台灣二○○二年國際科學展覽會

科　　別：數學科

作品名稱：調和變換之研討與應用

學　　校：國立臺南第一高級中學

作　　者：林育民

作 者 簡 介

就讀學校:台南一中　　　　　　　　　　指導老師:卓靜哲　鄧明聖

我叫林育民，來自南部的一個小家庭，目前是高二學生。從小父母就鼓勵我多看一些課外的書籍，而在國中的時候我也有機會多接觸一些數學的書，因此培養出對於數學研究的興趣，尤其對幾何情有獨鍾。隨著科展的到來，我決定將平時有些許靈感的數學題材拿來做我的研究題目。雖然一開始的進展不錯，不果到最後還是面臨了很多一想不到的瓶頸，也一度想要放棄。很感謝師長即時給我指引方向，這份研究也才能有今日的成果，並且有這個榮幸到台北參賽。我相信這會是個難得的經驗和一段難忘的旅程。

調和變換之研討與應用

壹、中英文作品摘要：

一、中文摘要：

在此研究中，我們用類似反演變換的方法，以一個定圓創立並證明了一種新的幾何變換，稱為「調和變換」。我們得到點、直線、圓與圓錐曲線經過變換的關係。

1.直線可以映射成原直線或一圓錐曲線。

2.圓可以映射成一種特殊曲線。

3.圓錐曲線可以映射成兩條圓錐曲線或一條圓錐曲線和一直線。

此外我們還發現調和變換和反演變換的特殊關係。最後，由於調和變換可以簡化圓錐曲線的關係，我們將調和變換應用在行星軌道的證明上，並得到了良好的結果。

二、English Abstract：

In this research, we use a method similar to the inversion to establish a new geometric transformation, called harmonic transformation, by a fixed circle O, we prove some of its properties. We have gotten the relationship among points, lines, circles, conics and their images:

1.The image of a line is a conic or a line itself.

2.The image of a circle is a special category of curve.

3.The image of a conic with its focus at the center of O is two conics or a line and a conic.

Further more, we also find the special connection between harmonic transformation and inversion. Finally, since the harmonic transformation can simplify the conic, we apply the harmonic transformation to identify the orbit of a planet, and obtain a nice conclusion.

貳、內文

一、前言

1.研究動機：

反演變換，又名圓對稱，在幾何變換的領域佔有重要的地位。為許多難解的問題提供了新的解法與看法。在一次偶然的機會，我看到八十四年一位學長的作品「圓－也有春天－圓對稱的應用與推廣」中，有關圓對稱的各種應用，以及他自己定義的一種變換－「圓平均變換」，可以用來作三等分角等的應用。讓我深深體會到幾何變換的魅力所在。於是我也定義了「圓調和變換」，並用 GSP 模擬了許多圖，得到一些有趣的曲線，開始了對此變換的研究。

2.研究目的：

研究圓調和變換的性質與應用。

二、 研究過程與方法

若一圓的圓心為 O，半徑為 r，則此圓以 $O_{(r)}$ 表示。以下帶有箭號的線段表有向線段，例如 $\overrightarrow{AB}$ 表 $\overline{AB}$ 有向線段。

1.圓調和變換的定義：

若 $O_{(r)}$ 是平面上一圓，對於平面上的每一點 P，定義 P 的像點 Q（有二解）為 $\overleftrightarrow{OP}$ 上的一點，且 $\frac{1}{\overrightarrow{OP}}+\frac{1}{\overrightarrow{OQ}}=\frac{1}{\vec{r}}$，這種由 P 到 Q 的變換，本文稱為「圓調和變換」。O 稱為調和中心，已知圓稱為稱為參考圓，Q 則稱為 P 的調和點；對於調和中心，則不去定義它的調和點。

A. 基本性質：

我們先將 P 的兩個調和點作區分，取 $\overrightarrow{OP}$ 方向為正：

當 $\vec{r}>0$ 時，P 的像點為 Q_A

當 $\vec{r}<0$ 時，P 的像點為 Q_B

（1）若 $\overline{OP}>$r，則 Q_B-O-Q_A，且 $\overline{OQ_A}>$r，0＜$\overline{OQ_B}<$r。

（2）若 $\overline{OP}=$r，則 Q_A 在無窮遠處，Q_B-O-P 且 $\overline{OQ_B}=\frac{1}{2}\overline{OP}$

（3）若 $\frac{r}{2}<\overline{OP}<$r，則 Q_A-Q_B-O-P，且 $\overline{OQ_A}>$r，$\overline{OQ_B}<$r。

（4）若 $\overline{OP}=\frac{r}{2}$，則 Q_A-Q_B-O-P，且 $\overline{OQ_A}=$r，$\overline{OQ_B}<$r。

（5）若 $0 < \overline{OP} < \frac{r}{2}$，則 Q_A-Q_B-O-P，且 $\overline{OQ_A} <$ r，$\overline{OQ_B} <$ r。

B.證明：

由 $\frac{1}{\overrightarrow{OP}} + \frac{1}{\overrightarrow{OQ}} = \frac{1}{\vec{r}}$ 可知 $\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OP} \times \vec{r}}{\overrightarrow{OP} - \vec{r}}$

（1）若 $\overline{OP} >$ r

① $\vec{r} > 0$ 時：$\overrightarrow{OP} \times \vec{r} > 0$，$\overrightarrow{OP} - \vec{r} > 0$，$\therefore \overrightarrow{OQ_A} > 0$

且 $\overline{OQ_A} = \frac{\overline{OP} \times r}{\overline{OP} - r} > \frac{\overline{OP} \times r - r^2}{\overline{OP} - r} = r$

② $\vec{r} < 0$ 時：$\overrightarrow{OP} \times \vec{r} < 0$，$\overrightarrow{OP} - \vec{r} > 0$，$\therefore \overrightarrow{OQ_B} < 0$

且 $\overline{OQ_B} = \frac{\overline{OP} \times r}{\overline{OP} + r} < \frac{\overline{OP} \times r + r^2}{\overline{OP} + r} = r$

由①②知則 Q_B-O-Q_A，且 $\overline{OQ_A} >$ r，$0 < \overline{OQ_B} <$ r。

（2）若 $\overline{OP} =$ r

① $\vec{r} > 0$ 時：$\overrightarrow{OP} \times \vec{r} > 0$，$\overrightarrow{OP} - \vec{r} = 0$，$\therefore \overrightarrow{OQ_A} \to \infty$

② $\vec{r} < 0$ 時：$\overrightarrow{OP} \times \vec{r} < 0$，$\overrightarrow{OP} - \vec{r} > 0$，$\therefore \overrightarrow{OQ_B} < 0$

且 $\overline{OQ_B} = \frac{\overline{OP} \times r}{\overline{OP} + r} = \frac{r \times r}{r + r} = \frac{r}{2}$

由①②知 Q_A 在無窮遠處，Q_B-O-P 且 $\overline{OQ_B} = \frac{1}{2}\overline{OP}$

（3）若 $\frac{r}{2} < \overline{OP} <$ r

① $\vec{r} > 0$ 時：$\overrightarrow{OP} \times \vec{r} > 0$，$\overrightarrow{OP} - \vec{r} < 0$，$\therefore \overrightarrow{OQ_A} < 0$

且 $\overline{OQ_A} = \frac{\overline{OP} \times r}{r - \overline{OP}}$，

由 $\frac{r}{2} < \overline{OP} \Rightarrow 2\overline{OP} > r \Rightarrow \overline{OP} > r - \overline{OP} \Rightarrow \frac{\overline{OP}}{r - \overline{OP}} > r$

$\Rightarrow \frac{\overline{OP} \times r}{r - \overline{OP}} > r$，即 $\overline{OQ_A} >$ r

② $\vec{r} < 0$ 時： $\overrightarrow{OP} \times \vec{r} < 0$，$\overrightarrow{OP} - \vec{r} > 0$，$\therefore \overrightarrow{OQ_B} < 0$

且 $\overline{OQ_B} = \dfrac{\overline{OP} \times r}{\overline{OP} + r} < \dfrac{\overline{OP} \times r + r^2}{\overline{OP} + r} = r$

由①②知若 $\dfrac{r}{2} < \overline{OP} <$ r，則 Q$_A$-Q$_B$-O-P，且 $\overline{OQ_A} >$ r，

$\overline{OQ_B} <$ r。

（4）、（5）同（3）理可證

若 $\overline{OP} = \dfrac{r}{2}$，則 Q$_A$-Q$_B$-O-P，且 $\overline{OQ_A} =$ r，$\overline{OQ_B} <$ r。

若 $0 < \overline{OP} < \dfrac{r}{2}$，則 Q$_A$-Q$_B$-O-P，且 $\overline{OQ_A} <$ r，$\overline{OQ_B} <$ r。

三、結果與討論：以下論證採極坐標表示法

1. 直線的調和變換

定理 1-1：當直線通過調和中心時，直線映射至其本身。

證明：點 P(ρ, θ)對半徑爲 r 且圓心在極點的參考圓進行調和變換所得的像爲 Q$_A$ ($\dfrac{\rho \times r}{\rho - r}$, θ)和 Q$_B$($\dfrac{\rho \times r}{\rho + r}$, $\theta + \pi$) = (-$\dfrac{\rho \times r}{\rho + r}$, θ)通過調和中心(極點)的直線可表成 θ = C（C 爲定數），而有上述的映射關係可知 θ 爲不變量，所以通過一條極點的直線 θ = C 映射後還是 θ = C，故

調和變換將一條通過調和中心的直線映射成直線本身

定理 1-2：當直線不通過調和中心時，直線映至一個圓錐曲線。

證明：設調和中心在極點，調和半徑爲 r，且此直線至極點的距離爲 a，取適當坐標使此直線垂直極軸，則此直線可表爲 $\rho = \dfrac{a}{\cos\theta}$ 。

∴ 點 P（$\dfrac{a}{\cos\theta}$, θ）的像爲

$$Q_A：\left(\frac{\frac{a}{\cos\theta} \times r}{\frac{a}{\cos\theta} - r}, \theta\right) = \left(\frac{a \times r}{a - r\cos\theta}, \theta\right) = \left(\frac{r}{1 - \frac{r}{a}\cos\theta}, \theta\right)$$

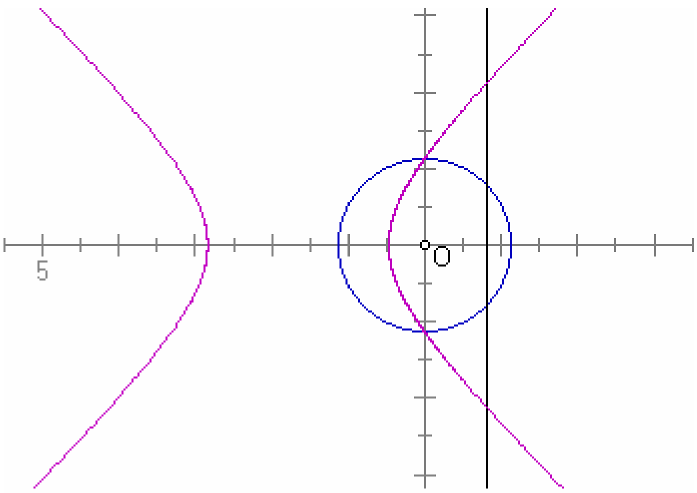
Q_B：$\left(\dfrac{\dfrac{a}{\cos\theta}\times r}{\dfrac{a}{\cos\theta}+r} \ , \ \theta+\pi \right) = \left(\dfrac{\dfrac{a}{-\cos(\theta+\pi)}\times r}{\dfrac{a}{-\cos(\theta+\pi)}+r} \ , \ \theta+\pi \right)$

$= \left(\dfrac{a\times r}{a-r\cos(\theta+\pi)} \ , \ \theta+\pi \right) = \left(\dfrac{r}{1-\dfrac{r}{a}\cos(\theta+\pi)} \ , \ \theta+\pi \right)$

與圓錐曲線標準式 $\rho = \dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 比較可知：

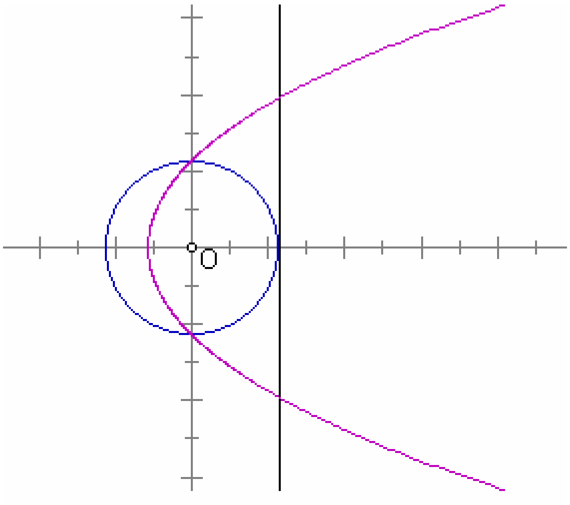
此直線映射後的像爲一離心率$e=\dfrac{r}{a}$，焦點在調和中心且與準線距離爲 a 之圓錐曲線。其中，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\dfrac{3\pi}{2}\le\theta<2\pi$ 爲 Q_A 之軌跡，$\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{2}$ 爲 Q_B 之軌跡 。

①*若 r>a，則像爲雙曲線（圖一）*



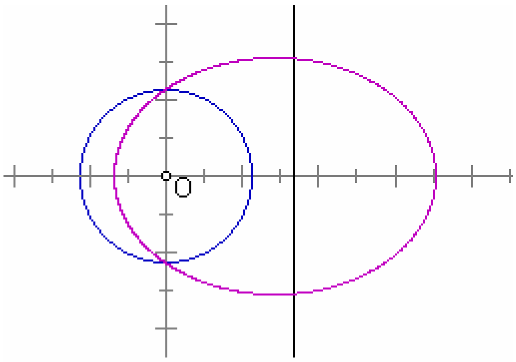
圖一

②*若 r = a，則像爲拋物線　（圖二）*



圖二

③*若 r ＜ a，則像爲橢圓　（圖三）*



圖三

2. 圓的調和變換

本文討論像源之圓通過調和中心時的各種映射情況：設調和中心在極點，調和半徑爲 r，且欲變換之圓的半徑爲 a，則此圓可表爲

$\rho = 2a\cos\theta$

∴點 P（2acos θ ， θ ）的像爲

$$Q_A：\left(\frac{2ar\cos\theta}{2a\cos\theta - r}，\theta\right)$$

$$Q_B：\left(\frac{2a\cos\theta \times r}{2a\cos\theta + r}，\theta + \pi\right) = \left(\frac{-2a\cos(\theta+\pi)\times r}{-2a\cos(\theta+\pi)+r}，\theta + \pi\right)$$

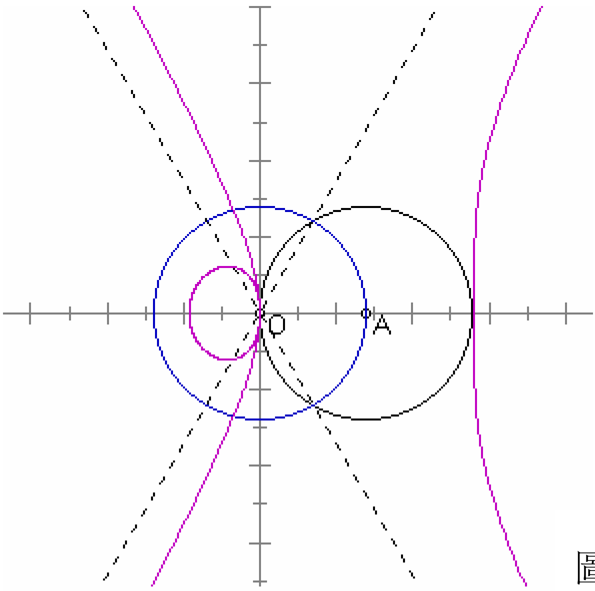
$= \left(\dfrac{2a\cos(\theta+\pi)\times r}{2a\cos(\theta+\pi)-r}，\theta+\pi \right)$

故此圓之像爲曲線 $\rho=\dfrac{2ar\cos\theta}{2a\cos\theta-r}$，其中

$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\dfrac{3\pi}{2}\le\theta<2\pi$ 之部分爲 Q_A 之軌跡，

$\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{2}$ 之部分爲 Q_B 之軌跡。

定理 2-1：當 $a=r$ 時，像集爲 $\rho=\dfrac{2r\cos\theta}{2\cos\theta-1}$ （圖四）



圖四

(1) $\theta=0\Rightarrow\rho=2r$

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\rho=r+\dfrac{r}{2\cos\theta-1}>0$

當 θ 遞增時，2acos θ -1 遞減，$\dfrac{r}{2\cos\theta-1}$ 遞增 ∴ ρ 遞增

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\rho\to\infty$

(4) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\rho=r-\dfrac{r}{1-2\cos\theta}<0$

當 θ 遞增時，1-2acos θ 遞減，$\dfrac{r}{1-2a\cos\theta}$ 遞增 ∴ ρ 遞增

(5) $\theta=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\rho=0$

(6) $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\Rightarrow\rho=r-\dfrac{r}{1-2\cos\theta}>0$

當θ遞增時，1-2acosθ遞增，$\dfrac{r}{1-2a\cos\theta}$遞減 $\therefore \rho$遞增

(7) $\theta=\pi \Rightarrow \rho=\dfrac{2r}{3}$

(8) $\pi<\theta<2\pi$之圖形爲$0<\theta<\pi$之圖形對極軸之映射

討論：

（1）以$\theta=\dfrac{\pi}{3}$和$\theta=\dfrac{5\pi}{3}$爲漸近線

（2）在（ρ，θ）之切線斜率

$$m=\frac{(\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta)+\rho\cos\theta}{(\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta)-\rho\sin\theta}=\frac{\frac{2r\sin\theta}{(2\cos\theta-1)^2}\sin\theta+\frac{2r\cos\theta}{2\cos\theta-1}\cos\theta}{\frac{2r\sin\theta}{(2\cos\theta-1)^2}\cos\theta-\frac{2r\cos\theta}{2\cos\theta-1}\sin\theta}$$

$\because \theta=\dfrac{\pi}{3}$和 $\theta=\dfrac{5\pi}{3}$時不可微分

$\therefore$令$2\cos\theta-1\neq 0$

$\Rightarrow m=\dfrac{3\cos^3\theta-2\cos^2\theta+1}{\sin 2\theta(1-\cos\theta)}$

令$\sin 2\theta(1-\cos\theta)=0$，$0\leq\theta<2\pi$，

則$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{2}$，π，$\dfrac{3\pi}{2}$

其中$\theta=\dfrac{\pi}{2}$和$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$時兩點重疊………………①

令$2\cos^3\theta-2\cos^2\theta+1=0$，$0\leq\theta<2\pi$，

設$f(x)=2x^3-2x^2+1\Rightarrow f'(x)=6x^2-4x\Rightarrow$令$f'(x)=0$得 x＝0 和$\dfrac{2}{3}$

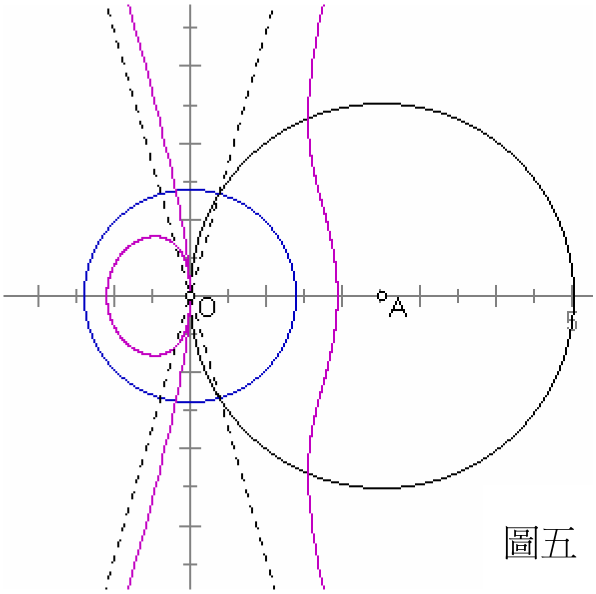
時有反曲點，但$f(0)>0$，$f(\dfrac{2}{3})>0$，故只有一實數解。而$f(-1)<0$，

$\therefore f(x)=o$在－1 和 0 之間有一解，即$\cos\theta$在－1 和 0 之間有一解

$\therefore \theta$ 在$\dfrac{\pi}{2}$和$\dfrac{3\pi}{2}$之間有二解………………………②

由①,②知共有 5 個反曲點

定理 2-2：當 $a > r$ 時，像集為 $\rho = \dfrac{2ar\cos\theta}{2a\cos\theta - r}$ （圖五）



圖五

(1) $\theta = 0 \Rightarrow \rho = \dfrac{2ar}{2a - r} \Rightarrow r < \rho < 2a$

(2) $0 < \theta < \cos^{-1}\dfrac{r}{2a} \Rightarrow \rho = r + \dfrac{r^2}{2a\cos\theta - r} > 0$

當 θ 遞增時，2acos θ 遞減，$\dfrac{r^2}{2a\cos\theta - r}$ 遞增 $\therefore \rho$ 遞增

(3) $\theta = \cos^{-1}\dfrac{r}{2a} \Rightarrow \rho \to \infty$

(4) $\cos^{-1}\dfrac{r}{2a} < \theta < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = r - \dfrac{r^2}{r - 2a\cos\theta} < 0$

當 θ 遞增時，r-2acos θ 遞增，$\dfrac{r^2}{2a\cos\theta - r}$ 遞減 $\therefore \rho$ 遞增

(5) $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = 0$

(6) $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \rho = r - \dfrac{r^2}{r - 2a\cos\theta} > 0$

當 θ 遞增時，r-2acos θ 遞增，$\dfrac{r^2}{2a\cos\theta - r}$ 遞減 $\therefore \rho$ 遞增

(7) $\theta = \pi \Rightarrow \rho = r - \dfrac{r^2}{r + 2a} = \dfrac{2ar}{r + 2a}$

(8) $\pi < \theta < 2\pi$ 之圖形為 $0 < \theta < \pi$ 之圖形對極軸之映射

討論：

（1） 以$\theta=\cos^{-1}\dfrac{r}{2a}$和$\theta=2\pi-\cos^{-1}\dfrac{r}{2a}$爲漸近線

（2） 在（ρ,θ）之切線斜率

$$m=\frac{\dfrac{dp}{d\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta}{\dfrac{dp}{d\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta}=\frac{\dfrac{2ar^2\sin\theta}{(2a\cos\theta-r)^2}\sin\theta+\dfrac{2ar\cos\theta}{2a\cos\theta-r}\cos\theta}{\dfrac{2ar^2\sin\theta}{(2a\cos\theta-r)^2}\cos\theta-\dfrac{2ar\cos\theta}{2a\cos\theta-r}\sin\theta}$$

$\because\ \theta=\cos^{-1}\dfrac{r}{2a}$和$2\pi-\cos^{-1}\dfrac{r}{2a}$時不可微分

$\therefore$令$2a\cos\theta-r\neq 0$

$$\Rightarrow m=\frac{2a\cos^3\theta-2r\cos^2\theta+r}{\sin 2\theta(r-a\cos\theta)}$$

令$\sin 2\theta(r-a\cos\theta)=0\ \ ,0\leq\theta<2\pi$

則$\theta=0$，$\cos^{-1}\dfrac{r}{a}$，$\dfrac{\pi}{2}$，π，$\dfrac{3\pi}{2}$，$2\pi-\cos^{-1}\dfrac{r}{a}$

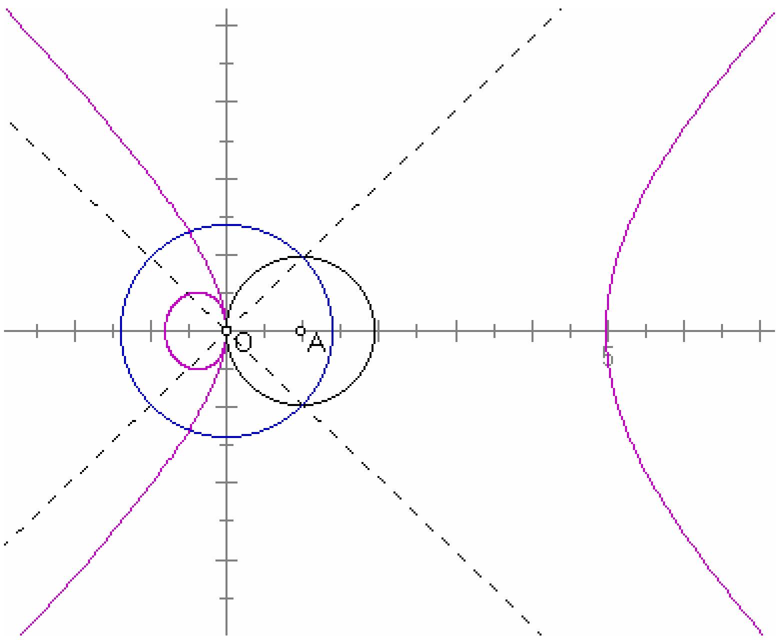
其中$\theta=\dfrac{\pi}{2}$和$\dfrac{3\pi}{2}$時二點重疊……………①

令$2a\cos^3\theta-2r\cos^2\theta+r=0$，$0\leq\theta<2\pi$

同定理 3-1 可知θ有二解落於和$\dfrac{\pi}{2}$和$\dfrac{3\pi}{2}$之間

由①②知共有 7 個反曲點…………………………②

定理 2-3：當$\dfrac{r}{2}<a<r$時像集爲 $\rho=\dfrac{2ar\cos\theta}{2a\cos\theta-r}$（圖六）



圖六

（1）$\theta = 0 \Rightarrow \rho = \dfrac{2ar}{2a-r} \Rightarrow \rho > 2a$

（2）$0 < \theta < \cos^{-1}\dfrac{r}{2a} \Rightarrow \rho = r + \dfrac{r^2}{2a\cos\theta - r} > 0$

當 θ 遞增時，$2a\cos\theta$ 遞減，$\dfrac{r^2}{2a\cos\theta - r}$ 遞增 $\therefore$ ρ 遞增

（3）$\theta = \cos^{-1}\dfrac{r}{2a} \Rightarrow \rho \to \infty$

（4）$\cos^{-1}\dfrac{r}{2a} < \theta < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = r - \dfrac{r^2}{r-2a\cos\theta} < 0$

當 θ 遞增時，$2a\cos\theta$ 遞減，$\dfrac{r^2}{2a\cos\theta - r}$ 遞增 $\therefore$ ρ 遞增

（5）$\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = 0$

（6）$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \rho = r - \dfrac{r^2}{r-2a\cos\theta} > 0$

當 θ 遞增時，$2a\cos\theta$ 遞增，$\dfrac{r^2}{2a\cos\theta - r}$ 遞減 $\therefore$ ρ 遞增

（7）$\theta = \pi \Rightarrow \rho = r - \dfrac{r^2}{r+2a} = \dfrac{2ar}{r+2a}$

（8）$\pi < \theta < 2\pi$ 之圖形為 $0 < \theta < \pi$ 之圖形對極軸之映射

討論：

（1）以 $\theta = \cos^{-1}\dfrac{r}{2a}$ 和 $\theta = 2\pi - \cos^{-1}\dfrac{r}{2a}$ 為漸近線

（2）同（2）理 知在（ρ,θ）之切線斜率

$$m = \frac{2a\cos^3\theta - 2r\cos^2\theta + r}{\sin 2\theta(r - a\cos\theta)}$$

令 $\sin 2\theta(r-a\cos\theta) = 0$, $0 \le \theta < 2\pi$

$\because r > a \quad \therefore r - a\cos\theta > 0$

故 $\sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ ，$\dfrac{\pi}{2}$ ，π ，$\dfrac{3\pi}{2}$

其中 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 和 $\dfrac{3\pi}{2}$ 時二點重疊………………①

令 $2a\cos^3\theta - 2r\cos^2\theta + r = 0$ ，$0 \le \theta < 2\pi$

設 $f(x) = 2ax^3 - 2rx^2 + r \Rightarrow f'(x) = 6ax^2 - 4rx$

$\Rightarrow$ 令 $f'(x) = 0$ 得 x=0 和 $\dfrac{2r}{3a}$ 時有反曲點，其中 $\dfrac{2}{3} < \dfrac{2r}{3a} < \dfrac{4}{3}$ ，

且 $f(0)>0$，$f(\frac{2r}{3a})<0$，故 $f(x)=0$ 有三個實數解

但 $f(-1)<0$，$f(1)=2a-r>0$，

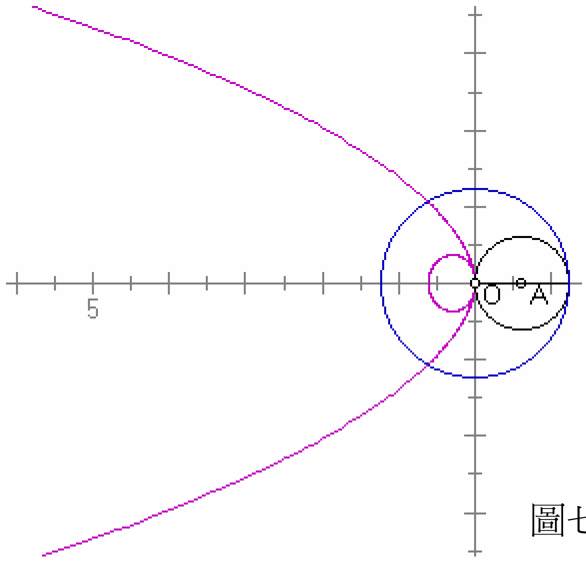
$\therefore f(x)=0$ 在 0 和－1 之間有一解，但在 0 和 1 之間無實數解，

故 $\cos\theta$ 在－1 和 0 之間有一解，

$\therefore \theta$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 之間有二解……………………②

由①②知共有 5 個反曲點

定理 2-4：當 $a=\frac{r}{2}$ ***時，像集為*** $\rho=\frac{r\cos\theta}{\cos\theta-1}$（圖七）



圖七

（1）$\theta=0 \Rightarrow \rho \to \infty$

（2）$0<\theta<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho=r-\frac{r}{1-\cos\theta}<0$

當 θ 遞增時，$2a\cos\theta$ 遞增，$\frac{r^2}{2a\cos\theta-r}$ 遞減 $\therefore \rho$ 遞增

（3）$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho=0$

（4）$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi \Rightarrow \rho=r-\frac{r}{1-\cos\theta}>0$

當 θ 遞增時，$2a\cos\theta$ 遞增，$\frac{r^2}{2a\cos\theta-r}$ 遞減 $\therefore \rho$ 遞增

（5）$\theta=\pi \Rightarrow \rho=\frac{r}{2}$

（6）$\pi<\theta<2\pi$ 之圖形為 $0<\theta<\pi$ 之圖形對極軸之映射

討論：

（1）無漸近線

（2）∵ θ ＝0 時不可微分　∴令 $\cos\theta - 1 \neq 0$

∴在（ ρ ， θ ）之切線斜率

$$m = \frac{r\cos^3\theta - 2r\cos^2\theta + r}{\sin 2\theta(r - \frac{r}{2}\cos\theta)} = \frac{\cos^3\theta - 2r\cos^2\theta + 1}{\sin 2\theta(1 - \frac{1}{2}\cos\theta)}$$

令 $\sin 2\theta(1 - \frac{1}{2}\cos\theta) = 0$ ， $0 < \theta < 2\pi$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ， π ， $\frac{3\pi}{2}$ ，其中 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 時二點重疊………………①

令 $\cos^3\theta - 2\cos^2\theta + 1 = 0$ ， $0 < \theta < 2\pi$

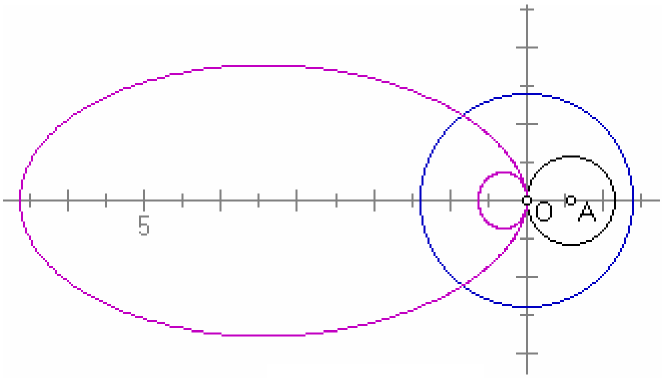
$\Rightarrow (\cos\theta - 1)(\cos^2\theta - \cos\theta - 1) = 0$

$\therefore \cos\theta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$（不合）

$\theta = \cos^{-1}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ or $2\pi - \cos^{-1}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ …………………②

由①②知共有 5 個反曲點

定理 2-5：當 $0 < a < \frac{r}{2}$ 時，像集為 $\rho = \frac{2ar\cos\theta}{2a\cos\theta - r}$（圖八）



圖八

（1） $\theta = 0 \Rightarrow \rho = \frac{2ar}{2a - r} \Rightarrow \rho < 0$

（2） $0 < \theta < 2\pi \Rightarrow \rho = r - \frac{r^2}{r - 2a\cos\theta} < 0$

當 θ 遞增時，2acos θ 遞增， $\frac{r^2}{2a\cos\theta - r}$ 遞減 ∴ ρ 遞增

（3） $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = 0$

（4）$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \rho = r - \frac{r^2}{r - 2a\cos\theta} > 0$

當 θ 遞增時，2acos θ 遞增，$\frac{r^2}{2a\cos\theta - r}$ 遞減 $\therefore$ ρ 遞增

（5）$\theta = \pi \Rightarrow \rho = \frac{2ar}{r + 2a}$

（6）$\pi < \theta < 2\pi$ 之圖形爲 $0 < \theta < \pi$ 之圖形對極軸之映射

討論：

（1）無漸近線

（2）在（ ρ, θ ）之切線斜率

$$m = \frac{\frac{dp}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta}{\frac{dp}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta} = \frac{\frac{2ar^2\sin\theta}{(2a\cos\theta - r)^2}\sin\theta + \frac{2ar\cos\theta}{2a\cos\theta - r}\cos\theta}{\frac{2ar^2\sin\theta}{(2a\cos\theta - r)^2}\cos\theta - \frac{2ar\cos\theta}{2a\cos\theta - r}\sin\theta}$$

$\because a < \frac{r}{2}$ $\quad \therefore 2a\cos\theta - r \neq 0$

$$\Rightarrow m = \frac{2a\cos^3\theta - 2r\cos^2\theta + r}{\sin 2\theta(r - a\cos\theta)}$$

令 $\sin 2\theta(r - a\cos\theta) = 0$ ， $0 \le \theta < 2\pi$

$\because r > a \qquad \therefore r - a\cos\theta > 0$

故 sin2θ=0$\Rightarrow \theta = 0$ ，$\frac{\pi}{2}$ ，π ，$\frac{3\pi}{2}$

其中 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 時二點重疊………………①

令 $2a\cos^3\theta - 2r\cos^2\theta + r = 0$ ，$0 \le \theta < 2\pi$

設 $f(x) = 2ax^3 - 2rx^2 + r \Rightarrow f'(x) = 6ax^2 - 4rx$

$\Rightarrow x = 0$ 和 $\frac{2r}{3a}$ 時有反曲點，其中 $\frac{2r}{3a} > \frac{4}{3}$ ，

且 $f(0) > 0$ ，$f(\frac{2r}{3a}) < 0$ ，故 $f(x) = 0$ 有三個實數解

但 $f(-1) < 0$ ，$f(1) = 2a - r < 0$ ，

$\therefore f(x) = 0$ 在 0 和－1 之間與 0 和 1 之間各有一解

故 $\cos\theta$ 在－1 和 0 之間與 0 和 1 之間各有一解，

$\therefore \theta$ 在 0 和 $\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 之間各有二解…………………②

由①②知共有 7 個反曲點

3. 圓錐曲線的調和變換

在此本文討論像源之圓錐曲線的焦點位於調和中心之情況。

定理 3 ：一條焦點在調和中心的圓錐曲線映射成兩條圓錐曲線或一直線和一條圓錐曲線。

設調和中心在極點，調和半徑爲 r，且像源之圓錐曲線的離心率爲 e ，焦點至準線之距離爲 p。則此圓錐曲線可表 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ ，故點 P（$\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ ，θ ）的像爲

$$Q_A：\left(\frac{\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}\times r}{\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}-r}，\theta\right)=\left(\frac{epr}{ep-r+re\cos\theta}，\theta\right)$$

(1)若 $r\neq ep$

$$則\ Q_A：\left(\frac{\dfrac{epr}{ep-r}}{1+\dfrac{re}{ep-r}\times\cos\theta}，\theta\right)=\left(\frac{(\dfrac{-re}{ep-r})(-p)}{1-(\dfrac{-re}{ep-r})\times\cos\theta}，\theta\right)$$

(2)若 $r=ep$

$$則\ Q_A：\left(\frac{p}{\cos\theta}，\theta\right)$$

$$Q_B：\left(\frac{\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}\times r}{\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}+r}，\theta+\pi\right)=\left(\frac{\dfrac{ep}{1+e\cos(\theta+\pi)}\times r}{\dfrac{ep}{1+e\cos(\theta+\pi)}+r}，\theta+\pi\right)$$

$$=\left(\frac{epr}{ep+r+re\cos(\theta+\pi)}，\theta+\pi\right)=\left(\frac{\dfrac{epr}{ep+r}}{1+\dfrac{re}{ep+r}\cos(\theta+\pi)}，\theta+\pi\right)$$

$$=\left(\frac{(\dfrac{-re}{ep+r})(-p)}{1-(\dfrac{-re}{ep+r})\cos(\theta+\pi)}，\theta+\pi\right)$$

與圓錐曲線標準式比較可知：

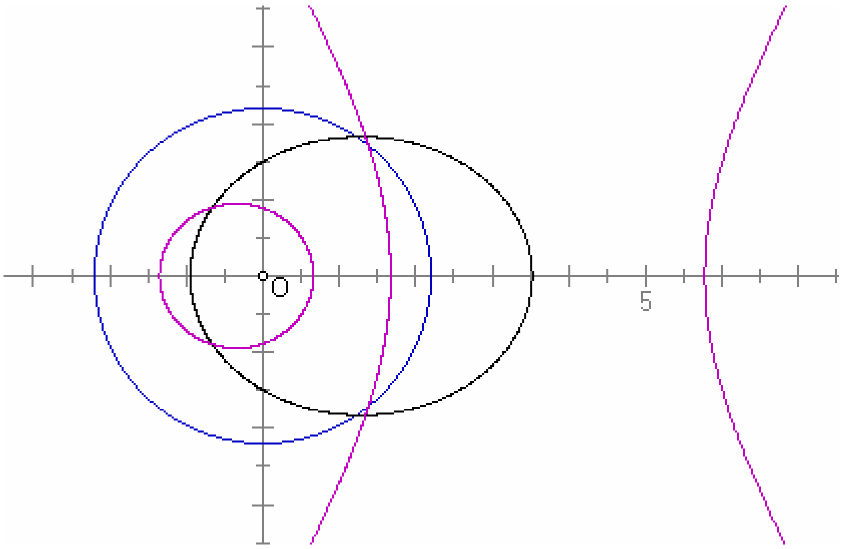
若 $r\neq ep$ ：

Q_B 的軌跡爲一離心率爲 $\dfrac{-re}{ep+r}$ ，焦點與準線距離爲－p（和原來反向之圓錐曲線。Q_A 的軌跡爲一離心率爲 $\dfrac{-re}{ep-r}$ ，焦點與準線距離爲－p

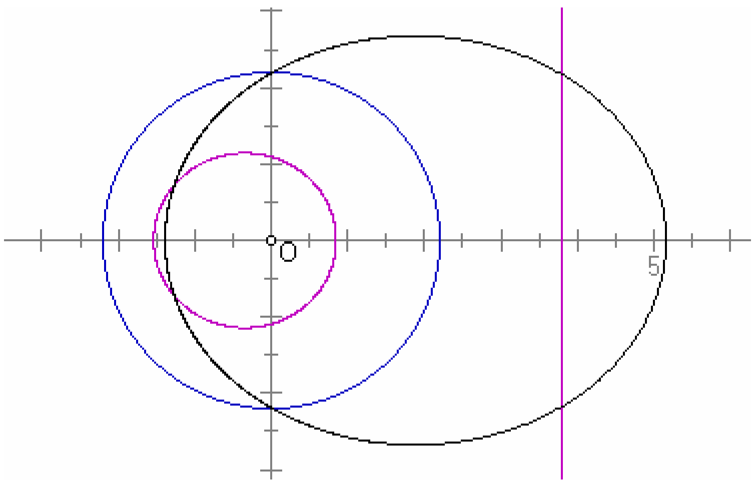
（和原來反向）之圓錐曲線（圖九）。

若$r = ep$ ：

Q_B的軌跡爲一離心率爲$\dfrac{-re}{ep+r}$，焦點與準線距離爲－p（和原來反向）之圓錐曲線。Q_A的軌跡爲距調和中心 p 的一直線（圖十）。

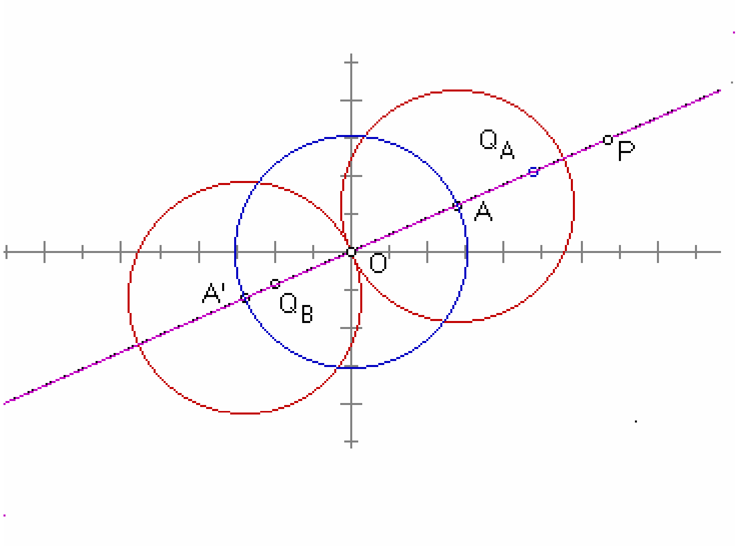


圖九



圖十

4.調和變換與反演變換的關係



圖十一

定理四：設調和中心為 O，調和半徑為 r。作 P 與 O 的連線交參考圓於 A、A'（設$\overline{PA'}>\overline{PA}$）。以 A、A'為圓心，r 為半徑作圓 A 和圓 A'。若以此二圓為反演變換的參考圓，則 P 分別對圓 A 與圓 A'作反演變換所得的像即為 P 對圓 O 作調和變換所得的兩個像 Q_A 及 Q_B。(參考圖十一)

證明：依反演變換的定義可知

$$\overline{AQ_A}\times\overline{AP}=r^2$$

$$\Rightarrow(\overline{OQ_A}-r)(\overline{OP}-r)=r^2$$

$$\Rightarrow\overline{OQ_A}\times\overline{OP}-r(\overline{OQ_A}+\overline{OP})+r^2=r^2$$

$$\Rightarrow\overline{OQ_A}\times\overline{OP}=r(\overline{OQ_A}+\overline{OP})$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\overline{OP}}+\frac{1}{\overline{OQ_A}}=\frac{1}{r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

同理可得$\frac{1}{\overline{OP}}-\frac{1}{\overline{OQ_B}}=\frac{1}{r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$

由①、②知 $\frac{1}{\overrightarrow{OP}}+\frac{1}{\overrightarrow{OQ}}=\frac{1}{\vec{r}}$ 故得證。

四、結論與應用

1.結論：設調和半徑為 r：

（1）調和變換可以把通過調和中心的直線映射成原直線。
（2）調和變換可以把不通過調和中心的直線映射成圓錐曲線：
當直線與調和中心距離大於 r 時，映射形爲雙曲線；
當直線與調和中心距離等於 r 時，映射形爲拋物線；
當直線與調和中心距離小於 r 時，映射形爲橢圓。
（3）調和變換可以把通過調和中心且半徑爲 a 的圓映射成曲線

$\rho = \dfrac{2ar\cos\theta}{2a\cos\theta - r}$ ：

當 $a > \dfrac{r}{2}$ 時，圖形有漸近線；

當 $0 < a \le \dfrac{r}{2}$ 時，圖形無漸近線。

（4）調和變換可以把以調和中心爲焦點的圓錐曲線映射成兩條
圓錐曲線或一條圓錐曲線和一直線。
（5）圖形經調和變換可視爲一系列反演變換後所得像之集合。

2.應用：

因爲天體運動的軌跡是圓錐曲線，而直線的調和變換圖形也是圓錐曲線，因此這個調和變換研究在應用上也就露出一道曙光！在老師的建議下，我們利用了調和變換證明行星的運動軌道爲圓錐曲線：

證明：建立一極坐標系，設行星位置爲（X（t），θ（t））（表 X、θ 爲時間之函數）。經由一個圓心在極點且半徑爲 r 的參考圓作調和變換後得到的 Q_A 像爲（$\dfrac{X(t)\times r}{X(t)-r}$，$\theta$（t））=（$\dfrac{1}{\frac{1}{r}-(X(t))^{-1}}$，$\theta$（t））。

由前面的討論我們知道：若取適當長度爲參考圓半徑，則所有不通過調和中心的圖形中只有圓錐曲線的 Q_A 像軌跡能被映射成一直線。於是我們希望（$\dfrac{1}{\frac{1}{r}-(X(t))^{-1}}$，$\theta$（t））可以表爲（$\dfrac{1}{\beta\cos(\theta-\alpha)}$，$\theta$）之形式。令 $k=\dfrac{1}{r}$，即希望（$k-(X(t))^{-1}$，θ（t））可表爲（$\beta\cos(\theta-\alpha)$），θ）之形式。也就是

$\dfrac{d^2}{d\theta^2}(k-(X(t))^{-1})+(k-(X(t)^{-1})=0$ 。

爲了簡化計算，令 GMm 爲 1。

由角動量守恆： $X^2\omega = C \Rightarrow X^2\dfrac{d\theta}{dt} = C$ …………………①

位能：由 W = Fs 得 W（位能）= $\int \frac{1}{X^2}dx = -\frac{1}{X}$ ；

切線速度：$X\omega = X\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{X}$（由<13>）；法線速度：$\frac{dX}{dt}$

由能量守恆：$\frac{-1}{X} + \frac{1}{2}((\frac{C}{X})^2 + (\frac{dX}{dt})^2) = E$ …………………②

$$\frac{d}{d\theta}(k-(X(t))^{-1}) = \frac{\frac{d}{d\theta}X}{X^2} = \frac{\frac{dt}{d\theta}\cdot\frac{d}{dt}X}{X^2} = \frac{\frac{X^2}{C}\cdot\frac{d}{dt}X}{X^2} = \frac{1}{C}\cdot\frac{d}{dt}X \text{（由①）}$$

②兩邊對 θ 微分：

$$\frac{\frac{d}{d\theta}X}{X^2} + \frac{d}{d\theta}(\frac{1}{2}(\frac{C}{X})^2 + \frac{1}{2}(\frac{d}{dt}X)^2) = \frac{1}{C}\cdot\frac{d}{dt}X - \frac{C^2\frac{d}{d\theta}X}{X^3} + \frac{d}{d\theta}(\frac{d}{dt}X)\cdot\frac{d}{dt}X = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C}\cdot\frac{d}{dt}X - \frac{C^2\cdot\frac{X^2}{C}\cdot\frac{d}{dt}X}{X^3} + \frac{d}{d\theta}(\frac{d}{dt}X)\cdot\frac{d}{dt}X = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} - \frac{C}{X} + \frac{d}{d\theta}(\frac{d}{dt}X) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}(\frac{1}{C}\cdot\frac{d}{dt}X) = -(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{X})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}(\frac{d}{d\theta}(k-(X(t))^{-1}) = \frac{d^2}{d\theta^2}(k-(X(t))^{-1}) = -(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{X})$$

若取 $r = C^2$ ，即 $k = \frac{1}{C^2}$

則 $\frac{d^2}{d\theta^2}(k-(X(t))^{-1}) + (k-(X(t)^{-1}) = -(k-\frac{1}{X}) + (k-\frac{1}{X}) = 0$

故得證行星運動軌道爲圓錐曲線。

五、參考文獻

1.軌道力學導論 / 沈長庚 著/ 國立編譯館

2.台灣省台南一中第六屆數理資優班專題研究作品及經驗傳承彙編 / 台灣省立台南第一高級中學編印