台灣二〇〇二年國際科學展覽會

科　　別：數學科

作品名稱：平面上三點集中度判別法之探討

學　　校：臺北市立螢橋國民中學

作　　者：蔣曉涵　　鄭介迪

作 者 簡 介

我是蔣曉涵，今年十五歲，就讀於螢橋國中三年級，最愛理化，平日最喜歡看電影（租回來看）、看科幻小說。受姊姊的影響，開始對宇宙很有興趣；宇宙這麼大，怎麼可能只有我們地球有生命呢？外星人一定存在，只是無法被我們目前的科技發現罷了。以後我一定要當一個科學家，發明更好的天文望遠鏡，去發現外星人的存在。

作 者 簡 介

鄭介迪，1987 年出生，臺北市人。

我最喜歡的科目是數學。數學對我來說是一種自我的挑戰，能幫助我增進思考判斷的能力。每當我豁然開朗地領悟到一些東西時，那種快樂和成就感就會驅使我更深入的去辨思研究。

在這次展覽中，我學到了新知識，找到了成就感，更重要的是：我學到了主動求知的精神。很榮幸能參加這次的科展，希望以後能繼續在這方面有更透徹的學習。

平面上三點集中度判別法之探討

Abstract

Determination of centralness of three dots on a plane

There are many ways to determine the centralness of three dots on a plane; however, no definition study has been applied. In this study, we focus our interests on the centralness of three vertices of a triangle formed from three dots on a plane.

Various methods such as the relationship of area, and the distance of the triangle to the centralness of three dots, the distance from the interior point, exterior point, the barycenter to the vertices of triangle, and the standard error and differences average obtained from three dots were determined with a dynamic geometry software GSP, and a statistic method was used to find a least error way to determine the centralness of three dots on a plane.

中文摘要

平面上三點集中度判別法之探討

關於平面上若干點的集中度之定義，一直很少有人予已仔細的探討，因爲判別的方法可有很多種。本研究是以平面上三點所構成的三角形之三頂點做討論，分別以三角形的面積、周長，內心、外心和重心至三頂點距離，三點的標準差及平均差的概念，做爲不同的判別方式，並以動態幾何畫板 GSP 模擬不同的判斷方法作爲研究，再利用統計學上的方法，找出哪一種定義方式爲最適合、誤差最少的判斷方法。

研究報告

壹、 研究動機：

＜生活中的數學＞這本書是一本數學科的課外讀物。裡面敘述著一些趣味的數學題目。其中一篇寫著『開放性問題』，這個名字吸引住大家：何謂開放性問題？隔天，老師爲我們解說：「開放性題目就是無固定答案的問題，可以儘量發揮，可朝很多方向思考，發揮創造力」。於

是大家決定，一起來研究這個無一定標準答案＜點的集中度＞（以前，鄉村裡的小孩，沒什麼玩具，常常三五成群玩丟石子，愈集中的愈高分。但常常因計分方式而大吵一架)，所以，大家想找出一種簡易又公正的方法來判定輸贏；因為國中課程中已學到三角形相關知識。因此，我們從研究三點集中度出發，看看要如何解決這些小孩的問題。

貳、 研究目的：

一、盡可能找出不同判斷的方法。

二、利用 GSP 動態模擬功能，探討這些方法相關性，並確定這些方法是否能正確判斷三點集中度。

三、若為有瑕疵之判別法，找出其盲點所在。

四、找出在這些方法中最方便又能正確判別的方法。

參、研究設備器材：

一、GSP 應用軟體，桌上型電腦乙部。

二、研究過程中所需之數學知識：

1、三角學 2、統計學 3、使用 GSP 繪圖與動模擬之技巧

肆、研究方法或過程：

一、研究流程如下：

透過參與同學的討論找出判斷的方法

↓

利用 GSP 繪製各個方法的圖形並利用動態模擬計算出作為判斷的數值

↓

利用計算出來的動態數值做出 7 個判別法之間的關係圖共 21 個

↓

利用 21 個關係圖可區別出正確與有瑕疵的判別法

↓

找出有瑕疵之判別方法的盲點所在

↓

討論研究結果並撰寫報告

二、判別三點集中度的 7 種方法及其計算方式：

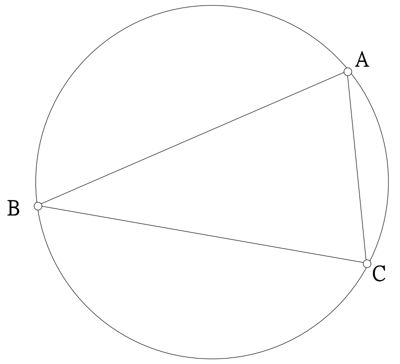
1、**利用面積**：計算由三點圍出之三角形面積

2、**利用周長**：計算由三點圍出之三角形周長

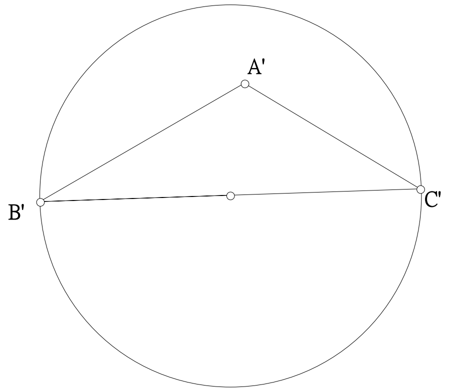
3、**含三點最小圓之圓心至三點距離和**：

先找出圓心：若三點所圍出之三角形為銳角三角形則圓心為此三角形之外接圓圓心（即三角形外心)；若圍出之三角形為鈍角三角形則圓心為此三角形最大邊之中點。

如圖:



若三點所構成之三角形為銳角三角形,則含三點之最小圓為三角形之外接圓



若三點所構成之三角形為鈍角三角形,則含三點之最小圓為以最大邊為直徑之圓

但是請讀者注意，電腦是不會主動替你按上述方法找圓心的，而且 GSP 中也沒有邏輯判斷的功能。因此；我們用了數學方法讓電腦找出圓心，方法如下：

假設由三點構成的三角形之三內角為 A , B ,C 且 X=cosA ,
Y=cosB ，Z=cosC 再利用 GSP 中內建之函數 sgn (X)（若 $X \geq 0$ 則其值為 +1；若 $X < 0$ 則其值為-1）宣告下列變數

$S_A = \operatorname{sgn}(X), S_B = \operatorname{sgn}(Y), S_C = \operatorname{sgn}(Z)$

$S = S_A . S_B . S_C$

又設三內角 A , B , C 之對邊中點座標分別為 $(X_A, Y_A), (X_B, Y_B), (X_C, Y_C)$,三角形外心座標為 $(X_{外}, Y_{外})$ 則此圓心之 X 座標為

$$\frac{(1-S_A)}{2} X_A + \frac{(1-S_B)}{2} X_B + \frac{(1-S_C)}{2} X_C + \frac{(S+1)}{2} X_{外}$$

Y 座標為 $\frac{(1-S_A)}{2} Y_A + \frac{(1-S_B)}{2} Y_B + \frac{(1-S_C)}{2} Y_C + \frac{(S+1)}{2} Y_{外}$

說明如下：若 ABC 為銳角三角形，則 $S = S_A = S_B = S_C = 1$

且 $X = X_{外}, Y = Y_{外}$

若三角形 ABC 中 $\angle A > 90^{\circ}$ 則

$S = S_A = -1$ 而且 $S_B = S_C = 1$ 此時 $X = X_A, Y = Y_A$

4、**內心至三點距離和**：三點所圍成的三角形內心(三內角平分線交點）至三點距離和

5、**重心至三點距離和**：三點所圍成的三角形重心(三中線交點)至三點距離和

6、**引入座標後利用三點 X、Y 座標之平均差標出一點 Q，再以 Q 距離原點之長短來判別**：設三點座標為 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 令

$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \overline{Y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ 再令

$X=\frac{|\overline{X}-x_1|+|\overline{X}-x_2|+|\overline{X}-x_3|}{3}, Y=\frac{|\overline{Y}-y_1|+|\overline{Y}-y_2|+|\overline{Y}-y_3|}{3}$ 此時以(X,Y)標出Q點並計算其至原點之距離。

7、引入座標計算三點與原點之距離，再計算三個距離值之標準差作爲判斷依據：設三點 A,B,C 至原點之距離分別爲 l , m , n 則其平均値爲 $W=\frac{l+m+n}{3}$ 且三個離均差之平方和爲 $P=(W-l)^2+(W-m)^2+(W-n)^2$ 最後計算出標準差 $S=\sqrt{\frac{P}{3}}$

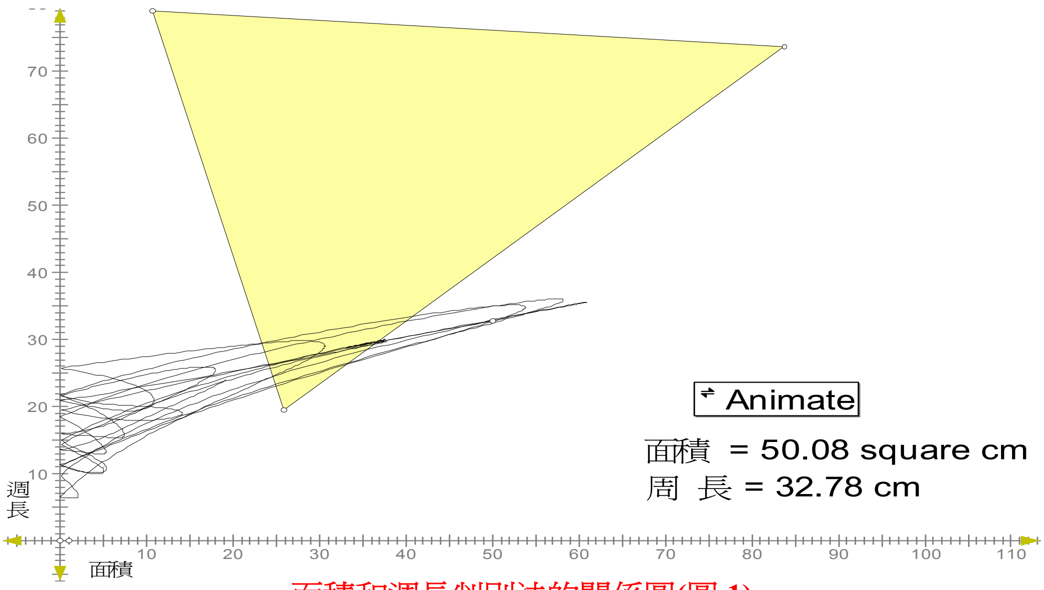
三、利用 GSP 動態幾何軟體模擬出各個判斷方法之相關性

因判別方法有 7 種，因此；它們之間的相關性的軌跡圖共有 21 個。

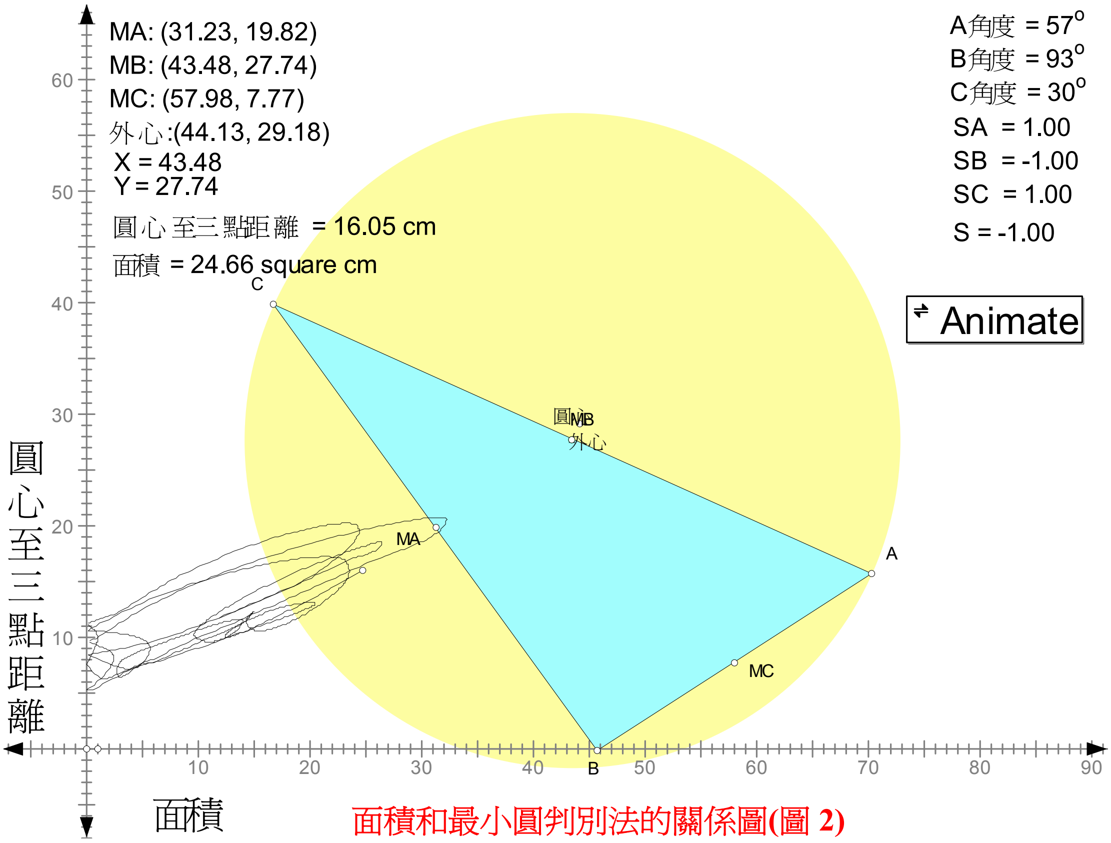
	面積						
周長	圖一	周長					
最小圓	圖二	圖七	最小圓				
內心	圖三	圖八	圖十二	內心			
重心	圖四	圖九	圖十三	圖十六	重心		
平均差	圖五	圖十	圖十四	圖十七	圖十九	平均差	
標準差	圖六	圖十一	圖十五	圖十八	圖二十	圖二十一	標準差

圖號對照表

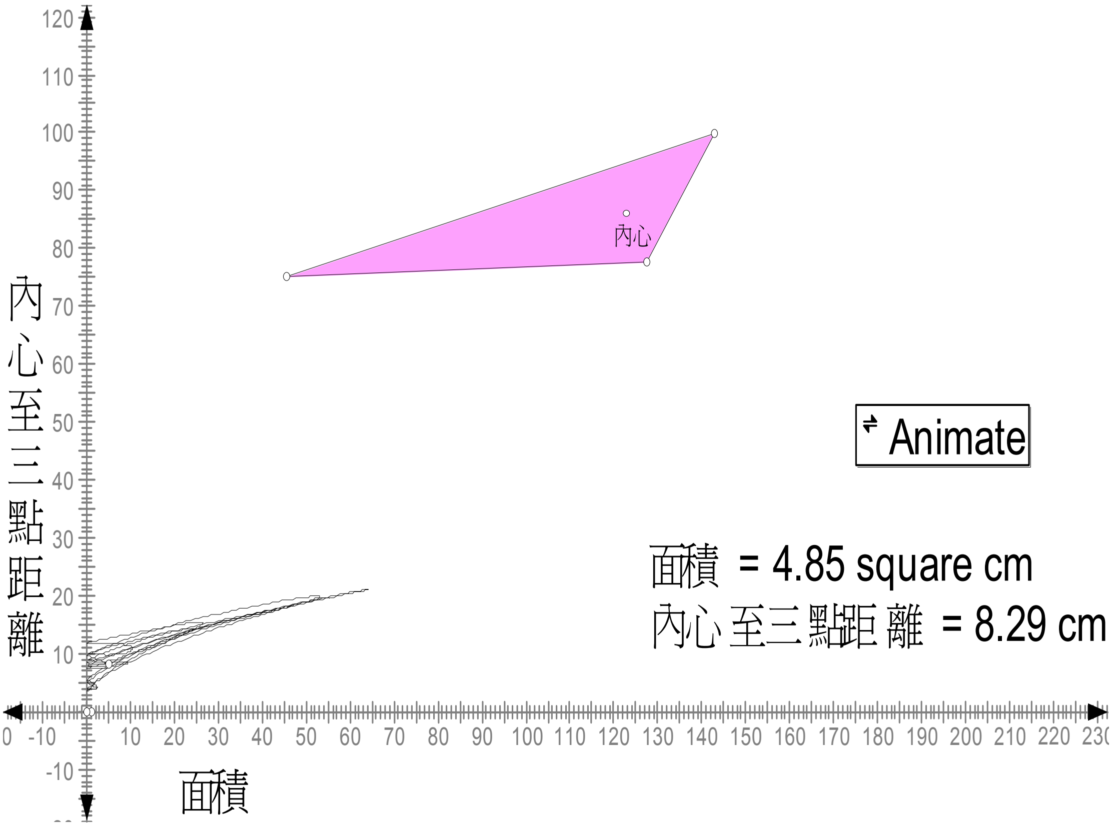
如圖



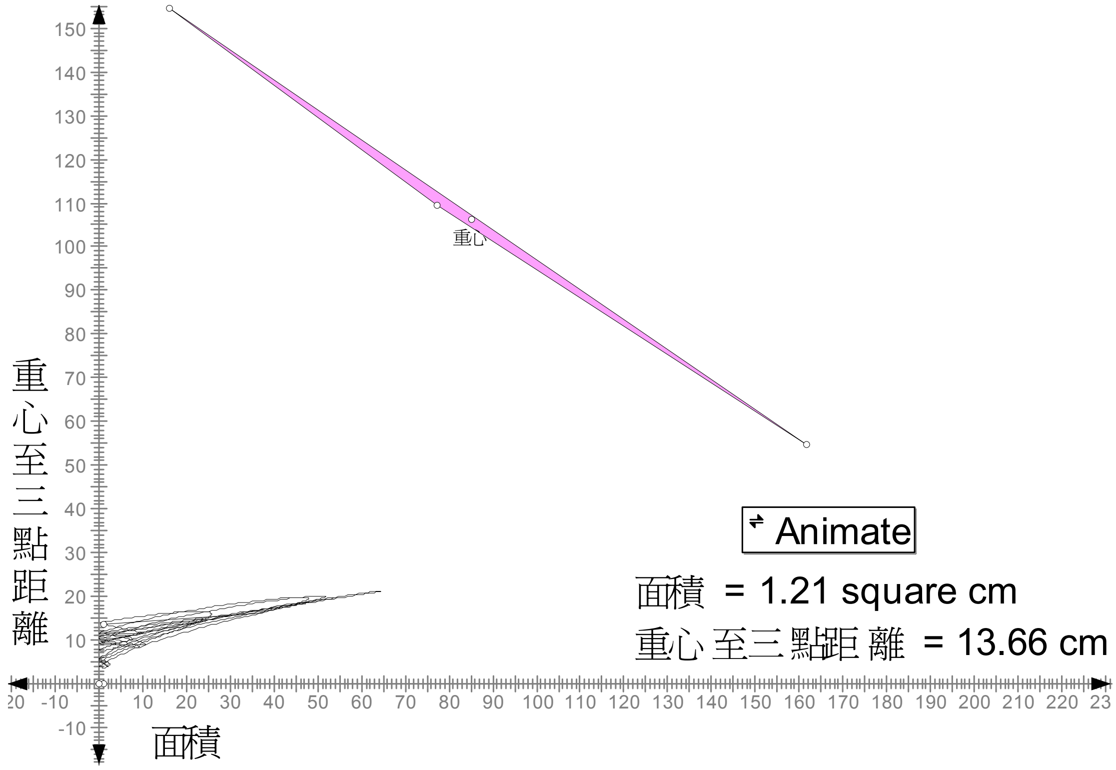
面積和週長判別法的關係圖(圖 1)



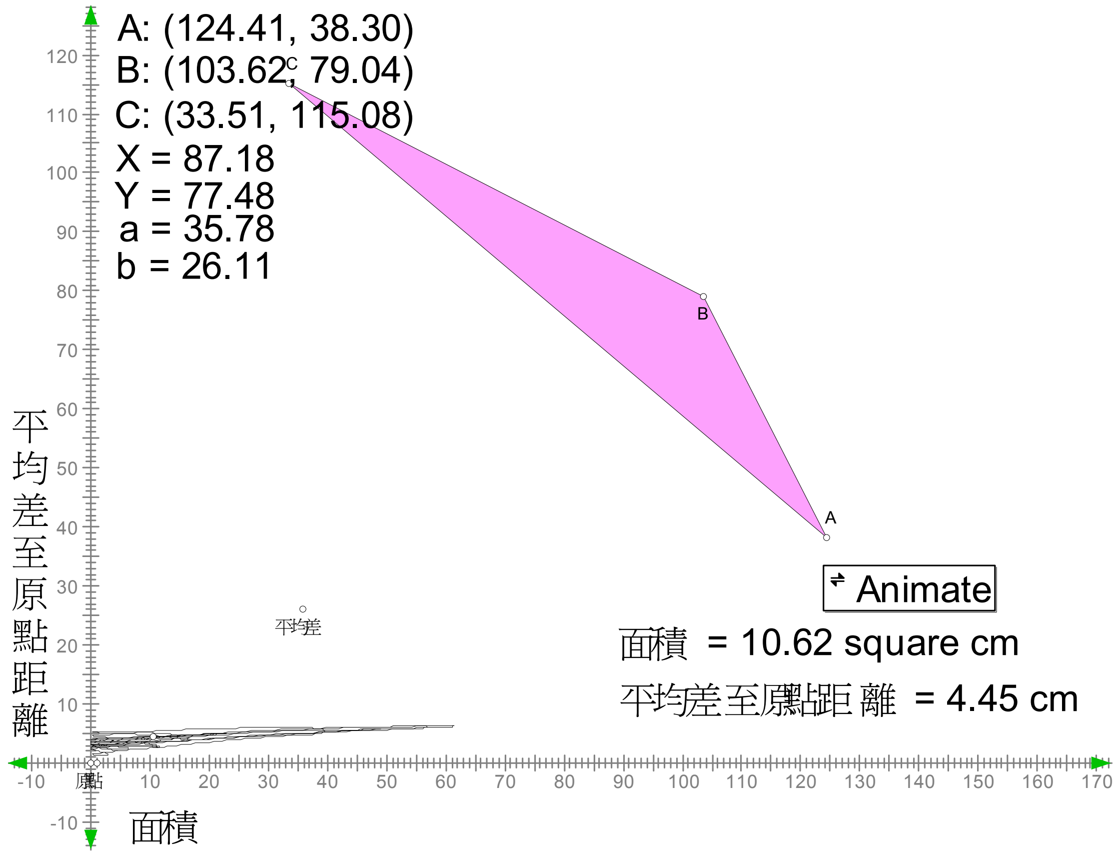
面積和最小圓判別法的關係圖(圖 2)



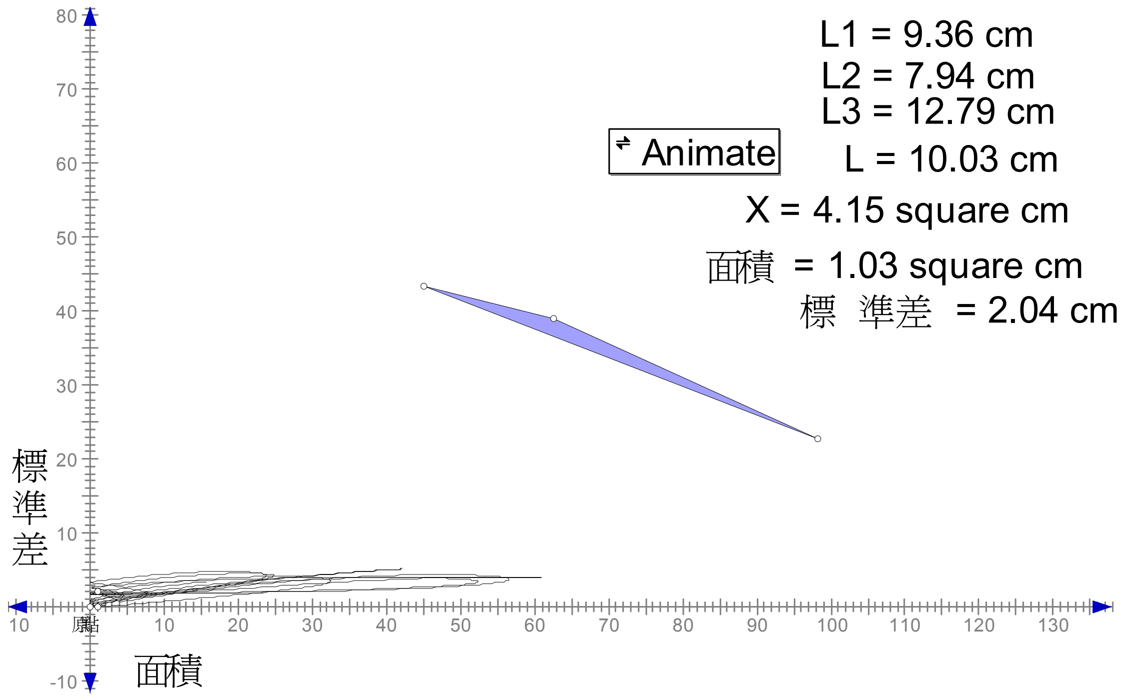
面積和內心判別法的關係圖(圖 3)



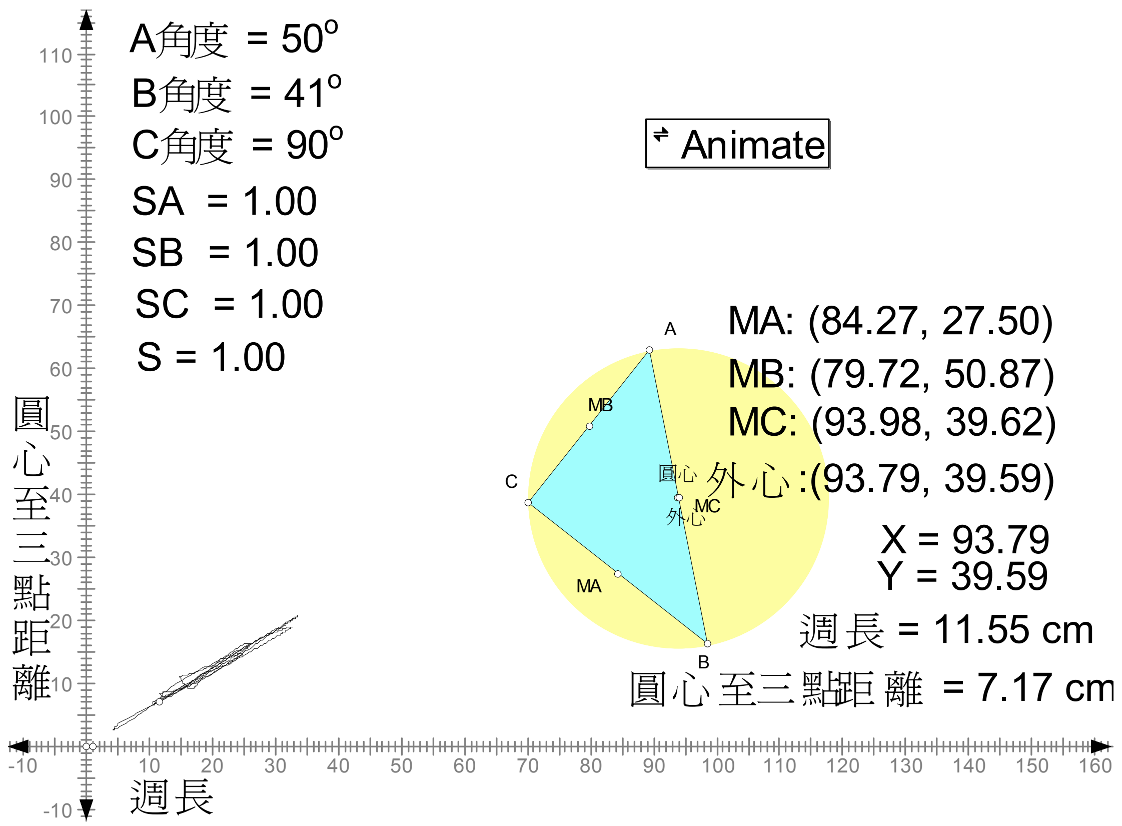
面積和重心判別法的關係圖(圖 4)



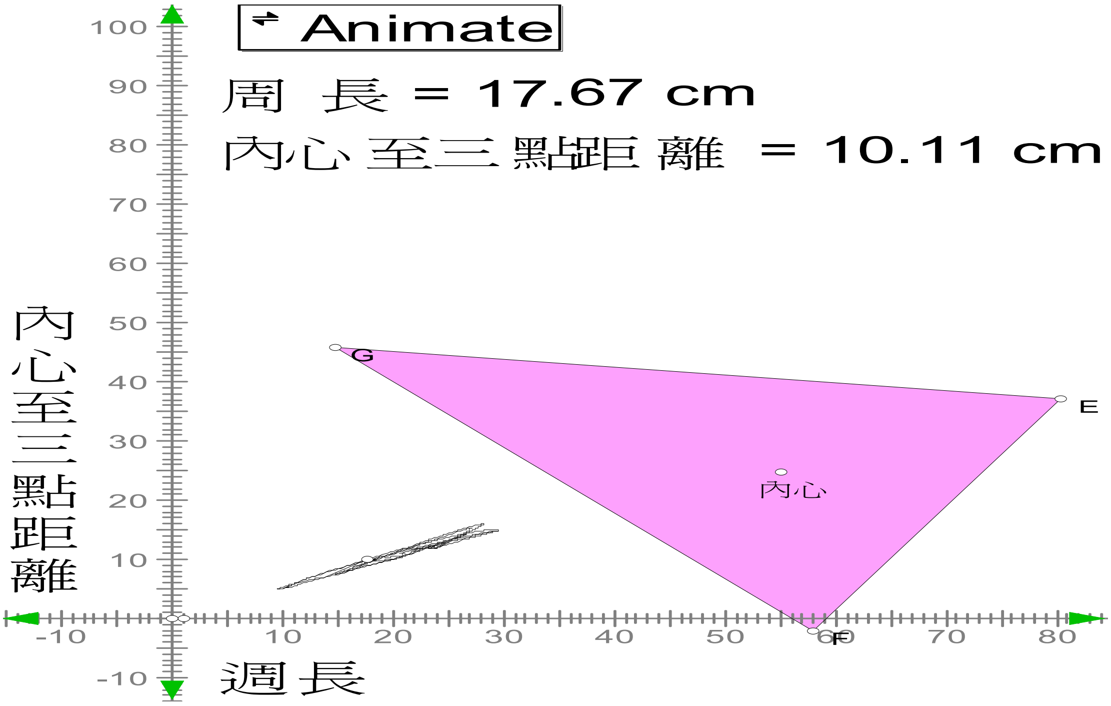
面積和平均差判別法的關係圖(圖 5)



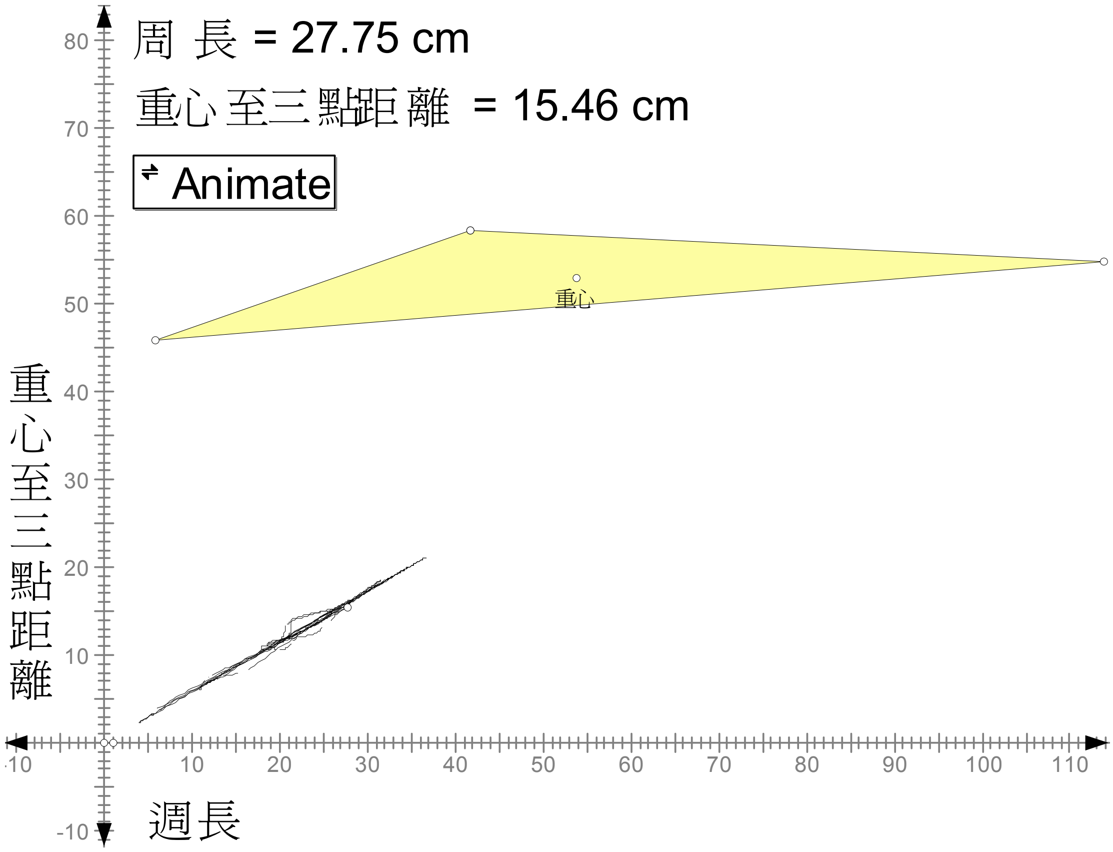
面積和標準差判別法的關係圖(圖 6)



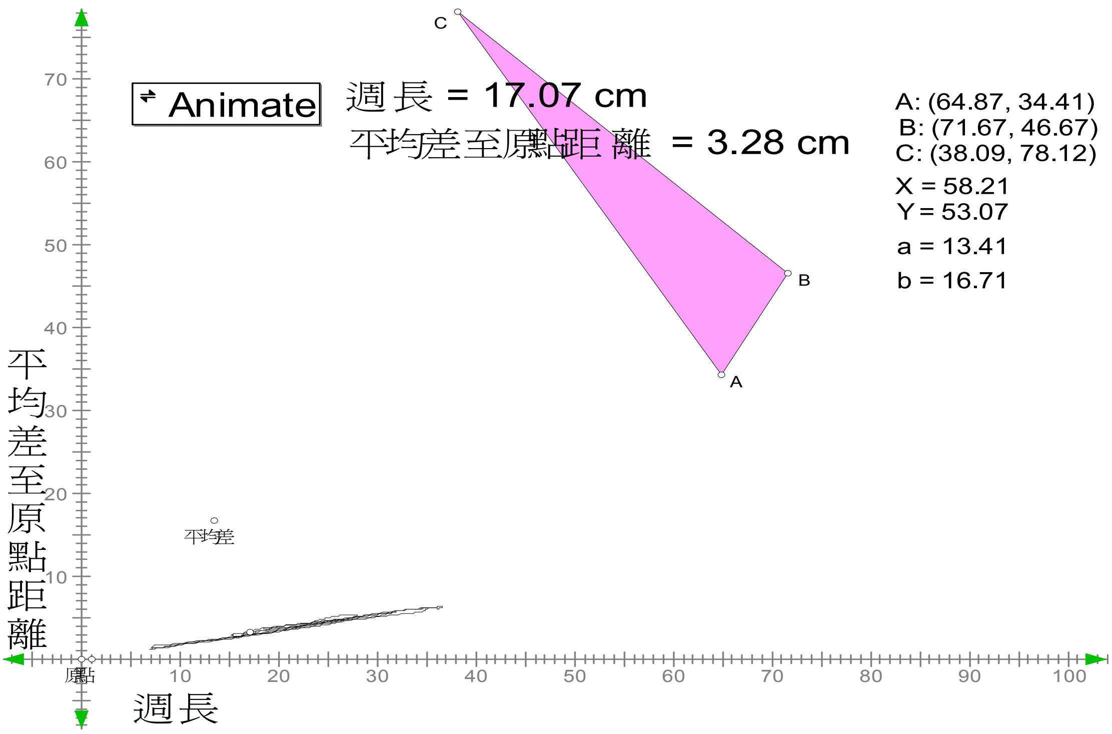
週長和最小圓判別法的關係圖(圖 7)



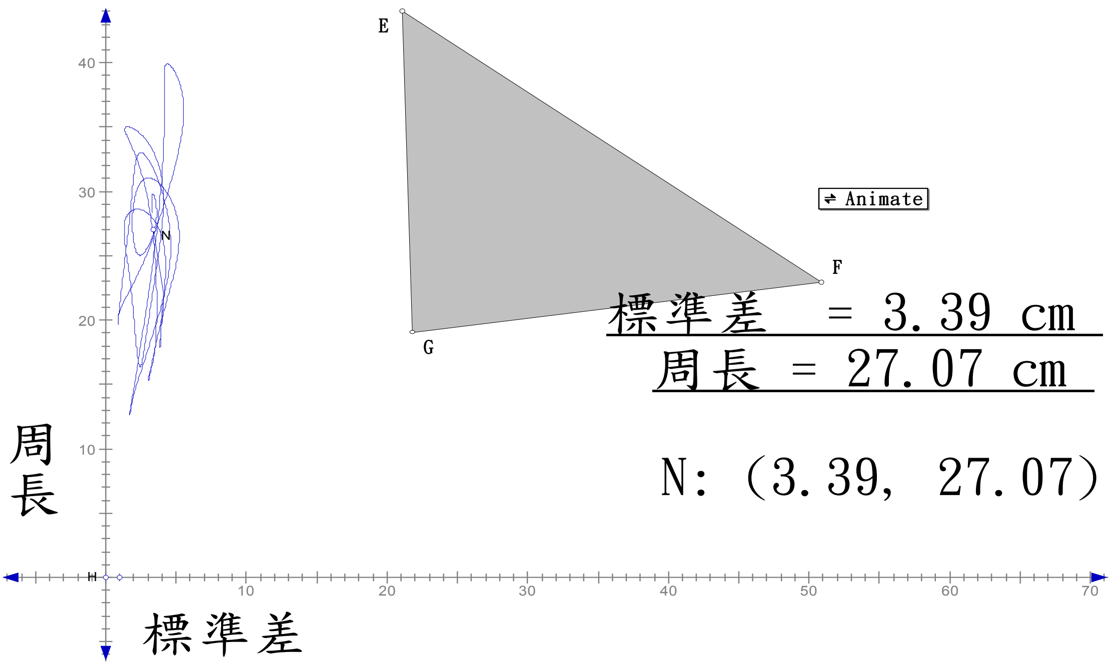
週長和內心判別法的關係圖(圖 8)



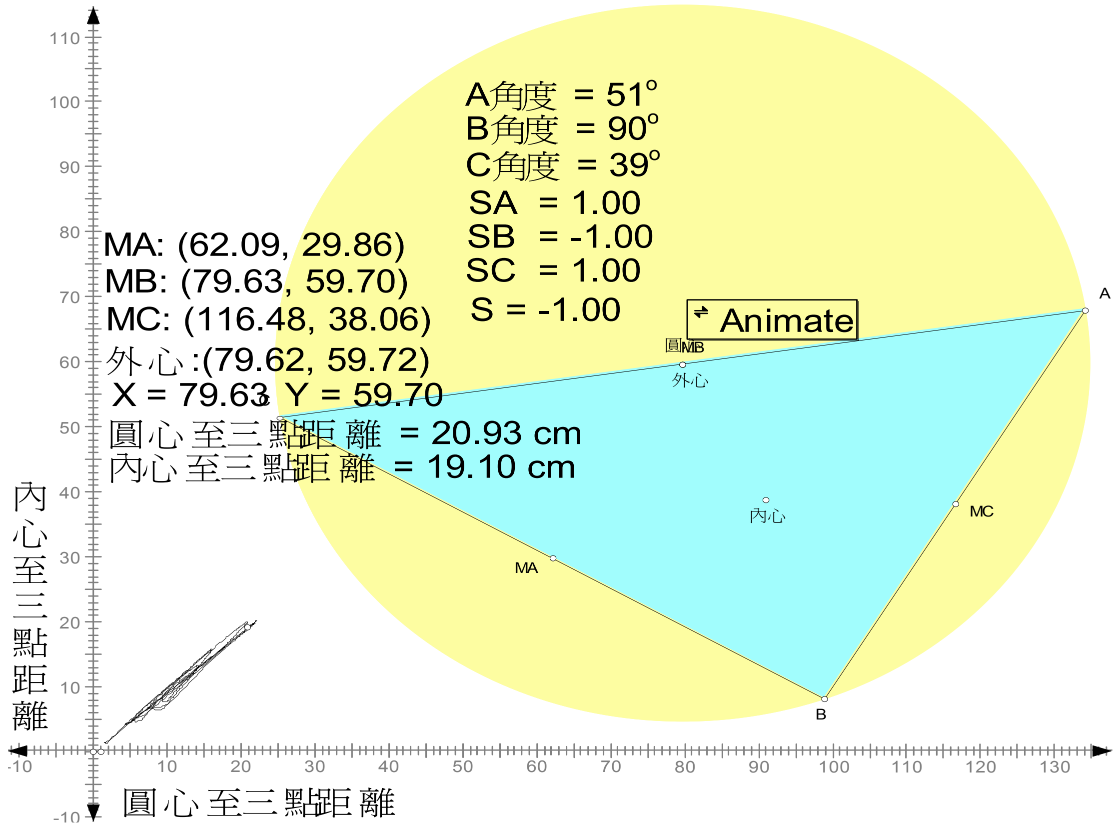
週長和重心判別法的關係圖(圖 9)



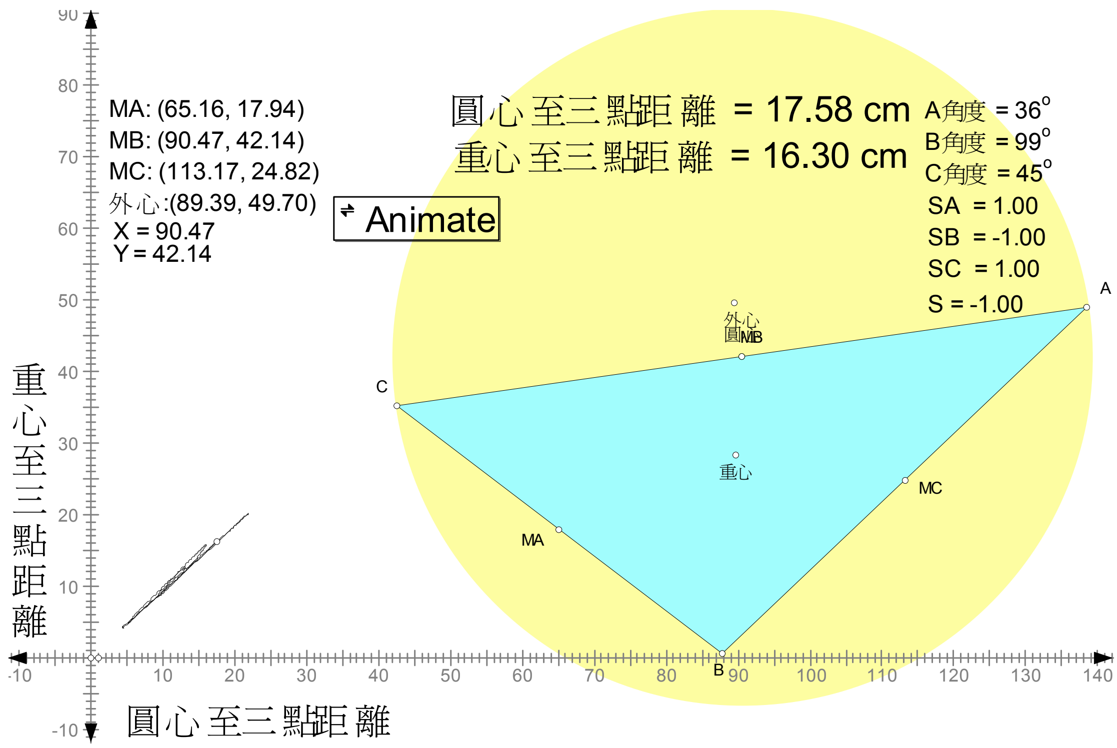
週長和平均差判別法的關係圖(圖 10)



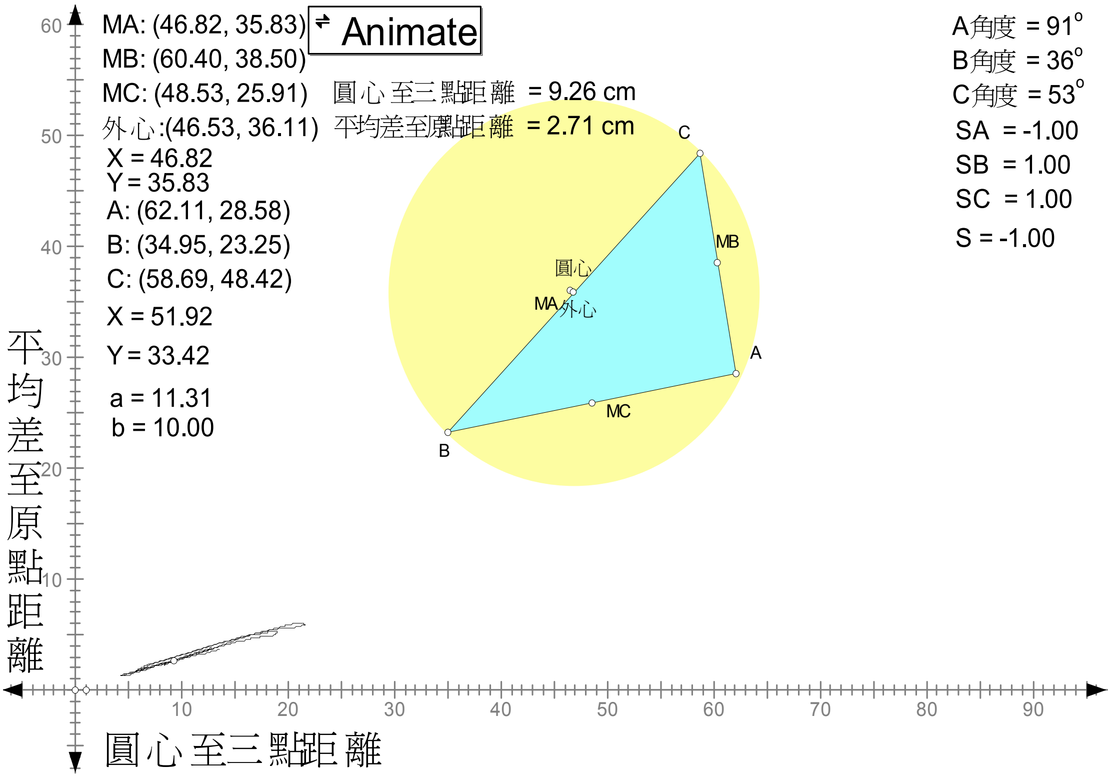
週長和標準差判別法的關係圖(圖 11)



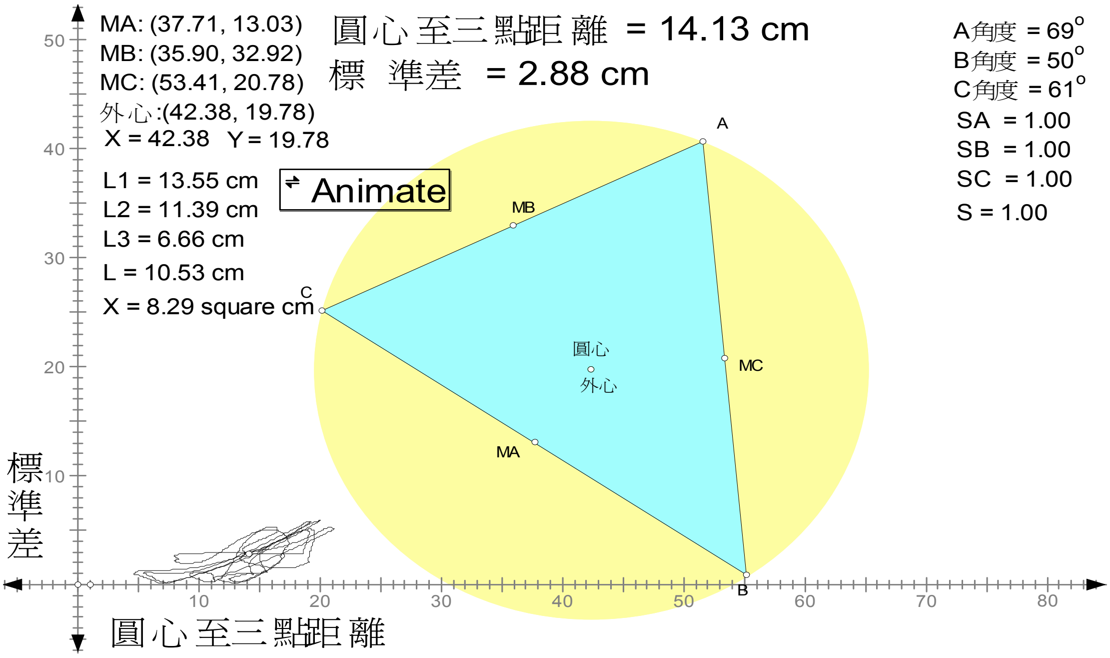
最小圓和內心判別法的關係圖(圖 12)



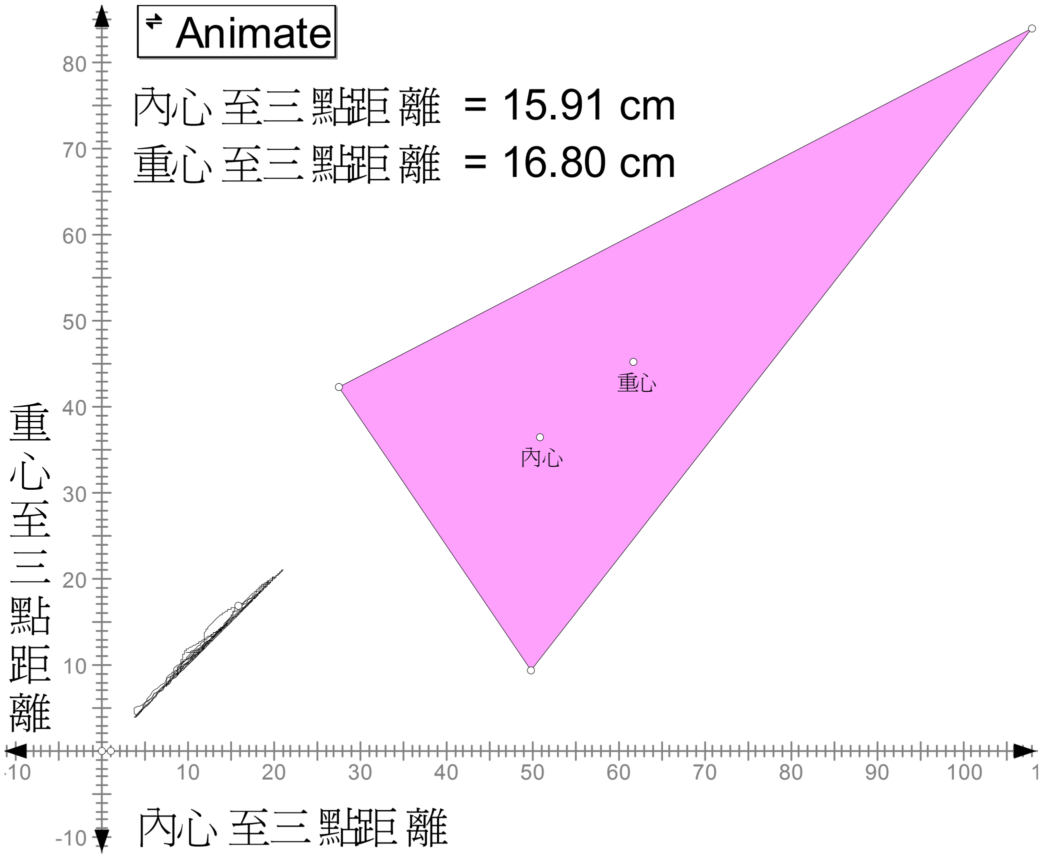
最小圓和重心判別法的關係圖(圖 13)



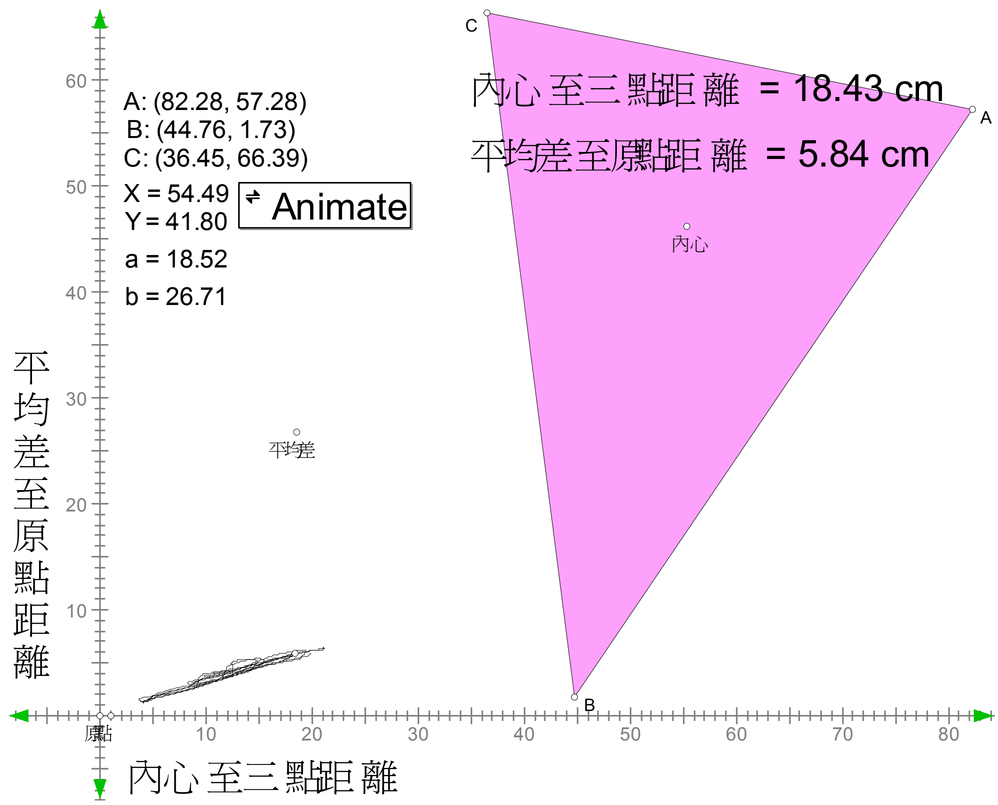
最小圓和平均差判別法的關係圖(圖 14)



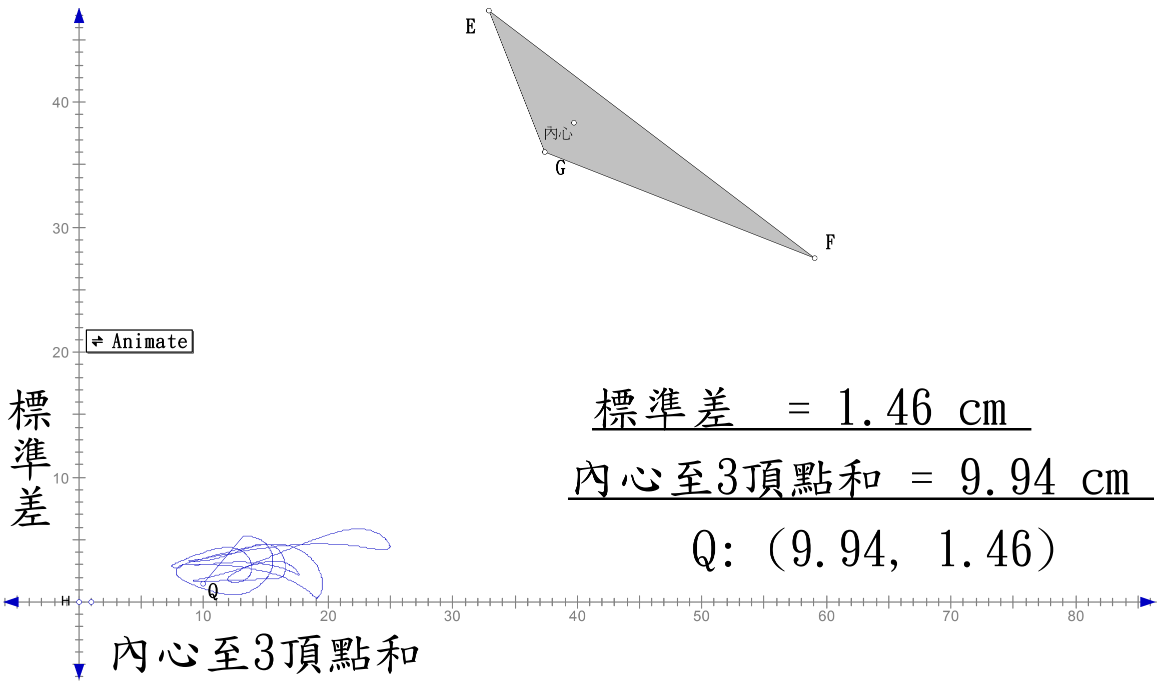
最小圓和標準差判別法的關係圖(圖 15)



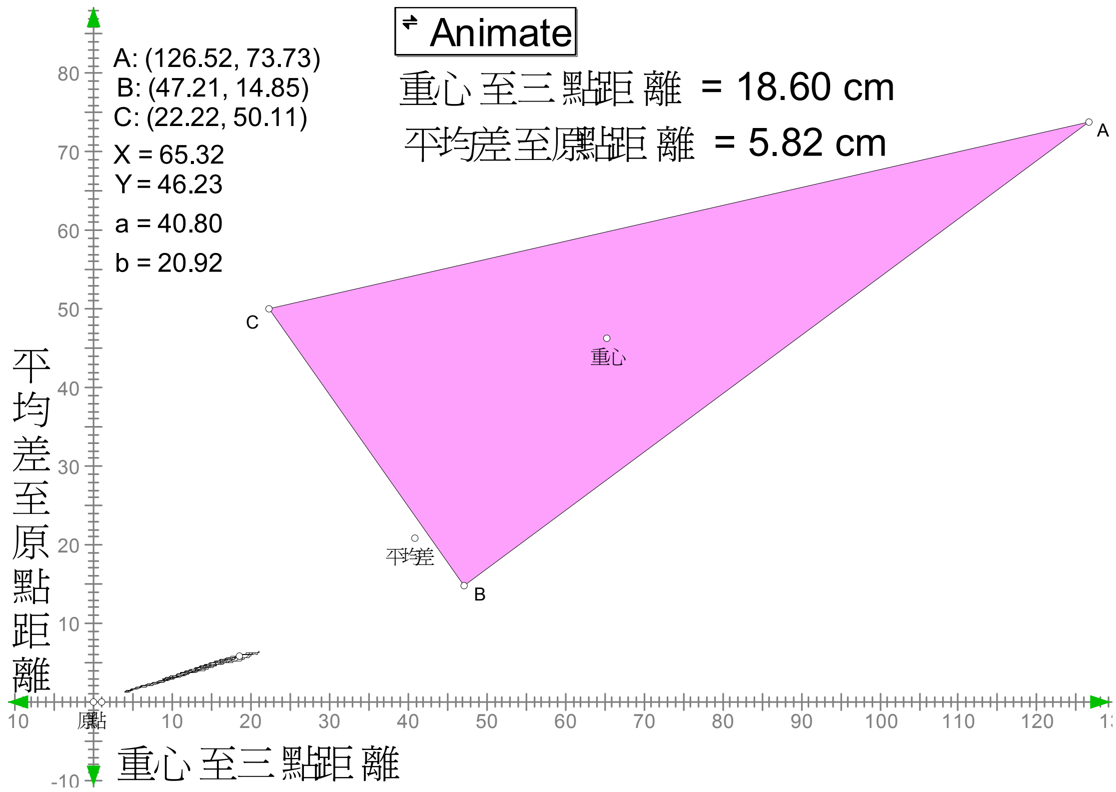
內心和重心判別法的關係圖(圖 16)



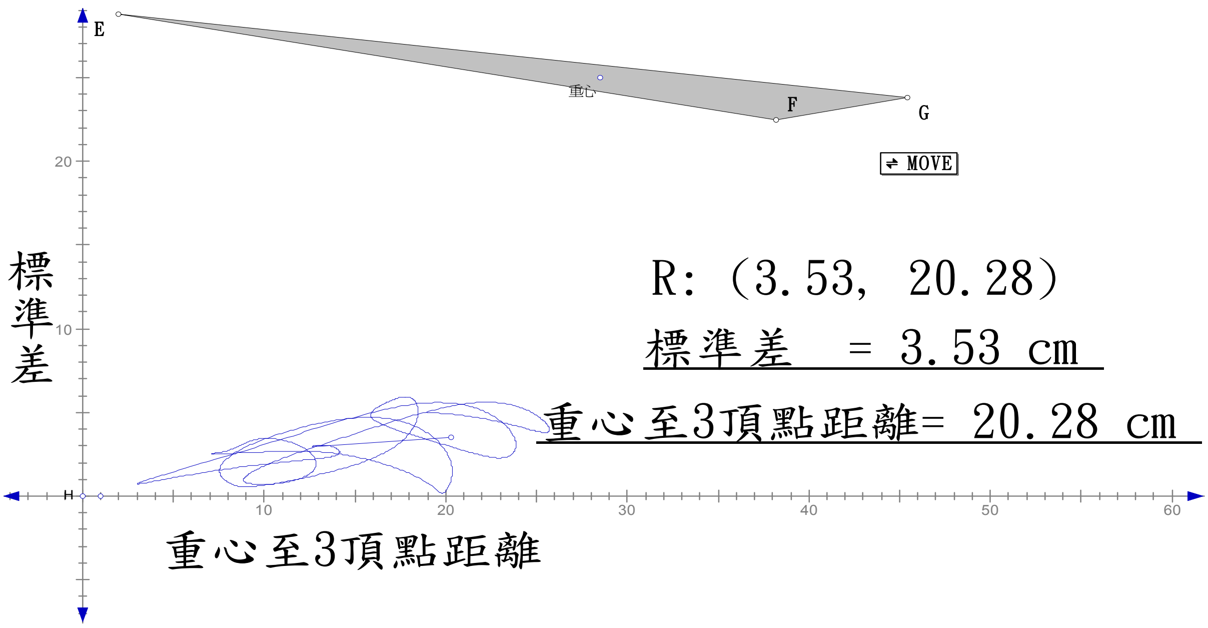
內心和平均差判別法的關係圖(圖 17)



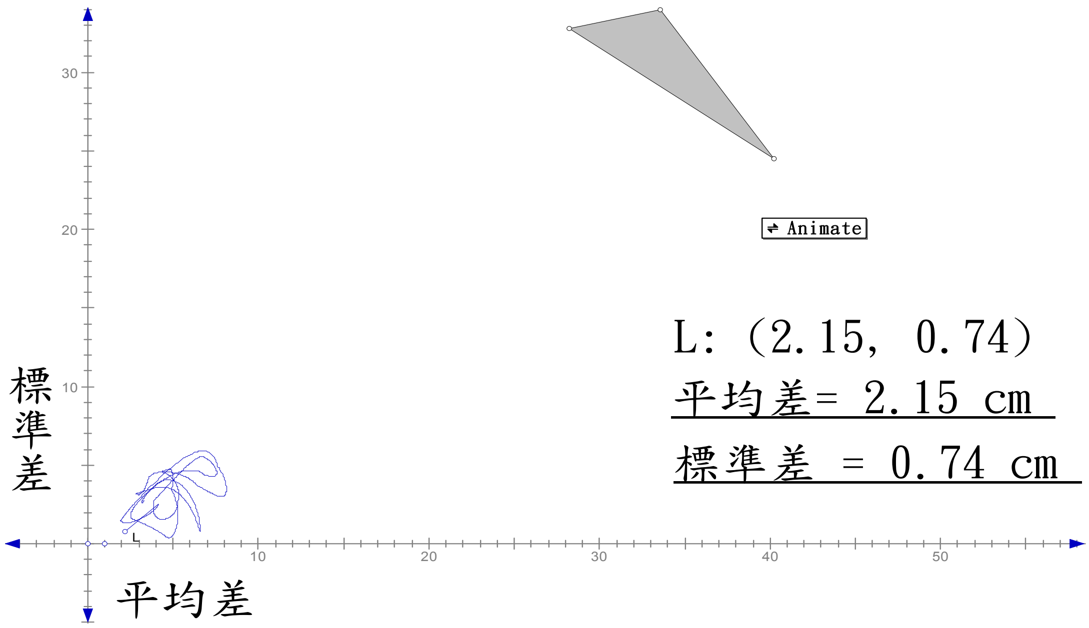
內心和標準差判別法的關係圖(圖 18)



重心和平均差判別法的關係圖(圖 19)



重心和標準差判別法的關係圖(圖 20)



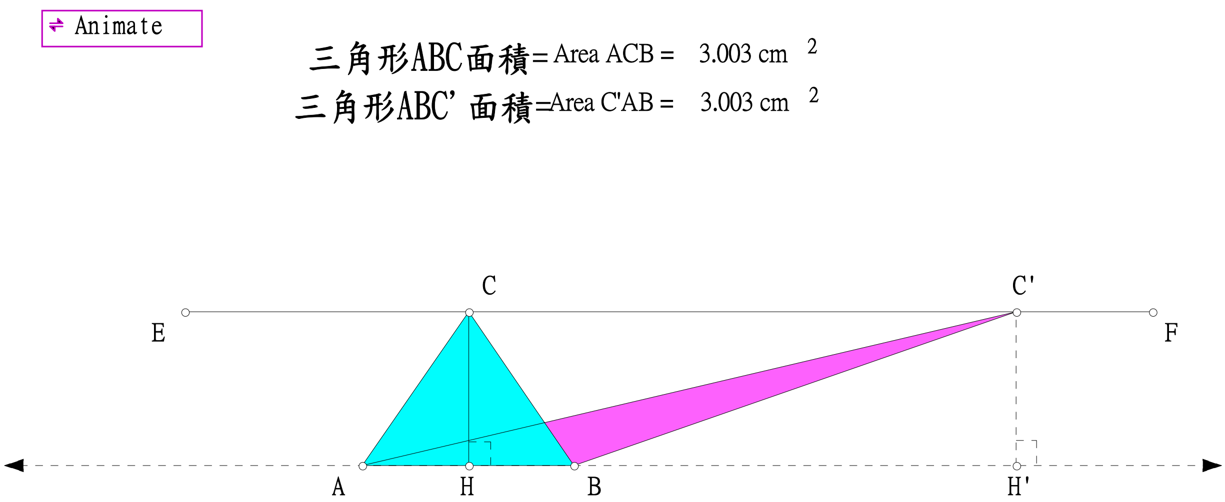
平均差和標準差判別法的關係圖(圖 21)

伍、研究結果：

一、下表是 7 種判斷法之間的相關性

	面積						
周長	低度正相關	周長					
最小圓	低度正相關	高度正相關	最小圓				
內心	低度正相關	高度正相關	高度正相關	內心			
重心	低度正相關	高度正相關	高度正相關	高度正相關	重心		
平均差	低度正相關	高度正相關	高度正相關	高度正相關	高度正相關	平均差	
標準差	低度正相關	低度正相關	低度正相關	低度正相關	低度正相關	低度正相關	標準差

二、利用面積判別的盲點有 2 個，說明如下圖：

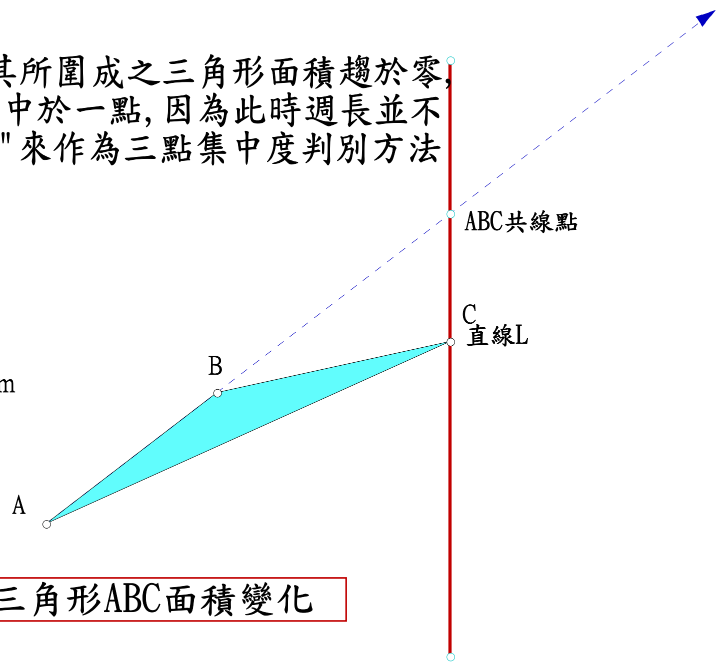


注意喔!!即使不同的三點圍成相同的面積但三點集中度卻大大不同

ABC三點若趨於共線,則其所圍成之三角形面積趨於零,但;這並不代表此三點集中於一點,因為此時週長並不為零.因此;這是用"面積"來作為三點集中度判別方法的盲點之一!!

週長=AB+BC+CA=11.991 cm

三角形ABC面積=1.947 square cm



按我兩下並注意三角形ABC面積變化

三、利用標準差來判斷會有一個盲點，說明如下圖：

利用標準差來判斷三點集中度會有盲點存在原因是若三點共圓則所計算出來之標準差爲0而此時三點並非集中於一點或者三點越接近共圓則判斷越差!!!!

$$\frac{((M - DO)^2 + (M - EO)^2 + (M - FO)^2)}{3} = 0.00 \text{ cm}^2$$

標準差 = 0.00 cm

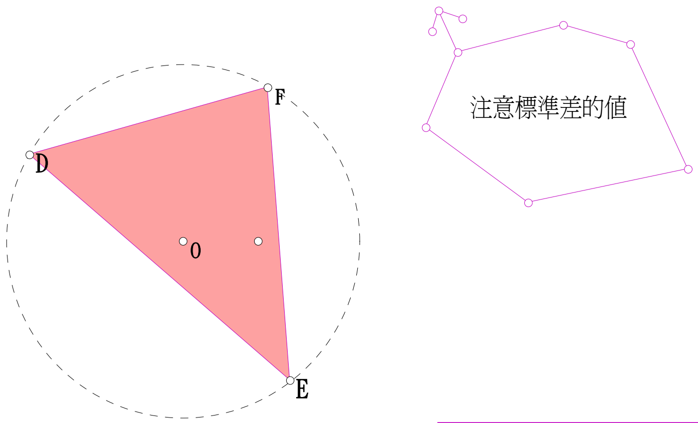
DO = 2.35 cm

EO = 2.35 cm

FO = 2.35 cm

M = 2.35 cm

周長 = 11.83 cm



按我兩下可讓圓變化喔

按我兩下DEF可以動喔

陸、討論：

一、我們找出了七種判別方法：

1、利用面積 2、利用周長 3、含三點最小圓之圓心至三點距離和
4、內心至三點距離和 5、重心至三點距離和 6、引入座標後利用三點 X、Y 座標之平均差標出一點 Q，再以 Q 點距離原點之長短來判別 7 引入座標計算三點與原點之距離，再計算三個距離值之標準差作爲判斷依據。

二、GSP 解決了取樣的困難並避免了人工取樣所造成的誤差。

三、種方法中除了”面積”與”標準差”外均能正確判斷三點集中度其中以”

利用周長”的方法最簡便、正確。

四、在 GSP 中正確的找出含三點最小圓圓心的座標是困難的，而我們找到了。

五、在 GSP 中繪圖是一種建構式的學習方式對於幾何學中基本概念的學習有很大的幫助。

柒、結論：

一、利用面積判斷會有兩個盲點。

二、利用標準差判別會有一個盲點。

三、判斷三點集中度的方法可以再增加，並利用相同的研究方式討論其公正性。

四、各個判斷方法之間的相關性雖為高度正相關但並非完全正相關，此為何種原因造成，亦是可研究的項目。

五、若增加點的數目或把問題擴展至空間、增加難度，亦是不錯的挑戰議題。

捌、參考資料：

一、張奠宙、戴再平（民 86），生活中的中學數學，九章出版，p182~183

二、國立台灣師範大學數學系網路小組編撰，The Geometer’s Sketchpad 動態幾何入門指引（GSP），

三、國立編譯館，國民中學數學第四冊

四、國立編譯館，高級中學數學第四冊