乃以一階微分方程式最為適用，因此以 $GM(1,m)$ 為例，來敘述灰差微分方程式之建立過程。

設一階多變量之白化微分方程式為：

$$\frac{dX_1^{(1)}}{dt} + aX_1^{(1)} = B_1X_2^{(1)} + B_2X_3^{(1)} + \dots + B_{m-1}X_m^{(1)} \quad (11)$$

其中， a 稱為發展係數， b_1, b_2, \dots, b_{m-1} 稱為灰作用量， X_1 為預測變數， X_2, X_3, \dots, X_m 為相關變數。

依指導定義：

$$\frac{dX_1^{(1)}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x^{(1)}(t+\Delta t) - x^{(1)}(t)}{\Delta t} \quad (12)$$

當 Δt 取很小的一單位時，則 $\frac{dX_1^{(1)}}{dt}$ 近似於 $x^{(1)}(t+1) - x^{(1)}(t)$ ，寫成離散形式為 $X_1^{(1)}(k-1) - X_1^{(1)}(k) = X_1^{(0)}(k+1)$ ，這表示 $-\frac{\Delta X_1}{\Delta t}$ 是 $X_1(k)$ 的一次累減生成；若定義 $X(k)$ 是 k 時刻 $-\frac{\Delta X_1}{\Delta t}$ 的背景值，在 $\Delta t=1$ 的很短時間內， $-\frac{\Delta X_1}{\Delta t}$ 的背景值可取其平均值，即 $X(k) = \frac{1}{2} (X_1(k) + X_1(k+1))$ 。則(11)式可改由灰差分方程式表示：

$$X_1^{(0)}(k+1) + aX^{(1)}(k) = b_1X_2^{(1)}(k) + B_2X_3^{(1)}(k) + \dots + B_{m-1}X_m^{(1)}(k) \quad (13)$$

由(13)式中之灰差分方程式，可經由預測參數之繼算來決定各係數之值，盡而建立 $GM(1,m)$ 模型來預測。

將數據序列建立成據灰差分方程式的數學模型，稱為灰色建模，其模型記為

GM。若彩衣階一個變量的 GM 模型來做預測，記為 GM(1,1)。GM(1,1)模型的建立步驟共分為下列幾個步驟：

(1)數據擷取

將原始數列 $X^{(0)}$ 中選取四筆以上連續數據，以用來建模。

(2)累加生成(AGO)

利用(8)式之通式來作一次累加，即：

$$X^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k X^{(0)}(i), k=1,2,\dots,n$$

(3)建立灰差分方程式

採用(13)式之通式來建立一次差分方程式，得：

$$X^{(0)}(k) + x^{(1)}(k) = b \tag{14}$$

其中 $x^{(1)}(k) = -\frac{1}{2} (X^{(1)}(k) + X^{(1)}(k+1))$ 。

(4)運用最小平方方法求預測參數

(14)式可表下列之形式

$$X^{(0)}(k+1) = \begin{bmatrix} -\frac{X^{(1)}(k+1)+X^{(1)}(k)}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{15}$$

令 $k=1,2,\dots,n-1$ 帶入上式，並寫成 $Y=X \odot$ 的矩陣形式，可得：

$$Y = \begin{bmatrix} X^{(0)}(2) \\ X^{(0)}(3) \\ \vdots \\ X^{(0)}(n) \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} -\frac{X^{(1)}(1)+X^{(1)}(2)}{2} \\ -\frac{X^{(1)}(2)+X^{(1)}(3)}{2} \\ \vdots \\ -\frac{X^{(1)}(n-1)+X^{(1)}(n)}{2} \end{bmatrix}, \odot = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

因此由(7)式可求得預測參數 \odot ：

$$\odot = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{16}$$

(5)解差分方程式並預測

將(16)式代入(15)式求解得：

$$X^{(1)}(k+1) = X_h + X_p \left[X^{(0)}(1) - \frac{a}{b} \right] e^{-ak} + \frac{a}{b}$$

其中 $X_h = \left[X^{(0)}(1) - \frac{a}{b} \right] e^{-ak}$ 為其次解， $X_p = \frac{a}{b}$ 為特解。

(6)逆累加生成

因預測模型非對原始數據建模，而是用一次累加生成來建模，所以要以逆累加生成來還原預測之數據。

$$X^{(0)}(k) = X^{(1)}(k) - X^{(1)}(k-1), k=1,2,\dots,n$$

(四)GM(1,1)模型說明

原則上而言，GM(1,1)模型只需要四筆以上數據即可進行建模，但對於信息豐富、數據較多的原始數列，也可以從中選取一部分數據進行建模，而隨著系統的發展與變化，也有必要對所建立的模型進行調整。具體可用的方法可分成下列五種(傅立,1992)：

1.全數據 GM(1,1)模型：

依據原始數列中 $X^{(0)}$ 中的全部數據所建立 GM(1,1)模型，稱為全數據 GM(1,1)模型。

2.部分數據 GM(1,1)模型：

若使用原始序列數列 $X^{(0)}$ 中的部分數據建立的 GM(1,1)模型，稱為部份數據 GM(1,1)模型。

3.新息 GM(1,1)模型：

研究的對象多半會隨著系統發展而產生變化，雖然在系統中的歷史信息對研究系統有一定的作用，但在與預測時間更為接近的信息對於研究系統的特性會更有價值。

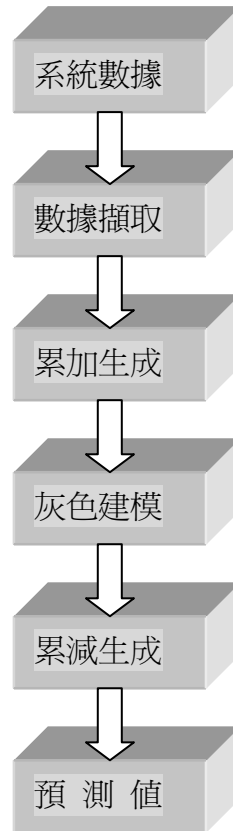
4.等為灰數遞補 GM(1,1)模型：

對於系統而言，隨時間的變化，未來的擾動因素不斷的加入系統之中，進而會對系統造成影響。GM(1,1)模型雖然可以進行長期預測，但真正有意義的卻是最近的最近的數據，因為其餘更遠的數據僅反應一種趨勢。此種方法是採用預測灰述進行新陳代謝，逐步預測依序遞補，直到完成預測目標或達到要求的預測精度為止。

5.等維新息 GM(1,1)模型：

等維新息的建模方式與等為灰數建模的方式相似，兩者都是在原始數列中遞補新數據去掉老數據的基礎上進行，但等維新息加入的式系統的實際值，等維灰數則將預測值帶入系統中。前者用新息來調整模型，後者用灰數來約束灰平面的大小，在實際應用時，可以兩相結合、截短補長。

本研究採用灰色模型(Grey Model,GM)，對系統的發展變化進行預測，以找出某一數列數據間的動態關係，其發展步驟流程如圖四所示。



圖四 灰色預測法發展步驟流程圖

步驟一：數據擷取

擷取系統的數據組成數列 $X^{(0)}$ 是建立灰色模型的基礎。為了能即時反映動態系統的發展趨勢並防止計算機計算量的持續增加，在對一個只需反映現階段響應趨勢的動態系統做數據擷取時，每當系統產生一新的信息，便將此信息加入建模的原始數列 $x^{(0)}$ 中，同時也捨去一個舊的數據，使灰色建模的原始數列 $x^{(0)}$ 的數據維持固定。如第 n 時刻之灰色建模原始數列 $x^{(0)}$ 為：

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) \quad (1)$$

在第 $n+1$ 時刻增加一新的數據 $x^{(0)}(n+1)$ ，灰色建模原始數列 $x^{(0)}$ 變為：

$$x^{(0)} = (\underbrace{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)}_{\text{去掉}}, \underbrace{x^{(0)}(n+1)}_{\text{增加}}) \quad (2)$$

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n), x^{(0)}(n+1)) \quad (3)$$

步驟二：累加生成(Accumulated Generating Operation,AGO)

經擷取系統數據，組成建立灰色模型之原始數列 $x^{(0)}$ 。而這些數列可能是雜亂無序的，難以發展一適當模型。灰色系統理論將這些在某個區間變化的量稱為

「灰色量」；將某個隨時間而變化的灰量的過程，稱為「灰過程」。基本上，灰色系統理論認為在這些雜亂無序的「灰過程」中，必定存在有某種秩序或因果關係，可能因數據量太少而難以察覺或因某些雜訊而掩蓋了。因此只要對這些「灰色量」做某種方式處理，便可找出其中的關係，而這種就數找數的規律的過程，便稱為「生成」。對系統的行爲數據進行「生成」，就是企圖從雜亂無序的現象中去發現內在的規律。

經數據擷取後，需對原始數列 $x^{(0)}$ 進行累加生成。所謂「累加生成」即對原始數列 $x^{(0)}$ 中各數據依序的做累加，以得到新的數列與數據，經累加生成的數列稱為「生成數列」。茲將累加生成的運算過程說明如下：
如(1)式之原始數列 $x^{(0)}$ 為：

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$$

設 G 為累加生成運算，並對原始數列 $x^{(0)}$ 做累加生成

$$G = (x^{(0)}(k)) = x^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^k x^{(0)}(m) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

在(4)式中 $x^{(1)}(k)$ 的上標(1)表示 1 次累加生成，可記「1-AGO」。若上標為(r)則為 r 次累加生成，可記為「r-AGO」。

步驟三：灰色建模

一般白色系統的分析、控制方式，是根據系統的輸入與輸出的變化情形，去求得各狀態變量間的關係，進而建立數學模型，就可獲得系統動態行爲的數據或曲線資料。這種由模型進而求得系統行爲特徵的過程可稱為「順過程」。而灰色系統理論則是擷取系統的行爲特徵數據、資料來建立模型，這種系統行爲在先，模型在後的過程可稱為「逆過程」，然而在這種逆過程中所擷取的數據，只包含了部分信息，並不能完全代表系統的行爲特徵，因此將這種模型稱之為灰色模型(Grey Model, GM)。

一個 1 階、1 個變數的 GM 模型可表示為 GM(1,1)，其一般式可為：
白化微分方程式：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \quad (5)$$

灰微分方程式：

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (6)$$

離散響應方程式：

$$\hat{x}^{(1)}(k) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a} \quad (7)$$

對一原始數列 $x^{(0)}(k)$ 建立 GM(1,1) 模型的過程如下，令

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) \quad (8)$$

對 $x^{(0)}$ 做 AGO，可得 $x^{(1)}$

$$x^{(1)}(k) = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)) \quad (9)$$

我們可對此近似呈指數分佈的生成數列，來建立其灰色模型的灰微分方程式(grey differential equation)及白化微分方程式(white differential equation)。

設其白化微分方程式為：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \quad (10)$$

a 稱為發展係數， b 稱為灰作用量

依導數定義：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)}{\Delta t}$$

設 $\Delta t=1$ 單位，而且夠小時。

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = x^{(0)}(k) \quad (11)$$

由(11)是得知 $x^{(1)}$ 的導數 $\frac{dx^{(1)}}{dt}$ 即等於 $x^{(1)}$ 的 1-IAGO

當 t 從 $k-1$ 變化至 k 時， $x^{(1)}$ 的背景值 $z^{(1)}(k)$ 可取 $x^{(1)}(k-1)$ 與 $x^{(1)}(k)$ 之平均值，即

$$z^{(1)}(k) = \frac{x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k)}{2} \quad (12)$$

由(11)式及(12)式有如下差分形式的灰微分方程：

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (13)$$

由最小平方法(Least-Squares Methods)可求得

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{y}_N \quad (14)$$

其中

$$\text{參數列 } \hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\text{數據列 } \mathbf{y}_N = [x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n)]^T$$

$$\text{數據矩陣 } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)) & 1 \\ \vdots & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)) & 1 \end{pmatrix}$$

則灰色模型之時間響應方程式為：

$$\hat{x}^{(1)}(t) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-a(t-1)} + \frac{b}{a} \quad (15)$$

最後將 $t=k$ 代入(15)式中，灰色模型離散響應方程式為：

$$\hat{x}^{(1)}(k) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a} \quad (16)$$

依上述步驟即可根據(16)式進行預測。唯(16)式是對累加生成數列做預測，需對預測值做逆生成(Inverse Accumulated Generating Operation, IAGO)，以求得真正的預測結果。

步驟四：累減生成(Inverse Accumulated Generating Operation, IAGO)

對數列求相鄰兩數據之差，稱為累減生成，其作用是將累加生成還原成非生成數列，所以累減生成是累加生成的逆運算(IAGO)。茲將累減生成的運算過程說明如下：

1 次累加生成數列 $x^{(1)}$ 為

$$x^{(1)}(k) = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)) \quad (17)$$

設 IG 為累減生成運算，並對 1 次累加生成數列 $x^{(1)}$ 做累減生成

$$\text{IG}(x^{(1)}(k)) = x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (18)$$

(五)本研究將此灰色預測法運用在台灣中部地區土石流之雨量預測

步驟一：數據擷取

取得系統的數據來組成數列 $x^{(0)}$ 是建立灰色模型的基礎，如在第 n 時刻之灰色建模原始數列 $x^{(0)}$ 為：

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) \quad (1)$$

其中原始數列 $x^{(0)}$ 即為我們所預測的 88 年或 89 年雨量分布月平均實際量值。

步驟二：累加生成(Accumulated Generating Operation,AGO)

經數據擷取後，就需對原始數列 $x^{(0)}$ 進行累加生成。所謂「累加生成」是指對原始數列 $x^{(0)}$ 中，各數據依序地做累加，以得到一個新的數列與數據，經累加生成後的數列稱為「生成數列」。若 G 表示累加生成運算，則對原始數列 $x^{(0)}$ 做 1 次累加生成可表示為 $x^{(1)}(k)$ 。

$$G = (x^{(0)}(k)) = x^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^k x^{(0)}(m) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

步驟三：灰色建模

灰色系統理論則是取用系統的行為特徵數據與資料來建立模型，此種先有系統行為，然後才有模型的過程稱為「逆過程」。但是這種逆過程中所獲得的數據，只包含了部分訊息，並不能完全代表整個系統的行為特徵，因此這類模型被稱之為灰色模型(Grey Model, GM)。一個 1 階、1 個變數的 GM 模型可表示為 GM(1,1)，一般作為預測用，而 GM(1,N)及 GM(0,N)，一般作多維關聯分析用(江金山等人，民 87；陳朝光，民 86；吳漢雄等人，民 85)。GM(1,1)其灰微分方程式為：

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (3)$$

由最小平方法(Least-Squares Methods)可求得

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{y}_N \quad (4)$$

其中 參數列 $\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}$

數據列 $\mathbf{y}_N = [x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n)]^T$

$$\text{數據矩陣 } B = \begin{pmatrix} \boxed{\times}(x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)) & 1 \\ \boxed{\times}(x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)) & 1 \\ \vdots & \\ \boxed{\times}(x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)) & 1 \end{pmatrix}$$

灰色模型的理想反應方程式如下：

$$\hat{x}^{(1)}(k) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a} \quad (5)$$

步驟四：累減生成(Inverse Accumulated Generating Operation,IAGO)

對數列求出相鄰兩數據之差，稱為「累減生成」，其目的是將累加生成還原成非生成數列，所以累減生成是累加生成的逆運算(IAGO)。茲將累減生成的運算過程說明如下：

1 次累加生成數列 $x^{(1)}$ 為

$$x^{(1)}(k) = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)) \quad (6)$$

設 IG 為累減生成運算，並對 1 次累加生成數列 $x^{(1)}$ 做累減生成

$$IG(x^{(1)}(k)) = x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (7)$$

而對 1 次累加生成數列 $x^{(1)}$ 做累減生成後之 $x^{(0)}(k)$ 即為 88 年或 89 年雨量月平均預測量值。

空氣污染預測處理

本研究預測的空氣污染區域為中部土流區，包含有桃竹苗地區，其雨量平均指數是由新竹氣象站所測得的台灣中區土石流主要因子之雨量月平均量值作為預測之對象(氣象局，民88，氣象局，民89)。

三、研究過程

(一)研究規劃

為事先提供各地政府單位雨量數據，以作為預防、改善參考，乃預測出90年雨量月平均量值，並驗證出最好的誤差修正方法，其步驟敘述如下：

步驟一：

首先以88年一月至十二月雨量月平均實際量值為原始數列 $x^{(0)}$ (氣象局，民88)，藉由Visual Basic程式語言設計出之「雨量預測運算器」及「預

測值校正運算器」，其程式系統建構與動態行為派翠西網路(Petri-nets)，預測出89年的月平均雨量預測值。

灰色預測在雨量長期趨勢分析之應用

雨量預測運算器

1.輸入灰色預測之灰色建模原始數

X 1 : 確定

2.欲產生 個累減生成數列 確定

3.產生灰色預測之累減生成數

X(1) : 下一筆累減生成數

殘差1 : %

平均殘差

圖五 雨量預測運算器

預測值校正運算器

預測值校正運算器

1.輸入實際值

2.輸入預測值

3.產生實際值與預測值之間的誤差 $\Delta\delta$ 執行

%

4.輸入預測值

5.輸入誤差 $\Delta\delta$ %

6.產生校正後之預測值 執行

7.產生之校正預測值

圖六 預測值校正運算器

Petri-Nets 的系統行為表徵概念

Petri-Nets 最大的特色是能夠將抽象性或理論性的系統經過 Petri-Nets 的描述或塑模處理，建置實際可程式化控制的系統（參考圖七）。Petri-Nets 同樣地，亦能將實際動態性系統作行為分析與塑模，以便發展成有結構性的系統。



圖七 Petri-Nets 的行為分析與塑模觀念

Petri-Nets 的基本定義如下：（參考圖八）

$P = \{ P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \}$ ($n \geq 0$) 為一有限位置或狀態集合

$T = \{ t_1, t_2, t_3, \dots, t_n \}$ ($n \geq 0$) 為一有限轉變或處理集合

$P \cap T = \{ \}$

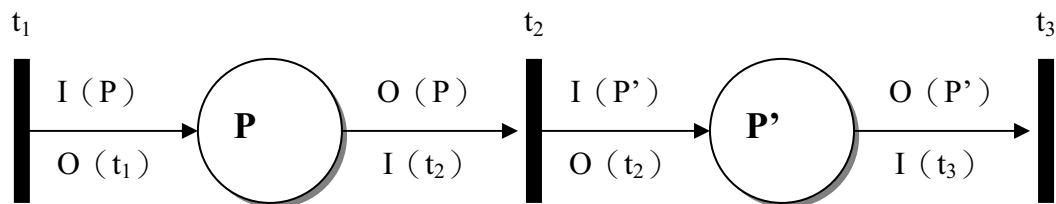
$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$

$I(t) = \{ P \mid (P, t) \in F \}$

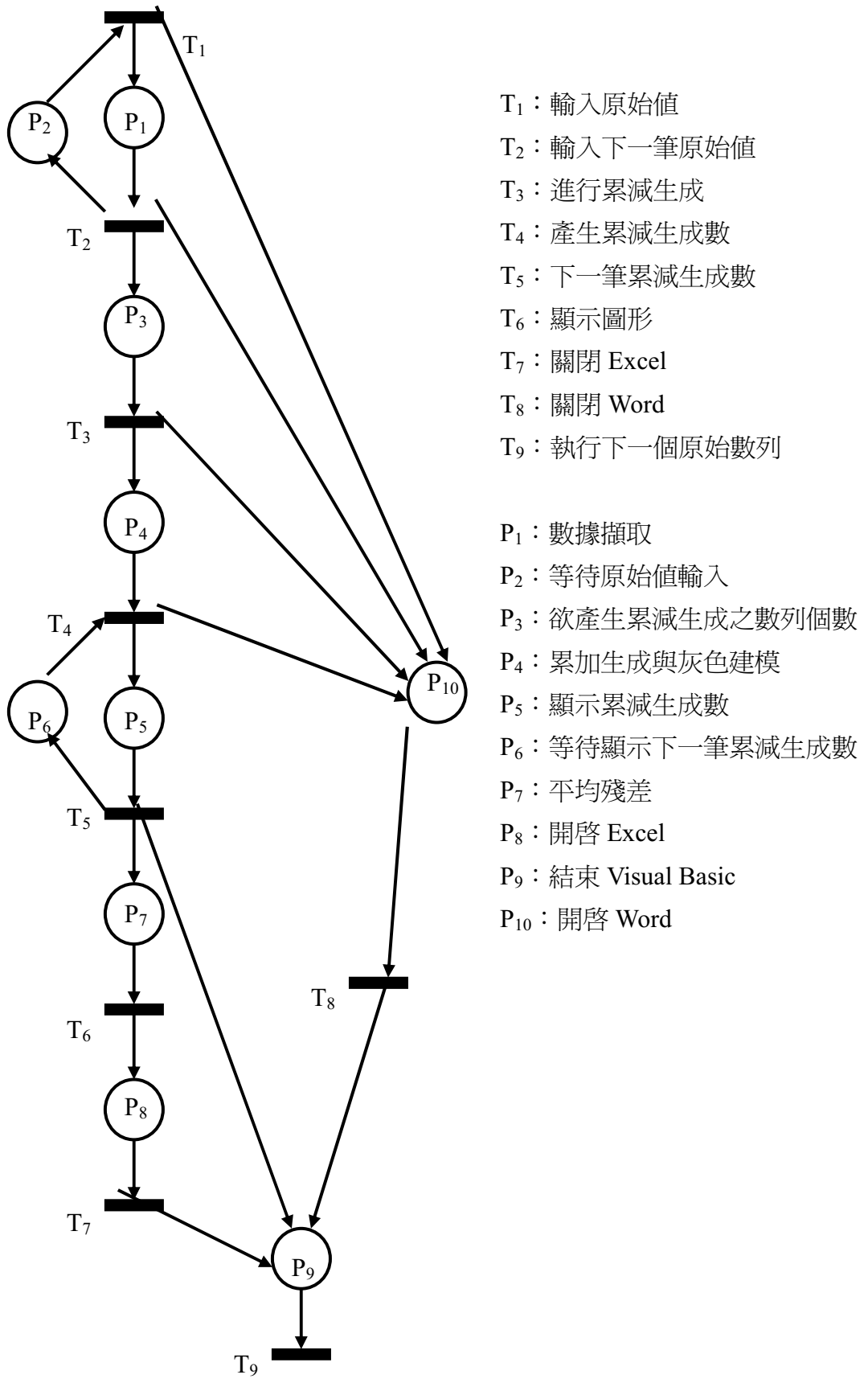
$O(t) = \{ P \mid (t, P) \in F \}$

$I(P) = \{ t \mid (t, P) \in F \}$

$O(P) = \{ t \mid (P, t) \in F \}$



圖八 Petri-Nets 的基本定義與符號



圖九「灰色預測運算器」程式系統建構與動態行為之派翠西網路(Petri-nets)

步驟二：

以預測出的88年的雨量月平均預測量值，及88年雨量月平均原始量值，利用公式（8）作殘差檢驗(Residual Checking)($\pm \Delta \delta$) (江金山等人，民87；林文盛，民87；鄧聚龍、郭洪，民85)，以作為另一種校正參考依據值。

$$\Delta \delta = \frac{\text{原始值} - \text{預測值}}{\text{原始值}} \times 100\% \quad (8)$$

步驟三：

以88年一月至十二月雨量月平均實際量值為原始數列 $x^{(0)}$ ，藉由「灰色預測運算器」，預測出未來89年的雨量月平均預測量值。

步驟四：

分別用公式（9）來校正預測的89年雨量月平均預測量值，這便是校正後的89年雨量月平均預測量值。

$$\text{校正後之預測值} = \text{預測值} / (1 - \Delta \delta) + k \quad \left| \quad k = \text{constant} \quad (9) \right.$$

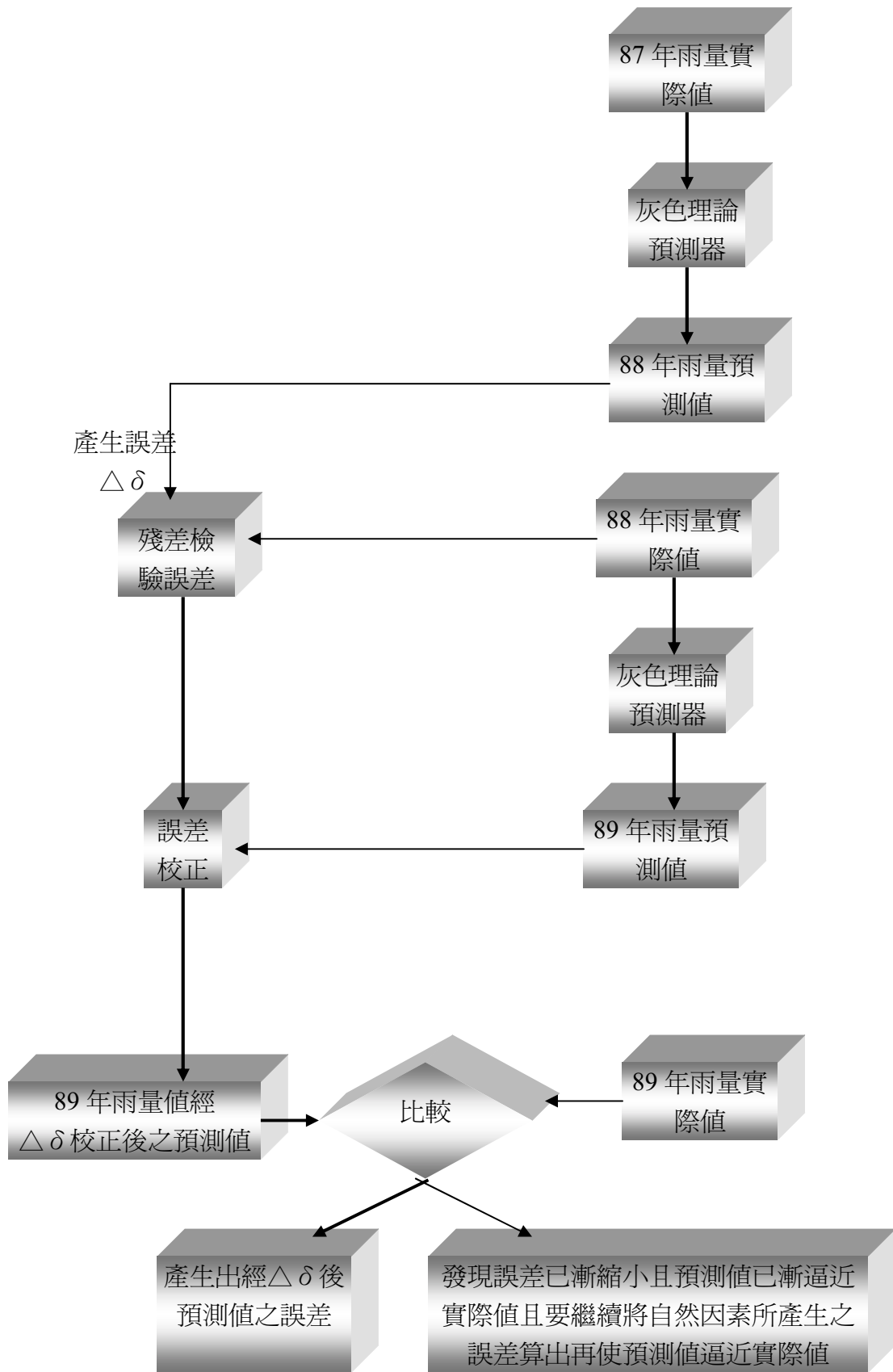
(二)研究器材

表一 本研究所使用的工具軟體

工具軟體	說明
Windows ME	作業系統
VisualBasic	程式開發工具
Word 2000	文書處理應用軟體
Excel 2000	資料庫應用軟體

表二 本研究平台建置所使用的硬體設備

硬體設備	說明
AMD k7 1400MHz	CPU
256MB DDR RAM	隨機存取記憶體
Seagate 40GBx1	硬碟
15吋 LCD	液晶顯示器
滑鼠、鍵盤、軟碟等	桌上型電腦基本周邊
網路配接卡	連上網際網路
Hinet 撥接	網路環境

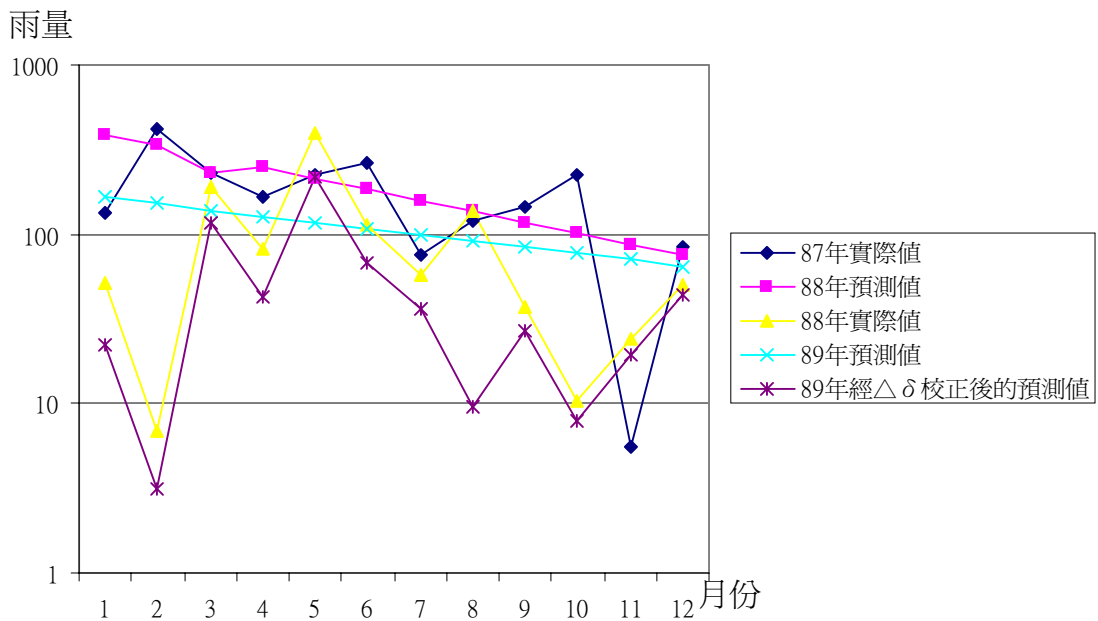


圖十 雨量數據預測方塊圖

表四 新竹雨量預測結果<單位:mm>

雨量	87年 實際值	88年 預測值	88年 實際值	$\Delta \delta \%$	89年 預測值	89年經 $\Delta \delta$ 校正後的預 測值
一月	134.9	388.8	51.9	-649.1	164.5	22
二月	418.3	334.7	6.9	-4750.7	151.2	3.1
三月	227.9	228.1	192.9	-18.2	138.9	117.5
四月	164.6	248.1	82.3	-201.5	127.7	42.4
五月	224	213.6	391.7	45.5	117.3	215.2
六月	264.9	183.9	114.2	-61	107.8	67
七月	75.6	158.3	57.9	-173.4	99	36.2
八月	120.7	136.3	137.1	0.58	91	9.5
九月	146.2	117.3	37.4	-213	83.6	26.7
十月	221.7	101	10.5	-861.9	76.8	8
十一月	5.6	86.99	24.1	-261	70.6	19.6
十二月	83.9	74.8	50.2	-49	64.9	43.6

依表四內雨量數值所描繪的曲線如圖所示（不含 Δe 及 $\Delta \delta$ ）

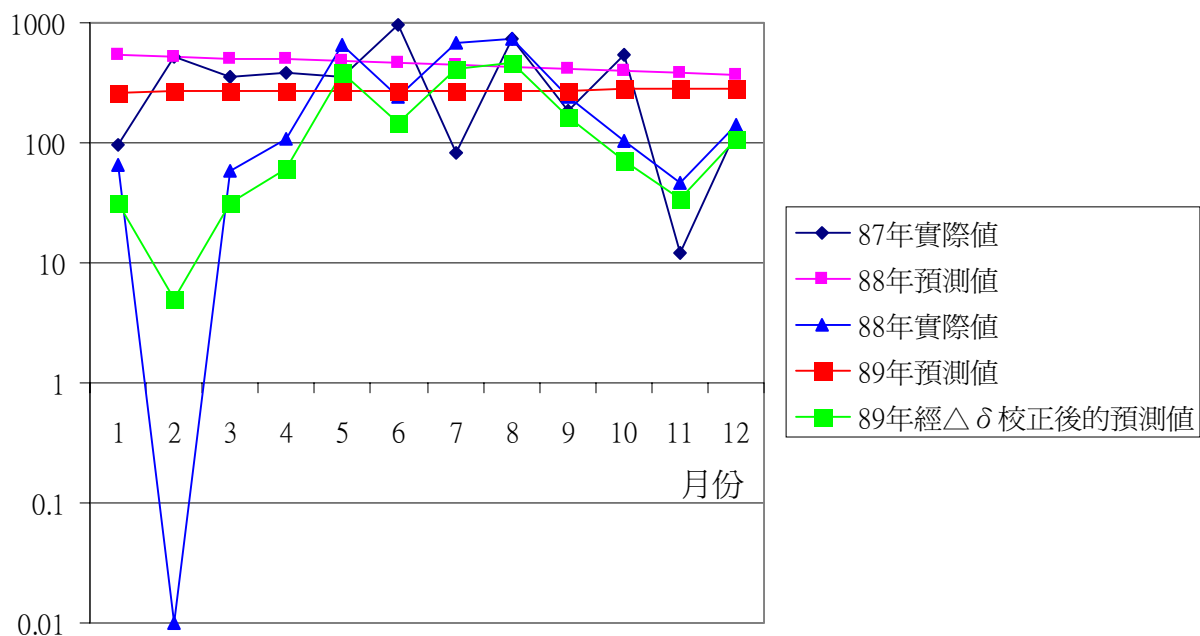


圖十一 雨量預測曲線圖

表五 阿里山雨量預測結果<單位:mm>

雨量	87年 實際值	88年 預測值	88年 實際值	$\Delta \delta \%$	89年 預測值	89年經 $\Delta \delta$ 校 正後的預測值
一月	97.5	548.8	64.6	-749.5	265.6	31.3
二月	527.5	529.1	0	-5290900	266.9	5
三月	358.0	510.1	59.5	-757.3	268.3	31.3
四月	377.0	491.8	109	-351.2	269.6	59.8
五月	361	474.2	661.5	28.3	271	378
六月	955.5	457.2	244.7	-86.8	272.3	145.8
七月	83.5	440.8	679	35.1	273.6	421.6
八月	739.5	425	723.8	41.3	275	468.5
九月	185.5	409.7	244.9	-67.3	276.4	165.2
十月	539.7	395	102.5	-285.4	277.8	72.1
十一月	12	380.9	46.5	-719.1	279.2	34.1
十二月	127.5	367.2	138.9	-164.4	280.6	106

雨量



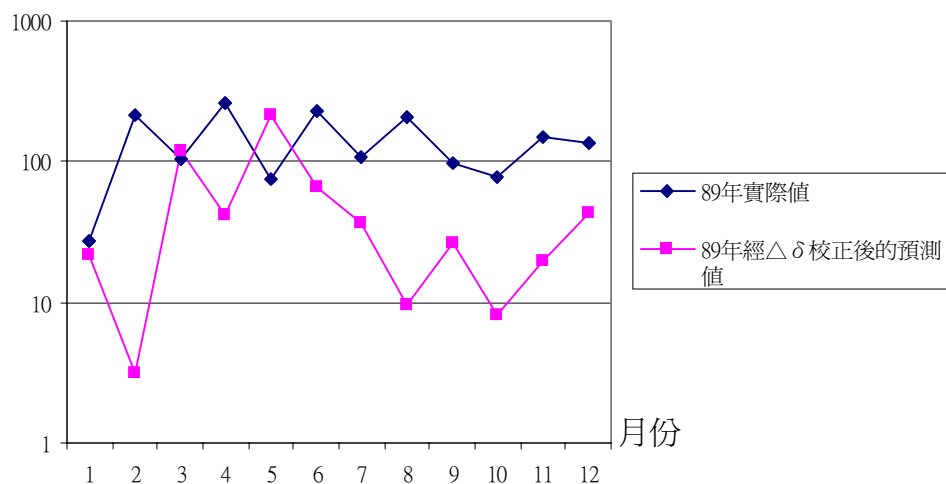
圖十二 雨量預測曲線圖

為驗證出最好的誤差修正方法，我們將 89 年雨量之實際值（氣象局，89）、 Δe 校正後的預測值、 $\Delta \delta$ 校正後的預測值、誤差分別列於表六、表七。並繪出雨量圖如圖十三、圖十四所示。

表六 89 年新竹雨量實際值、預測值(單位：mm)及誤差值大小

雨量	89 年實際值	89 年經 $\Delta \delta$ 校正後的預測值	實際值與預測值 ($\Delta \delta$ 校正) 之間的誤差 %
一月	27	22	18.5
二月	217	3.1	98.6
三月	103.9	117.5	-13.1
四月	265.2	42.4	84
五月	76.5	215.2	-181.3
六月	229.8	67	70.8
七月	108.2	36.2	66.5
八月	205.2	9.5	95.4
九月	99.0	26.7	73
十月	76.9	8	89.6
十一月	151.1	19.6	87
十二月	134.0	43.6	67.5

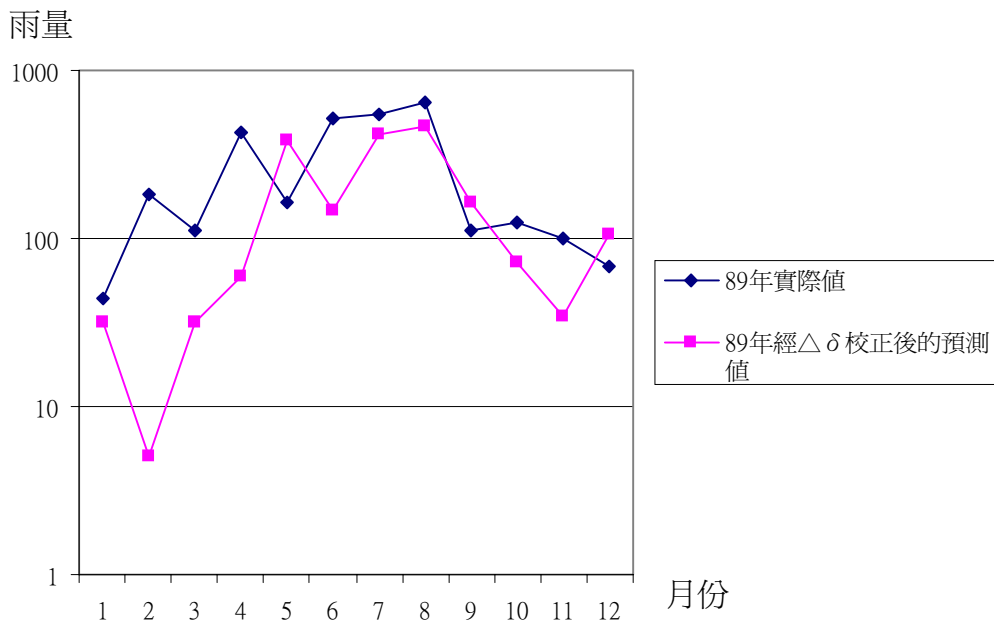
雨量



圖十三 89 年新竹雨量實際值、預測值(單位：mm)之曲線圖

表七 89 年阿里山雨量實際值、預測值(單位：mm)及誤差值大小

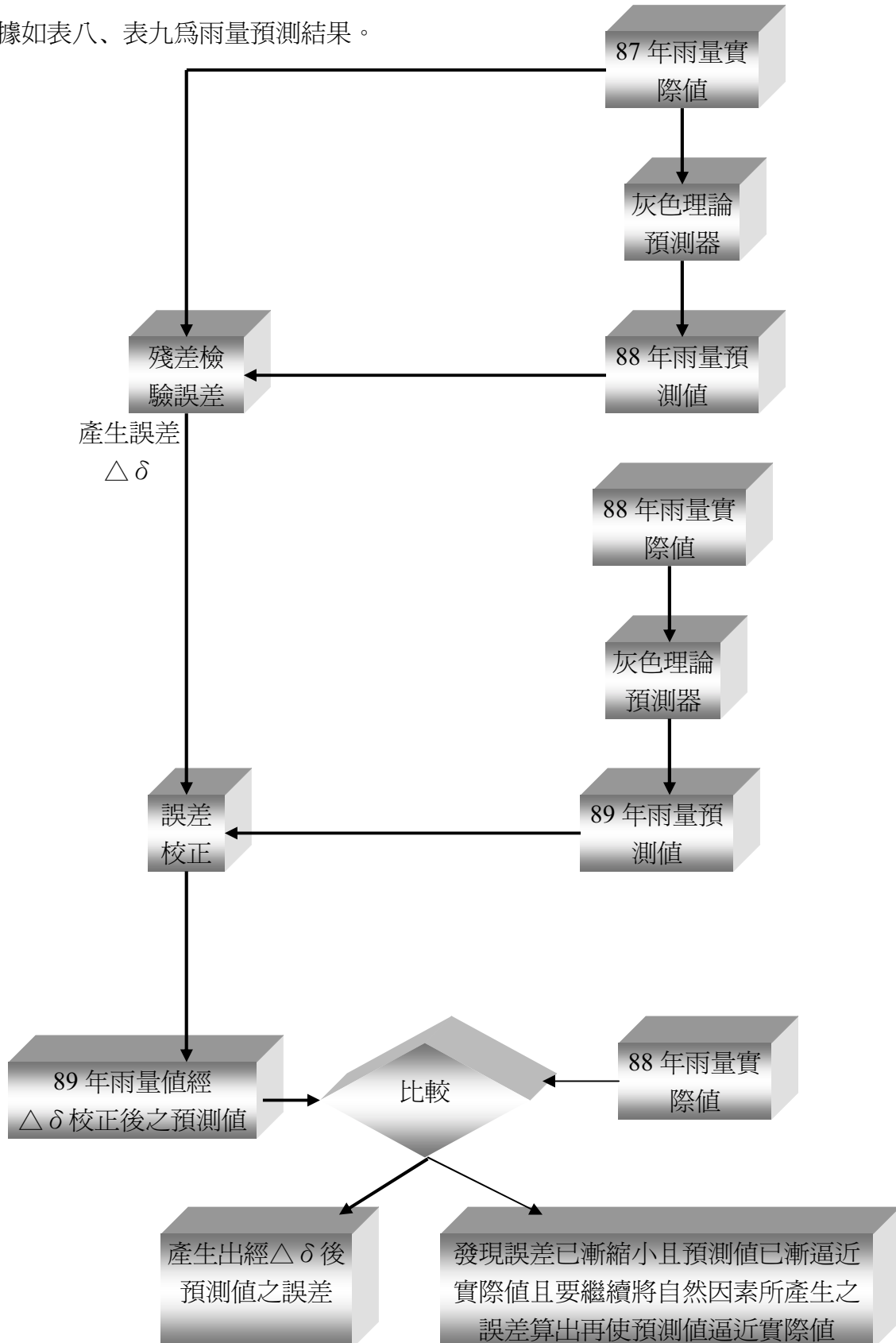
雨量	89 年實際值	89 年經 $\Delta \delta$ 校正後的預測值	實際值與預測值($\Delta \delta$ 校正)之間的誤差%
一月	43.8	31.3	28.5
二月	184.7	5	97.3
三月	111.7	31.3	72
四月	427.5	59.8	86
五月	164.1	378	-130
六月	517.7	145.8	71.8
七月	551.0	421.6	23.5
八月	641.5	468.5	27
九月	110.5	165.2	-49.5
十月	123.3	72.1	41.5
十一月	99.5	34.1	65.7
十二月	67.6	106	-56.8



圖十四 89 年阿里山雨量實際值、預測值(單位：mm)之曲線圖

2.等為灰數遞補 GM(1,1)模型

此流程我們可用圖十五雨量數據預測方塊圖表示，並且各步驟所求得的數據如表八、表九為雨量預測結果。

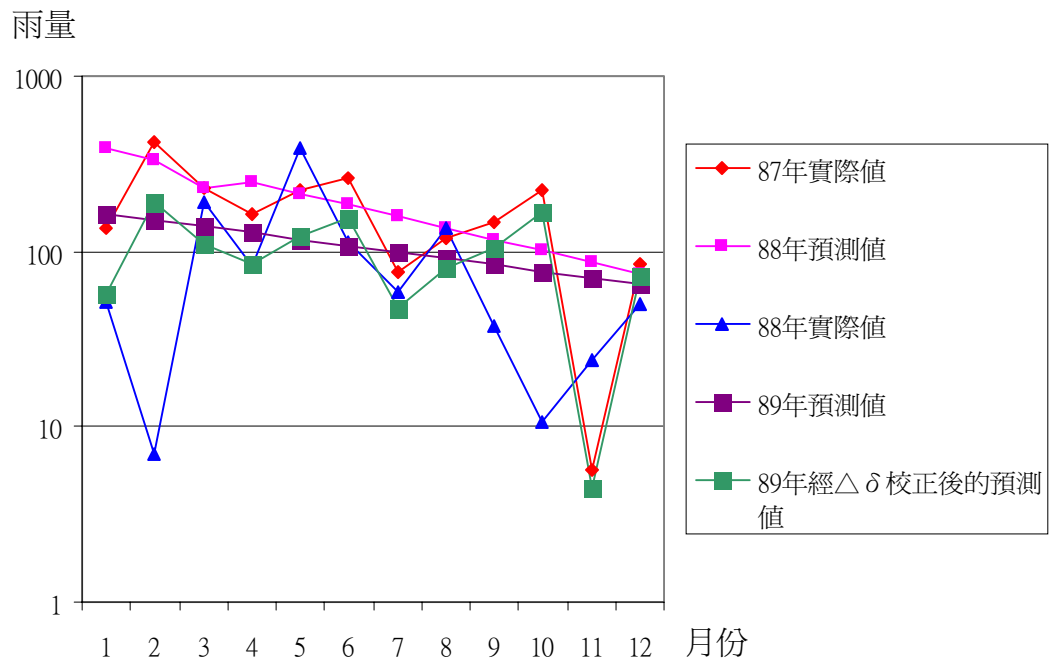


圖十五 雨量數據預測方塊圖

表八 新竹雨量預測結果<單位:mm>

雨量	87年 實際值	88年 預測值	$\Delta \delta \%$	88年 實際值	89年 預測值	89年經 $\Delta \delta$ 校正後的預 測值
一月	134.9	388.8	-188.2	51.9	164.5	57.1
二月	418.3	334.7	19.9	6.9	151.2	188.8
三月	227.9	228.1	-26.4	192.9	138.9	109.9
四月	164.6	248.1	-50.7	82.3	127.7	84.7
五月	224	213.6	4.6	391.7	117.3	123
六月	264.9	183.9	30.5	114.2	107.8	155.1
七月	75.6	158.3	-109.4	57.9	99	47.3
八月	120.7	136.3	-12.9	137.1	91	80.6
九月	146.2	117.3	19.7	37.4	83.6	104.1
十月	221.7	101	54.4	10.5	76.8	168.4
十一月	5.6	86.99	-1453.4	24.1	70.6	4.5
十二月	83.9	74.8	10.7	50.2	64.9	72.7

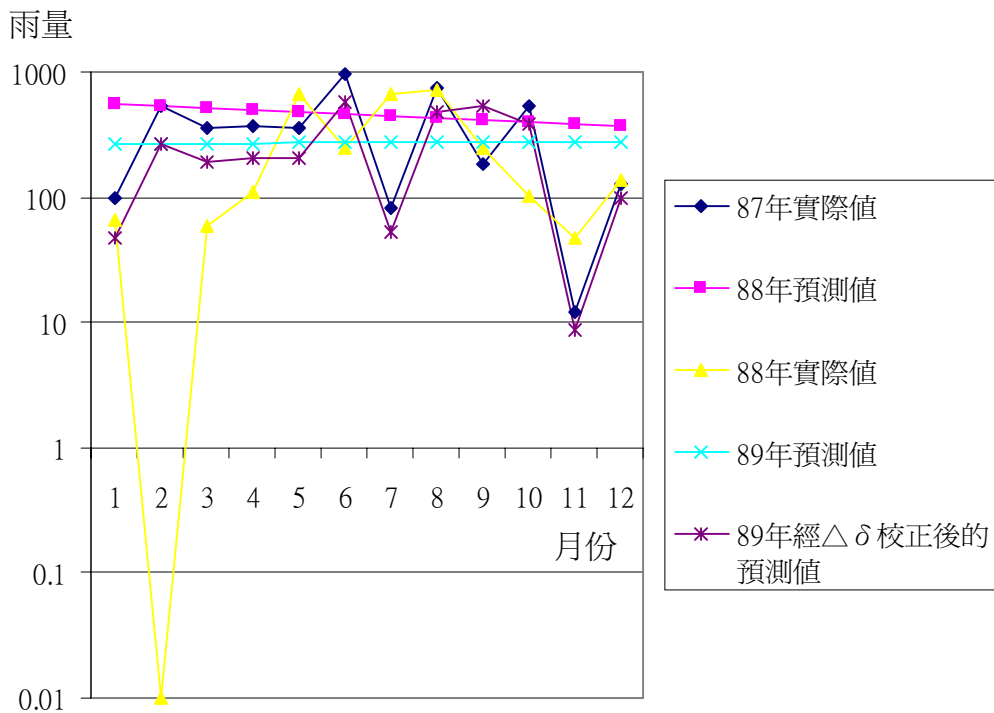
依表內雨量數值所描繪的曲線如圖所示（不含 Δe 及 $\Delta \delta$ ）



圖十六 雨量預測曲線圖

表九 阿里山雨量預測結果<單位:mm>

雨量	87年 實際值	88年 預測值	$\Delta \delta \%$	88年 實際值	89年 預測值	89年經 $\Delta \delta$ 校 正後的預測值
一月	97.5	548.8	-462.9	64.6	265.6	47.1
二月	527.5	529.1	-0.3	0	266.9	266.1
三月	358.0	510.1	-42.5	59.5	268.3	188.3
四月	377.0	491.8	-30.5	109	269.6	206.6
五月	361	474.2	-31.4	661.5	271	206.2
六月	955.5	457.2	52.2	244.7	272.3	569.7
七月	83.5	440.8	-427.9	679	273.6	51.8
八月	739.5	425	42.5	723.8	275	478.3
九月	185.5	409.7	47.8	244.9	276.4	529.5
十月	539.7	395	26.8	102.5	277.8	379.5
十一月	12	380.9	-3073.9	46.5	279.2	8.8
十二月	127.5	367.2	-188	138.9	280.6	97.4

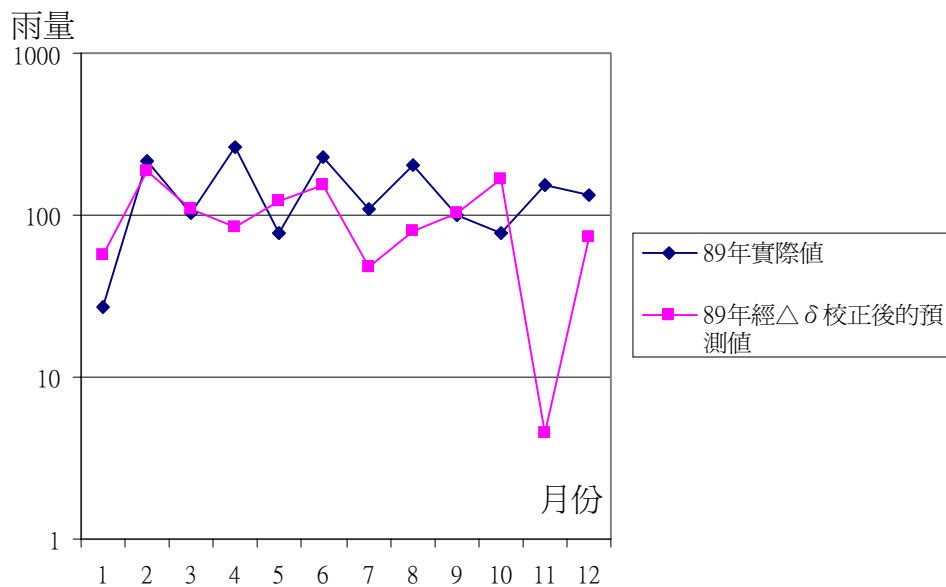


圖十七 雨量預測曲線圖

為驗證出最好的誤差修正方法，我們將 89 年雨量之實際值（氣象局，89）、 Δe 校正後的預測值、 $\Delta \delta$ 校正後的預測值、誤差分別列於表十、表十一。並繪出雨量圖如圖十八、圖十九所示。

表十 89 年新竹雨量實際值、預測值(單位：mm)及誤差值大小

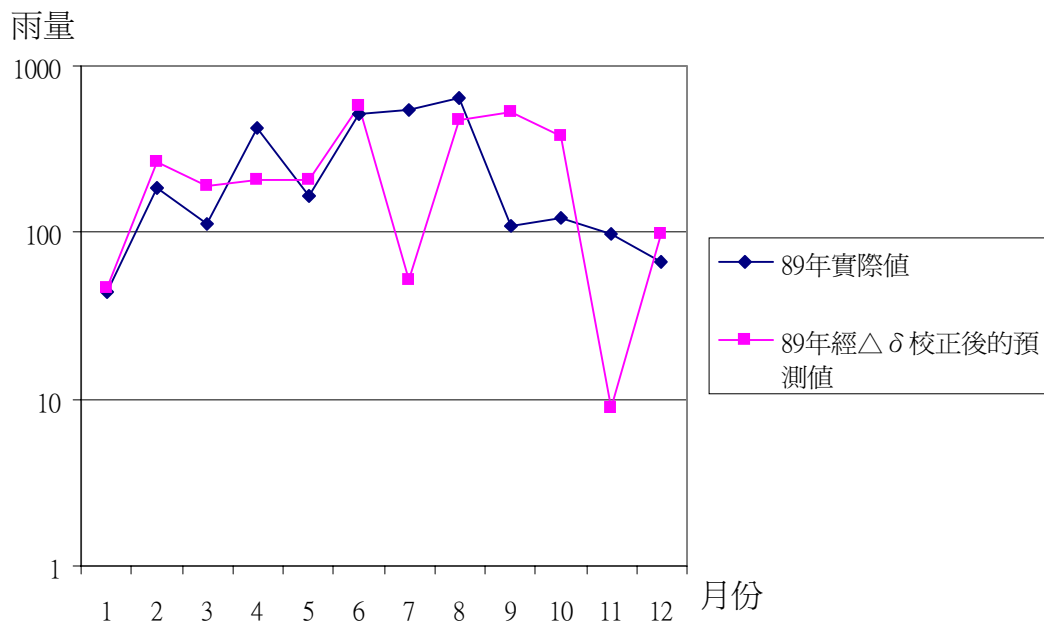
雨量	89 年實際值	89 年經 $\Delta \delta$ 校正後的預測值	實際值與預測值 ($\Delta \delta$ 校正) 之間的誤差 %
一月	27	57.1	-10
二月	217	188.8	-2636.2
三月	103.9	109.9	43
四月	265.2	84.7	-2.3
五月	76.5	123	68.6
六月	229.8	155.1	-35.8
七月	108.2	47.3	18.3
八月	205.2	80.6	41.2
九月	99.0	104.1	-178.3
十月	76.9	168.4	-1503.8
十一月	151.1	4.5	81.3
十二月	134.0	72.7	-44.8



圖十八 89 年新竹雨量實際值、預測值(單位：mm)之曲線圖

表十一 89 年阿里山雨量實際值、預測值(單位：mm)及誤差值大小

雨量	89 年實際值	89 年經 $\Delta \delta$ 校正後的預測值	實際值與預測值($\Delta \delta$ 校正)之間的誤差%
一月	43.8	47.1	27.1
二月	184.7	266.1	-2660900
三月	111.7	188.3	-216.5
四月	427.5	206.6	-89.5
五月	164.1	206.2	68.8
六月	517.7	569.7	-132.8
七月	551.0	51.8	92.4
八月	641.5	478.3	33.9
九月	110.5	529.5	-116.2
十月	123.3	379.5	-270.2
十一月	99.5	8.8	81.1
十二月	67.6	97.4	29.9



圖十九 89 年阿里山雨量實際值、預測值(單位：mm)之曲線圖

五、結論

(一)利用灰色預測法可預測出理想的台灣中部區域土石流主要因素雨量月平均預測值。運用此處理方式，預測臺灣中部未來的雨量，做事前的警訊或防治，達到事半功倍的目標是可行的。

(二)經由派翠西網路(Petri-nets)分析及塑模，再藉由 Visual Basic 程式語言設計的「灰色預測運算器」可幫助我們解決灰色預測法中繁瑣的矩陣運算。

(三)在本研究中我們分別採用等維新息 GM(1, 1)模型及等為灰數遞補 GM(1, 1)模型來求出預測值，都可修正出不錯的預測結果，更可以將兩者做兩相結合、截短補長。

(四)經由以上結果可以發現阿里山的雨量分布變化複雜，如果要求出其變化規律，需更多更久的誤差修正才能達到理想的預測值。

(五)可建議中部地區、土石鬆動及雨量充沛地區設立一些觀測站，做雨量預測，以確保發生重大災害，如苗栗地區...等

六、參考書目

- (一)江金山等人，(民 87)，灰色理論入門，台北：高立圖書有限公司。
- (二)鄧聚龍、郭洪，(民 85)，灰預測原理與應用，台北：全華圖書有限公司。
- (三)吳漢雄、鄧聚龍、溫坤禮，(民 85)，灰色分析入門，台北：高立圖書有限公司。
- (四)陳朝光，(民 86)，灰色系統原理，台北：高立圖書有限公司。
- (五)陳弘旭、張偉哲，(民 87)，最佳化灰色模型 GM(1,1)之研究，灰色系統學刊，1 卷 2 期，頁 141-146。
- (六)林文盛，(民 86)，灰色理論在真平度、真直度、真圓度幾何公差上所需量測點數之預測，國立台灣科技大學機械工程技術研究所碩士論文。
- (七)環保署，(民 87)，中華民國台灣地區空氣品質監測報告八十七年年報，台北：行政院環境保護署。
- (八)環保署，(民 86)，中華民國台灣地區空氣品質監測報告八十六年年報，台北：行政院環境保護署。
- (九)環保署，(民 85)，中華民國台灣地區空氣品質監測報告八十五年年報，台北：行政院環境保護署。

- (十)Deng, J (1989) ,“Introduction to grey system theory,” Journal of Grey System, Vol.1, pp.1-24 。
- (十一)Peterson,J.L (1981) ,PETRI NET THEORY AND MODELING OF SYSTEM, Prentice-Hall,Inc., pp.1-30 。
- (十二)戴建耘、陳熙灝、黃釗田、崔灝東(民 89)：灰色預測在空氣品質長期趨勢分析之應用。 灰色系統學刊，第 5 期。中華民國灰色系統學會。 -