台灣二〇〇二年國際科學展覽會

科　　別：數學科

作品名稱：顛倒一族

學　　校：高雄市私立國光高級中學
　　　　　高雄市立高雄高級商業職業學校

作　　者：馬靖威　　陳卓士

作 者 簡 介

出生於素有「海洋之星」美譽的高雄，一直是我陳卓士感到最高興的。自小就自認天資不夠聰穎，需靠後天努力才會有成就。對於各種事務都有求知的慾望，尤其是數學，那其中的奧秘都是值得去細細品味。這次難得有這個機會和以前同國中的朋友一起作科學展覽，一同探究數學奧妙處，也爲高中生活增添一份美好的回憶。

我叫馬靖威，現爲高中生，高中生活新鮮卻也不敢在天真，畢竟就將成爲大學之人，行事不可不密。數學一直是我認爲最神奇的東西，但也最想了解之物，數有千千結，解不開，結還在，難結難解。

Abstract

一. Motivation and Purpose

In this study, we want to completely know about "The number abc…de, which times $\frac{m}{n}$, $1 \le n < m \le 9 \in N$ can get ed… cba?", and also expect to find out "The good rule within them".

二. Procedure

Using method of enumeration, induction to collect sample of all and beginning from two digits to get information "good rule".

When get some useful idea, put them into the following research for the step easy go on, the method try and error is a very tiresome works, especially when we deal higher digits.

till enough information is obtained , we solve problem and find new one, then likewise again research steps, just the basic science research ways, we are glad have the key of these problem.

三. Result and conclusion

Those number we named "converse No."

There are two groups : $S = m + n = 10$ and 11

$S = 11$, then $Q = \frac{m}{n} = \frac{9}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5} = 4.5, 2.6, 1.75, 1.2$

$S = 10$, then $Q = \frac{m}{n} = \frac{9}{1}, \frac{8}{2}, \frac{7}{3}, \frac{6}{4} = 9, 4, 2.3, 1.5$

each group have four type.

When $S = 11$, $Q = \frac{7}{4} = 1.75$, if converse No. each digit is a multiple of 3, then can cancellation or extension of fraction to get another 3 or 4.

Growth up rule:

Converse No. = type factor× heritable factor× growth factor

= r× h× g

$S = 11$, $r = 2 \sim 5$, $h = 9$, $s = 10$, $r = 1 \sim 4$, $h = 99$

摘　要

一．研究目的：盼能找出“顛倒一族”的族譜。

二．研究過程：

確定研究題目為 $ab...cde \times \frac{m}{n} = edc...ba,\ 0 \le n < m \le 9 \in N$ ，求 $ab...cde$?

以窮舉法收集觀察資料，歸納演繹尋求規律。

1. 先觀察兩位數，分析共有顛倒對 36 對。
2. 建立乘數 $Q = \frac{m}{n}$ 一覽表，共有 27 個
3. 設計顛倒對 $\frac{大}{小}$ 及其商一覽表，以利觀察、歸納獲得規律。
4. 接著觀察三位數，共有 360 對，綜合二、三位數規律，找出選擇式窮舉法：9 之倍數法。
5. 再接著找出四位數，再綜合而知另有　全調法　重現法　半調法　GCD 遺傳基因法等來繁衍高位數顛倒數。
6. 於是依諸法找得六位數資料，得知 GCD 遺傳基因法為繁衍通則，完成族譜建立模式。
7. 研究顛倒數位數與其個數間關係式，完成研究。

研究結論：

1. 顛倒一族有兩大類： $S = 10$ 與 $S = 11$　$S = m + n)$ 。
2. 每一大類有四型： $S = 10$ 中， $Q = \frac{9}{1}, \frac{8}{2}, \frac{7}{3}, \frac{6}{4}$　(9 , 4 , 2.3 , 1.5)

   $S = 11$ 中， $Q = \frac{9}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}$　(4.5 , 2.6 , 1.75 , 1.2)
3. 每一型均有一個顛倒數，除了 $S = 11$ 中， $Q = \frac{7}{4} = 1.75$ 者可約、擴分而得 3 or 4 個。
4. 顛倒數原則上均為 9 之倍數，除了 $Q = \frac{7}{4}$ 經約、擴分可能得非 9 倍數者。

顛倒一族

壹、研究動機： 有首兒歌「顛倒歌」，小時唱時歡笑多，現在唱時仍然養樂多。學了數學，方知數學世界也有「顛倒數」：如果用 4 去乘一個四位數 $abcd$ 或五位數 $abcde$，數字會顛倒，即 $abcd \times 4 = dcba$ 或 $abcde \times 4 = edcba$，求 $abcd$ 或 $abcde$？而此兩數稱爲顛倒數。顛倒人看顛倒數，左看右看前後看，顛倒一族何面目？仍如晨霧不清楚，你奇？我奇？人人奇？何不坐下細心慢研究，耐心探究奧妙處。

貳、研究目的：
1. 希望對上述的疑問，經由嚴密的推理與思攷，找出顛倒數有無規律存在。
2. 培養建構式思攷法，提高解決問題的能力。

參、研究過程：

一、引起好奇的題目是：如果用 4 去乘一個四或五位數，數字會顛倒，提供的答案爲 2178 與 21978。因此我們想了解爲何不由最小的兩位數問起？爲何乘數只問 4 而已？又有無更高位數的顛倒數？等，因此，我們決定由最基本的兩位數研究起，同時將乘數放寬爲非 1 假分數 $\dfrac{m}{n}$，$1 \le n < m \le 9 \in N$，$\left(\because 4 = \dfrac{4}{1}\right)$。

至於處理法，決定由窮舉法先上陣，再伺機配合其他方法來對照。

($P.S.$ 在數學書上亦可見到乘數 $= 9$ 者)

二、兩位數自 10 至 99，有 $99 - 10 + 1 = 90$ 個，而扣除個位數是 0 的（因爲其顛倒後成爲一位數，不合），還有 $90 - 9 = 81$ 個，見表一

$\therefore$ 表一中，右上左下對角線上之數也要扣除 $81 - 9 = 72$ 個，且以此對角線爲對稱軸，顛倒對分佈其兩側，即有 $72 \div 2 = 36$ 對。處理過程爲:

91	92	93	94	95	96	97	98	99
81	82	83	84	85	86	87	88	89
71	72	73	74	75	76	77	78	79
61	62	63	64	65	66	67	68	69
51	52	53	54	55	56	57	58	59
41	42	43	44	45	46	47	48	49
31	32	33	34	35	36	37	38	39
21	22	23	24	25	26	27	28	29
11	12	13	14	15	16	17	18	19

1. 先建立所有乘數 $\dfrac{m}{n}$ 資料，見表二，表二中，右上半爲：$\dfrac{m}{n} =$ 商 Q。

   左、下邊線爲右上左下對角線上乘數所對應的 $(m+n)$ 和值 S。

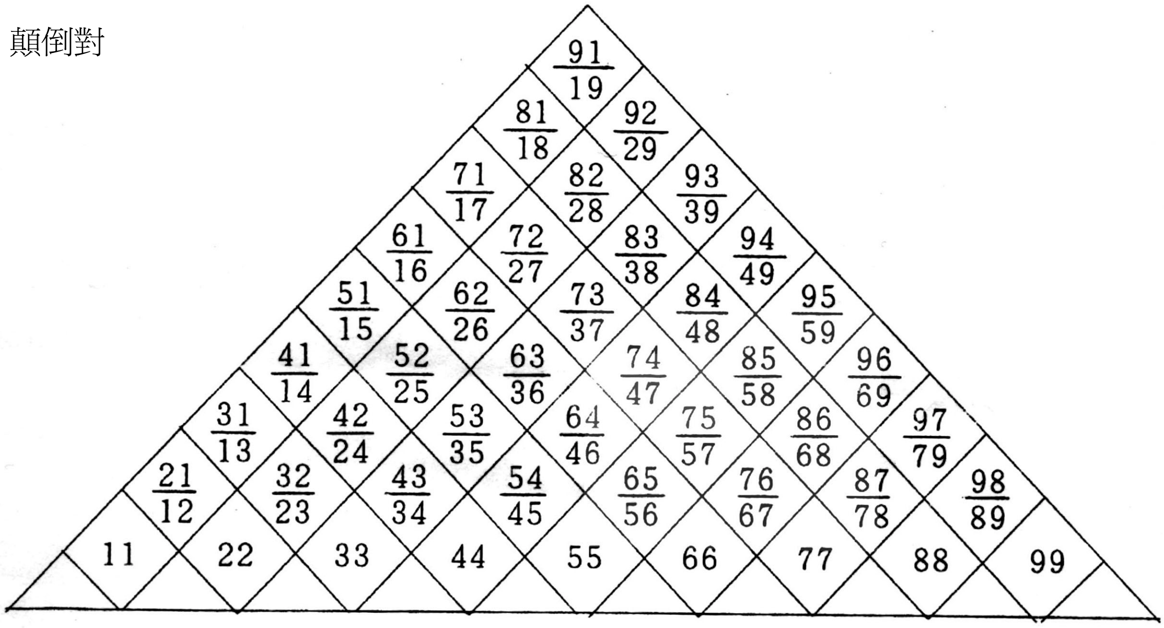
   （Q 值相同者，附加同樣的註記標示）

   $\therefore$ 共有 27 個不同 Q 值。

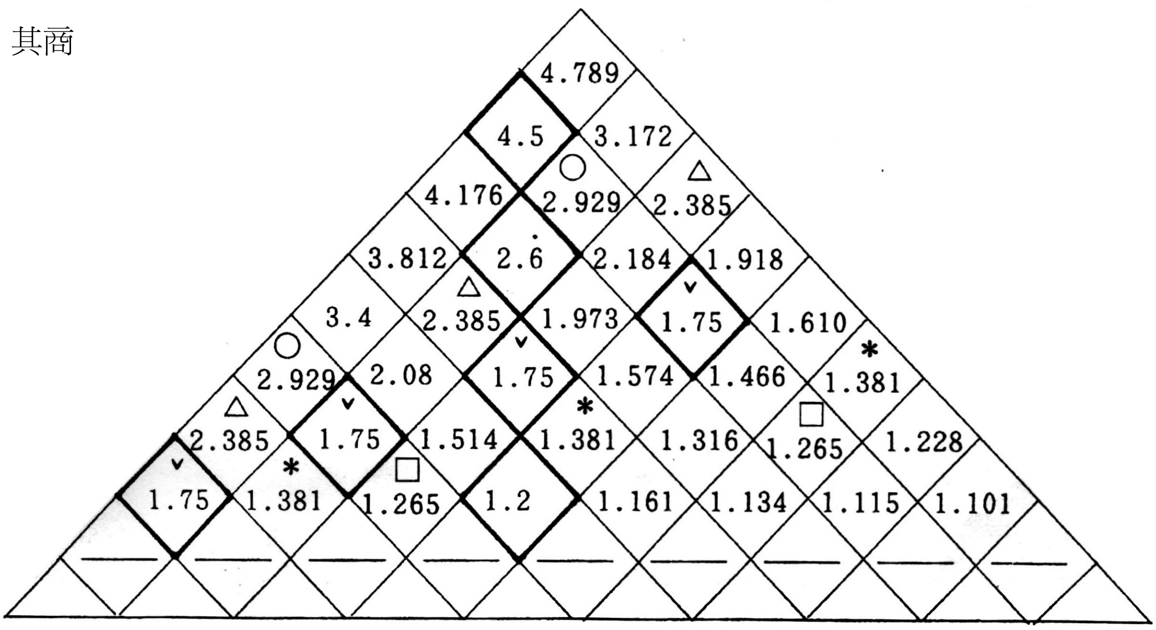
Q \ S	2/1 = 2 *	3/1 = 3 ∨	4/1 = 4 ○	5/1 = 5	6/1 = 6	7/1 = 7	8/1 = 8	9/1 = 9
三		3/2 = 1.5 Δ	4/2 = 2 *	5/2 = 2.5	6/2 = 3 ∨	7/2 = 3.5	8/2 = 4 ○	9/2 = 4.5
四			4/3 = $1.\dot{3}$ ☆	5/3 = $1.\dot{6}$	6/3 = 2 *	7/3 = $2.\dot{3}$	8/3 = $2.\dot{6}$	9/3 = 3 ∨
五				5/4 = 1.25	6/4 = 1.5 Δ	7/4 = 1.75	8/4 = 2 *	9/4 = 2.25
六					6/5 = 1.2	7/5 = 1.4	8/5 = 1.6	9/5 = 1.8
七						7/6 = $1.1\dot{6}$	8/6 = $1.\dot{3}$ ☆	9/6 = 1.5 Δ
八							8/7 = $1.\dot{1}4285\dot{7}$	9/7 = $1.\dot{2}8571\dot{4}$
九								9/8 = 1.125
十	十一	十二	十三	十四	十五	十六	十七	S \ Q

2. 建立互爲顛倒對的商資料，將之與 Q 對照，即可找出顛倒數。

顛倒對



其商



兩位顛倒數出列，有四型，皆爲$m+n=S=11$。

① $9／2=4.5=81／18$　所以18爲顛倒數

② $8／3=2.6=72／27$　所以27爲顛倒數

③ $7／4=1.75=21／12=42／24=63／36=84／48$

所以 12、24、$\boxed{36}$、48 爲顛倒數

④ $6／5=1.2=54／45$　所以45爲顛倒數

∴共有七個，共同特性爲：$9\times r$ ($2\le r\le 5\in N$)的積，其中組成積的每位數字皆爲3之倍數者，可再約、擴分處理而得“同型”諸兄弟，且均非9之倍數。

3. 代數法處理情況：

① $ab\times 4=ba$ ，求ab？$0<a\,,b\le 9\in N$。

解：$\because (10a+b)\times 4=10b+a$

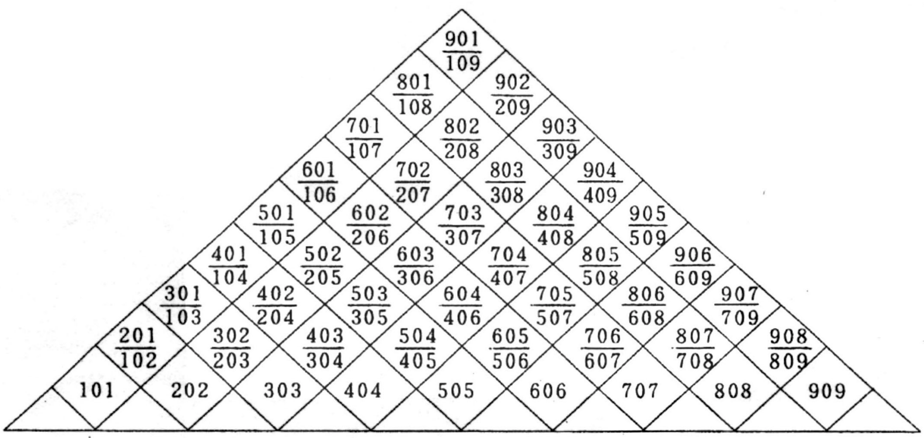
$$\therefore 40a+4b=10b+a\Rightarrow 39a=6b\Rightarrow b=\frac{39a}{6}=\frac{13a}{2}=6a+\frac{a}{2}$$

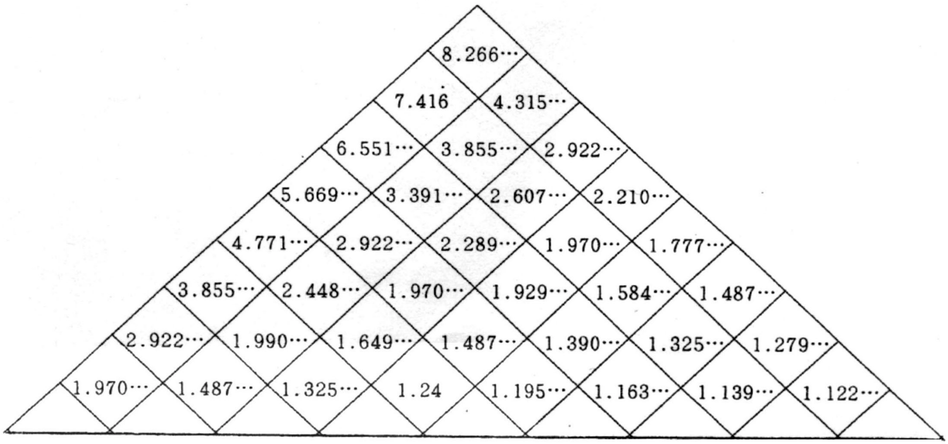
故a必爲偶正整數即a最小爲2，而$b=13>9$　∴果然無解

② $ab\times\dfrac{m}{n}=ba$ ，$b>a$，$m>n$，$1\le a\,,b\,,m\,,n\le 9\in N$，求$ab$？

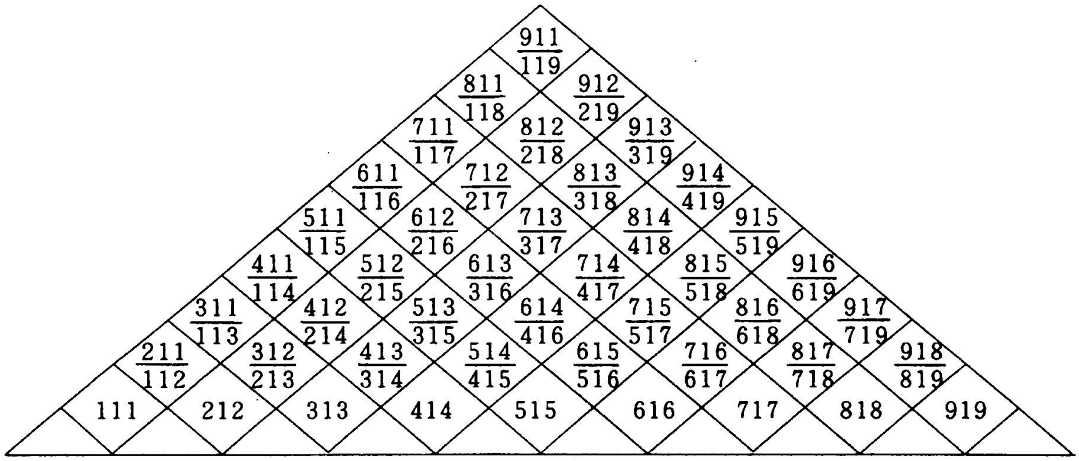
∴爲一個方程式有四個未知數的互有相乘問題，無法解答。

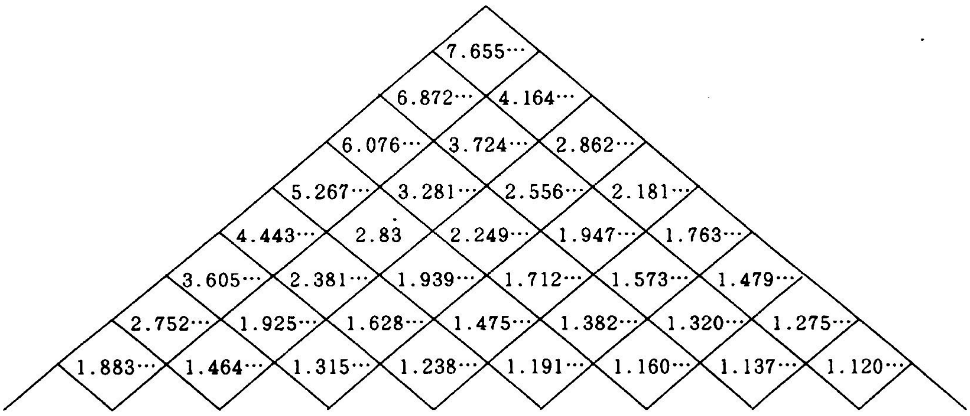
三、三位顛倒數的尋找，因爲會有$(999-100+1-90-9\times 10)\div 2=360$對，還能忍受，耐心處理如下：



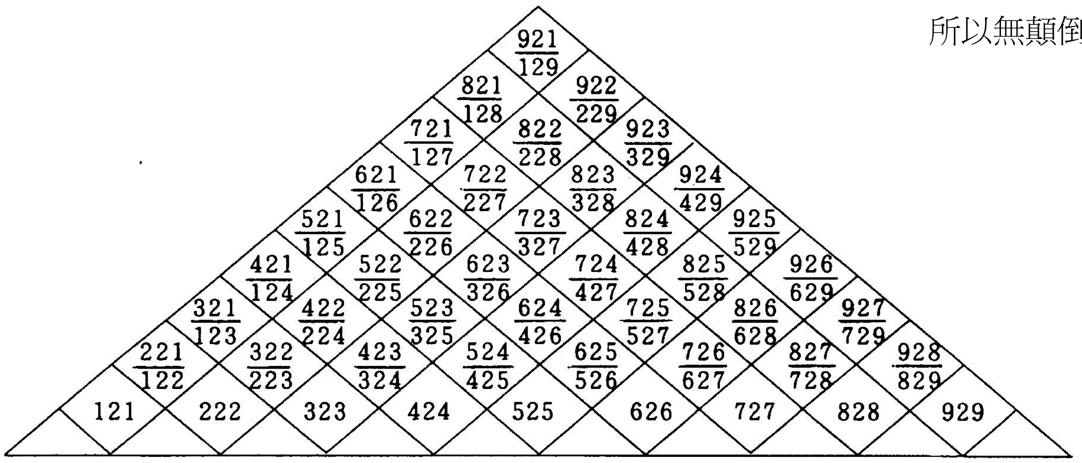


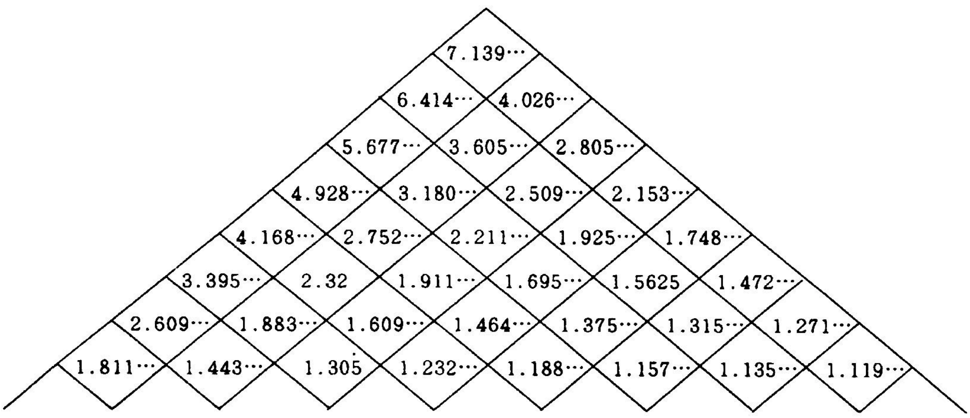
所以無顛倒數



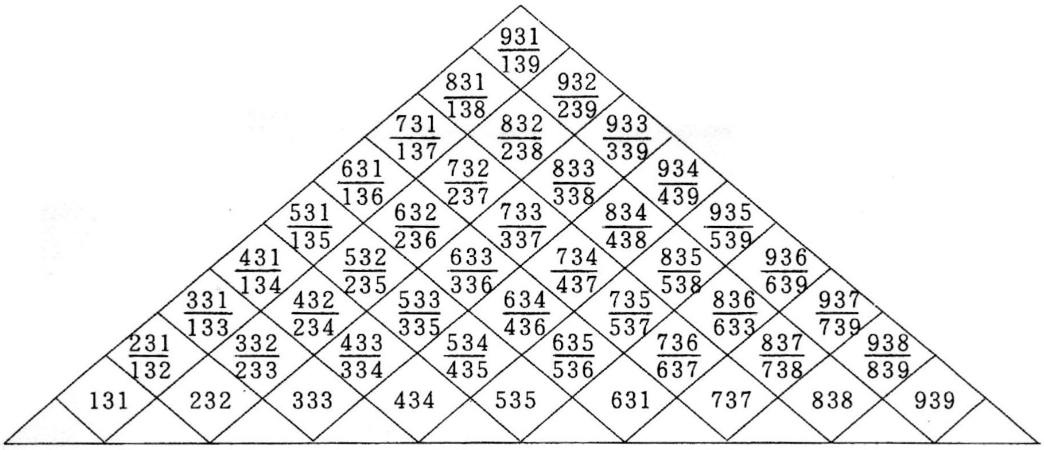


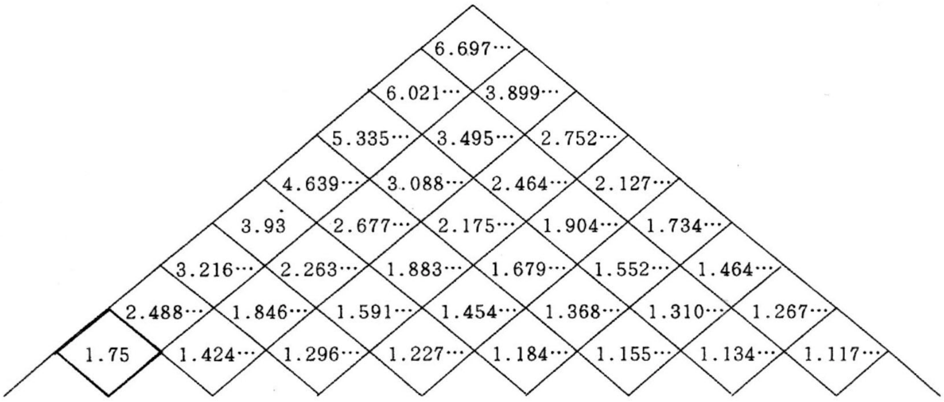
所以無顛倒數



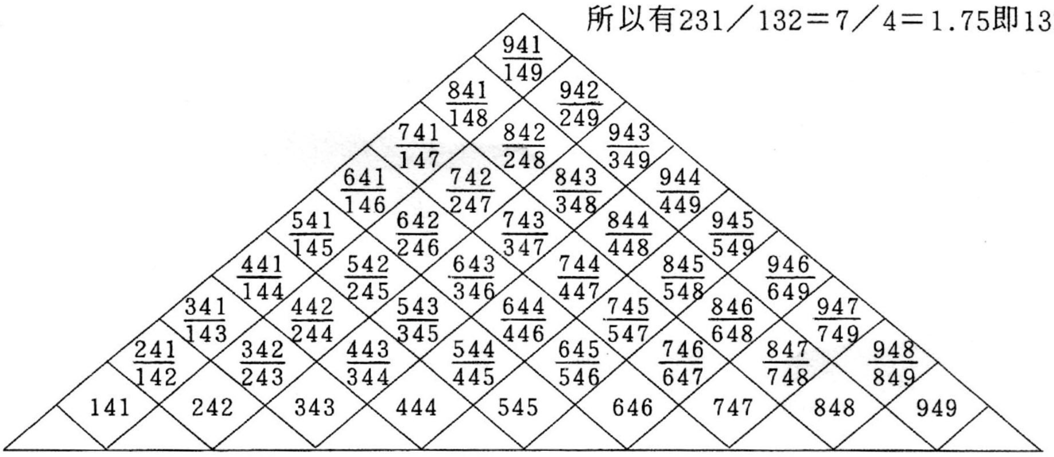


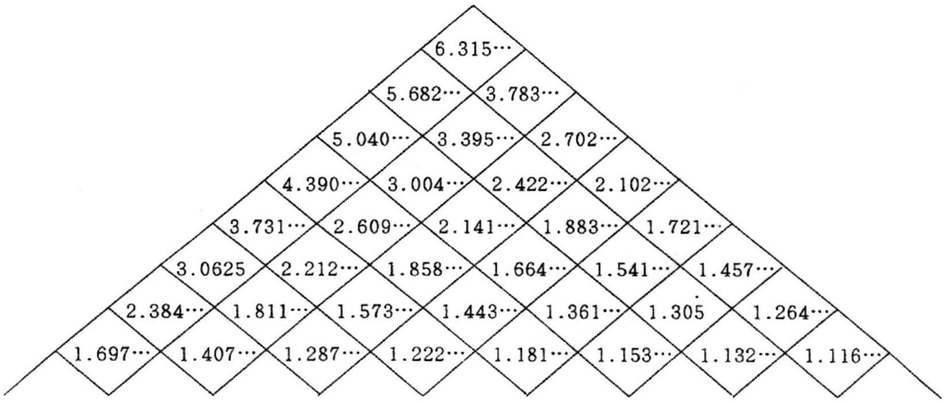
所以無顛倒數



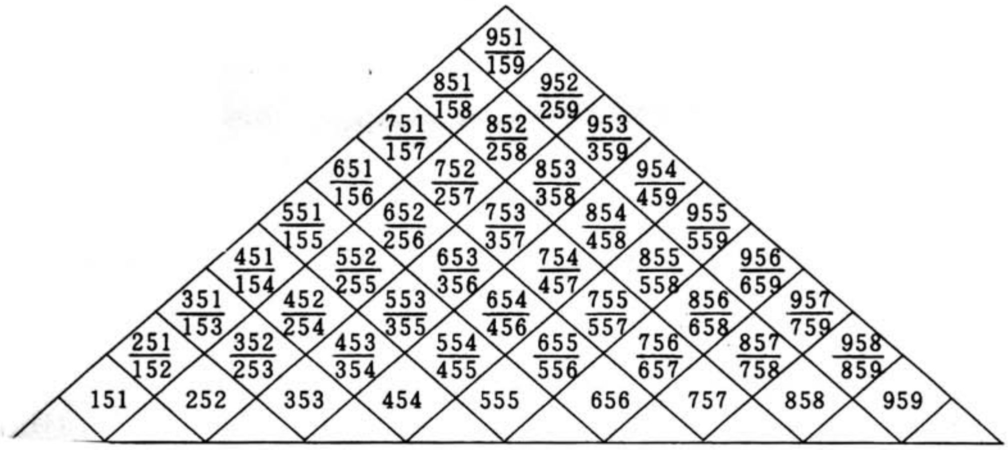


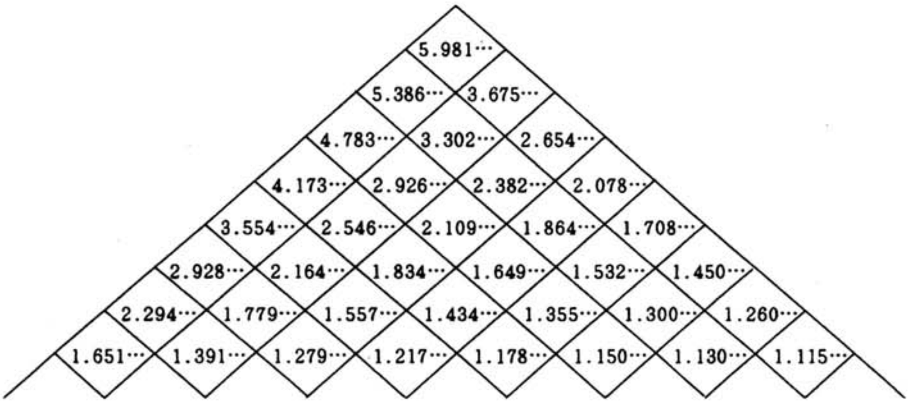
所以有231／132＝7／4＝1.75即132爲之



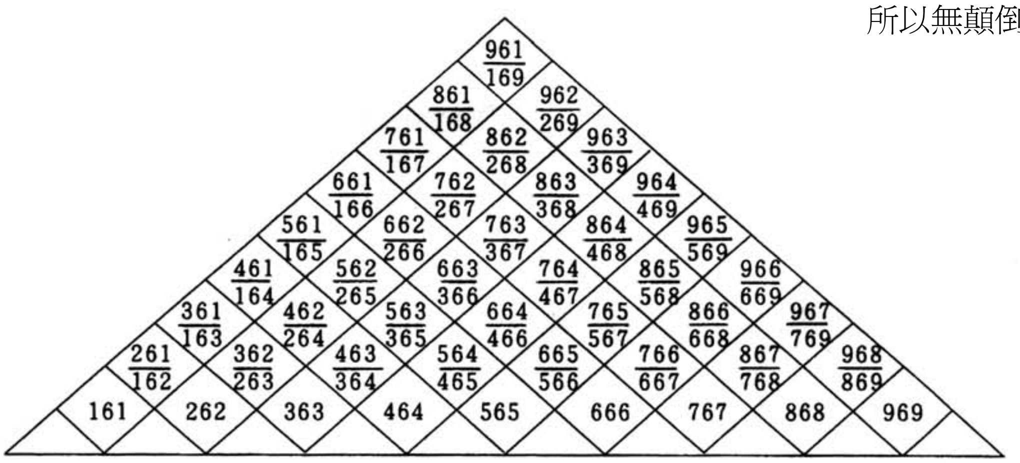


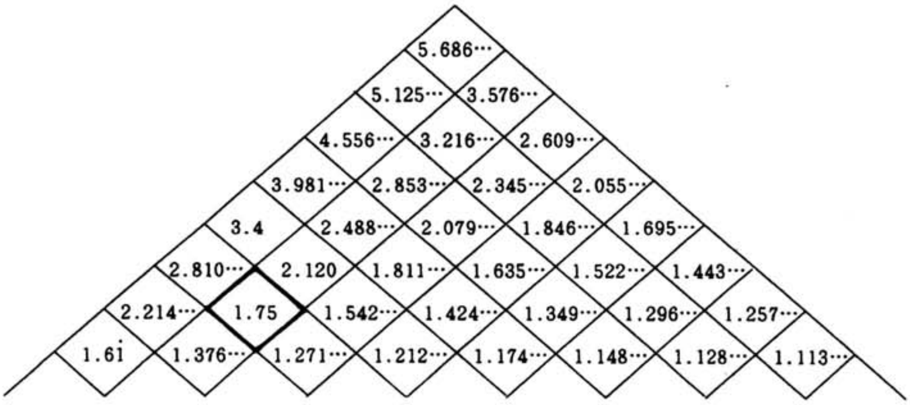
所以無顛倒數



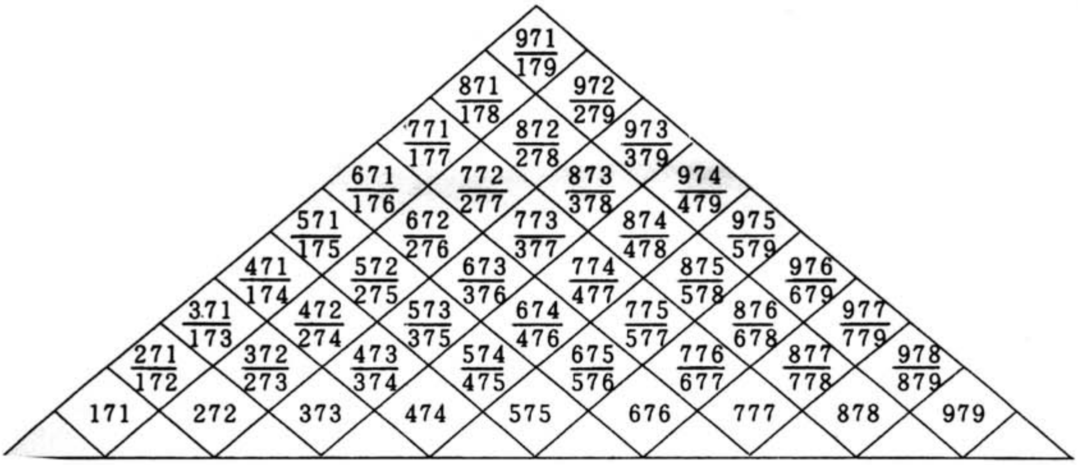


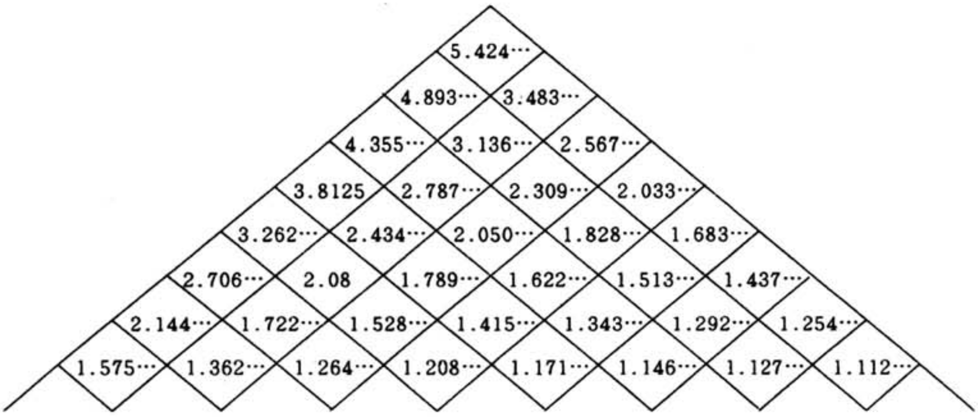
所以無顛倒數



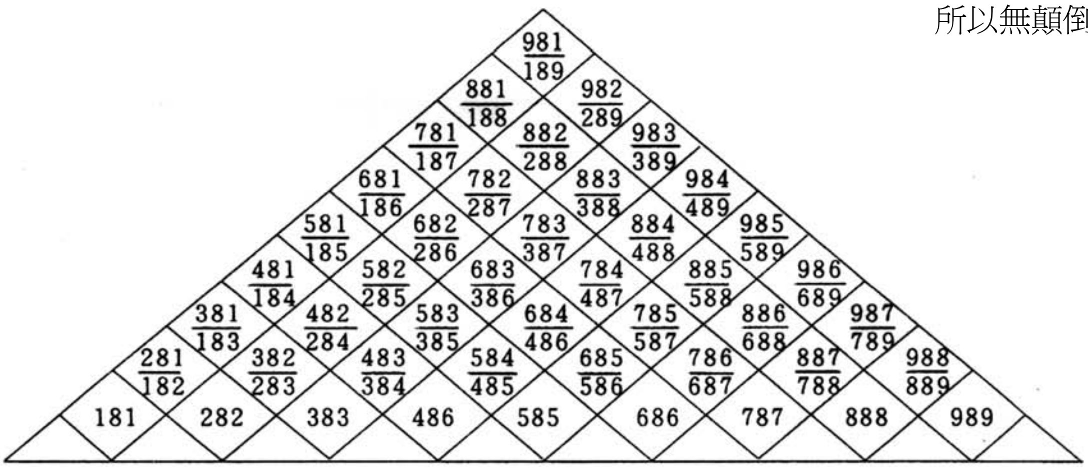


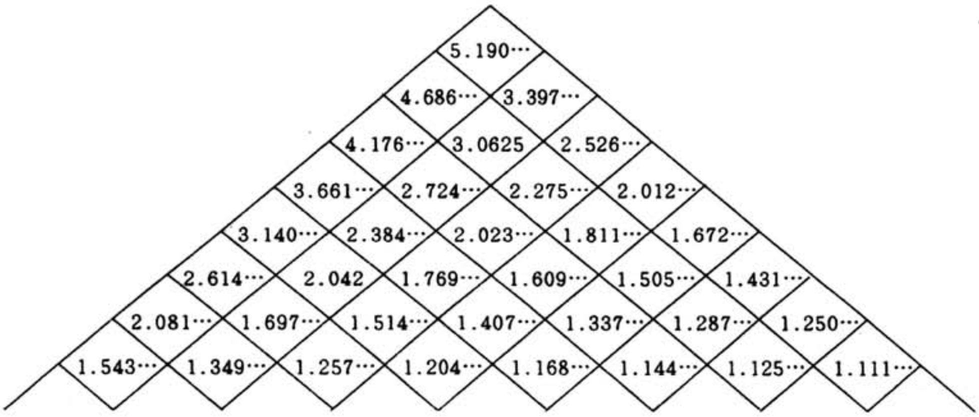
所以有 462／264=231／132=7／4=1.75



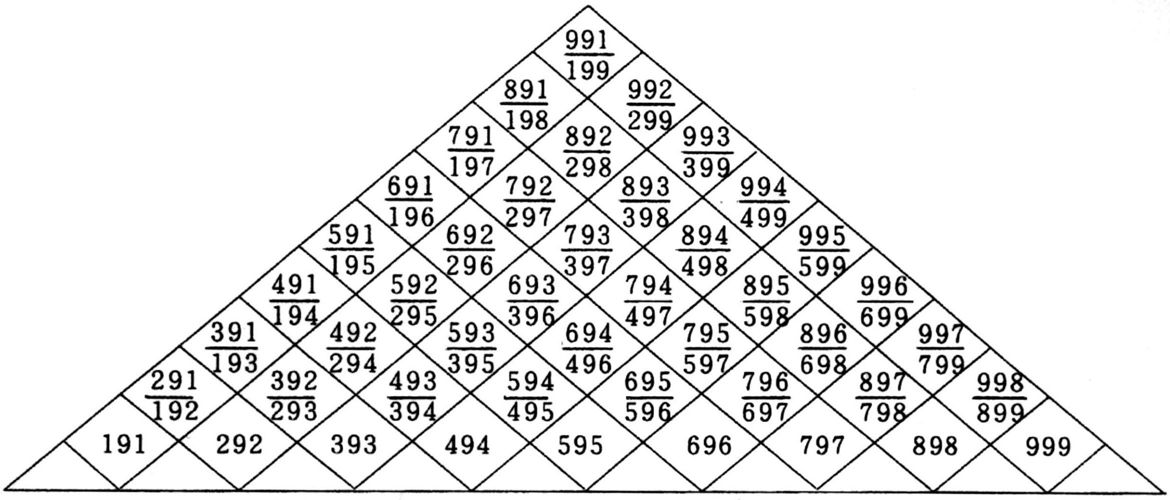


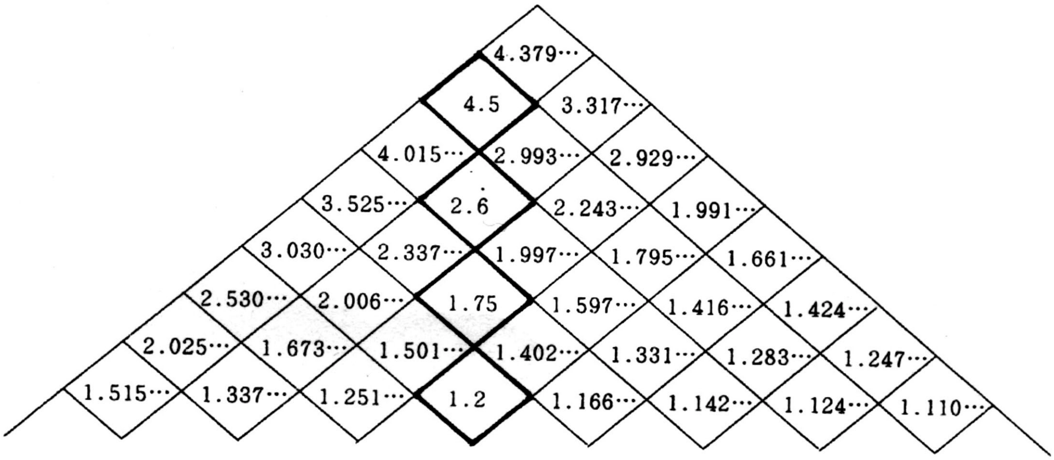
所以無顛倒數





所以無顛倒數





所以有四型① $9／2 = 4.5 = 891／198$ ② $8／3 = 2.\dot{6} = 792／297$

③ $7／4 = 1.75 = 693／396 = 231／123 = 462／264$ ④ $6／5 = 1.2 = 594／495$，

故前面找出的二個皆爲③中約、擴分之結果。又這四型與兩位數四型完全一樣

皆爲 $m + n = S = 11$，$m／n = Q = 4.5；2.\dot{6}；1.75；1.2$ 。

心得：1. 三位顛倒數少一個，顯然是擴分時發生“進位”效應，所以“破功”，

即 $231／132 = 462／264 = 693／396 = 924／528$，

$\therefore 528$ 不爲顛倒數。

2. 顛倒數的“全家福照”，敢大膽假設爲 $(A$ 個 $9) \times r$，$2 \le r \le 5 \in N$

所得爲 $(A+1)$ 位顛倒數。換言之，此即不同位數顛倒數之繁衍。

$9\times2=18$		$99\times2=198$	
$9\times3=27$	$\therefore$	$99\times3=297$	$\therefore$
$9\times4=36$	$18\times(9/2)=81$ $27\times(8/3)=72$	$99\times4=396$	$198\times(9/2)=891$ $297\times(8/3)=792$
$9\times5=45$	$36\times(7/4)=63$*	$99\times5=495$	$396\times(7/4)=693$*
$9\times6=54$	$45\times(6/5)=54$	$99\times6=594$	$495\times(6/5)=594$
$9\times7=63$		$99\times7=693$	
$9\times8=72$		$99\times8=792$	
$9\times9=81$		$99\times9=891$	

3. 它們的長相爲頭十尾$\equiv 9$，身驅每位數$\equiv 9$，即顛倒數本身爲9的倍數，惟$Q=7/4=1.75$者，可約、擴分得非9倍數之顛倒數，兩位顛倒數無身驅。

4. $r=2$者，我們且稱其爲“起頭數”，而兩位顛倒數的起頭數18尊稱爲“始祖數”，換言之“A個9”爲它們的GCD：遺傳基因。

四、代數法處理情況：$abc\times4=cba$，$1\le a, c\le 9\in N$；$0\le b\le 9\in N$。

解：1. $(100a+10b+c)\times4=100c+10b+a$

$400a+40b+4c=100c+10b+a$

$399a+30b=96c$

2. 方法①，$\therefore b=\dfrac{96c-399a}{30}=\dfrac{32c-133a}{10}=3c-13a+\dfrac{2c-3a}{10}$

今欲$\dfrac{2c-3a}{10}=k\in Z$

即$2c-3a=10k$

$c=\dfrac{10k+3a}{2}=5k+\dfrac{3a}{2}$

$a=$	2	4	6	8
$k=$	0 ; 1	0 ; -1	0 ; -1	-1 ; -2
$c=$	3 ; 8	6 ; 1	9 ; 4	7 ; 2
$b=$	-7 ; -1	-34 ; -50	-51 ; -67	-84 ; -10

$\because b$均爲負　$\therefore$無解

方法②，$\therefore b=\dfrac{32c-133a}{10}$

則若a爲奇數時，$133a$爲奇數，因$32c$必爲偶數，

$\therefore 32c-133a$必爲奇數，故b不可能爲整數。

若a爲偶數時，可能有解，但因$133a$爲負値項，

$\therefore a=0$時，$b=\dfrac{32c}{10}=\dfrac{16}{5}c$，故$c=5$，則$b=16>9$

可見不可能b有一位數的解。

方法③，$\because 9 \ge b = \dfrac{32c - 133a}{10} \ge 0$

$\therefore 32c - 133a \ge 0 \Rightarrow \dfrac{32c}{133} \ge a$

今$c \le 9$，即$\dfrac{32 \times 9}{133} = 2\dfrac{12}{133} \ge a$

故$a = 1 \;\; or \;\; 2$

令$a = 1$，則無c可使$32c - 133a$爲10之倍數

$a = 2$，則$c = 3 \;\; or \;\; 8$可使$32c - 133a$爲10之倍數

但$c = 3$，$32c - 133a = 32 \times 3 - 133 \times 2 < 0 \;\; \therefore$不合

$c = 8$，$32c - 133a = 32 \times 8 - 133 \times 2 < 0 \;\; \therefore$不合

五、另類數學法分析：

1. $ab \times 4 = ba$, $0 < a$, $b \le 9 \in N$

① 由方程式兩邊的最高位數，可知$0 < b = 4a \le 9 \in N \Rightarrow 0 < a \le 2.25 \in N$

$\therefore a = 1 \;\; or \;\; 2$方有可能成立

② 由方程式兩邊的最低位數即個位數，可知$4 \times b$的個位數要等於a

故$a = 1$，無對應之b可討論

$a = 2$，則$b = 3 \;\; or \;\; 8$有可能，$\because 4 \times 3 = 12$, $4 \times 8 = 32$

而$23 \times 4 = 92$, $28 \times 4 = 112 \quad \therefore$均不合，無解。

結論：不論爲多少位數顛倒數，乘數爲4的，其最高位只能$1 \;\; or \;\; 2$，

個位數只能$3 \;\; or \;\; 8$。

2. $abc \times 4 = cba$時，由兩位數所得結論，可設爲

$$1b3 \times 4 = 3b1 \Rightarrow (100 + 10b + 3) \times 4 = 300 + 10b + 1 \quad \therefore b = \frac{-111}{30}$$

$$1b8 \times 4 = 8b1 \Rightarrow (100 + 10b + 8) \times 4 = 800 + 10b + 1 \quad \therefore b = \frac{-369}{30}$$

即無解

$$2b3 \times 4 = 3b2 \Rightarrow (200 + 10b + 3) \times 4 = 300 + 10b + 2 \quad \therefore b = \frac{-510}{30}$$

$$2b8 \times 4 = 8b2 \Rightarrow (200 + 10b + 8) \times 4 = 800 + 10b + 2 \quad \therefore b = \frac{-32}{30}$$

心得：比前所採之代數法簡易不少，但均無法像窮舉法那樣全面、普遍並擴

及乘數爲假分數時的情況。

六、再回到窮舉法，依遺傳基因預測四位顛倒數爲

$999\times 2=1998$
$999\times 3=2997$
$999\times 4=3996$
$999\times 5=4995$
$999\times 6=5994$
$999\times 7=6993$
$999\times 8=7992$
$999\times 9=8991$

所以：

$8991／1998=4.5$

$7992／2997=2.\dot{6}$

$6993／3996=1.75=2331／1332=4662／2664$ ，

不再有非9倍數之顛倒數。

$5994／4995=1.2$

所以也是四型六個與三位顛倒數者相同。

但由引起我們研究動機的問題，可知四位顛倒數有一類其 $Q=\dfrac{4}{1}=4$ 者，

而顯然至今覓無蹤，基因突變的新品種嗎？有夠傷腦筋。

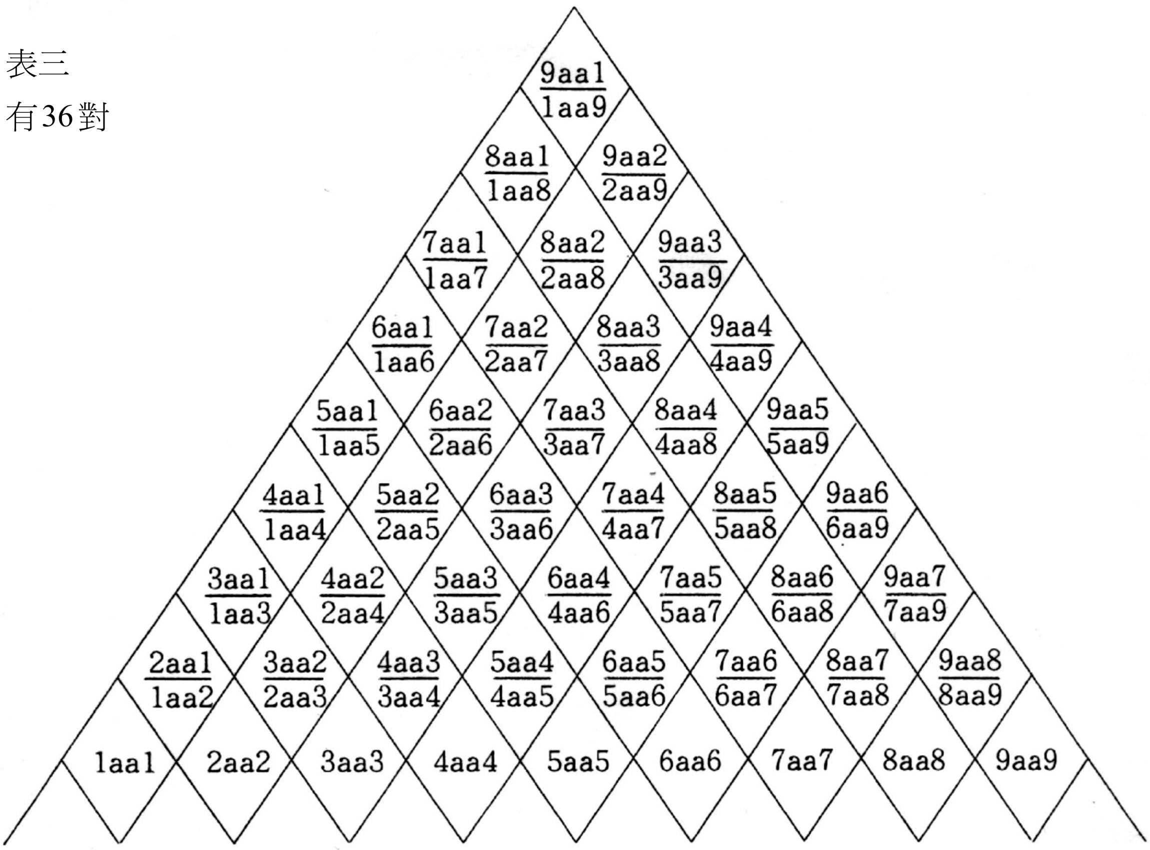
1. 四位數有 $[9999-1000+1-900$ (個位數爲0者) -99 (對中心爲對稱者) $+9$ (個"0"且"中對"者) $]\div 2=4005$ (對)，要窮舉來研究，絕對喊“不敢了！”但我們還是整理出窮舉時之工具，畢竟這是正確的科學態度。

① 與二、三位數研究時表格完全一樣者，其底座四位數通式爲

$AaaA$, $1\le A\le 9\in N$ ； $0\le a\le 9\in N$ ，見表三。

$\therefore$有十種 a ，每種有36對，即共計 $36\times 10=360$ (對)。

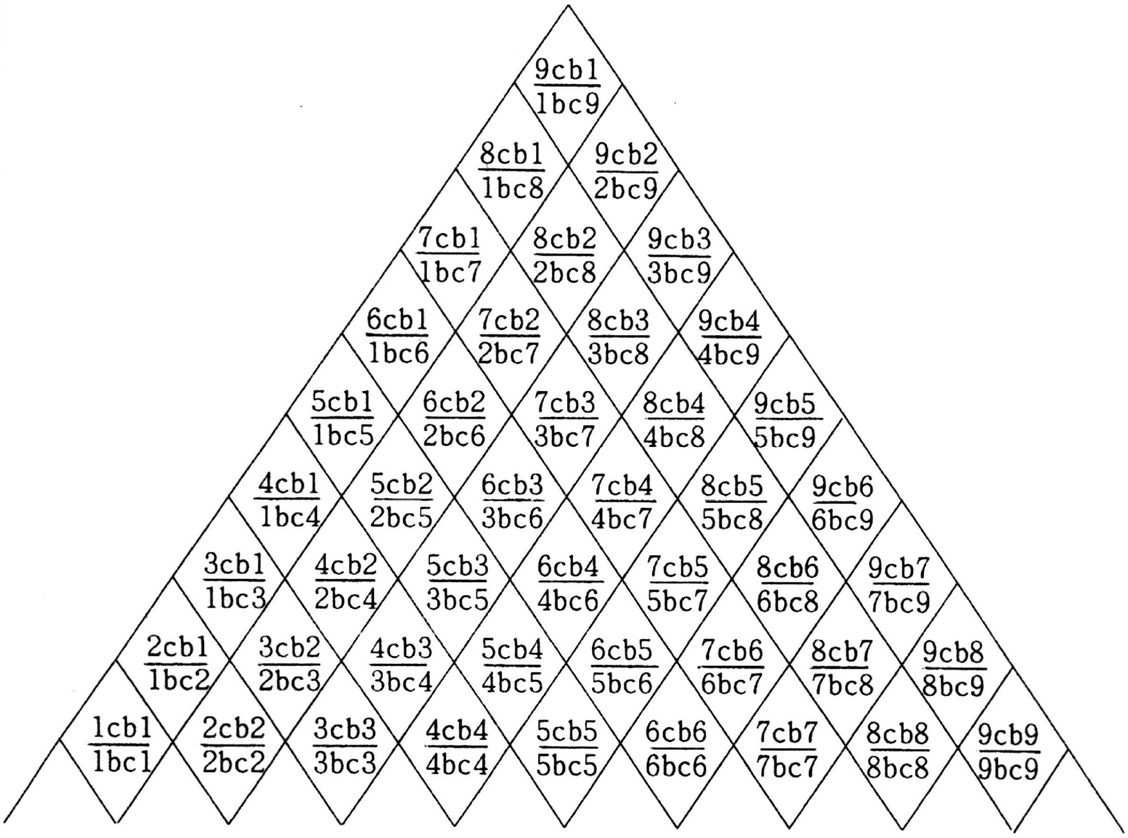
表三
有36對



② 底座四位數通式爲 $AbcA$, $1 \le A \le 9 \in N$, $0 \le b \ne c \le 9 \in N$

$\therefore bc$ 爲自 01 至 98 ，即有 $98-8$ ($b=c$ 者) $=90$ 種，惟底座皆爲頭尾同一數碼，即會 $\dfrac{AcbA}{AbcA} \times \dfrac{AbcA}{AcbA} = 1 \Rightarrow$ (大於 1) $\times$ (小於 1) $= 1$ 者，

故共有 $90 \times 45 - \dfrac{90}{2} \times 9 \left(或\ 90 \times 36 + \dfrac{90}{2} \times 9 \right) = 3645$ (對) ，見表四，有45 對。



於是① + ② $360 + 3645 = 4005$ (對) ，願意窮舉觀察嗎？

2. 二、三位數的探討中，我們獲得了一些良好心得結論，自然應該珍惜並善加利用，“學以致用”不是嗎？我們大膽假設：因爲顛倒數的特性之一爲本身是9的倍數，因此由兩位數做基準，只要全面列舉觀察加入兩個數碼後爲9之倍數的四位數，即可找出有那些爲四位顛倒數。這當然是“有了學問”後的窮舉法，但大大的簡化了，對不？我們也深信其中必會有 $999 \times r$ ($2 \le r \le 5$) 所得者，請看！我們且稱其爲“倍數法”─選擇式窮舉法。

① 因爲“始祖”爲兩位數，已經爲9之倍數，所以可知要再加的兩個數其和也必須爲9之倍數，所以可有下列情形。

兩數字和	兩數字	加入方式
0	0＋0	必須連加於中間
9	0＋9 1＋8 2＋7 3＋6 4＋5	可連加或分加但0與數碼小於千位數者不能加爲個位數。 連加只需加於中間。
18	9＋9	

② 建立大／小＝商資料，所以候選之四位數與分析結果：

①	②	③	④
8001／1008=7.937…	7002／2007=3.488…	6003／3006=1.997…	5004／4005=1.249…
$\boxed{9801/1089=9}$	9702／2079=$4.\dot{6}$	9603／3069=3.129…	9504／4059=2.341…
8901／1098=8.106…	7902／2097=3.768…	6903／3096=2.229…	5904／4095=1.441…
8091／1908=4.240…	7092／2907=2.439…	6093／3906=1.559…	5094／4905=1.029
8811／1188=7.416…	$\boxed{8712/2178=4}$	8613／3168=2.718…	8514／4158=2.047…
1881／1881=1	7812／2187=3.572…	6813／3186=2.138…	5814／4185=1.389…
$\boxed{8181/1818=4.5}$	7182／2817=2.549…	6183／3816=1.620…	5184／4815=1.076…
7821／1287=6.119…	7722／2277=3.391…	$\boxed{7623/3267=2.\dot{3}}$	7524／4257=1.767…
2871／1782=1.611…	2772／2772=1	6723／3276=2.052…	5724／4275=1.338…
8721／1278=6.823…	$\boxed{7272/2727=2.6}$	6273／3726=1.683…	5274／4725=1.116…
8271／1728=4.786…	6732／2376=2.83	6633／3366=1.970…	$\boxed{6534/4356=1.5}$
6831／1386=4.993…	3762／2673=$1.\dot{4}0\dot{7}$	3663／3663=1	5634／4365=1.290…
3861／1683=2.294…	7632／2367=3.224…	$\boxed{6363/3636=1.75}$	5364／4635=1.157…
8631／1368=6.309…	7362／2637=2.791…	5643／3465=1.628…	5544／4455=1.244…
8361／1638=5.104…	5742／2475=2.32	4653／3564=1.305…	4554／4554=1
5841／1485=3.933…	4752／2574=1.846…	6543／3456=1.893…	$\boxed{5454/4545=1.2}$
4851／1584=3.062…	7542／2457=3.069…	6453／3546=1.819…	9594／4959=1.934…
8541／1458=5.858…	7452／2547=2.925…	9693／3969=2.442…	$\boxed{5994/4995=1.2}$
8451／1548=5.459…	9792／2979=3.287…	$\boxed{6993/3996=1.75}$	
9891／1989=4.972…	$\boxed{7992/2997=2.\dot{6}}$		
$\boxed{8991/1998=4.5}$			
21 對	20 對 (因爲 1782／2871 分子比分母小不合)	19 對 (因爲 2673／3762 與 1683／3861 分子比分母小不合)	18 對 (因爲 3564／4653、2574／4752 與 1584／4851 分子比分母小不合)

即共有21＋20＋19＋18＝78個，其實商＝1者，亦可不觀察，即78－4＝74個。

心得：1. 有學問真好！原來會累壞人的4005對，經過分析只剩74對，容易多了。當然，我們大膽假設，連加只需加於中間，幫忙不少。

2. 果然乘數出現新的一類：$S=10$者，它也有四型，為$Q=\left(\frac{9}{1}=9\right)$, $\left(\frac{8}{2}=4\right),\left(\frac{7}{3}=2.\dot{3}\right),\left(\frac{6}{4}=1.5\right)$，每型均只有一個，即沒有每位數均為3之倍數的狀況，令人高興的是$Q=4$終於出現，但也出現另一整數乘數9，原問題沒問到它。

3. $S=11$者，可約、擴分型有：1212、2424、$\underline{3636}$、4848與1332、2664、$\underline{3996}$，即也新增一系 $\therefore$四位顛倒數共有二類，共$4+4=8$型，其中舊型$S=11$者出現兩系，故總個數為$(4+2)+(4+3)+4=17$。

七. 接下來，且整理已獲得之資料並分析。

S	Q	二位數	三	四		Q	S	附　　註
11	4.5	18	198	1998, 1818	1089	9	10	可約、擴分皆為$S=11, Q=1.75$。
	$2.\dot{6}$	27	297	2997, 2727	2178	4		二：12, 24, $\underline{36}$, 48。
	1.75	36	396	3996, 3636	3267	$2.\dot{3}$		三：132, 264, $\underline{396}$。
	1.2	45	495	4995, 4848	4356	1.5		四：1332, 2664, $\underline{3996}$。
GCD		9	99	999 909	1089	GCD		1212, 2424, $\underline{3636}$, 4848。

1. 因為

$$
\begin{array}{ll}
909\times2=1818 \text{ 而} & 1089\times1=1089 \\
909\times3=2727 & 1089\times2=2178 \\
909\times4=3636 & 1089\times3=3267 \\
909\times5=4545 & 1089\times4=4356 \\
909\times6=5454 & 1089\times5=5445 \\
909\times7=6363 & 1089\times6=6534 \\
909\times8=7272 & 1089\times7=7623 \\
909\times9=8181 & 1089\times8=8712 \\
 & 1089\times9=9801
\end{array}
$$

所以可知由"$1089\times r$" $(1\le r\le 4)$法找到之顛倒數與1089同樣位數，而非增加一位數。909則與A個9同樣功力會增多一位數，只是目前還不能完整了解它們間的關係。

2. ①

$$
\begin{array}{l}
18\to198\to1998 \\
27\to297\to2997 \\
36\to396\to3996 \\
45\to495\to4995
\end{array}
$$

所以A個$9\times r$型亦可視為由兩位者中間加ㄆ個9，則位數$2+$ㄆ位，我們且稱之為“全調”法。此為每次至少可增一位，最多無窮多位。

②

$$
\begin{array}{l}
18\to1818 \\
27\to2727 \\
36\to3636 \\
45\to4545
\end{array}
$$

我們且稱之為“重現”法，因為資料還不夠多，所以無法找出通式。此每次為增兩位。

③ 18→1089　27→2178　36→3267　45→4356

我們且稱之爲“半調”法，即原數一半不動，一半移動一位，然後左半減 1，右半加 1填入右側即成，也是資料不夠多，所以無法找出通式。此亦每次增兩位。

3. 由三位顛倒數顯然無法導引出所有四位顛倒數，那麼五位數的尋找可否由四位數導引出呢？因爲相差一位數，要再加之數只有一個，爲 0 爲 9 而已。簡單多了，是不是？又只要以“起頭數”觀察即可因爲找出起頭數，其餘以通式推論，更加省事。嗯!有學問的確好，對不對？現有兩類：

① $S=11$；起頭數爲18 , 198 , 1818與1998

② $S=10$ ；1089。

八. 尋找五位顛倒數，倍數法。

1. 我們先研究由四找五者，原則只加一個數，爲 0 或 9。

① 加 0

1089→98001／1<u>0</u>089=9.713⋯

90801／108<u>0</u>9=8.400⋯

加 9

1089→98091／1<u>9</u>089=5.138⋯

$\boxed{98901／10\underline{9}89=9}$

99801／108<u>9</u>9=9.156⋯

② 加 0

1818→81801／1<u>0</u>818=7.561⋯

$\boxed{81081／18\underline{0}18=4.5}$

80181／181<u>0</u>8=4.427⋯

加 9

1818→81891／1<u>9</u>818=4.132⋯

81981／18<u>9</u>18=4.333⋯

89181／181<u>9</u>8=4.900⋯

98181／1818<u>9</u>=5.397⋯

③ 加 0

1998→89901／1<u>0</u>998=8.174⋯

89091／19<u>0</u>98=4.664⋯

80991／199<u>0</u>8=4.068⋯

加 9

1998→$\boxed{89991／1\underline{9}998=4.5}$

98991／1998<u>9</u>=4.952⋯

即有 10989、18018、19998 三種五位起頭數

2. 再看看由三找五者，會不會又增加新型呢？

198：兩數連加時，恢復觀察加於最右後之狀況。

①加入爲0＋0 加 00 89001／10098=8.813… 80091／19008=4.213… 加 0，0 80901／10908=7.416… ②加入爲0＋9 加 09 89901／10998=8.174… 89091／19098=4.664… 90891／19809=4.588… 加 90 89091／19098 與前面相同 80991／19908=4.068… 加 0，9 89901／10998 與前面相同 98901／10989=9 98091／19089=5.13… 加 9，0 80991／19908 與前面相同	③加入爲1＋8 加 18 89811／11898=7.548… 88191／19188=4.596… 81891／19818=4.132… 加 81 89181／18198=4.900… 81891／19818 與前面相同 18891／19881 分母大 加 1，8 88911／11988=7.416… 88191／19188 與前面相同 加 8，1 81981／18918=4.333… 18981／18981=1 18891／19881 分母大	④加入爲2＋7 加 27 89721／12798=7.010… 87291／19278=4.528… 72891／19827=3.676… 加 72 89271／17298=5.160… 82791／19728=4.196… 27891／19872=1.403… 加 2，7 87921／12978=6.774… 78921／12987=6.076… 78291／19287=4.059… 加 7，2 82971／17928=4.628… 28971／17982=1.611… 28791／19782=1.455…
⑤加入爲3＋6 加 36 89631／13698=6.543… 86391／19368=4.460… 63891／19836=3.220… 加 63 89361／16398=5.449… 83691／19638=4.261… 36891／19863=1.857… 加 3，6 86931／13968=6.223… 68931／13986=4.928… 68391／19386=3.527… 加 6，3 83961／16938=4.956… 38961／16983=2.294… 38691／19683=1.965…	⑥加入爲4＋5 加 45 89541／14598=6.133… 85491／19458=4.393… 54891／19845=2.765… 加 54 89451／15498=5.771… 84591／19548=4.327… 45891／19854=2.311… 加 4，5 85941／14958=5.745… 58941／14985=3.933… 58491／19485=3.001… 加 5，4 84951／15948=5.326… 48951／15984=3.062… 48591／19584=2.481…	⑦加入爲9＋9 加 99 89991／19998=4.5 99891／19899=5.019… 加 9，9 98991／19989=4.952…

即有 10989 與 19998 而已，所以比四找五者還少。

心得：真是奇怪！顛倒一族的始祖是兩位數的 18，由它可找其他兩位顛倒數，也可繁衍三、四、五位子孫代，但三位數卻不能完全繁衍其子孫代四、五位顛倒數，則四位數繁衍其子代五位顛倒數就完全了嗎？值得懷疑。

九、花些時間，由始祖兩位數來繁衍五位數印證看看。

1. 因爲由兩位數成五位數尚缺三位數，所以加入情況爲：

三位數總和	三個數	加入方式
0	0+0+0	必連加
	0+0+9　1+2+6 0+1+8　1+3+5 0+2+7　2+2+5 0+3+6　1+4+4 0+4+5　2+3+4 1+1+7　3+3+3	可連加或分加但 0 不能爲個位數
18	0+9+9 1+8+9 2+7+9 3+6+9 4+5+9	
27	9+9+9	

2. 所以候選五位數與分析結果：

①三個皆 0 時，只能加中間，所以 800001／10008 = 7.993

②0+0+9時

009→89001/10098=8.813... 90081/18009=5.001...	900→80091/19008=4.213...	09，0→90801/10809=8.400...
090→80901/10908=7.416	00，9→98001/10089=9.713...	

所以無。

③0+1+8時

018→88101/10188=8.647... $\boxed{81081/18018=4.5}$	180→80811/11808=6.843...	08，1→18801/10881=1.727... 80811/11808=6.843...
081→81801/10818=7.561... 18081/18081=1	810→80181/18108 與前面相同	80，1→18081/18081=1
108→88011/11088=7.937... 80181/18108=4.427...	01，8→88101/10188 與前面相同 10881/18801= 分母大	18，0→81801/10818 與前面相同
801→81081/18018 與前面相同 10881/18801= 分母大	10，8→88011/11088 與前面相同	81，0→18801/10881 與前面相同

所以有一個 18018。

④0＋2＋7時

027→87201/10278=8.484... 72081/18027=3.998...	702→82071/17028=4.819... 20781/18702=1.111...	07，2→28701/10782=2.661... 70821/12807=5.529
072→82701/10728=7.708... 27081/18072=1.498...	720→80271/17208=4.664...	70，2→28071/17082=1.643...
207→87021/12078=7.204... 70281/18207=3.860...	02，7→78201/10287=7.601... 20871/17802=1.454...	27，0→72801/10827=6.724...
270→80721/12708=6.351	20，7→78021/12087=6.454...	72，0→27801/10872=2.557...

所以無。

⑤0＋3＋6時

036→86301/10368=8.323... 63081/18036=3.497...	360→80631/13608=5.925...	03，6→68301/10386=6.576... 30861/16803=1.836...
063→83601/10638=7.858... 36081/18063=1.939...	603→83061/16038=5.179... 30681/18603=1.649...	30，6→68031/13086=5.198...
306→86031/13068=6.583... 60381/18306=3.298...	630→80361/16308=5.010...	06，3→38601/10683=3.562... 60831/13806=4.406...
60，3→38061/16083=6.155...	36，0→63801/10836=5.887...	63，0→36801/10863=3.387...

所以無。

⑥0＋4＋5時

045→85401/10458=8.166... 54081/18045=2.997...	504→84051/15048=5.585... 40581/18504=2.193...	05，4→48501/10584=4.582... 50841/14805=3.434...
054→84501/10548=8.011... 45081/18054=2.497...	540→80451/15408=5.221...	50，4→48051/15084=3.185...
405→85041/14058=6049... 50481/18405=2.742...	04，5→58401/10485=5.569... 40851/15804=2.584...	45，0→54801/10845=5.053...
450→80541/14508=5.551...	40，5→58041/14085=4.120...	54，0→45801/10854=4.219...

所以無。

⑦1＋1＋7時

117→87111/11178=7.793... 71181/18117=3.928...	711→81171/17118=4.741... 11781/18711=分母大	17，1→18711/11781=1.588... 71811/11817=6.076...
171→81711/11718=6.973... 17181/18171=分母大	11，7→78111/11187=6.982... 11871/17811=分母大	71，1→18171/17181=1.057... 17811/11871=1.500...

所以無。

⑧1＋2＋6時

126→86211/11268=7.650... 62181/18126=3.430...	612→82161/16128=5.094... 21681/18612=1.164...	16，2→28611/11682=2.449... 61821/12816=4.823...
162→82611/11628=7.104... 26181/18162=1.441...	621→81261/16218=5.010... 12681/18621=分母大	61，2→28161/16182=1.740... 16821/12861=1.307...
216→86121/12168=7.077... 61281/18216=3.364...	12，6→68211/11286=6.043... 21861/16812=1.300...	26，1→18621/12681=1.468... 62811/11826=5.311...
261→81621/12618=6.468... 16281/18261= 分母大	21,6→68121/12186=5.590... 12861/16821=分母大	62，1→18216/16281=1.121... 26811/11862=2.260...

所以無。

⑨1＋3＋5時

135→85311/11358=7.511... 53181/18135=2.932...	513→83151/15138=5.492... 31581/18513=1.705...	15，3→38511/11583=3.324... 51831/13815=3.751...
153→83511/11538=7.237... 35181/18153=1.938...	531→81351/15318=5.310 13581/18531=分母大	51，3→38151/15183=2.512... 15831/13851=1.165...
315→85131/13158=6.469... 51381/18315=2.805...	13，5→58311/11385=5.121... 31851/15813=2.014...	35，1→18531/13581=1.364... 53811/11835=4.546...
351→81531/13518=6.031... 15381/18351=分母大	31，5→58131/13185=4.408... 13851/15831= 分母大	53，1→18351/15381=1.193... 35811/11853=3.021...

所以無。

⑩ 2＋2＋5時

225→85221/12258=6.852... 52281/18225=2.868...	522→82251/15228=5.401... 22581/18522=1.219...	25，2→28521/12582=2.266... 52821/12825=4.118...
252→82521/12528=6586... 25281/18252=1.385...	22，5→58221/12285=4.739... 22851/15822=1.4444...	52，2→28251/15282=1.848... 25821/12852=2.009...

所以無。

⑪ 1＋4＋4時

144→84411/11448=7.373... 44181/18144=2.435...	441→81441/14418=5.648... 14481/18441= 分母大	41，4→48141/14184=3.394... 14841/14841=1
414→84141/14148=5.947... 41481/18414=2.252...	14，4→48411/11484=4.215... 41841/14814=2.824...	44，1→18441/14481=1.273... 44811/11844=3.783...

所以無。

⑫ 2＋3＋4時

234→84321/12348=6.828... 43281/18234=2.373...	423→83241/14238=5.846... 32481/18423=1.763...	24，3→38421/12483=3.077... 42831/13824=3.098...
243→83421/12438=6.706... 34281/18243=1.879...	432→82341/14328=5.746... 23481/18432=1.273...	42，3→38241/14283=2.677... 24831/13842=1.793...
324→84231/13248=6.358... 42381/18324=2.312...	23，4→48321/12384=3.901... 32841/14823=2.215...	34，2→28431/13482=2.108... 43821/12834=3.414...
342→82431/13428=6.138... 24381/18342=1.329...	32，4→48231/13284=3.630... 23841/14832=1.607...	43，2→28341/14382=1.970... 34821/12843=2.711...

所以無。

⑬ 3+3+3時

333→83331/13338=6.247... 33381/18333=1.820...	33，3→38331/13383=2.864... 33831/13833=2.445...	

所以無。

⑭ 0＋9＋9時

099→89901/10998=8.174... 99081/18099=5.474...	09，9→ $\boxed{98901/10989=9}$ 90891/19809=4.588...	90，9→98091/19089=5.138...
909→89091/19098=4.664... 90981/18909=4.811...		

所以有一個 10989。

⑮ 1＋8＋9時

189→89811/11898=7.548... 98181/18189=5.397...	918→88191/19188=4.596... 81981/18918=4.333...	19，8→88911/11988=7.416... 91881/18819=4.882...
198→88911/11988=7.416... 89181/18198=4.900...	981/81891/19818=4.132... 18981/18981=1	91，8→88191/19188=4.596... 19881/18891=1.052...
819→89181/18198=4.900 91881/18819=4.882...	18，9→98811/11889=8.311... 81891/19818=4.132...	89，1→18981/18981=1 98811/11889=8.311...
891→81981/18918=4.333... 19881/18891=1.052...	81，9→98181/18189=5.397... 18891/19881= 分母大	98，1→18891/19881=分母大 89811/11898=7.548...

所以無。

⑯ 2＋7＋9時

279→89721/12798=7.010... 97281/18279=5.322...	927→87291/19278=4.528... 72981/18927=3.855...	72，9→98271/17289=5.684... 27891/19872=1.403...
297→87921/12978=6.774... 79281/18297=4.333...	972→82791/19728=4.196... 27981/18972=1.474...	29，7→78921/12987=6.076... 92871/17829=5.208...
729→89271/17298=5.160... 92781/18729=4.953...	27，9→98721/12789=7.719... 72891/19827=3.676...	92，7→78291/19287=4.059... 29871/17892=1.669...
792→82971/17928=4.628... 29781/18792=1.584...	79，2→28971/17982=1.611... 97821/12879=7.595...	97，2→28791/19782=1.455... 79821/12897=6.189...

所以無。

⑰ 3＋6＋9時

369→89631/13698=6.543... 96381/18369=5.246...	936→86391/19368=4.460... 63981/18936=3.378...	39，6→68931/13986=4.928... 93861/16839=5.574...
396→86931/13968=6.223... 69381/18396=3.771...	963→83691/19638=4.261... 36981/18963=1.950...	93，6→68391/19386=3.527... 39861/16893=2.359...
639→89361/16398=5.449... 93681/18639=5.026...	36，9→98631/13689=7.205... 63891/19836=3.220...	69，3→38961/16983=2.294... 96381/13869=6.981...
693→83961/16938=4.956... 39681/18693=2.122...	63，9→98361/16389=6.001... 36891/19863=1.857...	96，3→38691/19683=1.965... 69831/13896=5.025...

所以無。

⑱ 4＋5＋9時

459→89541/14598=6.133... 95481/18459=5.172...	945→85491/19458=4.393... 54981/18945=2.902...	49，5→58941/14985=3.933... 94851/15849=5.984...
495→85941/14958=5.745... 59481/18495=3.216...	954→84591/19548=4.327... 45981/18954=2.425...	94，5→58491/19485=3.001... 49851/15894=3.136...
549→89451/15498=5.771... 94581/18549=5.098...	45，9→98541/14589=6.754... 54891/19845=2.765...	59，4→48951/15984=3.062... 95841/14859=6.450...
594→84951/15948=5.326... 49581/18594=2.666...	54，9→98451/15489=6.356... 45891/19854=2.311...	95，4→48591/19584=2.481... 59841/14895=4.017...

所以無。

⑲ 9＋9＋9時

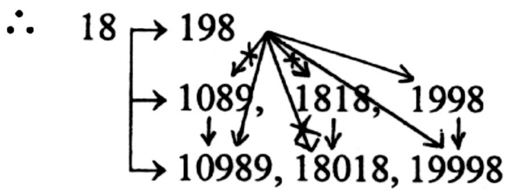
999→$\boxed{89991/19998=4.5}$ 99981/18999=5.262...	99，9→98991/19989=4.952... 99891/19899=5.019...	

所以有一個 19998。

心得：由二找五與由四找五結果完全一樣，始祖起頭數確爲二位數 18。但二找五多辛苦啊！“由始祖數追蹤起”，絕對不是顛倒一族的繁衍通則。而四找五竟然可行，三找四，三找五皆不行，怪哉！

十、1. 先再看看已獲得的資料，只寫起頭數代表：

二 位	三 位	四 位	五位
18	198	1089	10989
		1818	18018
		1998	19998



2. 五找六之狀況：加入數爲 0 或 9 即倍數法

10989→ 989001 / 100989 ＝9.793...
980901 / 109089 ＝8.991...
908901 / 109809 ＝8.331...
989091 / 190989 ＝5.178...
989901 / 109989 ＝9
998901 / 109899 ＝9.089...

19998→ 899901 / 109998 ＝8.181...
899091 / 190998 ＝4.707...
890991 / 199098 ＝4.475...
809991 / 199908 ＝4.051...
899991 / 199998 ＝4.5
989991 / 199989 ＝4.950...

18018→ 810801 / 108018 ＝7.506...
810081 / 180018 ＝4.5
801081 / 180108 ＝4.447...
810891 / 198018 ＝4.095...
810981 / 189018 ＝4.290...
819081 / 180918 ＝4.527...
891081 / 180198 ＝4.945...
981081 / 180189 ＝5.444...

心得：加入數 0 或 9，無“同時”均成立之現象。結果有三個：
109989 , 199998 , 180018

3. 四找六之狀況：半調法。(9 之倍數法不打算採用，太累人了)

1818 → 187189 ，而此六位數並非 9 之倍數，原來半調法成立條件還需兩半最右位數字和爲 9 且左半最右不可爲 0，右半最右不可爲 9。

1818 → 189918 ，此爲全調法，不通，設若修正爲“ㄆ個 0”加入，則 180018，成功！惟由 18 起算不通。

4. 三找六之狀況：

①半調法：198 → 10989 ，果然可以成立，只是奇位數之顛倒數正中央數字併入右半，故此成爲三找五狀況。

②重現法：198 → 198198 ，而 891891/198198 = 4.5 ，成立，但五找六法中從缺，看來“繁衍通則”仍無頭緒，這些方法皆非之。

5. 二找六之狀況：重現法，18 → 181818 爲“三重”之結果，而 818181/181818 = 4.5 ，成立，且又是前面五找六沒找出者，得另起爐灶來工作囉！

6. 同位數顛倒數間的 GCD ：遺傳基因，應該是可考慮的“新爐灶”，且整理目前所有資料分析看看：

位數	S	起頭數	GCD	S	起頭數	GCD
二	11	18	$9=9\times1$	10		
三		198	$99=9\times11$			
四		1818	$909=9\times101$		1089	$1089=9\times121=99\times11$
		1998	$999=9\times111$			
五		18018	$9009=9\times1001$		10989	$10989=9\times1221=99\times111$
		19998	$9999=9\times1111$			
六		180018 181818 198198 199998	$90009=9\times10001$ $90909=9\times10101$ $99099=9\times11011$ $99999=9\times11111$		109989	$109989=9\times12221=99\times1111$

①有了！大膽假設 $S=11$ 類，起頭數 $=2\times GCD=2\times9\times$ 成長因子，而 $r=2\sim5$，即其最大公因數 GCD 由 0.9 構成，形成對正中央左右對稱，若正中央有數字，則爲偶位數顛倒數，若中央爲兩數字中間，爲奇位數顛倒數，當然，若以成長因子言，爲由 0.1 所構成。而 GCD 數＝遺傳基因數＝成長因子數＝系之總數＝起頭數個數。

②至於 $S=10$ 類，爲謹慎起見，我們再往下尋找七與八位數者再來歸納較妥當：

七位數 9899901 / 1099989＝9，八位數 98999901 / 10999989＝9，

唯若使用重現法，則八位數尚可 98019801 / 10891089＝9，這下可妙，

$\because$ $1099989\ =9\times122221\ =99\times11111$ ，

$10999989=9\times1222221=99\times111111$ ，

$10891089=9\times1210121=99\times110011$ ，

竟然八位數亦新增一系，由 $S=11$ 類的啓示，看來得找到十二位數才能容易有心得出現，$\because$ 資料對照如下：

位數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
$S=11$ 類之起頭數個數	1	1	2	2	4							
$S=10$ 類之起頭數個數	0	0	1	1	1	1	2					

十二、尋找 $S=10$ 中高位數顛倒數，方法不外 (1)由 n 找 $(n+1)$，加入數爲 0 或 9 之倍數法 (2)全調法,(3)重現法，即半調法好像沒有市場。又 1089 似乎可視爲 $S=10$ 類的“始祖數”，半調法爲兩類別間之 pass word。同時，倍數法，可改用加入數後，以 99 或 9 處理看能否整除出其成長因子來判別，不需使用顛倒對之相除方式。

注意，能被遺傳因子 99 或 9 整除不一定爲起頭數。

1.

位數	$n\rightarrow n+1$倍數法	全 調 法	重 現 法	合　計
七	1099989	1099989	——	1099989
八	10999989	10999989	10891089	10999989 10891089
九	109999989 108901089	109999989	——	109999989 108901089
十	1099999989 1089001089	1099999989	1098910989	1099999989 1089001089 1098910989
十一	10999999989 10890001089 10989010989	10999999989	——	10999999989 10890001089 10989010989
十二	109999999989 108900001089 109890010989	109999999989	108910891089 109989109989	109999999989 108900001089 109890010989 108910891089 109989109989

2. 分析：　起頭數個數即成長因子數

位數		起頭數個數即成長因子數
四	$1089=9\times121=99\times11$	1
五	$10989=9\times1221=99\times111$	1
六	$109989=9\times12221=99\times1111$	1
七	$1099989=9\times122221=99\times11111$	1
八	$10999989=9\times1222221=99\times111111$	2
	$10891089=9\times1210121=99\times110011$	
九	$109999989=9\times12222221=99\times1111111$	2
	$108901089=9\times12100121=99\times1100011$	
十	$1099999989=9\times122222221=99\times11111111$	
	$1089001089=9\times121000121=99\times11000011$	3
	$1098910989=9\times122101221=99\times11100111$	
十一	$10999999989=9\times1222222221=99\times111111111$	
	$10890001089=9\times1210000121=99\times110000011$	3
	$10989010989=9\times1221001221=99\times111000111$	
十二	$109999999989=9\times12222222221=99\times1111111111$	
	$108900001089=9\times12100000121=99\times1100000011$	
	$109890010989=9\times12210001221=99\times1110000111$	5
	$108910891089=9\times12101210121=99\times1100110011$	
	$109989109989=9\times12221012221=99\times1111001111$	

3. 總算見到端倪，爲起頭數$=1\times GCD=9\times$成長因子Ⅰ$=99\times$成長因子Ⅱ，(即成長因子：Ⅰ$=11\times$Ⅱ)，而$r=1\sim4$。它們的特性分別爲

(1)成長因子Ⅰ由 0 , 1 , 2 構成，惟“0”自八位顛倒數方出現，形成對正中央左右對稱，中央有數字則爲 0 *or* 2，又頭、尾必爲 1，且絕無“連 1”現象出現數中。

(2)“因Ⅱ”由 0 , 1 構成，“0”亦自八位顛倒數方出現，亦形成對中央左右對稱，但此處絕無“單 0” *or* “單 1”出現數中。因Ⅱ比因Ⅰ少一位，比起頭數、GCD 少二位。

4. 讓我們換個角度介紹，顯然它們的構成單體爲

(1) $S=11$，單體是 0 與 1。

(2) $S=10$之成長因子Ⅰ爲$1(h$個$2)$ 1 與g個 0，個數g，h與位數間關係爲

位數	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
g	0	0	0	0	0,1	0,2	0,1,3	0,2,4	0,1,2,3,5
h	1	2	3	4	5,1	6,1	7,2,1	8,2,1	9,3,1,2,1

心得：“因Ⅰ”有夠不簡潔，不令人喜歡。

(3) $S=10$之“因Ⅱ”爲 0 與 1。

5. 繁衍通則爲顛倒數=型觀因子$r\times$遺傳基因(GCD)

$=r\times$遺傳因子$h\,(9\;or\;99)\times$成長因子g

十二、”繁衍通則”已獲得，是慶功收工的時候了嗎？且慢，還可研究每一代其個數與位數間關係。先處理$S=11$者

1. $S=11$類中，目前已得資料見表五：

(表五)

<table>
<tr><th>顛倒數位數</th><th colspan="2">顛倒數型別(Q)</th><th colspan="2">型中顛倒數個數</th><th colspan="2">最大公因數(其位數)</th><th>最大公因數類別數</th></tr>
<tr><td>二</td><td rowspan="11">4.5
2.6
1.2</td><td rowspan="11">1.75</td><td rowspan="11">均各 1</td><td>4</td><td>9</td><td>(1)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>三</td><td>3</td><td>99</td><td>(2)</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">四</td><td>4</td><td>909</td><td rowspan="2">(3)</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>999</td></tr>
<tr><td rowspan="2">五</td><td>4</td><td>9009</td><td rowspan="2">(4)</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9999</td></tr>
<tr><td rowspan="4">六</td><td>4</td><td>90009</td><td rowspan="4">(5)</td><td rowspan="4">4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>90909</td></tr>
<tr><td>3</td><td>99099</td></tr>
<tr><td>3</td><td>99999</td></tr>
</table>

心得：①在$Q=1.75$型裏，只要最大公因數無“99”相連情形者(即起頭數無 9 出現者)會有四個顛倒數，有“99”相連者(即起頭數有 9 出現者)會有三個顛倒數。

②若以成長因子討論，只需將GCD中之 9 改成 1 即可。

2. 建立顛倒數個數與最大公因數 *GCD* 相關之資料：

最大公因數位數	最大公因數面目(個數)		無 99 者個數	有 99 者個數
一	9*	1	1	0
二	99	1	0	1
三	909* 999	2	1	1
四	9009* 9999	2	1	1
五	90009* 90909* 99099 99999	4	2	2
六	900009* 909909 990099 999999	4	1	3
七	9000009* 9009009* 9090909* 9900099 9099909 9909099 9990999 9999999	8	3	5
八	90000009* 90099009 90900909* 99000099 90999909 99099099 99900999 99999999	8	2	6
九	900000009* 900909009* 909000909* 990000099 909909909 990909099 999000999 999909999 900090009* 900999009 909090909* 990090099 909999909 990999099 999090999 999999999	16	5	11

十	9000000009* 9000990009 9009009009* 9090000909* 9900000099 9009999009 9099009909 9990000999 9090990909 9909009099 9900990099 9099999909 9909999099 9990990999 9999009999 9999999999 16	3	13

3\. 起頭數位數

起頭數位數	二	四	六	八	十	三	五	七	九	十一
GCD 位數	一	三	五	七	九	二	四	六	八	十
GCD 無“99”者	1	1	2	3	5	0	1	1	2	3
GCD 有“99”者	0	1	2	5	11	1	1	3	6	13
合計	1	2	4	8	16	1	2	4	8	16

心得：①奇或偶位 GCD 總個數 $=2^{A}$ ，$A=\left(\dfrac{\text{起頭數位數}}{2}\text{之整數商}\right)-1$

$$=(\text{奇}GCD\text{位數}-1)/2$$
$$=(\text{偶}GCD\text{位數}-2)/2$$

我們稱“*twin* 等比數列”，至於顛倒數的總個數，∵有親兄弟存在，故與此不同。

②奇 GCD 位數中，其面目結構為單 9 即為“無 99”出現者之個數所成數列為 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , ………, 注意到沒？竟然為有名之“費氏數列”，而偶 GCD 位數者，為 0 , 1 , 1 , 2 , 3 ,……, 不也是費氏數列，只是以 0 起頭而已，我們且稱之為“大費氏”“小費氏”數列。

③ GCD 結構“有 99”者，其對應個數為 $(2^{A}-\text{無 99 者})$，我們且稱之為“費氏牽手數列”令人失眠的“數”啊！不知 $S=10$ 裏又會有何驚訝在？快看吧！

4\. $S=10$ 者，起頭數位數 $=GCD$ 位數，自四位起亦有四型：$Q=1.5$；2.3；4；9，且每型均一個顛倒數，前已獲得資料為

位數	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
個數	1	1	1	1	2	2	3	3	5

∴竟然不論奇、偶位數，皆為大費氏數列，不信看看我們推論十三、十四的狀況來印證。(*P.S.* 若由二、三位數論起，就皆為小費氏數列)

①十三位數之因Ⅱ：11111111111　十一位，5 個

11000000011

11100000111

11110001111

11001110011

②十四位數之因Ⅱ：111111111111　十二位，8 個

110000000011

111000000111

111100001111

111110011111

110011110011

110001100011

111001100111

如何？信了吧？十五位數一定是 8 個。處理方法很簡單，先找出偶位數因Ⅱ面目，則於正中央加入 0 *or* 1，但不充許單 0 *or* 單 1 存在，即可得其高一位奇位數之因Ⅱ面目。我們稱 $S=10$ 者爲“*twin* 費氏數列”。

5. 於是每一位數顛倒數的總個數可以計算出

二位顛倒數個數	$=(1\times7)+$	0	$+0$	$=$	7
三	$=0$	$+(1\times6)$	$+0$	$=$	6
四	$=(1\times7)$	$+(1\times6)$	$+4\times1$	$=$	17
五	$=(1\times7)$	$+(1\times6)$	$+4\times1$	$=$	17
六	$=(2\times7)$	$+(2\times6)$	$+4\times1$	$=$	30
七	$=(1\times7)$	$+(3\times6)$	$+4\times1$	$=$	29
八	$=(3\times7)$	$+(5\times6)$	$+4\times2$	$=$	59
九	$=(2\times7)$	$+(6\times6)$	$+4\times2$	$=$	58
十	$=(5\times7)$	$+(11\times6)$	$+4\times3$	$=$	113
十一	$=(3\times7)$	$+(13\times6)$	$+4\times3$	$=$	111

即偶 n 位顛倒數個數，

$=(7\times$大費數列第$\frac{n}{2}$項值$)+[\,6\times(2^{\frac{n}{2}-1}-$大費數列第$\frac{n}{2}$項值$)]\;+4\times$大費數列第$\frac{n-2}{2}$項值。

$=(4+3)\times$大費數列第$\frac{n}{2}$項值$+[3\times2\times(2^{\frac{n}{2}-1}-$大費數列第$\frac{n}{2}$項值$)]+4\times$大費數列第$\frac{n-2}{2}$項值。

$=4\times$大費數列第$\frac{n+2}{2}$項值$-3\times$大費數列第$\frac{n}{2}$項值$+3\times2^{\frac{n}{2}}$

奇 m 位顛倒數個數，

$$=(7\times\text{小費數列第}\frac{m-1}{2}\text{項值})+[6\times(2^{\frac{m-1}{2}-1}-\text{小費數列第}\frac{m-1}{2}\text{項值}]]$$

$$+4\times\text{小費數列第}\frac{m-1}{2}\text{項值。}$$

$$=5\times\text{小費數列第}\frac{m-1}{2}\text{項值}+3\times2^{\frac{m-1}{2}}$$

十三、辛苦！辛苦！值得！值得！海海人生“章法行”，江湖笑傲“存好種”，顛倒一族不顛倒，費氏數列穿梭揚。前面，我們找出了顛倒數個數與位數間的關係通式，就像費氏數列通項式般不怎受用，我們決定將其預測至廿一位數，以數列面目分析看會有何結果？

1.

位數	$S=11$ “無 99”		$\times7$	$S=11$ “有 99”		$\times6$	$(S=10)\times4$			總計	
二	1	−1	7	0	1	0	0	0	0	7	−1
三	0	1	0	1	0	6	0	1	0	6	11
四	1	0	7	1	0	6	1	0	4	17	0
五	1	1	7	1	1	6	1	0	4	17	13
六	2	−1	14	2	1	12	1	0	4	30	−1
七	1	2	7	3	2	18	1	1	4	29	30
八	3	−1	21	5	1	30	2	0	8	59	−1
九	2	3	14	6	5	36	2	1	8	58	55
十	5	−2	35	11	2	66	3	0	12	113	−2
十一	3	5	21	13	11	78	3	2	12	111	109
十二	8	−3	56	24	3	144	5	0	20	220	−3
十三	5	8	35	27	24	162	5	3	20	217	212
十四	13	−5	91	51	5	306	8	0	32	429	−5
十五	8	13	56	56	51	336	8	5	32	424	417
十六	21	−8	147	107	8	642	13	0	52	841	−8
十七	13	21	91	115	107	690	13	8	52	833	821
十八	34	−13	238	222	13	1332	21	0	84	1654	−13
十九	21	34	147	235	222	1410	21	13	84	1641	1622
廿	55	−21	385	457	21	2742	34	0	136	3263	−21
廿一	34		238	478		2868	34		136	3242	

說明：由二位數起，每兩個一組，我們依序找出組內差與鄰組間差

	組內差所成數列	鄰組間差所成數列
無 99	−1, 0, −1, −1, −2, −3, −5, −8, −13, −21	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34
有 99	1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21	0, 1, 2, 5, 11, 24, 51, 107, 222
$S=10$	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0	1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13
總 計	−1, 0, −1, −1, −2, −3, −5, −8, −13, −21	11, 13, 30, 55, 109, 210, 417, 821, 1622

真是嚇壞人的結果，費氏數列好像有封閉性，其代數和的結果仍是費氏數列。

您看！

(1) $S=10$的組內差數列：全 0 數列，也算是非常特殊的費氏數列，對不？

(2) 無 99 與總計兩者組內差數列完全一樣，而$S=10$的鄰間差數列與它們卻等值異號，妙不？

(3) 除了有 99 與總計的鄰間差數列，其餘均爲一清二楚的費氏數列。

① 有 99 數列爲 0 , 1 , 2 , 5 ,11 , 24 , 51 , 107 , 222 ……，這不就是大費牽手數列，而數列遞推狀況爲

$$0+1+\underline{\underline{1}}=2$$
$$1+2+\underline{\underline{2}}=5$$
$$2+5+\underline{\underline{4}}=11$$
$$5+11+\underline{\underline{8}}=24$$
$$11+24+\underline{\underline{16}}=51$$
$$24+51+\underline{\underline{32}}=107$$
$$51+107+\underline{\underline{64}}=222$$

$\therefore$通式爲第$(n-1)$項$+$第n項$+2^{(n-1)-1}$

$=$第$(n+1)$項

即爲廣義費氏數列形式。

② 總計數列爲 11, 13, 30, 55, 109, 212, 417, 821, 1622 ……數列遞推狀況爲

$$11+13+\underline{\underline{6}}=30$$
$$13+30+\underline{\underline{12}}=55$$
$$30+55+\underline{\underline{24}}=109$$
$$55+109+\underline{\underline{48}}=212$$
$$109+212+\underline{\underline{96}}=417$$
$$212+417+\underline{\underline{192}}=821$$
$$417+821+\underline{\underline{384}}=1622$$

$\therefore$通式爲第$(n-1)$項$+$第n項$+6\times 2^{(n-1)-1}$

$=$第$(n+1)$項

2. 小費牽手數列爲 1, 1, 3, 6, 13 ……，$\therefore$遞推狀況爲

$$1+1+\underline{\underline{1}}=3$$
$$1+3+\underline{\underline{2}}=6$$
$$3+6+\underline{\underline{4}}=13$$

即與大費牽手數列通式完全一樣

3. 總計裏偶位數間所成數列爲 7, 17, 30, 59, 113, 220, 429, 841, 1654, 3263，整理出通式與奇位數間所成數列爲 6, 17, 29, 58, 111, 217, 424, 833, 1641, 3242 的通式也一樣爲第$(n-1)$項$+$第n項$+6\times 2^{(n-1)-1}$ $=$第$(n+1)$項，即與總計的鄰間差數列完全一樣，萬歲！可以安心收工囉！

4. $S=11$總個數所成數列爲 7, 6, 13, 13, 26, 25, 51, 50, 101, 99, 200, 197, 397, 392, 789,781, 1570, 1557, 3127, 3106, ……, $\therefore$偶位數者爲 7, 13, 26, 51, 101, 200, 397, 789, 1570, 3127，奇者 6, 13, 25, 50, 99, 197, 392, 781, 1557, 3106，細品味吧！

肆、討論：

一、困難的產生在卻步，困難的化解在進步“有心”就能“學成”。

二、顛倒，顛顛倒倒，以爲“無章法”的直覺，有的卻是很令人訝異數學界裏顛倒一族的條理：費氏數列群支配“位數”與“個數”間之關係。

三、數學界應該還有其他支系的顛倒家族，畢竟我們侷限了乘數爲非 1 假分數的範圍：Q 最大值 $=9$。

四、顛倒一族的數學理論，目前我們也力有未逮，不能得而共享，它應該是排列組合的範疇吧？

五、費氏數列多少人著迷，自 1963 就有了專刊 Fibonacci Quarterly，我們很高興能爲其忝上一筆，雖然它只是初等數學的程度。

六、電子新貴們吃飯的傢伙，不就是以二進制 0 , 1 的電腦用語，而顛倒一族的成長因子單體亦爲 0 與 1，不知兩者有無何種關連，有待有緣人爲我們解咒囉！

七、廣義費氏數列(費氏數列群)與狹意費氏數列的定義，似乎不夠清晰。而彼此間的四則運算似乎具封閉性。

伍、結論：

一、顛倒一族有兩大類：$S=m+n=10$ 與 11。

二、$S=10$ 中的 $Q=\dfrac{m}{n}=\dfrac{9}{1},\dfrac{8}{2},\dfrac{7}{3},\dfrac{6}{4}$。（9 , 4 , 2.3 , 1.5）

$S=11$ 中的 $Q=\dfrac{m}{n}=\dfrac{9}{2},\dfrac{8}{3},\dfrac{7}{4},\dfrac{6}{5}$。（4.5 , 2.6 , 1.75 , 1.2） ∴各有四型

三、除了 $S=11$ 中的 $Q=1.75$ 者，可經約、擴分而得也可以是非 9 倍數的“親兄弟”顛倒數 $3\ or\ 4$ 個，餘均爲 9 之倍數，且每型一個。

四、繁衍通則：顛倒數＝型觀因子 $r\times GCD$ (遺傳基因) $=r\times$ 遺傳因子 $h\times$ 成長因子 g。

1. $S=10$ 中，A 位顛倒數之 GCD 爲 A 位數，g 爲 $A-2$ 位數，$h=99$，$r=1\sim 4$。
   $S=11$ 中，A 位顛倒數之 GCD 爲 $A-1$ 位數，g 爲 $A-1$ 位數，$h=9$，$r=2\sim 5$。
   而 r 皆爲相對應 Q 之分母 n，r 取最小時稱起頭數，二位數起頭數尊稱始祖數。
2. g 爲由 0 , 1 所組成對中央對稱之數，$S=10$ 時，絕無“單 0”或“單 1”存在，$S=11$ 時，無任何限制。

五、顛倒數位數與其個數間關係即 g 之位數與個數間關係，它們的骨架爲赫赫著名的費氏數列群。

1. $S=11$ 中，可再分 g 爲“無連 1”與“有連 1”兩狀況，
   ① 偶位數起頭數位數，g 是“無連 1”者爲大費氏數列：1 , 1 , 2 , 3 , 5 ,……, g“有連 1”者爲大費牽手數列：0 , 1 , 2 , 5 , 11,……，而奇位者，“無連 1”爲小費氏數列：0 , 1 , 1 , 2 , 3 ,……，“有連 1”者爲小費牽手數列：1 , 1 , 3 , 6 , 13, ……。又相對應共伴之和 $\equiv 2^{A}$，$A=\left(\dfrac{\text{起頭位數}}{2}\text{之整數商}\right)-1$。
   ②“無連 1”的親兄弟有 4 個，即每一系共有 7 個顛倒數，“有連 1”有 3 親兄弟，一系共有 6 個。
2. $S=10$ 中，奇、偶均爲大(或小) 費氏數列，我們且稱爲“*twin* 費氏數列”，無親兄弟即一系共有 4 個。
3. 總個數＝費列 $\times 7+$ 牽費列 $\times 6+$ *twin* 費列 $\times 4$，而其奇、偶位數間所成數列均屬廣義費氏數列，且同型：第 $(n-1)$ 項＋第 n 項 $+6\times 2^{(n-1)-1}=$ 第 $(n+1)$ 項。

陸、參考資料：

吳振奎編著，斐波那契數列，初版，台北，九章出版社，243 頁，民 82 年。