

# 台灣二〇〇二年國際科學展覽會

科 別：物理科

作品名稱：實驗探討液體表面交叉波的一些性質

得獎獎項：物理科第二名  
香港第卅五屆聯校科學展覽會正選代表

學 校：國立嘉義高級中學

作 者：鍾瑞穎

## 作者簡介



我是鍾瑞穎，來自於嘉義市，就讀於嘉義高中。父母都是教師，他們從小也鼓勵我攝取課本以外的寶貴知識，從小也極為注重我的教育，不僅限於課本上，連身心發展也花了許多心血，小時爲了使我開拓視野、放遠目標，常帶我出國，讓我接觸到各國不同的文化和觀念，使我能有較寬、較廣的人生觀，尊重不同的人，也尊重並吸收每一種不同的觀點來突破自己。小時候最對自然學科就抱有濃厚的興趣，上了高中後，科展便成爲我熱愛的研究活動，我也要謝謝李文堂老師和楊宗哲教授的指導和鼓勵，讓我有機會參與這次的國際科展，使我學了許多，也成長了不少，更使我的高中生涯多采多姿。

# 實驗探討液體表面交叉波的一些性質

## 摘要

交叉波(cross wave)為波峰和振源表面垂直的波，移動方向和振源表面平行，它是以表面張力為恢復力的表面張力波(capillary wave)的一種。

本作品分別利用電鈴計時器連接一起波器，以及用音叉在水面下數毫米處振動，振幅太大時，水面有水滴噴出；振幅恰好時，形成交叉波及正常的表面張力波；振幅再降，只有正常的表面張力波；用數位相機連續拍照，可直接量得交叉波的波長( $\lambda_1$ )為正常的表面張力波的波長( $\lambda_2$ )的 $2^{\frac{2}{3}}$ 倍。交叉波的頻率( $f_1$ )為正常的表面張力波的頻率( $f_2$ )的 $\frac{1}{2}$ ，即：交叉波有色散性。

五隻不同頻率的音叉分別在液體中振動，照相後量出 $\lambda_1$ ，作 $\lambda_1^3$ 對 $\frac{1}{f_1^2}$ 關係圖，其斜率= $\frac{2\pi T}{\rho}$ ， $\rho$ 、 $T$ 分別為液體的密度及表面張力。

圓柱杯盛液體置於拉坯機上，手指輕觸杯緣，拉坯機轉動時，量出杯的發音頻率( $f_2$ )，照相後量出 $\lambda_1$ ，作 $\lambda_1^3$ 對 $\frac{1}{f_1^2}$ 關係圖，其斜率= $\frac{2\pi T}{\rho}$ ；量出拉坯機轉動速率 $V$ ，作 $V^3$ 對 $f_1$ 關係圖，其斜率亦= $\frac{2\pi T}{\rho}$ ，其中 $V$ 是交叉波的波速。

## An Experimental Study on The Properties of Cross Waves on The Surface of Liquid

### ABSTRACT

Cross waves are waves with crests at right angles to a wave-maker. These waves are one sort of capillary waves. In our experiment, there are three different ways to study cross waves on the surface of liquid. The first one, an aluminum plate is connected with a sonometer which vibrates 60 times per second. When the plate is dipped a few millimeters into a cylindrical glass filled with water, the plate oscillates horizontally with the same frequency of sonometer. (a)When the plate vibrates too vigorously, the water surface is erupted into a confusion of drops. (b)When the amplitude of the plate is of proper vigor, cross waves and normal capillary waves are formed. (c)When the vibration is too weak, only normal capillary waves were created. Second one, five vibrating forks are dipped into the water, several separate photographs taken from the water surface. From the photographs, the wavelength of cross waves ( $\lambda_1$ ) and normal capillary waves ( $\lambda_2$ ) may be found and measured directly,  $\lambda_1 = 2^{\frac{2}{3}} \lambda_2$ ; Frequency of cross waves ( $f_1$ ) is equal to half the frequency of normal capillary waves ( $f_2$ ). That is, cross waves are dispersive. A graph of  $\lambda_1^3$  vs  $\frac{1}{f_1^2}$  is plotted, the slope is found to be equal to  $\frac{2\pi T}{\rho}$ . Third one, put a cylindrical glass on a powered potter's wheel and rotate it while keeping finger fixed on the rim of the glass. The glass is filled with liquid of different height. Cross waves are found to remain fixed on the surface of liquid. Measure the wavelength, the frequency and the speed of the turntable. The slopes is also equal to  $\frac{2\pi T}{\rho}$ , from the curve of  $V^3$  vs  $f_1$ . Here, V is speed of cross wave.

# 實驗探討液體表面交叉波的一些性質

## 一、研究動機：

作者以「實驗探討圓柱杯發音頻率的變因」參加全國第四十一屆科展僥倖獲獎，蒙國立台灣科學教育館經費補助參與中學生專題研究，在教授指導下，針對圓柱杯盛液體時，液面產生交叉波的一些性質做進一步的研究。

## 二、研究目的：

1. 利用打點計時器連接一壓克力片，探討振源振動方式對交叉波和正常表面張力波成因的影響。
2. 一組音叉在液面振動，探討交叉波波長和頻率的關係。
3. 手指在盛液體圓柱杯口滑動，實驗探討交叉波波速、波長、頻率的關係。

## 三、原理：

1. 交叉波(cross wave)為波峰和波源互相垂直的波，它屬於以表面張力為恢復力的表面張力波(capillary wave)的一種。波源振動頻率  $f$ ，其振動方向和液面平行時，產生交叉波，頻率  $f_1$ ；波源振動方向和液面垂直時，產生正常的表面張力波，頻率  $f_2$ 。1831年法拉第〔註1〕發現交叉波，並認為  $f_1 = \frac{f^2}{2} = \frac{f}{2}$ 。

2. 液體表面波的波速  $V = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}g + \frac{2\pi T}{\rho\lambda}}$  ……(1)  $\lambda$ ：波長， $g$ ：重力加速度， $\rho$ 、 $T$ 分

別為液體密度及表面張力。以重力為恢復力的重力波，波長甚長  $V \approx \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}$ ，以表面張

力為恢復力的表面張力波， $V \approx \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}}$ ，我們所研究的交叉波，波長均不到一公分，

$$\text{所以 } V = \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}} \text{ ……(2)}$$

3.  $V = \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho}} = f_1 \lambda$  可導出

$$\lambda^3 = \frac{2\pi T}{\rho} \cdot \frac{1}{f_1^2} \text{ ……(3)}$$

$$V^3 = \frac{2\pi T}{\rho} \cdot f_1 \text{ ……(4)}$$

#### 四、實驗器材：

1. 水波槽(投影用)一個
2. 投影機一台
3. 打點計時器(60Hz)一台
4. 音叉(已知頻率)5 支
5. 頻率偵測器(Seiko ST747 型)一具
6. 同步定時儀一台
7. 碼錶一個
8. 拉坏機一台
9. 透明尺一支
10. 自製壓克力起波器(長 7cm、寬 3cm、厚 3mm)二片
11. 圓柱玻璃杯一個(半徑 6.66cm、高 11.8cm、厚 1.8mm Pyrex 玻璃製成)

#### 五、實驗步驟：

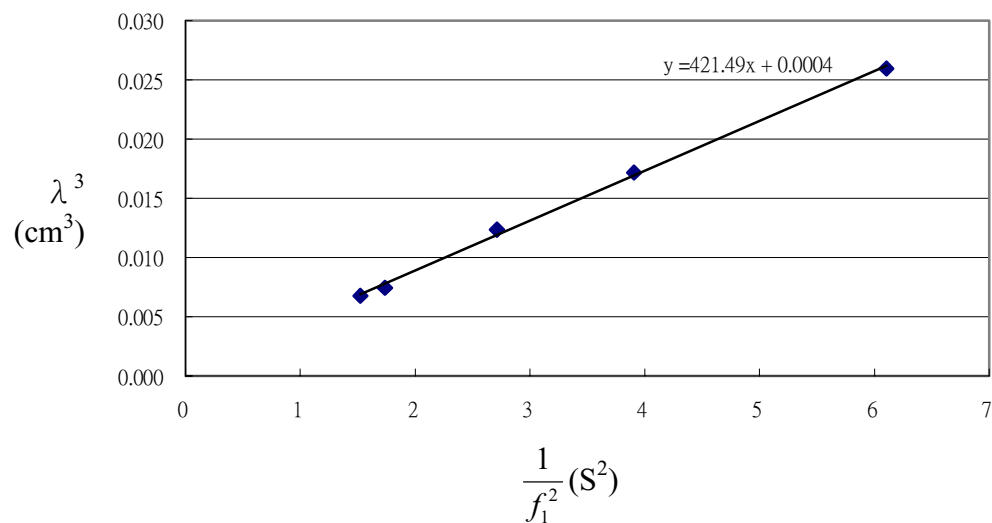
1. 水波槽盛水 0.7 公分深，置於投影機上，壓克力起波器和打點計時器相連，壓克力片沒在水面下約 2mm，以頻率 60 赫振動，使壓克力片振動方向平行水面，銀幕上出現振幅較大的交叉波(波峰垂直壓克力片)。壓克力片垂直水面振動，銀幕上出現正常的表面張力波(波峰平行壓克力片)。壓克力片和水面夾角約 60 度時，銀幕上出現起波器的一側出現交叉波，另一面出現正常的表面張力波，水波槽置入透明尺，銀幕上可直接觀察波長及波形的移動。
2. 圓柱杯置於桌面上盛滿水。音叉用橡皮槌敲後，放入水中約 2 mm，振幅大時，水花四濺；振幅降到恰到好處時，水面出現交叉波；音叉快停止振動前出現正常的表面張力波。杯子旁置透明尺，用數位照相機連續拍攝交叉波及正常表面張力波。洗出照片後量出波長。
3. 改用不同頻率( $f$ )的音叉重做上實驗，量出各頻率下的交叉波波長  $\lambda$ ，以電腦作  $\lambda^3$  對  $\frac{1}{f_1^2}$  圖。 $(f_1 = \frac{f}{2})$
4. 圓柱杯用雙面膠帶固定於拉坏機的轉盤上，手指在杯口滑動，杯子發音，用測頻器測得空杯頻率  $f_0$ 。
5. 杯子裝水深  $h$ ，手指在杯口滑動，發音頻率  $f$ ，杯緣的交叉波和手指同方向流動，波速等於水的流速 =  $V$ ；啓動拉坏機使杯子順時針方向轉動，手指頭放杯口，杯子發音，調整拉坏機轉速( $\omega$ )(對杯子而言，相當於手指頭逆時針沿杯口滑動)，當交叉波對地面靜止時，交叉波的波速  $V = R\omega$  [ $R$  為杯子半徑]，用同步定時儀確認交叉波靜止，量  $\omega$ ， $f$  附上尺，用照相機拍下照片，洗出照片後量  $\lambda$ 。
6. 增快  $\omega$ ，杯子可發出高次諧音，量  $\omega$ 、 $f$ 、 $\lambda$ 。
7. 改變水深  $h$ ，重做步驟 5、6，用電腦作  $\lambda^3$  對  $\frac{1}{f_1^2}$  圖  $V^3$  對  $f_1$  圖。
8. 改用酒精，重做上述實驗(步驟 5.~7.)；用電腦作  $\lambda^3$  對  $\frac{1}{f_1^2}$  圖及  $V^3$  對  $f_1$  圖。

六、實驗結果：

1. 壓克力片附在打點計時器上，以每秒 60 次振動時，產生交叉波波峰垂直壓克力片，振幅較大，正常表面張力波的波峰平行壓克力片，振幅較小，且由銀幕上可看出前者波長大於後者，前者波的移動方向平行壓力克片，後者垂直壓克力片；壓克力片平行水面振動時，產生交叉波，垂直水面振動產生正常的表面張力波。
2. 音叉在水面振動時(振動時有平行水面及垂直水面分速度)，振幅大時，形成交叉波，振幅小時形成正常的表面張力波。
3. 五隻不同頻率的音叉在水中振動，其交叉波的波長  $\lambda$  和音叉頻率  $f$  交叉波頻率  $f_1$  的結果在表一，作  $\lambda^3$  對  $\frac{1}{f_1^2}$  關係圖得圖一，其斜率 = 421，由(3)  $\lambda^3 = \frac{2\pi T}{\rho} \cdot \frac{1}{f_1^2}$ ，知  $\lambda^3$  對  $\frac{1}{f_1^2}$  圖之斜率為  $\frac{2\pi T}{\rho}$ ，水的密度  $1\text{g/cm}^3$  可得表面張力 = 67 dy/cm 和  $25^\circ\text{C}$  的公認值 72 dy/cm 比較，誤差 6.9%。

表一：五隻音叉在水中的  $\lambda$  及  $f$  ( $t=25^\circ\text{C}$ )

音叉 $f$ (Hz)	256	320	384	480	512
波長 $\lambda$ (cm)	0.296	0.258	0.228	0.197	0.189
音叉波 $f_1$ (Hz)	128	160	192	240	256

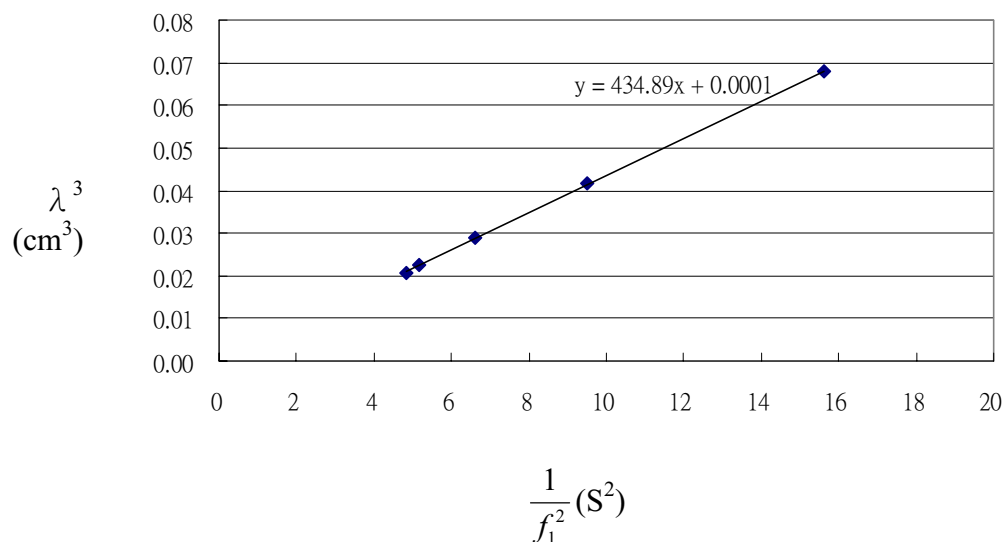


圖一：音叉的  $\lambda^3$  對  $\frac{1}{f_1^2}$  關係

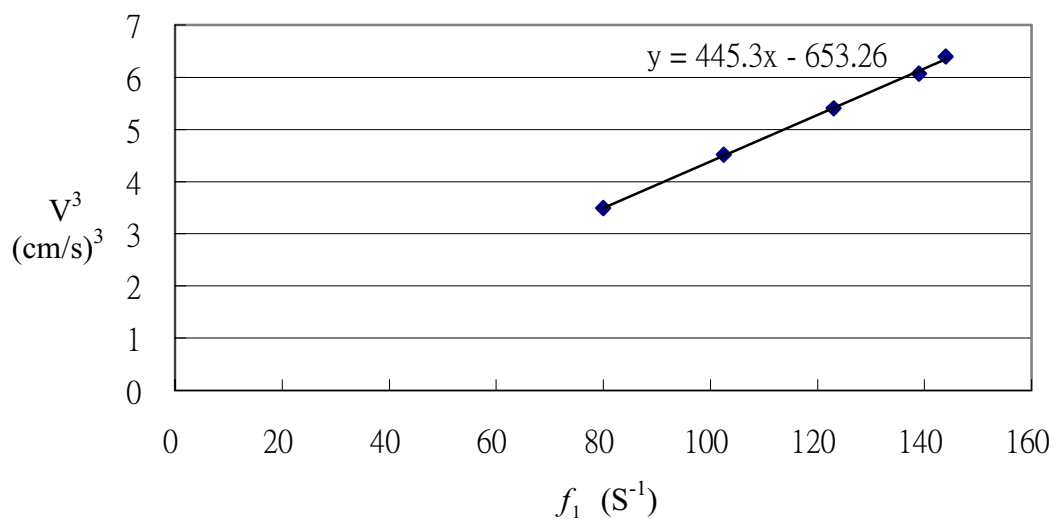
4. 半徑  $R=6.66\text{cm}$ ，高  $11.8\text{cm}$ ，厚  $0.18\text{cm}$  Pyrex 玻璃做成的圓柱杯，玻璃密度  $\rho_g = 3\text{g/cm}^3$ ，玻璃的聲速  $V_L=5640\text{m/s}$ ，空杯頻率  $f_0 = 290\text{Hz}$ ，盛深  $h$  的水，發音頻率  $f$ ，轉盤轉速  $\omega$ ，交叉波頻率  $f_1$ ，波長  $\lambda$ ，實驗結果在表二，圖二(1)為  $\lambda^3$  對  $\frac{1}{f_1^2}$ ，圖二(2)為  $V^3$  對  $f_1$  關係；由兩圖的斜率求得表面張力各為  $70\text{dy/cm}$  及  $70.9\text{dy/cm}$ ，誤差分別為 2.9% 及 1.5%。

表二：圓柱杯盛水的  $\lambda$ 、 $f_1$ 、 $V$  關係 (水溫 25°C)

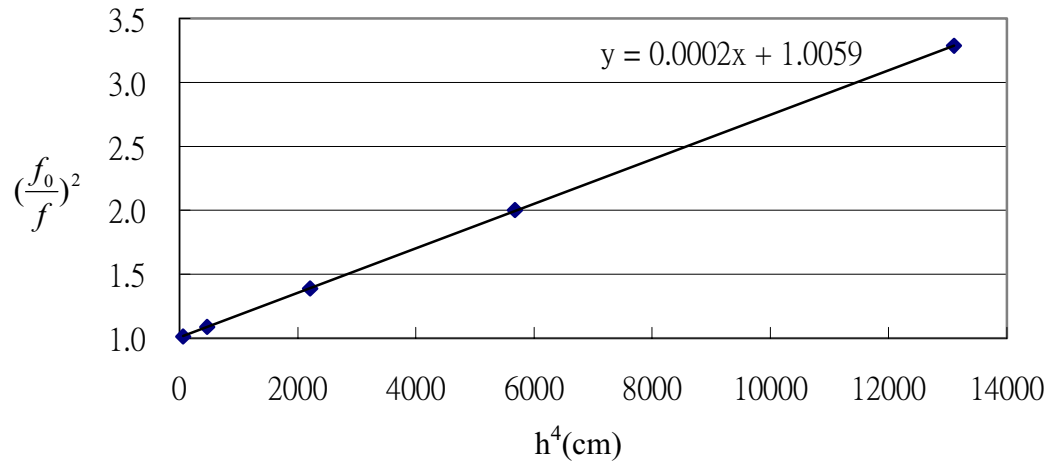
	深 h (cm)	$f$ (Hz)	$f_1$ (Hz)	$\omega$ (rad/s)	$V=R\omega$ (cm/s)	$\lambda$ (cm)
1	2.85	288	144	6.00	40.0	0.275
2	4.65	278	139	5.91	39.3	0.283
3	6.86	246	123	5.68	37.8	0.307
4	8.68	205	102.5	5.34	35.6	0.347
5	10.7	160	80	4.92	32.7	0.408



圖二(1)：圓柱杯盛水的  $\lambda^3$  對  $\frac{1}{f_1^2}$  關係



圖二(2)：圓柱杯盛水的  $V^3$  對  $f_1$  關係



圖二(3)：圓柱杯盛水的頻率  $f$  對水深  $h$  關係 ( $f_0$  為空杯頻率)

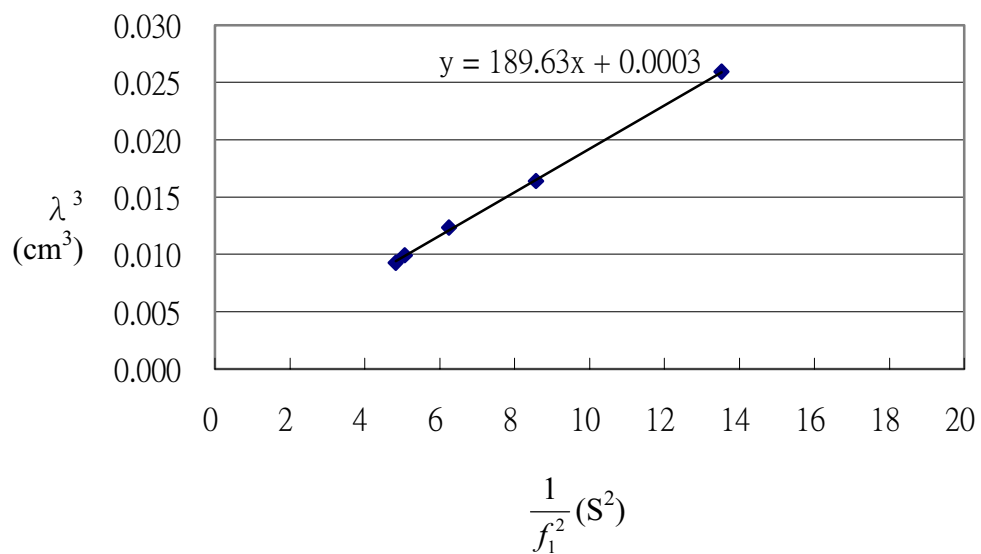
5. 圖二(3)為圓柱杯盛水深  $h$  發音頻率  $f$  的  $(\frac{f_0}{f})^2$  對  $h^4$  關係圖， $f_0$  為空杯頻率，由圖可知

水深和  $(\frac{f_0}{f})^2$  成線性遞增，其斜率  $= 2 \times 10^{-4}$ ，截距  $= 1.0$ 。

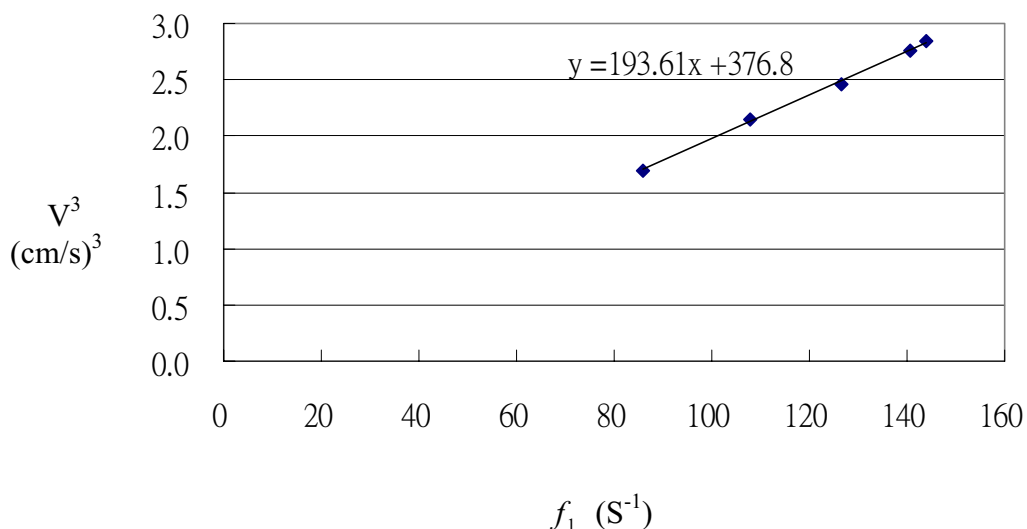
6. 表三為和表二相同的圓柱杯盛密度  $\rho = 0.80 \text{ g/cm}^3$  的酒精，在拉坏機上所測到的交叉波頻率，波速、波長關係。

表三：圓柱杯盛酒精的  $\lambda$ 、 $f_1$ 、 $V$  關係 ( $t = 25^\circ\text{C}$ )

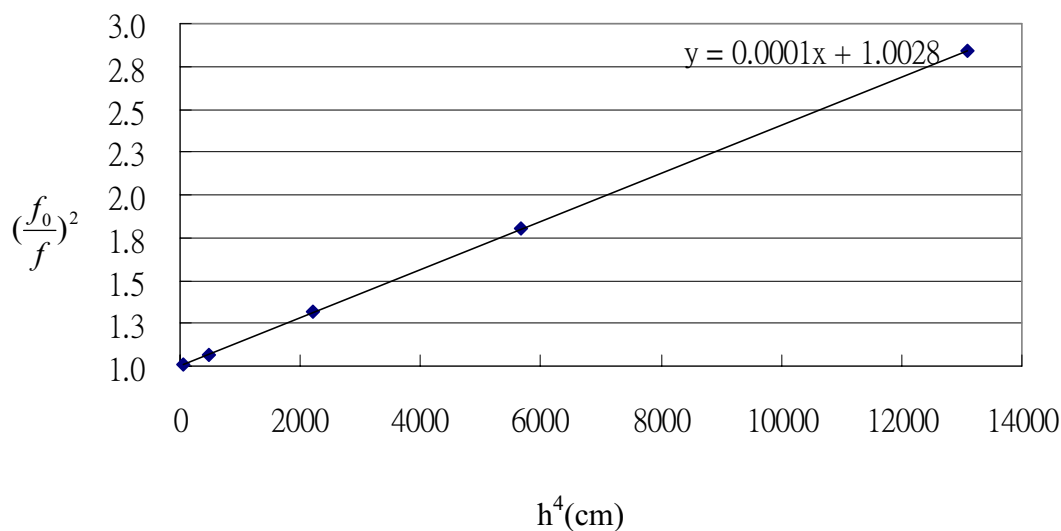
	深 $h$ (cm)	$f$ (Hz)	$f_1$ (Hz)	$\omega$ (rad/s)	$V=R\omega$ (cm/s)	$\lambda$ (cm)
1	2.85	288	144	4.58	30.5	0.210
2	4.65	281	140.5	4.53	30.2	0.215
3	6.86	253	126.5	4.37	29.1	0.231
4	8.68	216	108	4.17	27.8	0.254
5	10.7	172	86	3.86	25.7	0.296



圖三(1)：酒精交叉波之  $\lambda^3$  對  $\frac{1}{f_1^2}$  關係



圖三(2)：酒精交叉波之  $V^3$  對  $f_1$  關係



圖三(3)：圓柱杯盛酒精的頻率  $f$  對水深  $h$  關係( $f_0$  為空杯頻率)

(1)  $\lambda^3$  對  $\frac{1}{f_1^2}$  之斜率 =  $190 = \frac{2\pi T}{\rho} = \frac{2\pi T}{0.8} 2\pi \rightarrow T = 24.2 \text{ dy/cm}$  和  $25^\circ\text{C}$  的公認值  $26.5 \text{ dy/cm}$  比較，誤差 8.7%。

(2)  $\lambda^3$  對  $f_1$  之斜率 = 194 得  $T = 24.7 \text{ dy/cm}$ ，誤差 6.7%。

7. 圖三(3)為圓柱杯盛酒精深  $h$  發音頻率  $f$  之  $\frac{f_0}{f} h^4$  關係圖，斜率 =  $1 \times 10^{-4}$  截距 = 1.0。

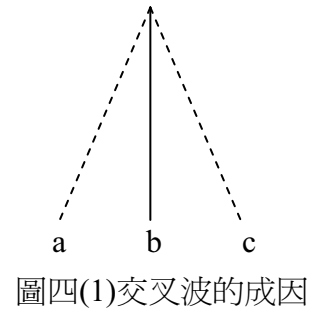
8. 當拉坏機轉速加快後，圓柱杯可發高次諧音，量出高一次諧音的頻率波長和基音比較

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = 1.79, \quad \left(\frac{f_3}{f_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 1.81.$$

七、討 論：

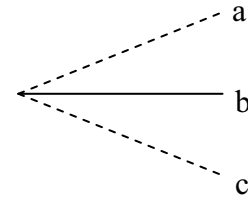
1. 液體交叉波的成因為振源振動方向和液面平行，圖

四(1)所示，振源在 a、b、c 間振動，振幅  $\hat{ab} = \hat{bc}$ ，當振源由 a→b→c 期間(振源半個週期)使液面形成波峰，振源由 c→b→a 時，表面張力使波峰恢復至水平面，此時液體運動速度方向向下，且最快；振源已做一個週期的振動，交叉波才形成半波長；振源再由 a→b→c 形成波峰時，前面的波向下形成波谷。因此交叉波的頻率( $f_1$ )為振源( $f$ )之半，而且由於振源由 a→c 才形成波峰，所以交叉波的振幅大於正常的表面張力波。



圖四(1)交叉波的成因

2. 正常的表面張力波為振源振動方向和液面垂直，振源由 b 至 c 時，液體介質向下降至最低點，振源回到 b，介質亦回到水平面，換言之，正常表面張力波的振動頻率  $f_2$  等於振源  $f$ 。



圖四(2)正常表面張力波的成因

3. 交叉波和正常表面張力波的形成以及頻率，振幅關係，和 Melde's experiment 實驗非常相似，後者細繩(線密度  $\mu$ )水平置放，右端掛砝碼後跨過滑輪，張力  $F$ ，左端繫在打點計時器，當計時器分別垂直細繩振動及平行細繩方向振動，產生駐波時，後者波長

$\lambda_2$  為前者  $\lambda_1$  之 2 倍，其波速  $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = f \lambda = \text{一定}$ ，後者頻率  $f_2$  為前者之半，且振幅後者大於前者。但交叉波及正常表面張力波均為色散波(dispersive wave)即波速隨波長(頻率)改變，由(3)  $f^2 \lambda^3 = \frac{2\pi T}{\rho} = \text{一定}$ ，交叉波頻率  $f_1$  為正常表面張力波  $f_2$  之半，但  $\lambda_1 : \lambda_2 = f_2^{\frac{3}{2}} : f_1^{\frac{3}{2}} \dots\dots$

4. 表一及圖一中，不同頻率的音叉在水中振動，由  $\lambda^3 = \frac{2\pi T}{\rho} \cdot \frac{1}{f_1^2}$  及  $\lambda^3$  對  $\frac{1}{f_1^2}$  的斜率出  $T=67.5 \text{ dy/cm}$  和公認值  $72 \text{ dy/cm}$  有 6.2% 的誤差，其主要來源為水的純度問題，雖然實驗時儘可能將音叉洗乾淨，仍難免會有污染。

5. 圓柱杯置於拉坏機上，做實驗時，不但可測出交叉波的波長、頻率、還可測出波速，由於對地面而言，交叉波恰被凍結，水面幾乎水平，且拉坏機本身甚重，穩定性很高，又液體不易被污染，實驗效果很好。不但可證明交叉波  $\lambda^3 = \frac{2\pi T}{\rho} \cdot \frac{1}{f_1^2}$  並可證明  $V^3 = \frac{2\pi T}{\rho} \cdot f_1$ 。

6. Robert E. Apfel [註 2] 於 1985 年以發音頻率  $f = 800\text{Hz}$  的高腳杯盛水，用手指頭在杯口滑動，量出交叉波長， $\lambda = 0.89\text{mm}$ ，他以  $f \lambda = 71 \text{ cm/s}$  當做交叉波的波速，後來在 1990 年被 Tomas D. Rossing [註 3] 引用，我們取類似的高腳杯置於在拉坏機做實驗，測得  $V = 56\text{cm/s} = f_1 \lambda = 400\text{S}^{-1} \lambda \rightarrow \lambda = 0.14\text{cm}$ ，Apfel 顯然未考慮到交叉波頻率為振源之半。另外，可能他實驗時高腳杯的水含有太多可溶性雜質，表面張力太小，產生的  $\lambda = 0.89\text{mm}$  太短。

7. 圖二(3)、圖三(3)中空杯發音頻率  $f_0$ ，盛深度  $h$  的水發音頻率  $f$  與  $(\frac{f}{f_0})^2$  對  $h^4$  關係為直線，其斜率  $= 2 \times 10^{-4}$ ，截距  $= 1.0$ 。1983 年〔註 4〕 A.P. French 理論推量出  $(\frac{f}{f_0})^2 = 1 + \frac{\alpha}{5} \cdot \frac{\rho R}{\rho_g a} (\frac{h}{H})^4$ ， $\rho_g$  為玻璃密度， $\alpha$  為參數，French 用一非圓柱形高腳杯量得  $\alpha = 1.4$ ，我們由圓柱杯量得  $\alpha = 1.38$ 。
8. 拉坏機轉速加快後，手指置於杯口，可得高次諧音，基音頻率  $f_1$ ，波長  $\lambda_1$  諧音  $f_3$ ， $\lambda_3$ ，亦滿足(5)  $\lambda_1 : \lambda_3 = f_3^{\frac{3}{2}} : f_1^{\frac{3}{2}}$ 。

#### 八、結 論：

1. 交叉波為表面張力波的一種，波峰和波源垂直，頻率為振源之半且為色散波。
2. 圓柱杯置於拉坏機的轉台上，手指置杯口產生交叉波，不但可求波速，波長、頻率，還可由  $\lambda^3$  對  $\frac{1}{f_1^2}$  及  $V^3$  對  $f_1$  關係，求出液體表面張力。

#### 九、參考資料：

1. C.J.R. Garrett, "On cross-waves", J. Fluid Mech. **41**, 837-849(1970).
2. Robert E. Apfel, "Whispering wave in a wineglass", Am. J. phys. **53**, 1070-1073(1985).
3. T.D. Rossing, "Wine glasses, Bell nodes, and Lord Rayleigh", The phys. Teacher, 582-585(1990).
4. A. P. French, "In vino verita: A study of wineglass acoustics", Am. J. phys. **51**, 688-694(1983).

## 評 語

- (1) 本作品對交叉波的形成有清楚明確的展示與說明。作品完整、物理機制交待清楚。
- (2) 由量測之波長、頻率所求取之波速與液體表面張力與已知值符合良好。
- (3) 交叉波是較少受到注意的物理現象，作者對此現象以做了相當完整的澄清。
- (4) 此一現象是否還有發展與是否有應用價值，作者並不清楚是此作品的缺點。