台灣二〇〇二年國際科學展覽會

科　　別：數學科

作品名稱：形內與形外

學　　校：國立臺灣師範大學附屬高中

作　　者：張家齊

作 者 簡 介

我是張家齊,今年就讀於師大附中二年級,我的興趣是音樂,橋牌,還有數學。記得,從小學三年級的時候開始,爸爸就教我寫用輾轉相除法求最大公因數的電腦程式,從此之後,我開始喜歡上程式的一些數學的思維;記得小三也是我第一次參加校內科展,雖然當時沒得獎,不過我不曾氣餒,而且之後我年年都不曾在校內科展缺席過。並且很高興我能在福和國中遇到一個很好的數學老師,國中三年,他給了我許許多多數學問題,讓我能學習一些分析解題的方法,同時也使我對數學產生極大的興趣;上了高中後,我常常覺得:發現一個從沒想過的問題,往往比解決一個問題還難;因而高中時常常會想出一些怪問題,也因為那些問題,我接觸了一些之前從沒接觸過的數學領域。很感謝之前培育我的各位老師及我爸爸,當然也非常感謝附中的林雲壽老師,使我有機會參加本次的國際科展。

中英文作品摘要

● 中文摘要:

在這篇研究報告中,我用了三種觀點來推廣幾何中的反演變換,首先,把反演變換視爲是一種圓內與圓外的一種 1-1 且 onto 的映射,第一種推廣,是將變換中心移到圓心以外的圓內的地方,馬上我們得到一個結論「反演半徑會隨著動點而改變」,接著,我們實驗了一下反演變換用有的一些性質,保角性,保圓性,…等在這個變換中是否依然存在;接著我們用第二種方法來推廣反演變換,我們將邊界的形狀由圓改成別的形狀(如三角形,四邊形…等等),然後也試試看在這種變換之下是否還擁有反演變換的一些性質; 第三種推廣,則是在研究的過程中,我發現了一種新的幾變換,承接第一種推廣,我們將原先爲定點的變換中心改爲動點,將原先的動點改爲定點,做出來的一種新變換。

● 英文摘要(Abstract):

In this study，a new geometric inversive tranfomation through three points is discovered 。Here is the main result：(1)The first ， onto cycle of inside and outside can be proved under invasive transformation . It is changed moving the center from center of cycle，we can get a new “ Inversive riandus can be changed by moving drop. (2) We hope to find the answer to this problem by experiment ，it is exist with the inversive Properties. Then we can change border shape of the cycle to triangle，rectangle ……etc. （3）A new geometric transformation is discovered，a fixed drop can be changed moving drop，then the first moving drop shifted the fixed drop. This leads to a new construction of the new transformation .

研究動機

有幾次看到一些幾何的書上寫關於幾何上反演變換的一些性質,曾經想過反演電換好像透過了那個圓心將圓外的東西轉到圓內,並且有保角及保圓等性質,如果今天我將反演中心移開圓心的話,那這些性質還是否存在呢?

研究目的

一、探討當反演中心移開圓新時的像的變化
二、探討當外邊界形狀改變時的像的變化
三、探討形外圖形透過這個變換函數變換到形內的狀況
四、探討半徑函數與項的關係及像與邊界形狀的關係
五、探討當中心在形內運動時,所造成像的連續變化情況
六、探討當變換中的定點變爲動點動點變爲定點時的狀況

研究方法及過程

■ 引理一: (反演變換)

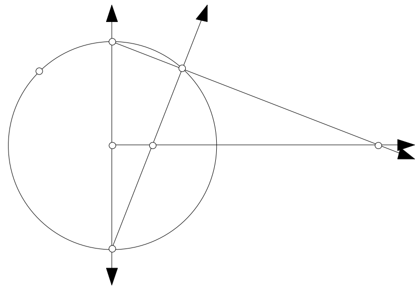
這是一個大家所熟之的保角變換,透過一個圓 O,將一個圓外的點轉到圓內

定義為: $\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$,p 和 p'互為關於圓 O 的反演點

在利用定義在平面座標上導出一個反演函數 f

$$f:(p,q)\to(\frac{r^2p}{p^2+q^2},\frac{r^2q}{p^2+q^2})$$

將(p,q)映 B 射到$(\frac{r^2p}{p^2+q^2},\frac{r^2q}{p^2+q^2})$, $f(p,q)=(\frac{r^2p}{p^2+q^2},\frac{r^2q}{p^2+q^2})$ 且



$f(\frac{r^2p}{p^2+q^2},\frac{r^2q}{p^2+q^2})=(p,q)$,也就是 $f\circ f(p,q)=(p,q)$ 如圖所示

■ 引理二:「實數軸上的任一開區間(a,b)或閉區間$[a,b]$都等價於 R」; 其實這個定理的原始型應該是$[0,1]\sim R$;我們都知道在集合論上等價的定義是指兩個集合的基數相等,而無限集基數相等的定義就是能構造出一個函數由 $A\xrightarrow{1-1\text{且onto}}B$,才可以說$|A|=|B|$;才可以說 A 等價 B。

為證明$[0,1]\sim R$,我們利用 $y=\tan(\frac{\pi}{2}(2x-1))$ 即可馬上得証,同理,愈證明$[a,b]\sim R$,只需利用 $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{a+b}{a-b}x-\frac{2}{a-b}\right)\right)$這個函數,也是可以得証的。其實反演就有點像是把一個區間的點和一條射線上的點相對應就有點像這種類似的對應法則,只是在一個圓周上每點到和圓心所成的區間都一樣大罷了,下面我們會討論中心不再圓心上的時候,也就是每個區間不一樣大的情況。

■ 引理三:

在複數平面上的,中心在 a 半徑為 r 的反演變換 $I:C\to C$ 可用以下函數表示:

$$I(z)=\frac{r^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a$$

證明:

根據反演變換的定義我們有:$|I(z)-a|=\frac{r^2}{|z-a|}=\frac{r^2}{|\bar{z}-\bar{a}|}$ 因為 z,和 I(z)和 a 三點共線;

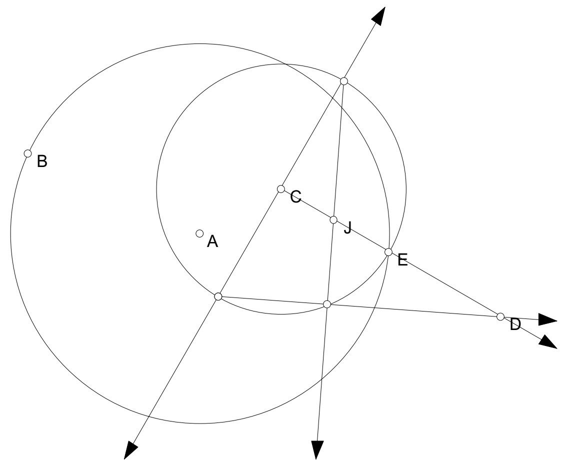
所以，$z-a$和$I(z)-a$和原點三點共線,所以$z-a$和$I(z)-a$的幅角必須相同,然而$I(z)-a$和$\bar{z}-\bar{a}$的幅角也只差一個正負號罷了,根據三角複數的乘法規則,我們可以得到:$(I(z)-a)(\bar{z}-\bar{a})=|I(z)-a||\bar{z}-\bar{a}|(\cos\theta+i\sin\theta)$和

$|I(z)-a|=\dfrac{r^2}{|z-a|}=\dfrac{r^2}{|\bar{z}-\bar{a}|}$聯立可解出$I(z)=\dfrac{r^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a$

透過複數的運算功能使的再之後的一些運算變的簡單多了

■ 想法一:將中心移開圓心的一個新的形內與形外的變換,假設原點(0,0)為中心,一包含原點中心在(h,k)的圓方程式為$(x-h)^2+(y-k)^2=m^2$為邊界,我們定義平面上一點$X(p,q)$的轉換函數為:

$$F:(p,q)\longrightarrow\left(\frac{[R(p,q)]^2 p}{p^2+q^2},\frac{[R(p,q)]^2 q}{p^2+q^2}\right)$$



其中的 R 為反演員的半徑,由於中心不在圓心,所以半徑會隨著$\overleftrightarrow{OX}$與圓$(x-h)^2+(y-k)^2=m^2$所交的點和原點的距離不同而有所不同。如圖所示,圖中的 A 為圓心,$\overline{AB}=m$,C 為(h,k)點,$\overline{CE}=R(p,q)$,透過$F(p,q)$將$D(p,q)$映到

$J\left(\dfrac{[R(p,q)]^2 p}{p^2+q^2},\dfrac{[R(p,q)]^2 q}{p^2+q^2}\right)$;而且透過上述的座標係我們也可以把$R(p,q)$求出來

$$R(p,q)=\frac{1}{2(p^2+q^2)}\sqrt{\begin{aligned}&p^2\left(2hp+2qk+\frac{2p\sqrt{2hpqk-k^2p^2+m^2p^2-q^2h^2+q^2m^2}}{p}\right)+\\&q^2\left(2hp+2qk+\frac{2q\sqrt{2hpqk-k^2p^2+m^2p^2-q^2h^2+q^2m^2}}{q}\right)\end{aligned}}$$

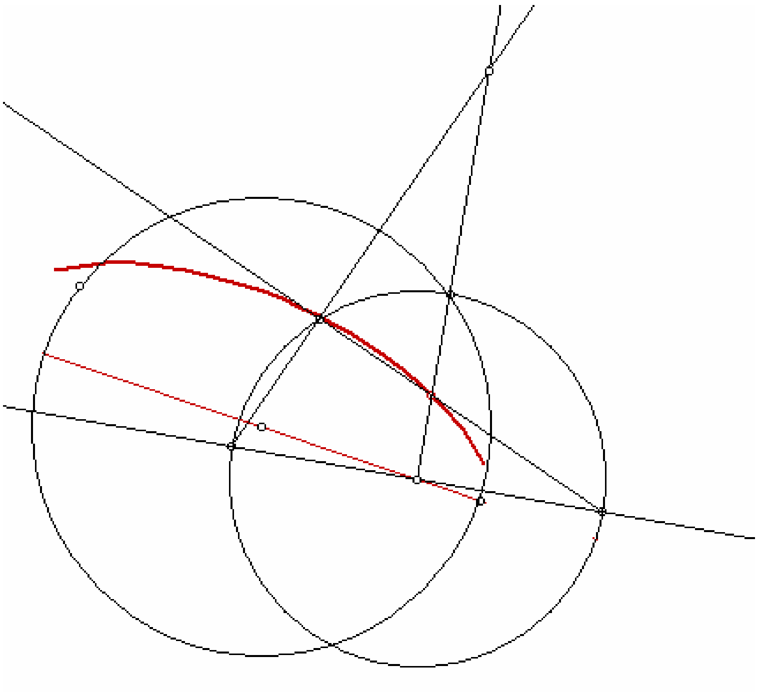
同樣的我們也可以證明$F(p,q)$是 1-1 且 onto 的,而且也可以證明,對平面上任一點(p,q)都有$F\circ F(p,q)=(p,q)$的性質。
我們可以將之前所說的反演視為是這種新變換當$(h,k)=(0,0)$且$R(0,0)$的一種特

例。

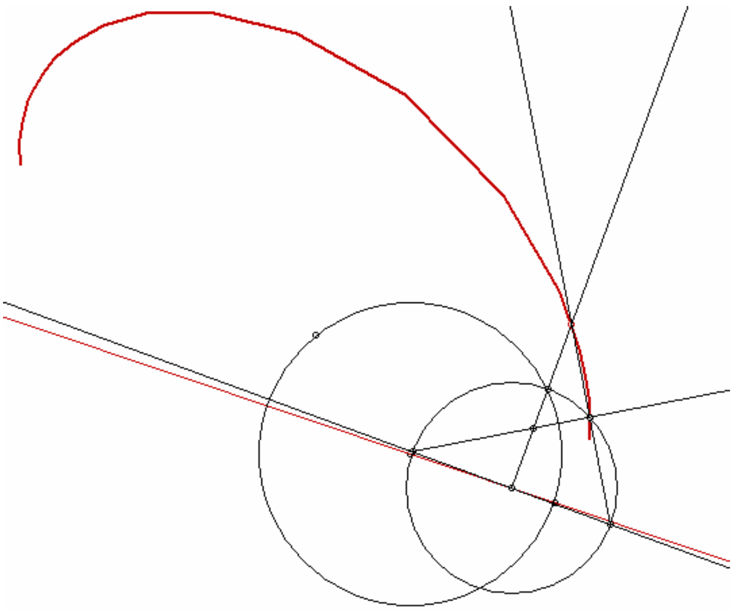
■ 想法二:當中心在一條直徑上做連續移動時:

下兩圖為,固定一點時,中心在邊界圓的一直徑上運動時,該固定點之變換點所留下之軌跡,這個軌跡可以代表著當中心離邊界圓圓心遠近時,平面上某一點的形內(或形外)變換點的變換情形,

定點在外的情況:圓心在直徑上移動的同時,$R(p,q)$也會隨之而改變因而轉換點也跟著移動,所留下的軌跡如圖

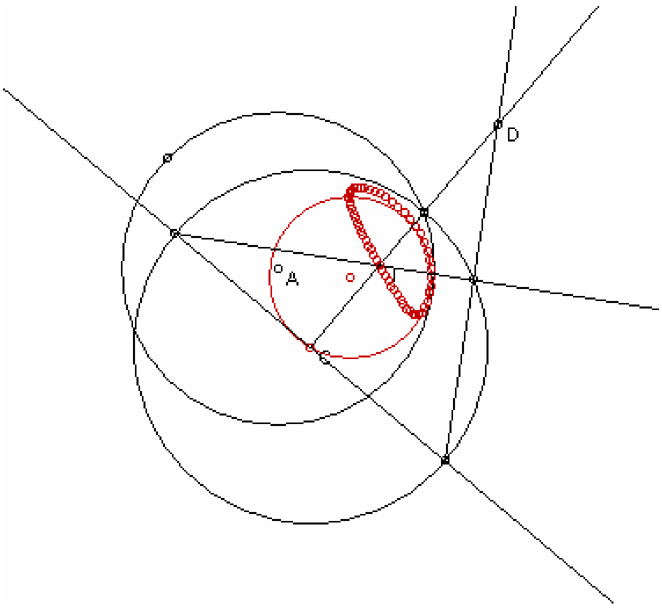


定點在內的情況:



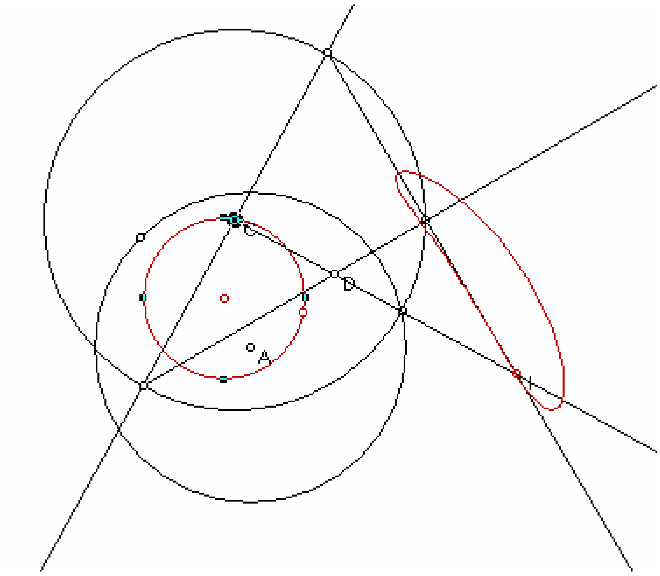
同樣的,我們找型內的一點當定點,由於中心在直徑上移動改變了 $R(p,q)$,所以所

成的像點也會隨之改變。
我們試著分析一下這種狀況
我們構造一個函數 P: (變換中心)⟶(變換點),不同於上面所述的 F,在 F 中,我們把變換中心當作定點來看待,然而在這個 P 中我們則是把我們將原本的變換中心作爲動點來看待,而原本的動點作爲定點,然而在降的定義下,雖然不一定會是形內與形外的轉換,也有可能產生形內與形內的轉換,或形外與形外的轉換,不過對於這種特殊的幾何變換,我們給他定義一個名稱,稱之爲 P 轉換;顯然 P 轉換是由前面定義的形內與形外變換而來的;它需要一個邊界點,一個中心點,一個動點,只是它將原本的形內與形外的動點變爲定點,定點變爲動點;使原本的形內與形外變換中的中心變爲動點,而原本形形外變換中的動點變爲 P 轉換中的中心點
下面我們來看看幾個以圓爲圖形的例子:
當圓在邊界內,中心在邊界外時的 P 轉換圖形: (其亦圖形在圓內)
形成一個形內與形內的轉換



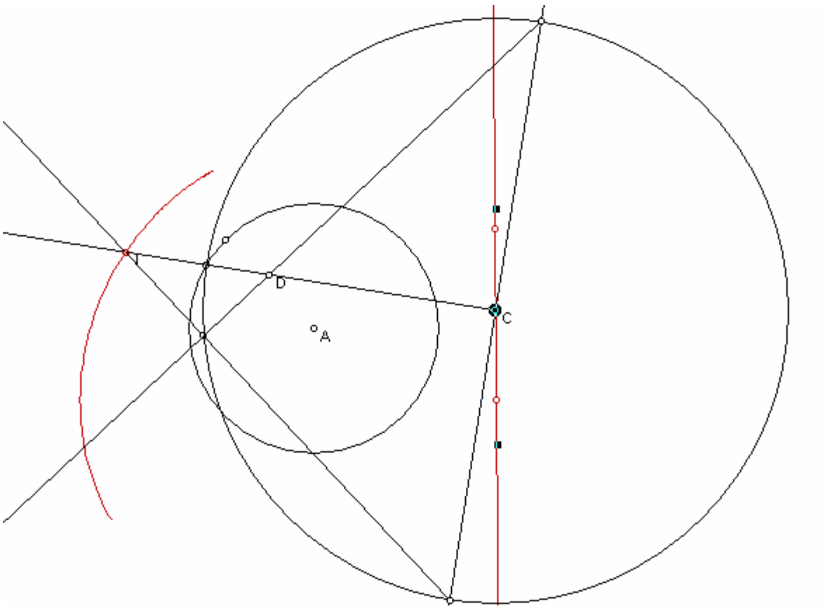
當圖形再圓內且中心在圓內時的 P 轉換: (其像在外)
形成一個形內與形外的轉換

現在我們仿造前面的定義,在邊界不爲圓的圖形上定義該邊界圖形的 P 轉換



以下以直線爲例:

一圓內的線段且中心在圓外,形成一形內與形外的轉換



■ 探討邊界改變時的 P 轉換

前面已經探討過邊界爲圓時的 P 轉換的定義與其部分的性質

現在我們仿造前面的定義,在邊界不爲圓的圖形上定義該邊界圖形的 P 轉換

定義方法與前面非常類似:

前面我們已經定義過當邊界圖形不爲圓時的形內與形外轉換了,

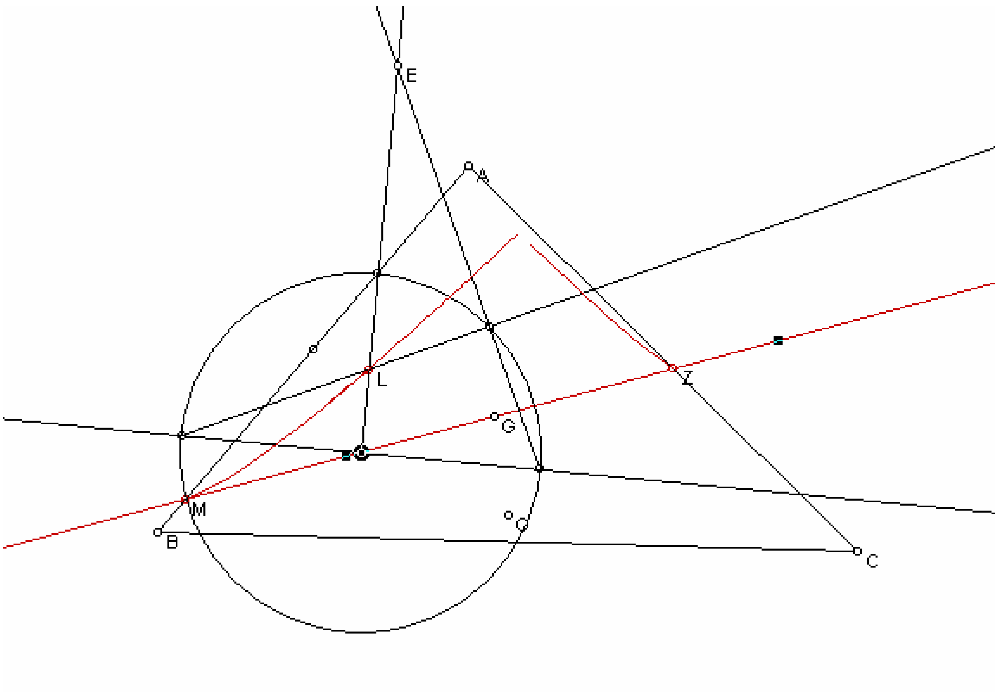
其定義爲 $F:(p,q)\longrightarrow\left(\dfrac{[R(p,q)]^2 p}{p^2+q^2},\dfrac{[R(p,q)]^2 q}{p^2+q^2}\right)$,我們設定原點(0,0)爲形內與形外變換的變換中心,(p,q)爲一動點而 $\left(\dfrac{[R(p,q)]^2 p}{p^2+q^2},\dfrac{[R(p,q)]^2 q}{p^2+q^2}\right)$ 爲其變換的像,

現在我們仿照圓的定法,讓(0,0)變爲一動點而原動點(p,q)變爲一固定點,

留下同樣軌跡點的軌跡看看其軌跡的圖形爲如何

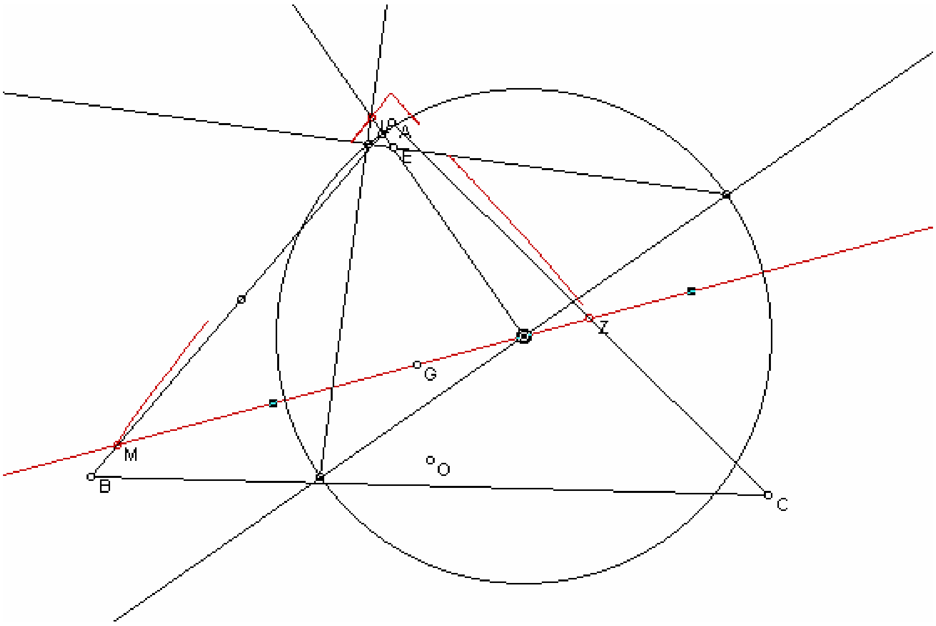
下面就以邊界爲三角行形爲例子

圖形爲一直線,讓動點在 MG 直線中運動留下 L 的軌跡,,E 爲 P 轉換的轉換中心,在形外



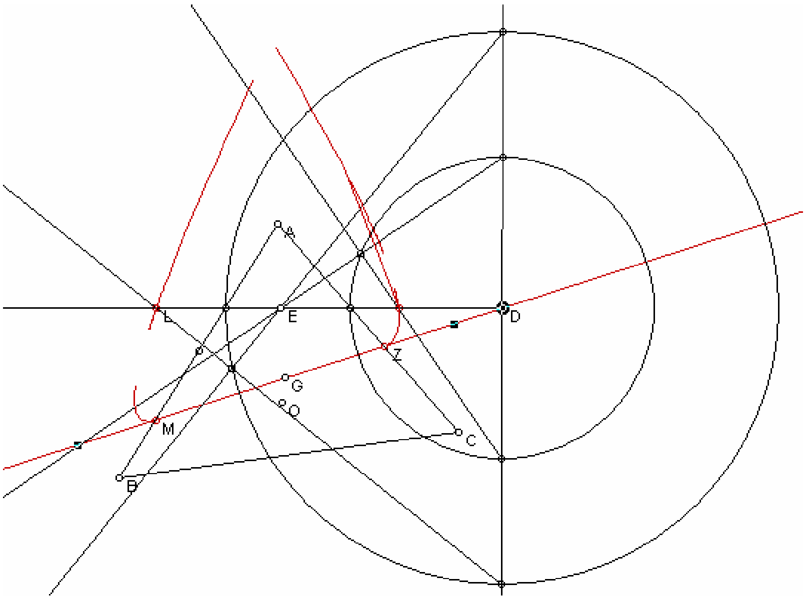
所形成的像在形內,形成一個形內與形內的 P 轉換

圖形爲一直線,讓動點在 MG 直線中運動留下 L 的軌跡,,E 爲 P 轉換的轉換中心,在形內



所形成的像在形外,形成一形內與形外的 P 轉換圖形

圖形為一直線,讓動點在 MG 直線中運動留下 L 的軌跡,,E 為 P 轉換的轉換中心,在形外



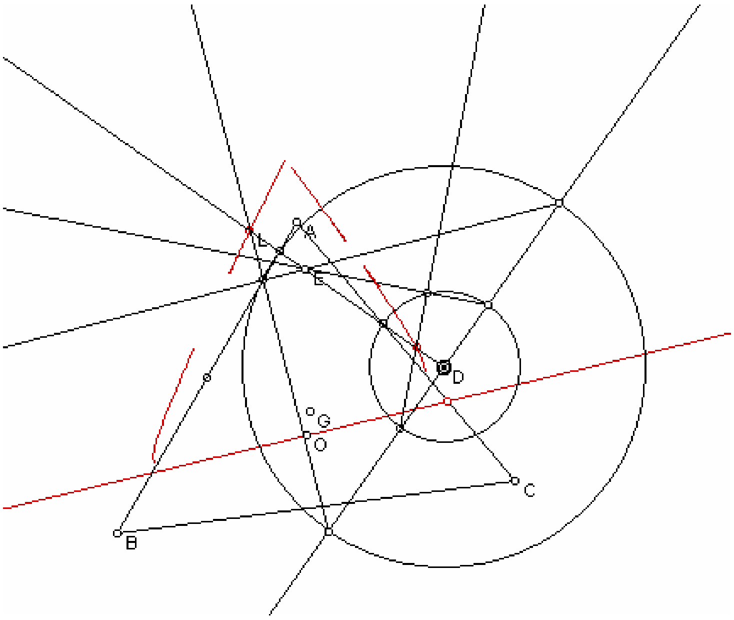
所形成的像部份在形外部分在形內

本圖形可以看出當動點跑到形外時的一種特殊狀況的定義,

當同時出現兩個邊界的形內與形外變換的轉換圓時,其 P 轉換點的定義如上

圖所示,由於形內與形外變換爲一 1-1 且 onto 的變換

由此可證明 P 轉換亦爲一 1-1 且 onto 的轉換

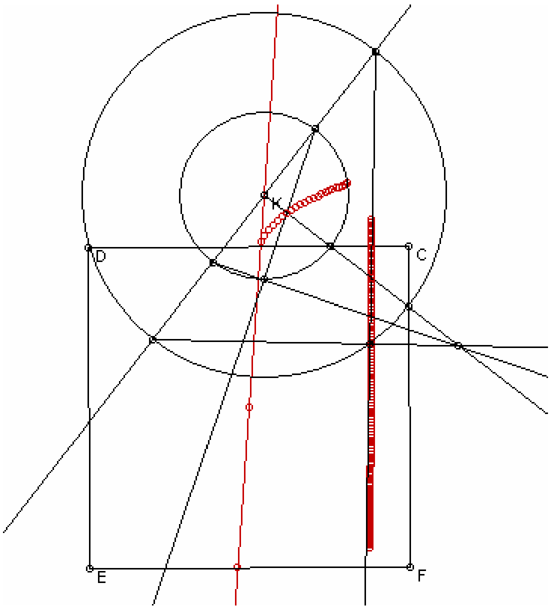


上圖也是爲該特殊情況說明的一個很好的例子

以下讓我們來看看正方形的 P 轉換的圖形

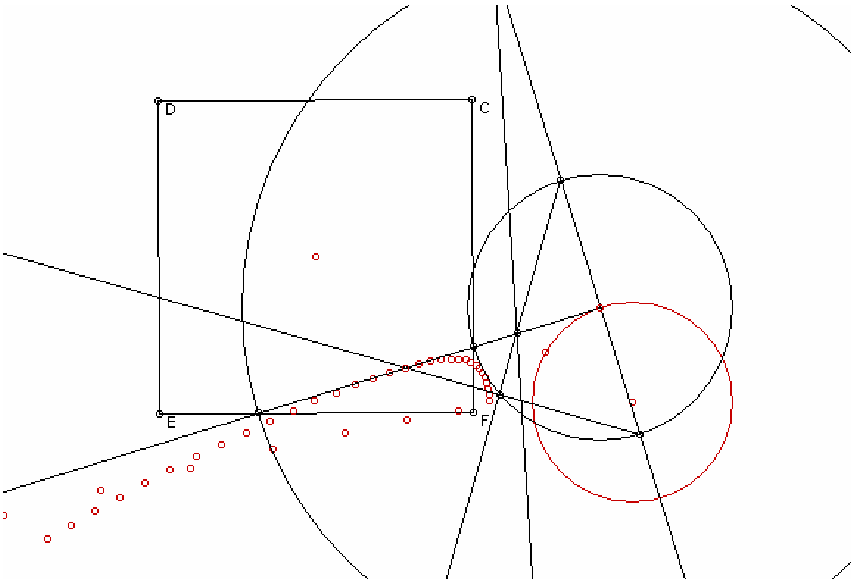
類似三角形的定義可以定義出正方形的 P 轉換點

以下爲, 圖形爲一直線,讓動點在 MG 直線中運動留下 L 的軌跡,E 爲 P 轉換的轉換中心,在形外



其像有部份在圓內部分在圓外的一個 P 轉換,

圖形爲一圓,讓動點在 MG 直線中運動留下 L 的軌跡,E 爲 P 轉換的轉換中心,在形內

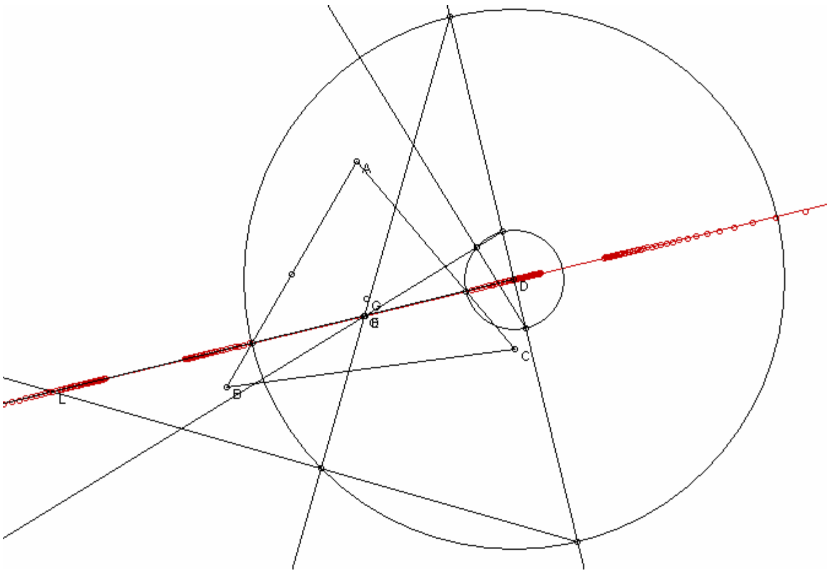


其像也是部分在形內部分在形外的 P 轉換圖形,

■ 當(x_1, y_1)爲幾何上某些重要的心時

類似的我們可以定義形上一點,與該點關於該形的形直徑

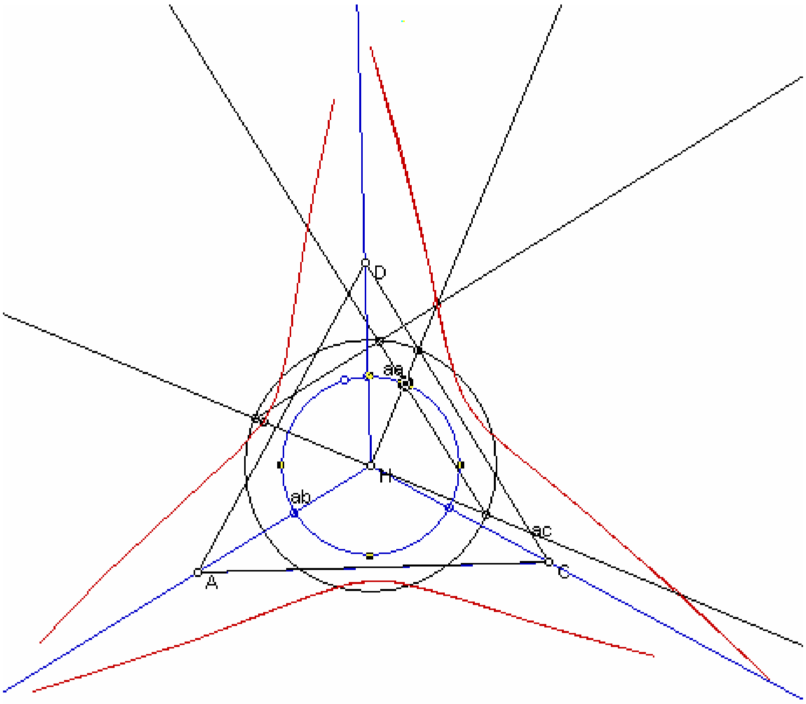
當變換中心在直徑上時,其像也會合該直徑重疊

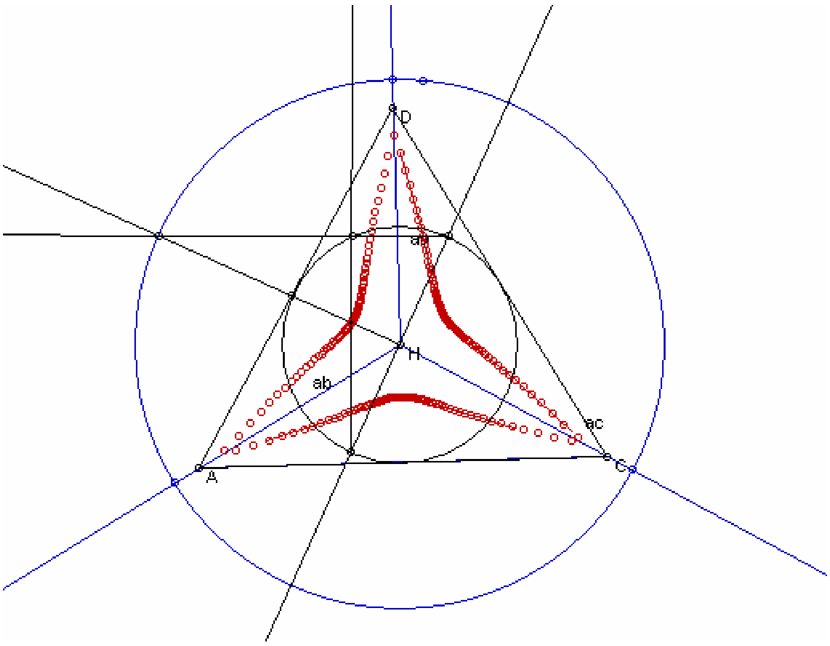


■ 想法三:探討當邊界改變時:

比方說,當邊界的形狀不在是個圓的時候

讓我們先來看看幾個圖形



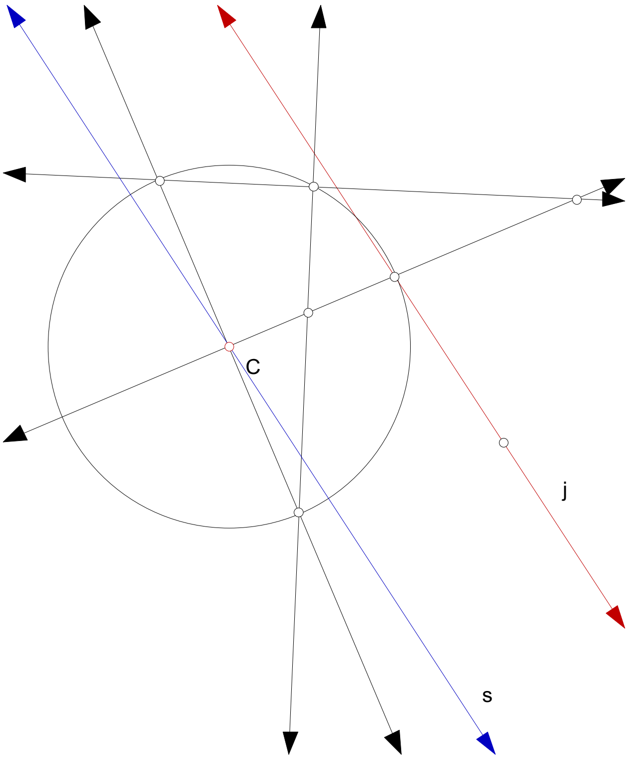


以正三角形爲例,我們用類似的定法定義圖中所示的正三角形 ACD 的形內與形外的變換,並各做一個形外與形內圓的像做一個比較我們知道,其實它只是反演變換的延伸,同樣地我們可以使用

$F:(p,q) \longrightarrow \left(\frac{[R(p,q)]^2 p}{p^2+q^2}, \frac{[R(p,q)]^2 q}{p^2+q^2} \right)$這個函數來表示它的變換情形

顯然,當點(p,q)在移動時,它所對應到的半徑$R(p,q)$是完全不一樣的,假設變換中心爲 H 則三條射線 HA,HD,HC 分別將空間分成三塊一樣的空間,每一個不同的反演半徑都對應到一邊上的一個或兩個點,所以每一個由該半徑化成的圓都恰好是邊上六個或三個所用的圓

不過首先我們先考慮在一個平面上只有一個點 C 和一條線 j 的情形,如圖



圖中透過中心 C 可將直線左邊的一部分(直線 s,j 之間)和右邊的全部,作一個 1-1 且 onto 的對應;點 C 爲上圖的轉換中心,而上式的$R(p,q)$,當然是由動點(p,q)決定的;跟"想法一"一樣,我們可將$R(p,q)$用解方程式的方法解出來,

直線方程式爲$ax+by+c=0$,同樣的我們定中心爲原點,

然後我們可以得到 $R := (p,q) \rightarrow \sqrt{\frac{c^2(p^2+q^2)}{(ap+bq)^2}}$ 的半徑函數,代回

$F:(p,q) \longrightarrow \left(\frac{[R(p,q)]^2 p}{p^2+q^2}, \frac{[R(p,q)]^2 q}{p^2+q^2} \right)$可得 $F := (p,q) \rightarrow \left(\frac{c^2 p}{(ap+bq)^2}, \frac{q c^2}{(ap+bq)^2} \right)$

於是我們便得到了如圖上的直線 s 與直線 j 之間和直線 j 的右方的點的一個映射

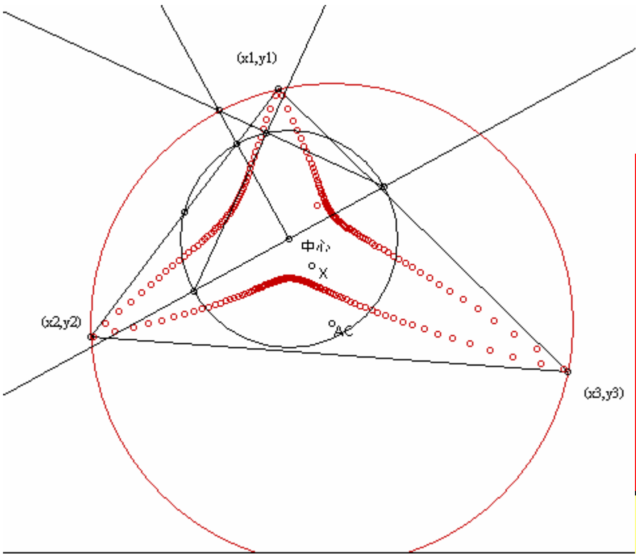
函數當然這個函數對我們倆來探討三角型的幫助也很大。
當然上述的點(p,q)也只能是直線 s 與直線 j 之間和直線 j 的右方的點,如果在 s 左方,則不會產生圖形了。
現在就讓我們來看看三角型的函數會是什麼樣子的吧
已知三頂點爲(x1,y1),(x2,y2),(x3,y3)我們可以連出三條線分別是
$(x1-x2)y+(-y1+y2)x+x2\,y1-x1\,y2=0$
$(x1-x3)y+(-y1+y3)x+x3\,y1-x1\,y3=0$
$(x2-x3)y+(-y2+y3)x+x3\,y2-x2\,y3=0$
根據之前的直線公式,我們可以得到三個公式

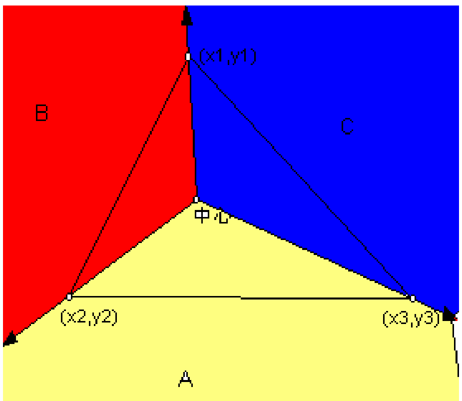
$$F1 := (p,q) \to \left(\frac{(x3\,y1-x1\,y3)^2 p}{((-y1+y3)p+(x1-x3)q)^2}, \frac{q\,(x3\,y1-x1\,y3)^2}{((-y1+y3)p+(x1-x3)q)^2} \right)$$

$$F2 := (p,q) \to \left(\frac{(x2\,y1-x1\,y2)^2 p}{((-y1+y2)p+(x1-x2)q)^2}, \frac{q\,(x2\,y1-x1\,y2)^2}{((-y1+y2)p+(x1-x2)q)^2} \right)$$

$$F3 := (p,q) \to \left(\frac{(x3\,y2-x2\,y3)^2 p}{((-y2+y3)p+(x2-x3)q)^2}, \frac{q\,(x3\,y2-x2\,y3)^2}{((-y2+y3)p+(x2-x3)q)^2} \right)$$

當然三個公式使用哪一個要看當時(p,q)在哪裡而定
舉個例子吧
當三角形不爲正三角形時: (當圓包含邊界時的軌跡)





顯然,如之前所說的,中心點和點(x1,y1),(x2,y2),(x3,y3)把平面分成了三塊
可由中心點拉三條射線看出,如右圖

當點在 A 區時所面對的直線是$(x2-x3)y+(-y2+y3)x+x3\,y2-x2\,y3=0$

所以用

$$F3 := (p,q) \to \left(\frac{(x3\,y2 - x2\,y3)^2\,p}{((-y2+y3)\,p + (x2-x3)\,q)^2}, \frac{q\,(x3\,y2 - x2\,y3)^2}{((-y2+y3)\,p + (x2-x3)\,q)^2} \right)$$

同理,在 B 區時用

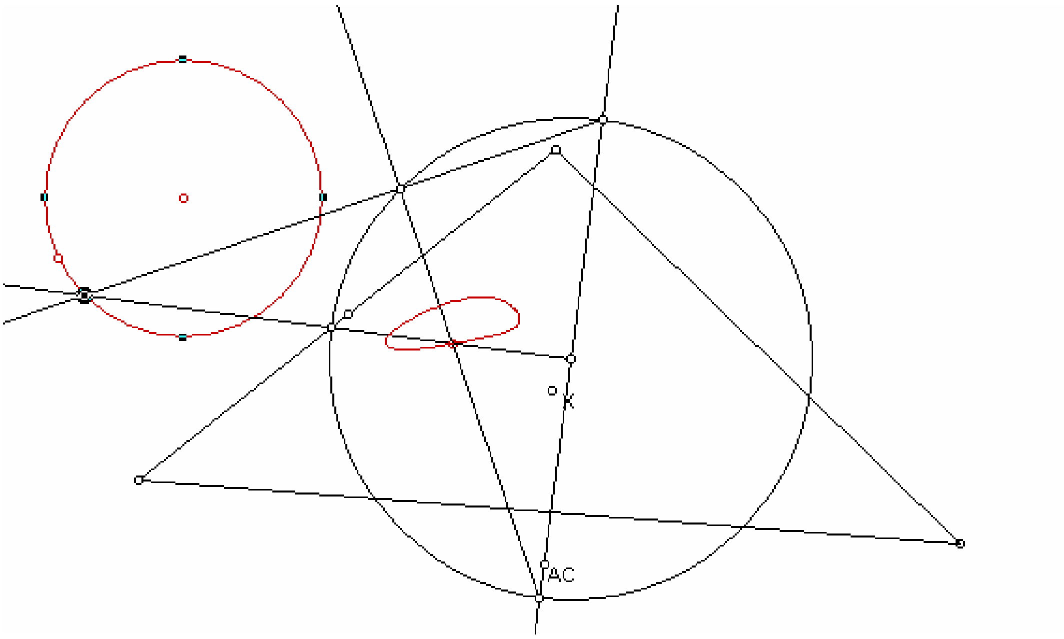
$$F2 := (p,q) \to \left(\frac{(x2\,y1 - x1\,y2)^2\,p}{((-y1+y2)\,p + (x1-x2)\,q)^2}, \frac{q\,(x2\,y1 - x1\,y2)^2}{((-y1+y2)\,p + (x1-x2)\,q)^2} \right)$$

在 C 區時用

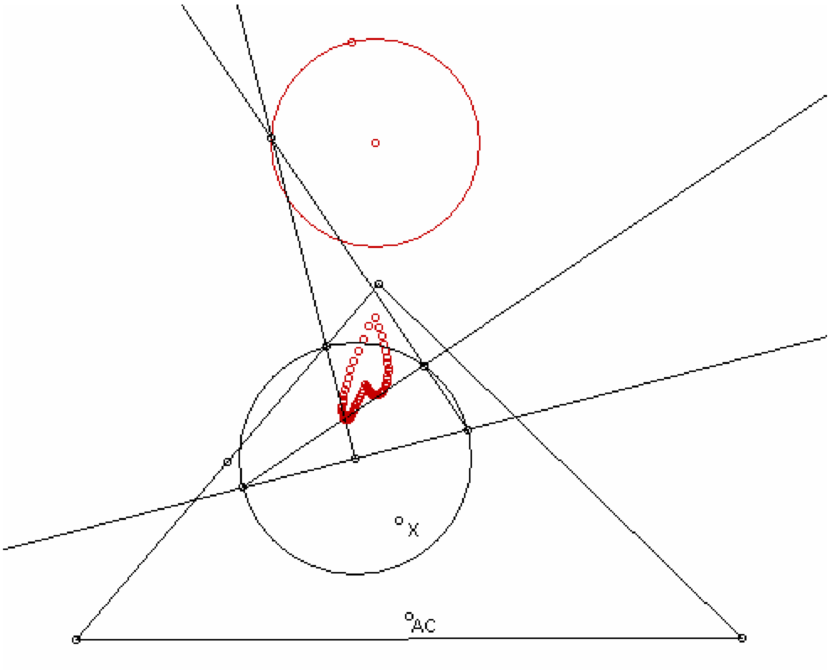
$$F1 := (p,q) \to \left(\frac{(x3\,y1 - x1\,y3)^2\,p}{((-y1+y3)\,p + (x1-x3)\,q)^2}, \frac{q\,(x3\,y1 - x1\,y3)^2}{((-y1+y3)\,p + (x1-x3)\,q)^2} \right)$$

在三條射線上則用”引理二”的方式構造一條直線上的一個區間和剩下的部分的映射函數

當圓在三邊界中的一邊界外時,其像的軌跡如下: (定義域只用到一個邊函數的情況)

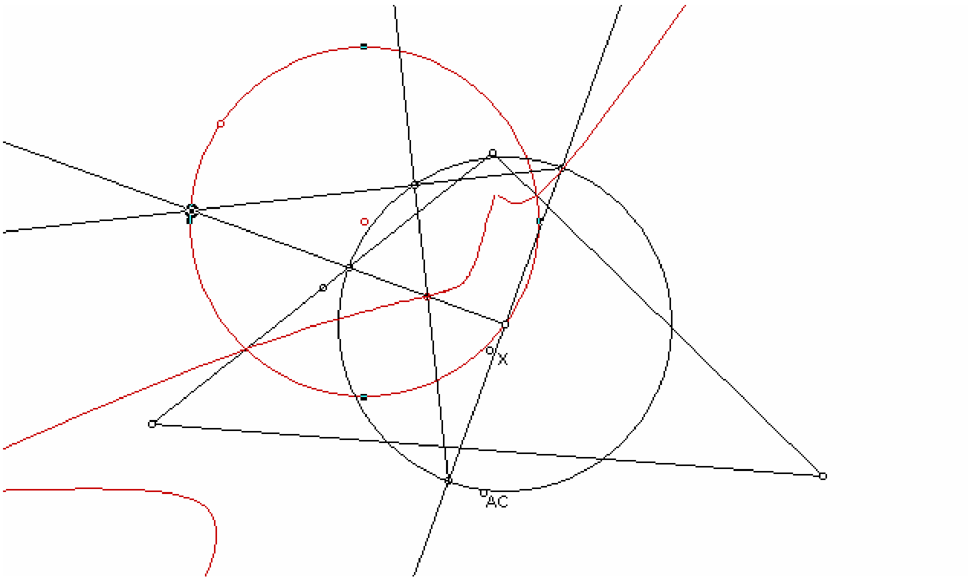


當圓覆蓋到變換中心與邊界點的三條射線中的一條時,此圓的像將會曾線一個愛心形(定義域用到兩個邊函數的情況)

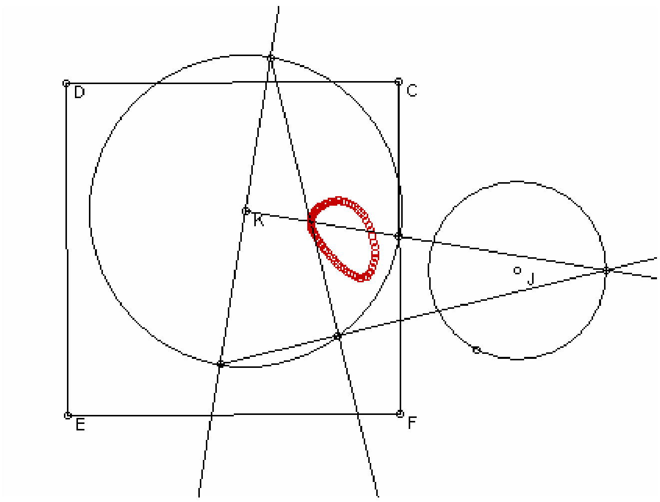


上圖的像的兩個斷點是由於兩個邊用兩個不同的函數，所以在射線處產生了兩個斷點

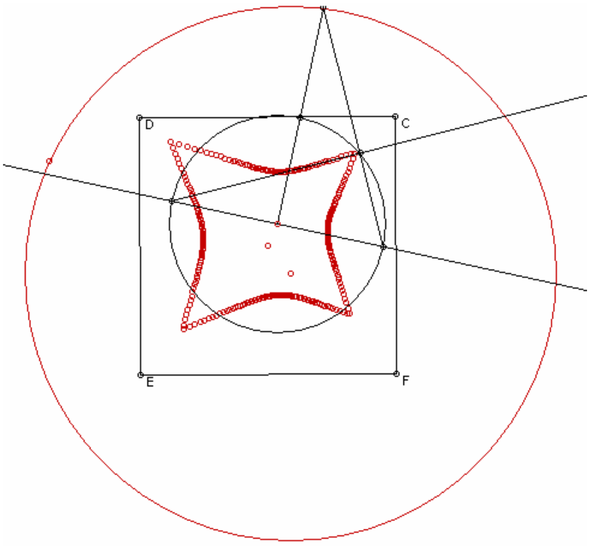
跟上圖的狀況有點像,不過下圖爲該原有覆蓋到邊界形時的情形(用到三個函數的情形)圖形較爲複雜



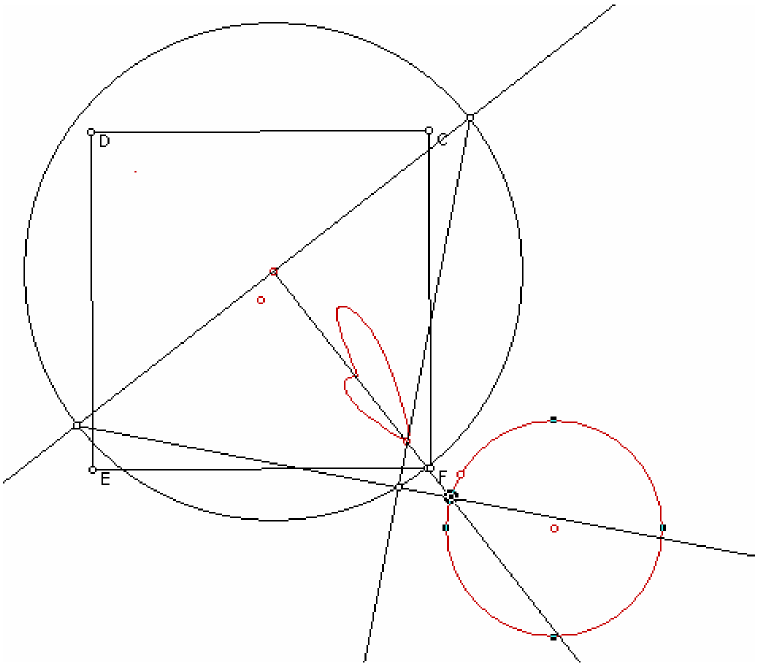
以下爲正方形的形內與形外的轉換(以圓爲例)
圖形(圓)在邊界正方形的一邊外所產生的像



包含邊界正方形所產生的像



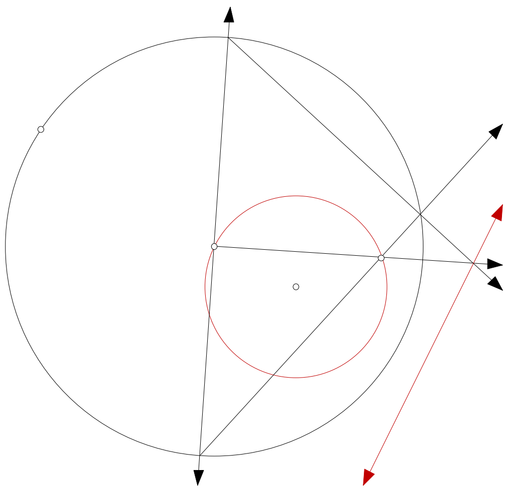
當圓包含部分正方形的形心與一邊界點的連線時,所產的像爲一愛心形的像,與之前三角形的狀況有相似之處



同樣的我們可以類似於三角型的做法構造出四個函數來描述這個變換

■ 兩種變換的比較與探討

反演變換可將直線 $Ax+By+C=0$ 變成一個過中心的圓 $C(x^2+y^2)+Ar^2x+Br^2y=0$ 顯然,當直線過中心時,也就是 $C=0$ 時,那個圓就退化成原來的那條直線,如圖所示



同理,在中心不是圓新的系統裡,我們可以將直線 $Ax+By+C=0$ 變成

$$C(x^2+y^2)+A(R(x,y))^2x+B(R(x,y))^2y=0$$ 的圖形

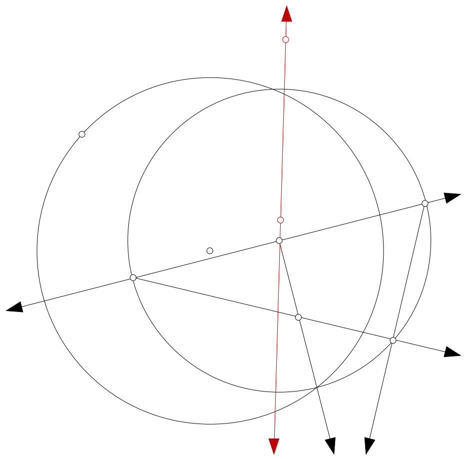
當然,這裡的 $R(x,y)$ 就是前述的,

$$R(p,q)=\frac{1}{2(p^2+q^2)}\sqrt{p^2\left(2hp+2qk+\frac{2p\sqrt{2hpqk-k^2p^2+m^2p^2-q^2h^2+q^2m^2}}{|p|}\right)+q^2\left(2hp+2qk+\frac{2q\sqrt{2hpqk-k^2p^2+m^2p^2-q^2h^2+q^2m^2}}{|q|}\right)}$$

所以那個圖形會長成:

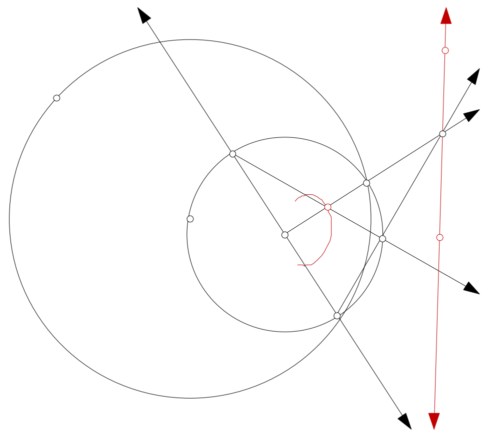
$$
C\left(x^2+y^2\right)+A\left(\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\sqrt{x^2\left(2hx+2yk+\frac{2x\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|x|}\right)+y^2\left(2hx+2yk+\frac{2y\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|y|}\right)}\right)^2 x
$$

$$
+B\left(\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\sqrt{x^2\left(2hx+2yk+\frac{2x\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|x|}\right)+y^2\left(2hx+2yk+\frac{2y\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|y|}\right)}\right)^2 y=0
$$



同樣的我們也對這個方程式作一些簡單的討論,

當直線過中心,也就是 $C=0$ 時,我們可以看出來,他的向還是那條直線 $Ax+By=0$ 如圖所示; 而如果而如果那條直線不過中心(原點)的話,則所形成的像,將會是一個個過中心的橢圓(用 MAPLE V 展開後所得的方程式正是橢圓),如圖所示。



而在反演變換中,一個圓 $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ 的像是降的圖形 $C\left(x^2+y^2\right)+2r^2Ax+2r^2By+r^4=0$ 當 $C=0$ 時,也就是一個過心的圓,他會退化成一條 $2Ax+2By+r^2=0$ 的直線,而當 $C\neq 0$ 時,他就會變成 $C\left(x^2+y^2\right)+2r^2Ax+2r^2By+r^4=0$ 的一個圓;

讓我們再來看看,在中心不在圓心下的系統中,降的一個圓 $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ 他所形成的像,將會是 $C\left(x^2+y^2\right)+2\left(R(x,y)\right)^2Ax+2\left(R(x,y)\right)^2By+\left(R(x,y)\right)^4=0$

同理,這邊的 $R((x,y)$ 也同樣式上文所述的那個反演半徑函數

$$R((x,y))=\frac{1}{2(x^2+y^2)}\sqrt{x^2\left(2hx+2yk+\frac{2x\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|x|}\right)+y^2\left(2hx+2yk+\frac{2y\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|y|}\right)}$$

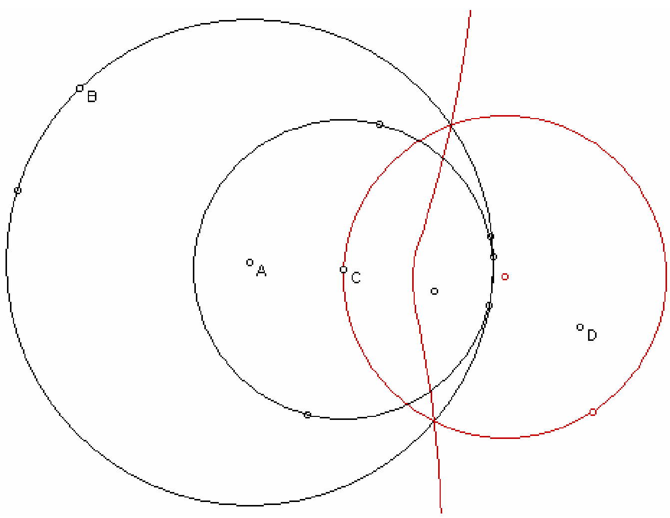
所以那個像方程式也可以變成

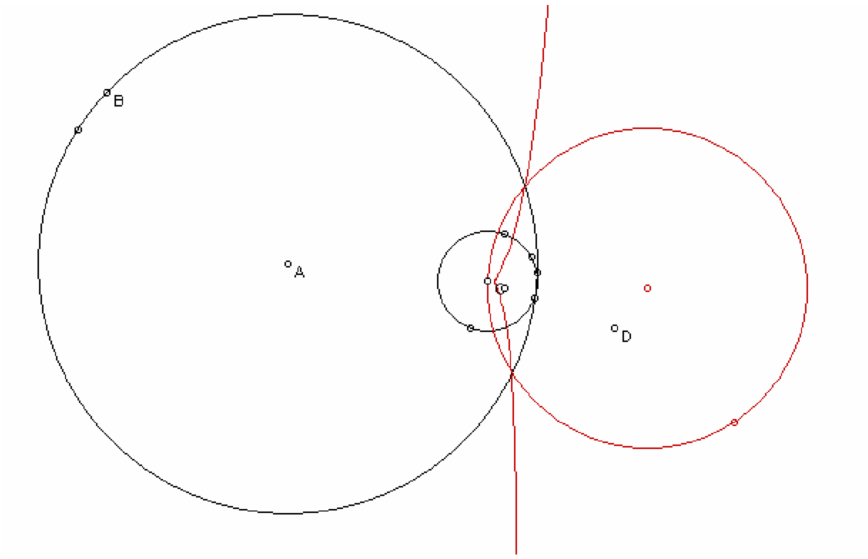
$$C(x^2+y^2)+2\left(\frac{1}{2(x^2+y^2)}\sqrt{x^2\left(2hx+2yk+\frac{2x\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|x|}\right)+y^2\left(2hx+2yk+\frac{2y\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|y|}\right)}\right)^2 Ax$$

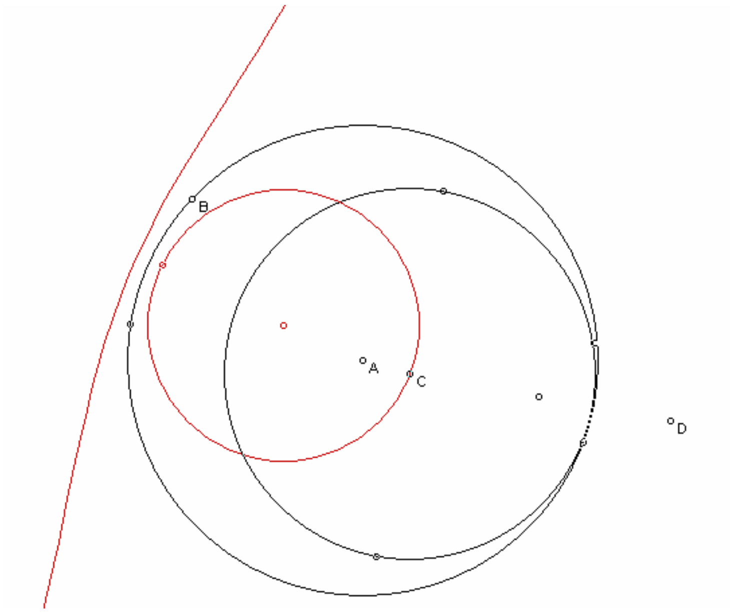
$$+2\left(\frac{1}{2(x^2+y^2)}\sqrt{x^2\left(2hx+2yk+\frac{2x\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|x|}\right)+y^2\left(2hx+2yk+\frac{2y\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|y|}\right)}\right)^2 By$$

$$+\left(\frac{1}{2(x^2+y^2)}\sqrt{x^2\left(2hx+2yk+\frac{2x\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|x|}\right)+y^2\left(2hx+2yk+\frac{2y\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|y|}\right)}\right)^4=0$$

同樣的,我們用 Maple V 將它化減分類討論一下並用 GSP 將它的圖形畫出,
當圓過中心時:
則它的圖形會呈現橢圓曲線族的圖形與代數式



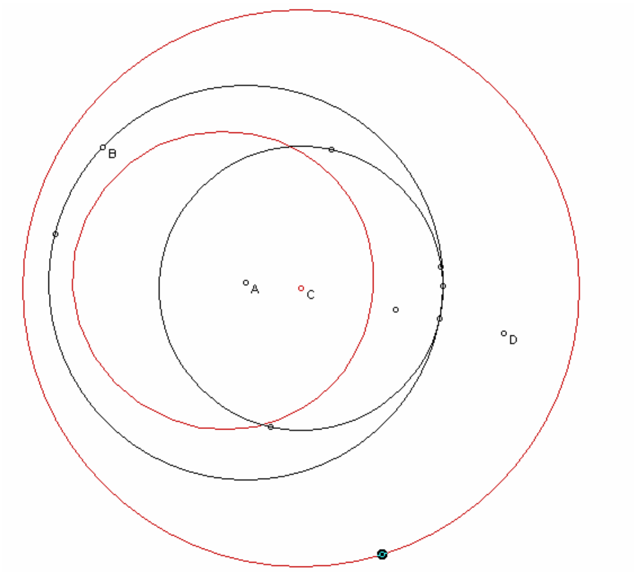




當圓 $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ 的圓心與中心重疊時,也就是 $A=0$ 且 $B=0$ 的情況,則出來的像將會是一個圓,其方程式為

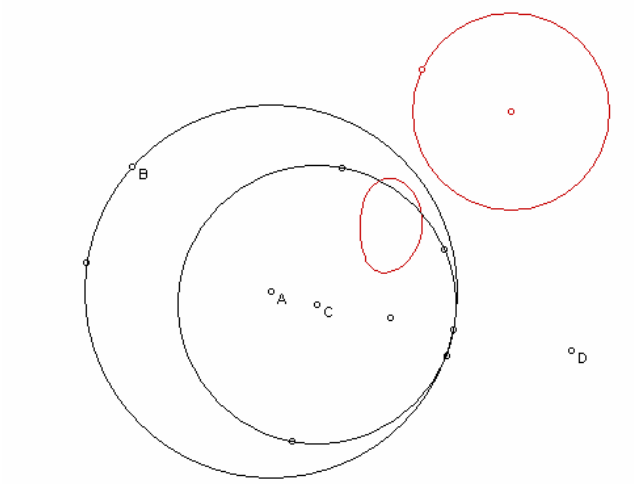
$$C\left(x^2+y^2\right)+\left(\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\sqrt{x^2\left(2hx+2yk+\frac{2x\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|x|}\right)+y^2\left(2hx+2yk+\frac{2y\sqrt{2hxyk-k^2x^2+m^2x^2-y^2h^2+y^2m^2}}{|y|}\right)}\right)^4=0$$

如圖所示,



若圓心在邊界圓圓心與中心的連線上時,則在中心時形成圓形;在線上其他處時,形成橢圓形或橢圓曲線族的軌跡

若在其他的部分,則形成較不規則軌跡圖形,如圖所示



我們暫時先不討論那些較不規則的圖形,留在以後有時間在行將其分類討論

研究結果及討論

經由上述的各種實驗,推論與定義,我們將反演變換推廣,推廣到中心不再圓心的時候,並推廣到邊界非圓形的時候,雖然產生了許許多多的不連續的函數問題賞爲討論,不過在實驗的過程中,我們又發現了另一條的推廣路徑,也就是文中的 p 轉換,他是將原本推港後的反演變換中的中心定點變爲動點,原本的動點變爲定點,之後得到了另一個變換函數,也具有許多的性質,直德我們繼續研究。

結論與應用

經由上面得研究所得的一些結論,發現,有些書上寫原本的反演變換是由一個球的北極向下方平面投射所得的結果,而將它推廣後的變換,卻更可以進一步模擬當那個點不在北極時的投影幾何平面,當然不同的邊界可以描述不同的空間中的不同的點爲中心時所造成的投影幾何平面的一些性質,有的有很好的性質,而有的卻沒有。

參考文獻

作者	書名	出版社
左銓如,季素月	初等幾何研究	九章
趙文敏	幾何學概論	九章
陳維桓	幾何學的新探索	凡異
李忠,周建瑩	走向數學叢書--雙曲幾何	湖南教育出版社
王敬庚	反演	九章出版社
陳偉,陳焜燦,陳志偉	大學工程數學(上,下冊)	建宏