台灣二〇〇二年國際科學展覽會

科　　別：數學科

作品名稱：擬－Lucas 多項式的幾個性質

得獎獎項：數學科第三名
　　　　　香港第卅五屆聯校科學展覽會正選代表

學　　校：臺北市立建國高級中學

作　　者：郭立翔

作 者 簡 介

我是郭立翔，建國中學二年級資優班的學生。小時候常常藉由像撲克牌的遊戲中，領略「玩」數學的奧妙及樂趣。經常是想到一個好玩的題目，就試著找尋它的答案，因此，從小學到國中，科展對我來說，「玩」的成份大於實質的研究。這次是我第一次嘗試作國際科展，目的是想真正的下苦工做研究的工作，看看自己能夠完成什麼樣的作品。一個努力過的作品，無論評審的結果如何，對我來說是個很好的學習經驗。特別感謝游森棚老師與林信安老師的指導。

摘要

本篇文章從”將 a^n+b^n 分解成$(a+b)$及 ab 的非線性組合”出發，在同樣的遞迴精神下引進並定義擬-Lucas 多項式$<S_n(x)>$：

$$\boldsymbol{S_0(x)=2\ ;\ S_1(x)=x\ ;\ \ S_n(x)=x(S_{n-1}(x)-S_{n-2}(x))}$$

這個定義類似(但不同)於古典的 Lucas 多項式。我們主要的結果爲擬-Lucas 多項式$<S_n(x)>$及擬-Lucas 三角的幾個性質：

1. $S_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}x^{n-k}$

2. $S_n(x)$爲一 n 次多項式。$S_n(x)=0$ 時所有根皆爲實根：

$$\left\{x \middle| x\in 0\vee 4\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi, k=1,2,\ldots,n\right\}$$

3. 擬-Lucas 三角的任一項 $s_{n,k}$ 爲上方所有項(當作向量)和同列巴斯卡三角形第 2 項到第 k+1 項內積的相反數。

4. 擬-Lucas 三角任一列的和 $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}s_{n,k}=\begin{cases}1 & n\equiv 1,5\ (\text{mod}\,6)\\ 2 & n\equiv 0\ (\text{mod}\,6)\\ -1 & n\equiv 2,4\ (\text{mod}\,6)\\ -2 & n\equiv 3\ (\text{mod}\,6)\end{cases}$

5. 擬-Lucas 三角任一列的交錯和 $\sum_{k=0}(-1)^k s_{n,k}=l_n$ ，其中 l_n 爲第 n 個 lucas 數。

On some properties of Quasi-Lucas Polynomials

abstract

This paper originates from the nonlinear comimination of a^n+b^n by using of the "bases" ($a+b$) and ab". In the same spirit we introduce and definine the quasi-Lucas polynomials $<S_n(x)>$:

$$\boldsymbol{S_0(x)=2\ ;\ S_1(x)=x\ ;\ \ S_n(x)=x(S_{n-1}(x)-S_{n-2}(x))}$$

This definiton is similar to (but not the same as) the classic Lucas polynomials. We give some properties of $S_n(x)$ and the quasi-Lucas triangle, arranged from the coefficients of $S_n(x)$ in Pascal-like pattern. Our main results include:

1. $S_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}x^{n-k}$

2. $S_n(x)$is an n degree polynomial。All the roots of $S_n(x)=0$ are real:

$$\left\{x \middle| x=4\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi, k=1,2,\dots,n\right\}$$

3. Any term of the quasi-Lucas triangle ($s_{n,k}$) is the oppsite number of the inner product of "all the above terms(as a vector)" and "from the (k+1) term back to the second term of the Pascal triangle of the same row (as a vector)".

4. The row sum of Lucas triangle $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}s_{n,k}=\begin{cases}1 & n\equiv 1,5\ (\mathrm{mod}\,6)\\ 2 & n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,6)\\ -1 & n\equiv 2,4\ (\mathrm{mod}\,6)\\ -2 & n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,6)\end{cases}$

5. The alternating row sum of Lucas triangle $\sum_{k=0}(-1)^k s_{n,k}=l_n$ ， l_n is the n-th lucas number。

一、　研究動機

在高一課程二次方程中的”根與係數關係”中常見的基本問題是：已知兩根和 $a+b$ 和兩根積 ab,要求 a^2+b^2 和 a^3+b^3 ,a^5+b^5。我們通常利用關係式

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2)-ab(a+b),$$
$$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(ab)^2(a+b),$$

逐步可求。

然而，稍作計算可知後兩式可化爲純爲$(a+b)$及 ab 的非線性組合：

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$a^5+b^5=(a+b)^5-5ab(a+b)^3+5(ab)^2(a+b)$$

一個自然的問題是：一般情況下將 a^n+b^n 分解成$(a+b)$及 ab 的非線性組合，係數間應有一致的規律。

本篇文章將由此出發，利用同樣的遞迴關係引進並定義擬-Lucas 多項式

$$\boldsymbol{S_0(x)=2\text{；}S_1(x)=x\text{；}\ S_n(x)=x(S_{n-1}(x)-S_{n-2}(x))\text{。}}$$

這個定義與古典的 Lucas 多項式密切相關但並不相同。我們給出擬-Lucas 多項式的一些性質及相關的結果。

第三節的”研究過程及結果”之中將分成六個部份。第一部份我們將 a^n+b^n 分解成$(a+b)$及 ab 的非線性組合，求出係數間的遞迴關係。第二部份我們以同樣的遞迴關係引進並定義擬-Lucas 多項式。第三部份我們導出擬-Lucas 多項式的生成函數，從而得到係數的明顯表示式。第四部份我們證明擬-Lucas 多項式的 n 個根都是實根，而且完全求出這些根。第五部份我們證明擬-Lucas 三角形的任一項 $s_{n,k}$ 爲上方所有項(當作向量)和同列巴斯卡三角形第 2 項到第 k+1 項內積的相反數。第六部份我們證明擬-Lucas 三角形任一列的和$\in\{2,1,-1,-2\}$。最後是一些未解的問題及方向。

我們的結果可算是平行地推廣了古典的 Lucas 多項式，而所得到的性質與古典的 Lucas 多項式及第二類 Chebyshev 多項式有許多的相關。

二、　研究目的

引進並定義擬-Lucas 多項式並研究它的一些性質。

三、　研究器材

Mathematica4 運算工具

四、　研究過程及結果

(一) a^n+b^n 的分解

觀察到 $a^n+b^n=(a^{n-1}+b^{n-1})(a+b)-(a^{n-2}+b^{n-2})(ab)$，因此以此式遞迴下去可以將 a^n+b^n 寫成只含 $(a+b)$和(ab)的組合。

$$a^0+b^0=2$$
$$a^1+b^1=(a+b)$$
$$a^2+b^2=(a^1+b^1)(a+b)-(a^0+b^0)(ab)=(a+b)^2-2ab$$
$$a^3+b^3=(a^2+b^2)(a+b)-(a^1+b^1)(ab)=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$a^4+b^4=(a^3+b^3)(a+b)-(a^2+b^2)(ab)=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2(ab)^2$$
$$\cdots\cdots$$

若將係數排成三角形的形狀,就有

$s_{0,0}$	2
$s_{1,0}\ s_{1,1}$	1 0
$s_{2,0}\ s_{2,1}\ s_{2,2}$	1 –2 0
$s_{3,0}\ s_{3,1}\ s_{3,2}\ s_{3,3}$	1 –3 0 0
$s_{4,0}\ s_{4,1}\ s_{4,2}\ s_{4,3}\ s_{4,4}$	1 –4 2 0 0
$s_{5,0}\ s_{5,1}\ s_{5,2}\ s_{5,3}\ s_{5,4}\ s_{5,5}$	1 –5 5 0 0 0
$s_{6,0}\ s_{6,1}\ s_{6,2}\ s_{6,3}\ s_{6,4}\ s_{6,5}\ s_{6,6}$	1 –6 9 –2 0 0 0
$s_{7,0}\ s_{7,1}\ s_{7,2}\ s_{7,3}\ s_{7,4}\ s_{7,5}\ s_{7,6}\ s_{7,7}$	1 –7 14 –7 0 0 0 0

事實上，我們有

定理一：
將 a^n+b^n 寫成只含$(a+b)$和(ab)的組合，係數為 $s_{n,k}$。則 $s_{0,0}=2$；
$s_{n,0}=1(n\geqq 1)$；$s_{0,k}=0(n\geqq 1)$；$s_{1,k}=0(k\geqq 1)$；且 $n,k\geqq 1$ 時，

$$s_{n,k}=s_{n+1,k}+s_{n-1,k-1}$$

證明：

$a^n+b^n=s_{n,0}(a+b)^n+s_{n,1}(a+b)^{n-2}(ab)+s_{n,2}(a+b)^{n-4}(ab)^2+\ldots+s_{n,k}(a+b)^{n-2k}(ab)^k$

$(a^{n-1}+b^{n-1})(\mathrm{a+b})=[s_{n-1,0}(a+b)^{n-1}+s_{n-1,1}(a+b)^{n-3}(ab)+s_{n-1,2}(a+b)^{n-5}(ab)^2+\ldots$
$+s_{n-1,k}(a+b)^{n-2k-1}(ab)^{\mathrm{k}}+\ldots](a+b)$
$=s_{n-1,0}(a+b)^n+s_{n-1,1}(a+b)^{n-2}(ab)+s_{n-1,2}(a+b)^{n-4}(ab)^2+\ldots$
$+s_{n-1,k}(a+b)^{n-2k}(ab)^{\mathrm{k}}+\ldots$

$(a^{n-2}+b^{n-2})(\mathrm{ab})=[s_{n-2,0}(a+b)^{n-2}+s_{n-2,1}(a+b)^{n-4}(ab)+s_{n-2,2}(a+b)^{n-6}(ab)^2+\ldots$
$+s_{n-2,k-1}(a+b)^{n-2k}(ab)^{\mathrm{k-1}}+\ldots](\mathrm{ab})$
$=s_{n-2,0}(a+b)^{n-2}(\mathrm{ab})+s_{n-2,1}(a+b)^{n-4}(ab)^2+s_{n-2,2}(a+b)^{n-6}(ab)^3+\ldots$
$+s_{n-2,k-1}(a+b)^{n-2k}(ab)^{\mathrm{k}}+\ldots$

由 $a^n+b^n=(a^{n-1}+b^{n-1})(a+b)-(a^{n-2}+b^{n-2})(ab)$，比較係數得:

$s_{n,0}=s_{n-1,0}$(已知)

$s_{n,1}=s_{n-1,1}-s_{n-2,0}$

$s_{n,2}=s_{n-1,2}-s_{n-2,2}$

……

$s_{n,k}=s_{n-1,k}-s_{n-2,k-1}$

移項後為 $s_{n-1,k}=s_{n,k}+s_{n-2,k-1}$，得証。

(二) 擬-Lucas 多項式的定義：

現在我們令 $f_n(x,y)=f_n=a^n+b^n$, $x=(a+b)$, $y=(ab)$ ，可得 $f_n=xf_{n-1}-yf_{n-2}$。於是上面的分解可寫成：

$$f_0=2$$
$$f_1=x$$
$$f_2=xf_1-yf_0=x^2-2y$$
$$f_3=xf_2-yf_1=x^3-3xy$$
$$f_4=xf_3-yf_2=x^4-4x^2y+2y^2$$
$$\cdots$$
$$f_n=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} s_{n,k}x^{n-2k}y^k$$

這種組成方式是以 x^n 爲首項，依 y 項次數升冪排列而成的，但 x 與 y 的次數和卻是逐項遞減的。

由於我們只關心係數，因此令 $x=y$。當 $x=y$ 時，令 $f_n=S_n(x)$,於是得到：

$$S_0(x)=2$$
$$S_1(x)=x$$
$$S_2(x)=x^2-2x$$
$$S_3(x)=x^3-3x^2$$
$$S_4(x)=x^4-4x^3+2x^2$$
$$\cdots\cdots$$
$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} s_{n,k}x^{n-k}$$

於是原來的遞迴關係就變成了 $S_n(x)=x[S_{n-1}(x)-S_{n-2}(x)]$。我們據此定義擬 Lucas 多項式：

定義：
令 $S_0(x)=2$；$S_1(x)=x$；

$$S_n(x)=x[S_{n-1}(x)-S_{n-2}(x)] \quad (n \geq 2) 。$$

稱 $S_n(x)$爲擬 Lucas 多項式(Quasi-Lucas Polynomials)。

注意到古典的 Lucas 多項式 $L_n(x)$以 $L_0(x)=2$, $L_1(x)=x$ ，$L_n(x)=xL_{n-1}(x)+L_{n-2}(x)$定義[**1**]。我們這裡的 $S_n(x)$有點類似已知的 Lucas 多項式，但不相同。故 $S_n(x)$我們稱其爲「擬-Lucas 多項式(Quasi-Lucas Polynomials)」，而以擬-Lucas 多項式的各項係數所構成的三角形（如前）我們稱其爲「擬-Lucas 三角」。特別，在擬-Lucas 三角中與 $s_{n,k}$之 n 值均相同的橫列定義爲列；與 $s_{n,k}$之 k 值均相同的右上到左下的斜線定義爲排。

（三）擬-Lucas 多項式的各項係數

由定理一，擬-Lucas 多項式的係數有這個遞迴關係：$s_{n,k}=s_{n+1,k}+s_{n-1,k-1}$ $(0\leqq k\leqq n)$ ，因此可用生成函數將係數的一般式求出來。

引理二：

令$[x^n]f(x)$表$f(x)$的x^n係數。則擬-Lucas 三角第k排的係數爲

$$[\mathrm{x}^{\mathrm{n}}](-1)^k(\frac{2-x}{1-x})(\frac{x^2}{1-x})^k \text{ 。}$$

證明：

由遞迴關係馬上有

$$\sum_{n=1,k=1} s_{n-1,k}x^n y^k + \sum_{n=1,k=1} s_{n-1,k-1}x^n y^k = \sum_{n=1,k=1} s_{n,k}x^n y^k$$

令 $F(x,y)=\sum_{n=0,k=0} s_{n,k}x^n y^k$ ，則

$$\sum_{n=1,k=1} s_{n+1,k}x^n y^k = \frac{1}{x}\sum_{n=1,k=1} s_{n+1,k}x^{n+1}y^k = \frac{1}{x}[F(x,y)-\sum_{n=0} s_{n,0}x^n]$$

$$\sum_{n=1,k=1} s_{n-1,k-1}x^n y^k = xy\sum_{n=1,k=1} s_{n-1,k-1}x^{n-1}y^{k-1} = xyF(x,y)$$

$$\sum_{n=1,k=1} s_{n,k}x^n y^k = F(x,y)-\sum_{n=0} s_{n,0}x^n$$

綜合上三式得：

$$\frac{1}{x}[F(x,y)-\sum_{n=0} s_{n,0}x^n]+xyF(x,y)=F(x,y)-\sum_{n=0} s_{n,0}x^n$$

整理得 $F(x,y)(\frac{1}{x}+xy-1)=\sum_{n=0} s_{n,0}x^n(\frac{1}{x}-1)$。又由於$\sum_{n=0} s_{n,0}x^n=\frac{2-x}{1-x}$ ，故得

$F(x,y)=\dfrac{2-x}{1+x^2y-x}$ 。

再透過修改初值 $s_{0,0}=2$；$s_{n,0}=1(n>1)$；$s_{0,k}=1(k>1)$來修正**[2]**。

利用引理二，我們得本節的主定理：

定理三：

(1) $S_n(x)=S_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\left(2C_k^{n-k}-C_k^{n-k-1}\right)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}x^{n-k}$

(2) $s_{n,k}=(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}$

證明：

$k=0$ 時係數爲 $[x^n]\frac{2-x}{1-x}=[x^n]\frac{2}{1-x}-[x^n]\frac{x}{1-x}=2[x^n]\frac{1}{1-x}-[x^{n-1}]\frac{1}{1-x}$

$=2[x^n](1-x)^{-1}-[x^{n-1}](1-x)^{-1}$

$$=2C_n^{-1}(-1)^n-C_{n-1}^{-1}(-1)^{n-1}$$
$$=2C_n^{1+n-1}(-1)^n(-1)^n-C_{n-1}^{1+n-1-1}(-1)^{n-1}(-1)^{n-1}$$
$$=2C_0^n-C_0^{n-1}$$

同樣的方式可得：k=1 時係數爲 $-[x^n](\frac{2-x}{1-x})(\frac{x^2}{1-x})=-(2C_1^{n-1}-C_1^{n-2})$

k=2 時係數爲 $[x^n](\frac{2-x}{1-x})(\frac{x^2}{1-x})^2=2C_2^{n-2}-C_2^{n-2}$

……

k=$[\frac{n}{2}]$時係數爲 $[x^n](-1)^{[\frac{n}{2}]}(\frac{2-x}{1-x})(\frac{x^2}{1-x})^{[\frac{k}{2}]}=(-1)^n(2C_k^{n-k}-C_k^{n-k-1})$

若 $k\geqq[\frac{n}{2}]$ ，則$(n\text{-}k)<k$ $\rightarrow$ $2C_k^{n-k}=C_k^{n-k-1}=0$

故 $S_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\left(2C_k^{n-k}-C_k^{n-k-1}\right)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}x^{n-k}$

且 $s_{n,k}=(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}$ ，得證。

（四）擬-Lucas 多項式 $S_n(x)$的根：

現在我們有了一系列的多項式，討論它的根自然是基本的工作。以下簡寫 $S_n(x)$略爲 S_n。經過一些計算，我們有這節的主定理：

定理四：

S_n 的所有根均爲實數根，它所有的根爲

$$\left\{x\middle|x\in 0\vee 4\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi, k=1,2,\ldots,n\right\}$$

證明：

由 $S_n=x(S_{n-1}-S_{n-2})$，令 $x=x_0$, 得 $S_n=x_0(S_{n-1}-S_{n-2})$。由特徵方程：$X^2=x_0(X-1)$ $\rightarrow$ $X^2-x_0X+x_0=0$，

解得 $X=\frac{x_0\pm\sqrt{x_0{}^2-4x_0}}{2}$ 。故

$$S_n=\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0{}^2-4x_0}}{2}\right)^n+\left(\frac{x_0-\sqrt{x_0{}^2-4x_0}}{2}\right)^n 。$$

即

$$S_n=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{x_0+\sqrt{x_0{}^2-4x_0}}{2}\right)^n+\left(\frac{x_0-\sqrt{x_0{}^2-4x_0}}{2}\right)^n=0 。$$

若 $x_0^2-4x_0>0$　則 $S_n\neq 0$，所以

$$S_n=(\sqrt{x_0})^n\left[\left(\frac{\sqrt{x_0}}{2}+\frac{\sqrt{4-x_0}}{2}i\right)^n+\left(\frac{\sqrt{x_0}}{2}-\frac{\sqrt{4-x_0}}{2}i\right)^n\right]=(\sqrt{x_0})^n(e^{in\theta}+e^{-in\theta})=0$$

故

$$(\sqrt{x_0})^n=0 \text{ 或 } (e^{in\theta}+e^{-in\theta})=0$$

$(\sqrt{x_0})^n=0$ 得 $x_0=0$。$e^{in\theta}+e^{-in\theta}=0$ 得 $\cos n\theta=-\cos n\theta$，即 $\cos n\theta=0$。解 $n\theta=\frac{2k-1}{2}\pi,\ k=1,2,\ldots,n$ 得

$$\theta=\frac{2k-1}{2n}\pi,\ k=1,2,\ldots,n$$

故根爲

$$\left\{x \middle| x\in 0\vee 4\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi, k=1,2,...,n\right\}，$$

得證。

注意到上式中根有一半是 0，且因 $\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi=\cos^2\frac{2n-(2k-1)}{2n}\pi$，必須刪去重複的部分。

這個結果和古典的 Lucas 多項式完全不同。由**[1]**，我們知道古典的 Lucas 多項式的所有根爲 $\{x\mid x\in 2i\cos\frac{2k-1}{2n}\pi, k=1,2,...,n\}$，這些根除了 0 以外均爲複數根，而擬-Lucas 多項式中的根均爲實數。另外，也由於 $\cos^2$ 值的關係，$S_2{}^t$ 的根形式都很漂亮。例如 S_8 的 8 個根爲

$$0,0,0,0,(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}),(2+\sqrt{2-\sqrt{2}}),(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}),(2-\sqrt{2-\sqrt{2}})$$

（五）擬-Lucas 三角係數與 Pascal 三角的內積

在這一節中，我們得出擬-Lucas 的係數的一個新的性質。

根據觀察，我們發現在擬-Lucas 三角中的任一數，都可以由其正上方的所有項（當作向量）與 Pascal 三角同行中第 2 項到第 k+1 項內積而成，但其值爲相反數。

這樣敘述好像有點複雜，先舉幾個例子：

Quasi-Lucas Triangle:	Pascal Triangle:
1	1
<u>**1**</u> 0	1 1
1 *–2* 0	1 2 1
1 <u>**–3**</u> 0 0	1 3 3 1
1 –4 *2* 0 0	1 4 6 4 1
1 –5 <u>**5**</u> 0 0 0	1 5 10 10 5 1
1 –6 9 *–2* 0 0 0	1 *6 15* *20* 15 6 1
1 –7 14 <u>–7</u> 0 0 0 0	1 <u>**7 21**</u> <u>**35**</u> 35 21 7 1

$s_{7,3}= -7= -[5\times7+(-3)\times21+1\times35]$　（底線部分）
$s_{6,3}= -2= -[2\times6+(-2)\times15+1\times20]$　（斜體部分）

注意到擬-Lucas 三角的頂端變了，從本來的常數 2 變為 1。因為在這個特殊性質中，我們必須先訂定 $s_{n,0}$ 的起始值均為 1，此性質才成立。

定理五：
在擬-Lucas 三角中的任一數，都可以由其正上方的所有項（當作向量）與 Pascal 三角同行中第 2 項到第 k+1 項內積而成，但其值為相反數。即：

$$(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}=-\sum_{i=1}^{k}[(-1)^{k-i}(\frac{n-2i}{n-k-i})C_{k-i}^{n-k-i}]C_i^n$$

證明：

我們先列出 $s_{n,k}$ 一般式：$(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}$ 。在 $s_{n,k}$ 上方的項，每上去一項時 n 值會少 2，k 值會少 1，直到 k=0 為止。而這些項又和 Pascal 中的二項式係數內積，因此我們列出內積的一般式：$\sum_{i=1}^{k}[(-1)^{k-i}(\frac{n-2i}{n-k-i})C_{k-i}^{n-k-i}]C_i^n$ 。

因此只要證明

$$(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}=-\sum_{i=1}^{k}[(-1)^{k-i}(\frac{n-2i}{n-k-i})C_{k-i}^{n-k-i}]C_i^n$$

移項之後，即可寫成

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\frac{n-2i}{n-k-i})C_i^n C_{n-2k}^{n-k-i}=0,(0<k\le\frac{n}{2})$$

先討論 $0<k<\frac{n}{2}$的情況：
利用數學歸納法，先證明當 n=3, k=1 時，得

$\frac{3}{2}C_0^3C_1^2-\frac{1}{1}C_1^3C_1^1=0$　，成立。

設當 n=m 時，

$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\frac{m-2i}{m-k-i})C_i^m C_{m-2k}^{m-k-i}=0,(0<k\le\frac{m}{2})$　成立，

則當 n=m+1 時，

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\frac{m+1-2i}{m+1-k-i})C_i^{m+1}C_{m+1-2k}^{m+1-k-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\frac{m+1-2i}{m+1-k-i})C_i^m C_{m+1-2k}^{m+1-k-i}+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i(\frac{m+1-2i}{m+1-k-i})C_{i-1}^m C_{m+1-2k}^{m+1-k-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\frac{m+1-2i}{m+1-k-i})C_i^m C_{m+1-2k}^{m+1-k-i}-\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(\frac{m-1-2i}{m-k-i})C_i^m C_{m+1-2k}^{m-k-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_i^m\left(\frac{m+1-2i}{m+1-k-i}C_{m+1-2k}^{m+1-k-i}-\frac{m-1-2i}{m-k-i}C_{m+1-2k}^{m-k-i}\right)+(-1)^k\frac{m+1-2k}{m+1-2k}C_k^m C_{m+1-2k}^{m+1-2k}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_i^m C_{m-2k}^{m-k-i}\left(\frac{m+1-2i}{m+1-k-i}\cdot\frac{m+1-k-i}{m+1-2k}-\frac{m-1-2i}{m-k-i}\cdot\frac{k-i}{m+1-2k}\right)$$

$$+(-1)^k\frac{m-2k}{m-2k}C_k^m C_{m-2k}^{m-2k}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{m-2i}{m-k-i}C_i^m C_{m-2k}^{m-k-i}+(-1)^k\frac{m-2k}{m-2k}C_i^m C_{m-2k}^{m-2k}$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\frac{m-2i}{m-k-i})C_i^m C_{m-2k}^{m-k-i}$$

$= 0$ ，成立。

再討論 n=2k 的情況：

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\frac{n-2i}{n-k-i})C_i^n C_{n-2k}^{n-k-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^k\frac{2k-2i}{k-i}C_i^{2k}C_0^{k-i}$$

$$= 2\sum_{i=0}^{k}(-1)^k C_i^{2k}=0$$ ，成立，故得證。

（六）擬-Lucas 三角的列係數總和及交錯和

關於擬-Lucas 三角的列係數總和，也有一個很好的關係。

定理六：

擬-Lucas 三角中每一列係數的和都是 1,2,–1 或–2。實際上，令[S_n]=第 n 列係數的和，則：

$$[S_n]=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}s_{n,k}=\begin{cases}1 & n\equiv 1,5\ (\mathrm{mod}\,6)\\ 2 & n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,6)\\ -1 & n\equiv 2,4\ (\mathrm{mod}\,6)\\ -2 & n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,6)\end{cases}$$

證明：

係數一般式：$s_{n,k}=(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}$

$$[S_n]=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}s_{n,k}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}$$

將上式利用 Mathematica4 求和，過程及結果如下：

In[1]= $\mathrm{Sum}\left[-1^k\frac{n}{n-k}\mathrm{Binomial}[n-k,k],\ \{k,0,\frac{n}{2}\}\right]$

Out[1]= $2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{n\pi}{3}\right]$

因此將 n 分別代入 $6t, 6t+1, 6t+2, 6t+3, 6t+4, 6t+5$ 時
其值分別爲 2, 1, -1, -2, -1, 1，得證。

此外順帶一提的是，古典的 Lucas 三角形列係數總和就是 Lucas 數**[1]**。因爲擬-Lucas 三角的各項係數和古典的 Lucas 三角形各項係數差了一個 $(-1)^k$，因此順便我們得到擬-Lucas 三角的列係數的交錯和就是 Lucas 數。我們直接列出結果：

定理七：
擬-Lucas 三角的列係數的交錯和就是 Lucas 數 l_n：

$$\sum_{k=0}(-1)^k s_{n,k} = l_n$$

五、 討論

擬-Lucas 多項式可說是新的一類多項式，且它與古典的 Lucas 多項式有密切的關連。至今，我們有兩個組合上的結果（定理五，定理六），和一個分析上的結果（定理三）。我們相信接下來還有很多其它的性質。舉例來說，擬-Lucas 多項式的函數圖形，其他等式，和 Chebyshev 多項式的關聯，以及擬-Fibonacci 多項式乃至於一般的遞迴多項式等等。這些是我們接下來的計畫和目標。

古典的 Lucas 多項式在數學上有很大的用處，與很多的數學領域都有關連。擬-Lucas 多項式應該也有類似的結果。

六、 結論

1. 擬-Lucas 多項式的一般式爲：$S_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}x^{n-k}$

   一般項爲：$s_{n,k}=(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k}$
2. 擬-Lucas 多項式 $S_n(x)$所有根皆爲實根，其根爲：

   $$\left\{x \,\middle|\, x\in 0 \vee 4\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi, k=1,2,...,n\right\}$$
3. 擬-Lucas 三角的任一項 $s_{n,k}$ 爲上方所有項(當作向量)和同行 Pascal 三角第 2 項到第 k+1 項內積的相反數。

   $$(-1)^k(\frac{n}{n-k})C_k^{n-k} = -\sum_{i=1}^{k}[(-1)^{k-i}(\frac{n-2i}{n-k-i})C_{k-i}^{n-k-i}]C_i^n$$
4. 擬-Lucas 三角任一列的和$[S_n]\in\{2,1,-1,-2\}$，且：$[S_n]=\begin{cases}1 & n\equiv 1,5 \pmod 6\\ 2 & n\equiv 0 \pmod 6\\ -1 & n\equiv 2,4 \pmod 6\\ -2 & n\equiv 3 \pmod 6\end{cases}$

七、　參考資料

[1] A. Lupas，A Guide of Fibonacci and Lucas Polynomials，Octogon，*Math,Magazine*，**7.1**(1999)，2-12
[2] L.W. Shapiro，S.Getu，W.J. Woan，and L.C. Woodson，The Riordan Group，*Discrete Appl. Math.*，**98**(1001)，193-206

評　　　語

（1）作者要弄清楚 $x^n f(x)$ 的定義及 formal power series 之關係。

（2）集合之表示 $\{x \mid x \in O\ V\ 4\cos^2 2k\text{-}1/2n,\ k=1,2,\cdots,n\}$甚爲不妥！

（3）考慮利用 Mathematioa 來推導型如 $a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2(ab)^2$ 之展開。