中華民國第 65 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080413

環遊世界三六形

學校名稱：　臺中市私立華盛頓國民小學

作者：	指導老師：
小五　尤大	鄭智先
小五　李和謙	張雅玲
小五　劉杰睿	
小五　廖沛耘	
小五　高美慈	
小五　陳宣愷	

關鍵詞：　三角多連塊、六邊多連塊、擴充位置

摘要

大部分的作品都是在研究五方連塊和它的特性，本研究特別以三角多連塊以及六邊多連塊為出發點來探討。一開始，我們針對連塊可以擴充的數量來分析，隨著圖形擴充，發現連塊數量、連接邊、V字角會影響總擴充數。接著，蒐集三角多連塊、六邊多連塊，研究它們的周長、角的數量、內角和等幾何性質，隨著圖形發展，發現平角、周角的數量會影響幾何性質的表現。

最後，在 n 階三角形、n 階六邊形中，拿走最少個數並找出規律拿法，讓指定三角多連塊、六邊多連塊無法放入 n 階圖形內。未來，我們希望在更多指定多連塊下，找出各種規律拿法，讓 n 階圖形呈現更多規律之美。

壹、前言

一、研究動機：

五上的第十單元正方體與長方體單元裡，正方體的展開圖共有 11 種，每種都是不同組合的六方連塊。六方連塊共有 35 種，但是其中只有 11 種可以摺成正方體，六方連塊少一塊變成五方連塊，不能摺成正方體，而且五方連塊只剩下 12 種。我們發現五方連塊跟六方連塊之間，雖然只差一塊，種類跟特性卻差別很大。

我們好奇除了正方形組成的多連塊之外，是否可以用其他規則的形狀來組成多連塊。一開始，我們試著用正三角形來組成多連塊，發現用正三角形組成的五連塊種類比五方連塊的種類要少很多，引起我們的好奇心，想去深入研究其中的原因。

二、研究目的：

(一)歸納三角多連塊及六邊多連塊外圍可擴充位置數量公式並列出圖形。

(二)分析三角多連塊的幾何性質並歸納特性。

(三)分析六邊多連塊的幾何性質並歸納特性。

(四)在 n 階正三角形及 n 階正六邊形中，探討讓指定圖形無法放入，需拿掉的最少個數及位置，觀察增加的規律並歸納成通用公式。

三、相關文獻參考：

文獻名稱	與研究相關的內容摘要	對本研究啟發與差異之處
五方連塊之乾坤大挪移武功祕笈	作品找出五方連塊的變化圖形，找出其線對稱、點對稱、面積與周長關係。五方連塊找出五種多邊形；點對稱與非點對稱各有三種跟九種；線對稱與非線對稱各六種。	本研究和參考文獻不同在於利用三角形和六邊形組成的多連塊來探討其變化圖形，找出其線對稱、點對稱、面積與周長關係。
天羅地網尋芳蹤 只為盡訪六連塊	作品以五連塊為基礎透過外圍可連接正方形的擴充位置個數除去旋轉、鏡射後的相同型態確認六連塊所有組合形狀。	本研究和參考文獻不同在於利用三角形和六邊形組成的多連塊，透過外圍可連的擴充位置個數除去旋轉、鏡射後的相同型態確認多連塊所有組合形狀。

滾動棋積─三角正多面體與滾積木遊戲	對六連塊設計命名規則：以最多連環塊(同一頂點)的數量為第一碼。後續以逆時針和順時針交替給予號碼。	三角多連塊跟六邊多連塊的命名規則，參考命名規則的第一項，但後續的號碼與符號，以本研究的圖形特色為主。
無鎖不能─在 n×n 方格中卡住五連方格的探討	在 n×n 方格中，拿走最少方格，讓 8 種五方連塊無法置入方格內。	在 n 階三角形、n 階六邊形中，拿走最少個數並找出規律拿法，讓指定三角多連塊、六邊多連塊無法放入 n 階圖形內。

貳、研究設備及器材

電腦、iPad、紀錄筆記本、紀錄紙、棋子、白板

參、研究過程或方法

一、名詞解釋

P：多方連塊個數。
C：連接邊個數，兩個多邊形連接在一起的共同邊數量。
V：V 字角，在多邊形外圍擴充多邊形，遇到的重複數量。
E：可擴充位置個數。
L：周長。
A：角的數量。
S：平角。
R：周角。
I：內角和。
n 階正三角形：每邊個數 n 個正三角形。
n 階正六邊形：每邊個數 n 個正六邊形。

二、研究歷程與方法

活動一：歸納三角多連塊及六邊多連塊外圍可擴充位置數量公式並列出圖形。

(一)三角二連塊～三角五連塊的所有圖形及命名，並歸納外圍可擴充位置數量公式。

(二)六邊二連塊～六邊四連塊的所有圖形及命名，並歸納外圍可擴充位置數量公式。

活動二：分析三角多連塊的幾何性質並歸納特性。

(一)分析三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形的周長變化。

(二)分析三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形的角的數量變化。

(三)分析三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形的內角和變化。

活動三：分析六邊多連塊的幾何性質並歸納特性。

(一)分析六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形的周長變化。

(二)分析六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形的角的數量變化。

(三)分析六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形的內角和變化。

活動四：在 n 階正三角形及 n 階正六邊形中，探討讓指定圖形無法放入，需拿掉的最少個數及位置，觀察增加的規律並歸納成通用公式。

(一)在 n 階正三角形中，探討讓三角四連塊無法放入，需拿掉的最少三角形個數及位置並歸納成通用公式。

(二)在 n 階正六邊形中，探討讓六邊三連塊無法放入，需拿掉的最少六邊形個數及位置並歸納成通用公式。

肆、研究結果

活動一：歸納三角多連塊、六邊多連塊外圍可擴充位置數量公式並列出圖形

我們嘗試在三角形外圍多加一塊三角形，討論有幾種擴充位置，先從三角二連塊開始，依序到三角四連塊，發現擴充位置的數量有規律，但是從三角四連塊開始，我們發現圖形的變化更多，應該先找出所有的連塊圖形，才能確定我們發現的規律是否正確。

接著，我們先列出三角二連塊到三角五連塊的所有圖形，旋轉跟翻轉後形狀一樣的，我們當成同一種圖形，只記錄其中一個圖形，其餘重複的就去掉。每當增加一個三角形，圖形數量就會增加很多，所以我們討論出一個命名規則，方便我們檢查並去除重複圖形。

(一)三角二連塊～三角六連塊的所有圖形及命名，並歸納外圍可擴充位置數量公式

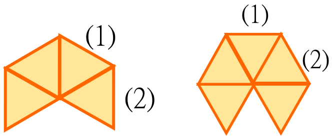
1.命名規則

各層數字間用分號區隔，第一層命名後再以外圍新增的連塊進行新一層的命名，以此類推，分層越少越好。

(1)第 1 層是字母+數字：以多連塊形狀英文開頭第一個字母命名，三角形用 T，T 後面的數字代表多連塊的總數。

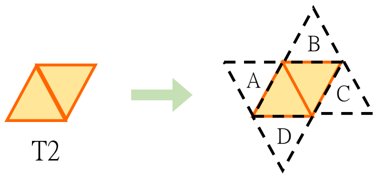
(2)第 2 層是第 2 個數字：表示同一頂點上，連接最多連塊當頂點的數量。

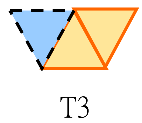
(3)第 3 層是第 3 個數字：以第 2 層連接的多連塊為基底，畫出對稱軸，以擴充多邊形的連接邊命名，對稱軸所在的那一條邊或往右的那一條邊當成(1)，順時針往右為(2)，以此類推，此基底多連塊新增的擴充連塊編號即為第 3 個數字。

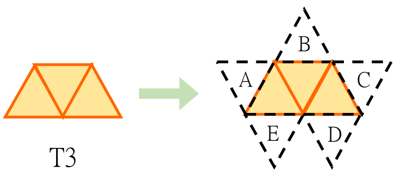


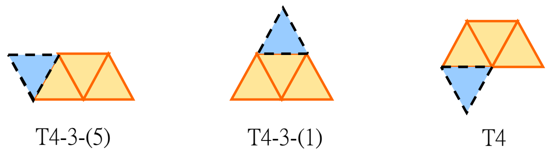
(4)第 4 層是第 4 個數字：以上一層新增的擴充連塊為基底，連接邊為 0，順時針往右為①、②…，新增的擴充連塊編號即為第 4 個數字。

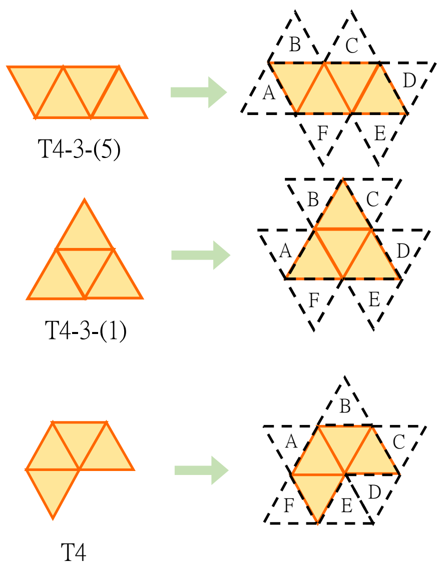
2.歸納三角二連塊～三角五連塊外圍可擴充位置數量公式

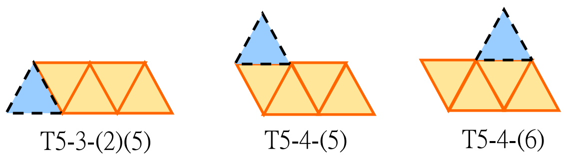
<table>
<tr>
<td>三角二連塊的外圍可擴充位置：


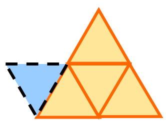
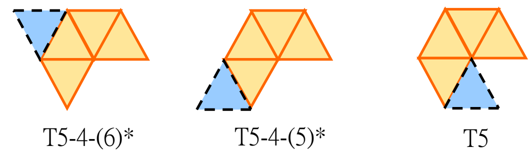
二連塊由 2 個三角形組成，共有 6 條邊(3x2)，有 1 個連接邊連接了 2 個三角形，要扣掉 2x1，所以 T2 外圍共有 4 個可擴充位置。寫成算式：E＝3x2－2x1＝4</td>
<td>擴充圖形：


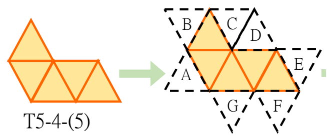
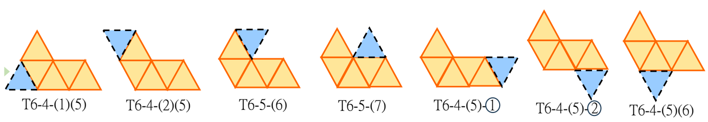
去除旋轉、翻轉後的重複圖形，三角三連塊有 1 種。</td>
</tr>
<tr>
<td>三角三連塊的外圍可擴充位置：


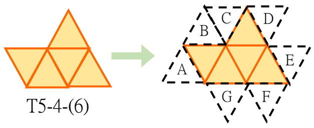
E＝3x3－2x2＝5</td>
<td>擴充圖形：


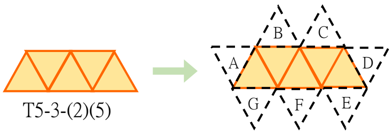
三角四連塊有 3 種。</td>
</tr>
<tr>
<td>三角四連塊的外圍可擴充位置：


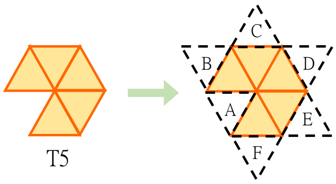
E＝3x4－2x3＝6</td>
<td>擴充圖形：


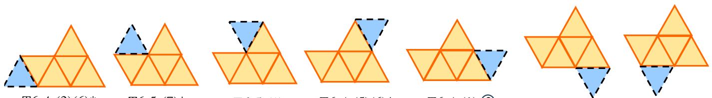
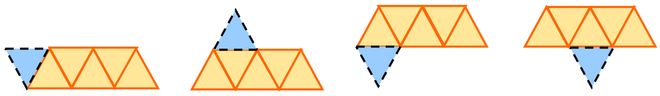
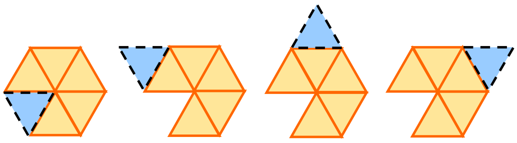

T5-4-(6)* (重複圖形在命名上標記「＊」)


三角五連塊有 4 種。</td>
</tr>
<tr>
<td>三角五連塊的外圍可擴充位置：

</td>
<td>擴充圖形：

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

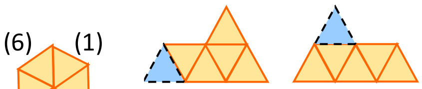
T5-4-(6)


T5-3-(2)(5)
E＝3x5－2x4＝7


T5
T5 在擴充位置 A 會重疊位置擴充 2 次，要再減 1，有形成 V 字角的位置就會多減 1。
E＝3x5－2x4－1＝6</td>
<td>
T6-4-(2)(6)* T6-5-(7)* T6-5-(1) T6-4-(5)(6)* T6-4-(1)② T6-4-(5)(6)* T6-4-(1)(6)

T6-3-(2)(5)-② T6-4-(1)(5)* T6-4-(2)-②* T6-4-(1)-②*

T6 T6-5-(6)* T6-5-(7)* T6-5-(1)*
三角六連塊有 12 種。</td>
</tr>
</table>

我們的發現：①在計算三角形二連塊到五連塊可擴充位置數量的過程中，我們發現有規律的算法，都是 3x三角形個數，減去 2x連接邊個數，再減去 1xV 字角個數，根據名詞定義，可表示成「E＝3xP－2xC－1xV」。

②我們發現命名規則可以幫助我們判斷翻轉後相同的圖形，首先，對稱軸往右的第一邊當起始邊，將起始邊的命名編號加上周長，例如下圖是 1+6=7，只要第 3 層括號內數字相加等於 7，就表示為重複圖形。



T6-4-(2)(6)* T6-4-(1)(5)*

2+5=7、6+1=7。

③具有對稱性的圖形，擴充後的數量大約只有 E 的一半。

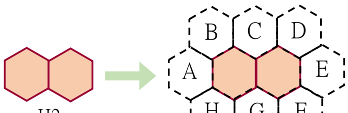
(二)六邊二連塊～六邊五連塊的所有圖形及命名，並歸納外圍可擴充位置數量公式

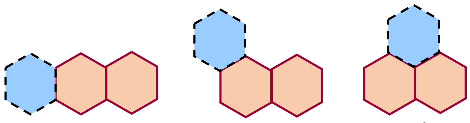
1.命名規則

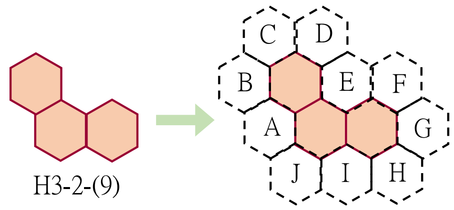
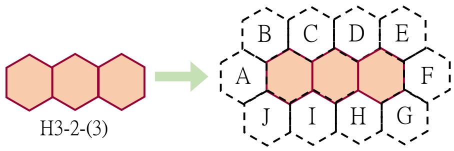
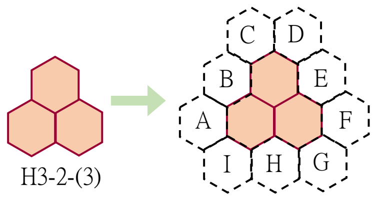
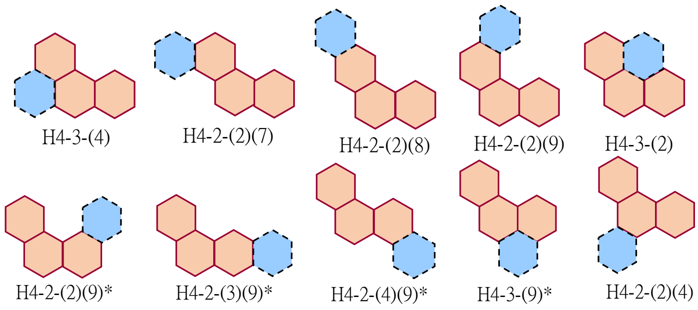
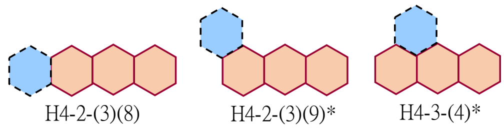
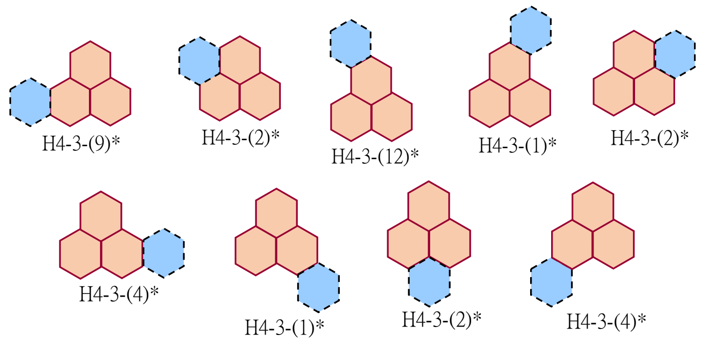
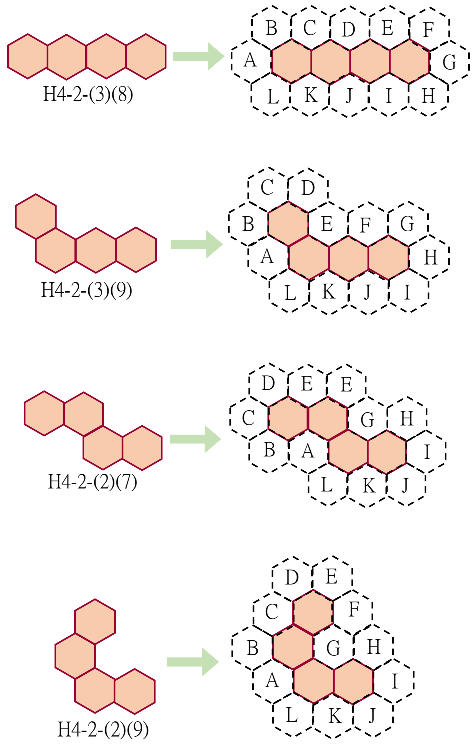
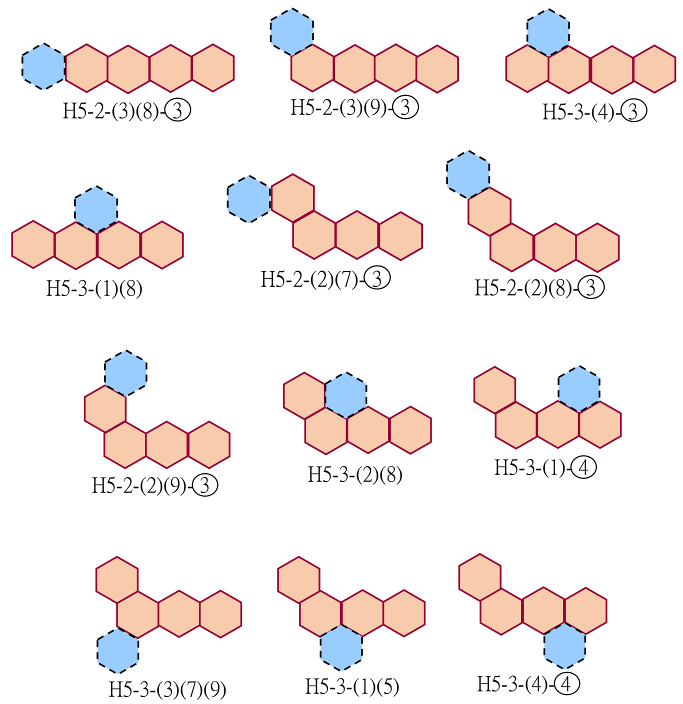
(1)第 1 層是字母+數字：以多連塊形狀英文開頭第一個字母命名，六邊形用 H，H 後面的數字代表多連塊的總數。各層數字間用分號區隔。

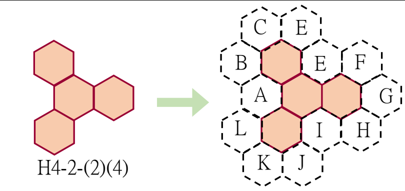
(2)第 2 層~第 4 層的命名規則與三角多連塊相同。

2.歸納六邊二連塊～六邊五連塊外圍可擴充位置數量公式

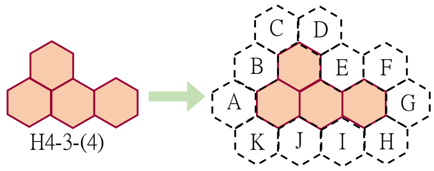
<table>
<tr>
<td>六邊二連塊的外圍可擴充位置：


H2
二連塊共有 12 條邊(6x2)，有 1 個連接邊，要扣掉 2x1，在位置 C 和 G 會重複擴充，再減去 2，</td>
<td>擴充圖形：

H3-2-(8) H3-2-(9) H3
去除旋轉、翻轉後的重複圖形，六邊三連塊有 3</td>
</tr>
</table>

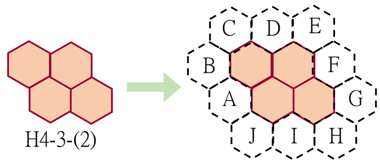
所以 H2 外圍共有 8 個可擴充位置。E＝6x2－2x1－2＝8	種。
六邊三連塊的外圍可擴充位置：   E＝6x3－2x2－4＝10  E＝6x3－2x3－3＝9	擴充圖形：    六邊四連塊有 7 種。
六邊四連塊的外圍可擴充位置：  	去掉重複圖形的擴充圖形： 



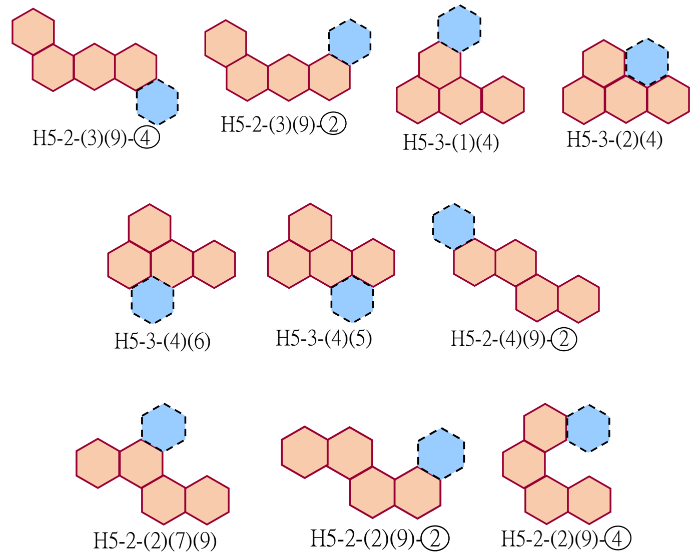
$E = 6 \times 4 - 2 \times 3 - 6 = 12$



$E = 6 \times 4 - 2 \times 4 - 5 = 11$



$E = 6 \times 4 - 2 \times 5 - 4 = 10$



我們去除重複圖形，六邊五連塊有 22 種。

我們的發現：從六邊二連塊到四連塊的可擴充位置數量中，我們發現有規律的算法，都是6x六邊形個數，減去 2x連接邊個數，再減去 1xV 字角個數，所以 E 可表示成「$E = 6 \times P - 2 \times C - 1 \times V$」。

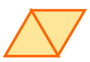
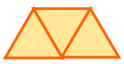
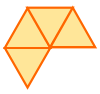
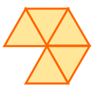
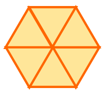
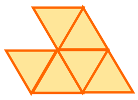
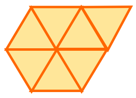
活動二：分析三角多連塊及的幾何性質並歸納特性

(一)分析三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形的周長變化

我們討論完並列出所有圖形後，發現可以觀察到許多學過的性質，例如：有線對稱的圖形，擴充後會有一半位置的圖形重複，去除重複圖形後，圖形數量就變少很多，但沒有對稱性的圖形，擴充後的圖形不會重複，所以圖形數量跟擴充位置數量一樣。還有我們學過的周長、角的數量及內角和等幾何性質，都可以運用在圖形中，引發我們的好奇，所以我們接著討論這些性質，觀察看看在圖形中，還可以發現哪些規律。

1.歸納三角多連塊的周長公式

我們計算活動一列出來的三角二連塊到六連塊圖形的周長，發現算出來的周長跟擴充位置數量 E 很類似，但是有些又不同，我們想比較不同的原因，下面列出二連塊到七連塊的一些圖形進行比較及推論。

							
E=3P-2C-V	4	5	6	6	6	7	7
周長(L)	4	5	6	7	6	8	7

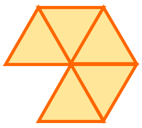
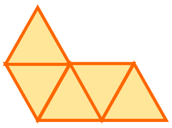
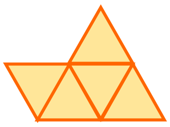
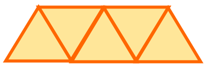
我們發現出現 V 字角的圖形，E 就會和 L 不同，多一個 V 字角，周長 L 會比 E 多 1，因為 V 字角會影響擴充位置，造成重複擴充，所以 E 要減去 V 字角；但是

V 字角包含在周長中，所以不會影響到周長，計算周長時，不用減掉 V 字角。所以周長可以表示成 $L=3\times P-2\times C$。

2.分析三角多連塊同樣連塊數的周長變化

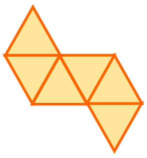
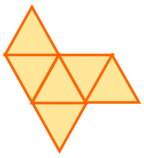
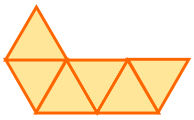
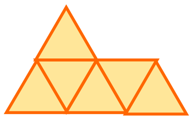
接著，我們將蒐集到的三角二連塊到三角六連塊所有圖形，算出他們的周長、角的數量及內角和等性質，觀察圖形間是否有什麼共同的關係。我們發現同樣連塊數的圖形中，有出現平角跟周角的連塊圖形，幾何特性會跟其他圖形不同，為了確認我們的推測，接下來，我們在同樣連塊數的情況下，分別比較出現平角(S)及周角(R)會對周長造成什麼影響。

(1)圖形中出現平角

三角五連塊 P=5				
S	0	1	2	3
L	7	7	7	7

我們發現圖形中出現平角對周長沒有影響，因為形成平角的邊都是在圖形的周界上，計算周長時都會被算到，對圖形內部的連接邊 C 沒有影響，所以周長一樣是 $3\times P-2\times C$。

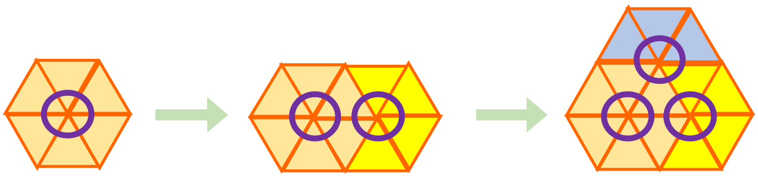
我們再往下驗證六連塊是否符合：

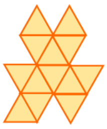
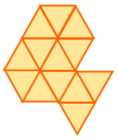
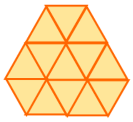
三角六連塊 P=6				
S	0	1	2	3
L	8	8	8	8

我們的發現：三角六連塊也符合，形成平角對連接邊 C 及周長都不會產生變化。

(2)圖形中出現周角

從三角六連塊開始，才會形成周角，要形成第二個周角，所需要的最少連塊數是 10 連塊，如下圖，往 10 連塊上方再加 3 塊，就可再形成第三個周角，為了觀察周角產生的影響，我們從 13 連塊開始討論。



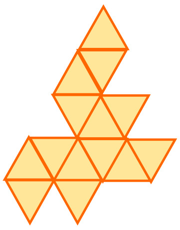
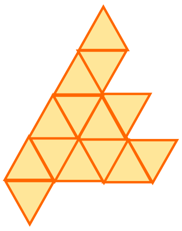
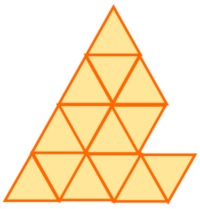
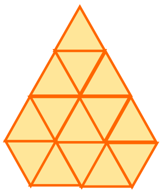
13 連塊 P=13				
R	0	1	2	3
C	12	13	14	15
L	15(=3x13-2x12)	13(=3x13-2x13)	11(=3x13-2x14)	9(=3x13-2x15)

我們的發現：①三角多連塊在連塊數相同的情況下，每多出現 1 個 R，L 就會少 2。我們觀察其中的差別，發現 13 連塊 R＝0 時，C＝12，而 R 多 1，連接邊 C 就會多 1，造成算出來的周長會少 2，所以 R 會影響 C，再造成 L 的變化。

②我們發現這個影響後，回頭檢查前面討論過的三角二連塊到三角六連塊，發現 C 確實會受到 R 的影響，原本 R＝0 時，C＝P－1，但出現周角時，周角在圖形內部，造成 C 跟著增加，出現幾個周角，連接邊 C 就會增加一樣的數量，所以 C＝P－1＋R＝P＋R－1。

③算出 C 之後，就可以算出 L，L＝3xP－2xC＝3xP－2x(P＋R－1)＝3xP－2xP－2xR＋2＝P－2x(R－1)。

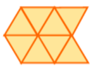
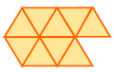
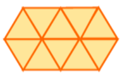
我們往下驗證 14 連塊，確認是否也是符合 13 連塊的結論：

14 連塊 P=14				
R	0	1	2	3
C	13(=14+0-1)	14(=14+1-1)	15(=14+2-1)	16(=14+3-1)
L	16(=3x14-2x13)	14(=3x14-2x14)	12(=3x14-2x15)	10(=3x14-2x16)

我們的發現：14 連塊一樣符合 13 連塊的算法，所以只要知道 P 跟 R 就可以算出 C，更快找到連接邊的數量。發現 C＝P＋R－1 這個關係後，就可以將原本活動一的公式 E＝3xP－2xC－1xV，寫成 E＝3xP－2x(P＋R－1)－1xV＝P－V－2x(R－1)。

3.分析三角多連塊擴充圖形的周長變化

接著我們想觀察擴充一個三角形後，S 跟 R 對周長會產生什麼變化？

										
P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	0	0	1	0	0	0	2	2	2	2
R	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
L	3	4	5	6	7	6	7	8	9	8

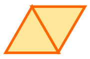
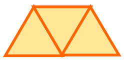
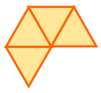
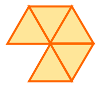
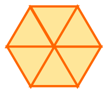
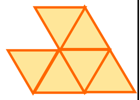
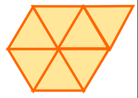
我們的發現：①觀察三角一連塊，L=3，擴充一個連塊後，原本 L 要多 3，但因為連接處會有兩個邊重複，要減去 2，所以 L＝3＋3－2＝4，最後 L 會多 1。但從三角五連塊到三角六連塊，L 卻是少 1，因為新增的三角形讓六連塊多了 1 個周角，R 多 1，會讓 L 少 2，所以＋1－2＝－1，最後六連塊的周長會比五連塊少 1。

②因為 S 對 L 沒有影響，比較三角六連塊到三角十連塊，P 多 4，會讓 L 多 4，S 雖然多 2，但 L 不會變化，R 多 1，會讓 L 少 2，所以＋4－2＝＋2，

(二)分析三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形的角的數量變化

在五上「多邊形」單元有學過邊的數量和角的數量相同，所以我們猜測角的數量跟 E、L 應該也會有規律關係，觀察我們畫出的三角二連塊到三角六連塊圖形，進行比較與分析，發現出現平角及周角的圖形，規律和其他圖形不同，所以我們先歸納角的數量公式，再來觀察 S 和 R 對 A 的影響。

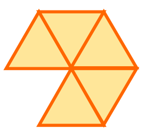
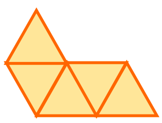
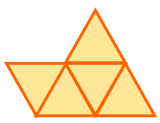
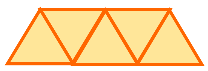
1.歸納三角多連塊的角的數量公式

								
P	1	2	3	4	5	6	6	7
E	3	4	5	6	6	6	7	7
L	3	4	5	6	7	6	8	7
S	0	0	1	0	0	0	2	2
A	3	4	4	6	7	6	6	5

觀察多連塊圖形，當形成平角時，平角會在圖形中形成一直線，不會被算進角的數量。沒有平角的圖形，就跟我們學過的多邊形定義相同，邊的數量就是周長，也是角的數量，L＝A；而有平角的圖形，角的數量要用周長再減去平角的數量，L－S＝A，所以角的數量 $A = L - S = 3 \times P - 2 \times C - S = 3 \times P - 2 \times (P + R - 1) - S = P - S - 2 \times (R - 1)$。

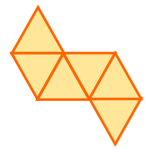
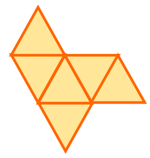
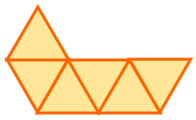
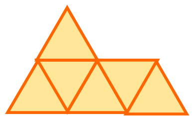
2.分析三角多連塊同樣連塊數的角的數量變化

(1)圖形中出現平角

三角五連塊 P=5				
S	0	1	2	3
A	7	6	5	4

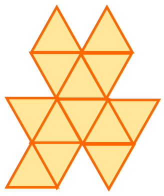
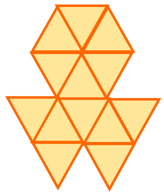
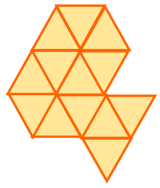
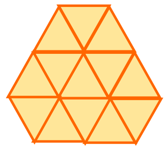
從三角五連塊的圖形，可觀察到 S 多 1，A 就會少 1，因為形成平角時，這個平角會在圖形中形成一直線，不會被算進 A，所以這個平角會被減去，A 會減少 1。

我們再往下驗證三角形六連塊是否符合：

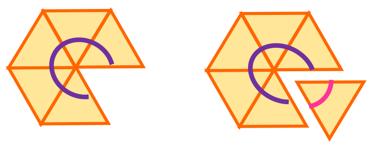
三角六連塊 P=6				
S	0	1	2	3
A	8	7	6	5

我們的發現：三角六連塊也符合，S 多 1，A 就會少 1，所以形成平角，會讓 A 減少 1xS。

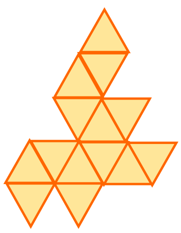
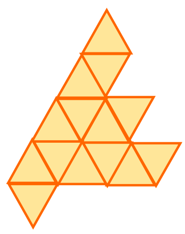
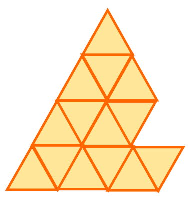
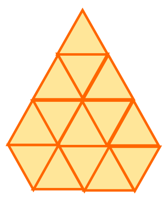
(2)圖形中出現周角

13 連塊 P=13				
S	1	2	2	3
R	0	1	2	3
A	14	11	9	6

在 13 連塊的圖形中，當 S 多 1，A 會少 1，但同時又有 R 時，還會讓 A 再減少 2，因為形成周角時，這個周角會被包在圖形中，不會被算進 A，如下圖，原本 5 個角形成的角，及新增的角都會被減去，所以 A 會減少 2。



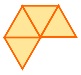
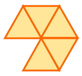
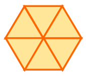
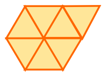
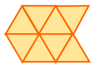
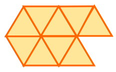
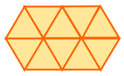
我們往下驗證 14 連塊，確認是否也是符合 13 連塊的結論：

14 連塊 P=14				
S	1	4	6	5
R	0	1	2	3
A	15	10	6	5

我們的發現：14 連塊也符合 S 和 R 對 A 產生的變化，S 多 1，A 就會少 1，而 R 多 1，A 會少 2。所以形成平角，會讓 A 減少 1xS；形成周角，會讓 A 減少 2xR。

3.分析三角多連塊擴充圖形的角的數量變化

接著我們想觀察擴充一個三角形後，S 跟 R 對 A 會產生什麼變化？我們從一個三角形開始，每次擴充一個三角形，去觀察圖形中出現平角和周角會產生什麼影響。

										
P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	0	0	1	0	0	0	2	2	2	2
R	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
A	3	4	4	6	7	6	5	6	7	6

我們的發現：①觀察三角一連塊，A=3，擴充一個連塊後，原本 A 要多 3，但因為連接處會有兩個角與原本一連塊的兩個角合在一起，要減去 2，所以 A＝3＋3－2＝4，最後 A 會多 1。但從三角二連塊到三角三連塊，A 卻是相同，因為新增的三角形讓三連塊形成一個平角，要再減 1，最後 A 就會與二連塊相同。

②從三角五連塊到三角六連塊，都沒有平角，R 增加 1，會讓 A 少 2，所以＋1－2＝－1，最後六連塊的 A 會比五連塊少 1。

③比較三角六連塊到三角十連塊，P 多 4，會讓 A 多 4，S 多 2，會讓 A 少 2，R 多 1，會讓 A 少 2，所以＋4－2－2＝＋0，最後十連塊的 A 與六連塊相同。

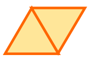
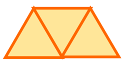
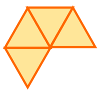
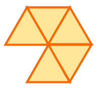
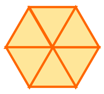
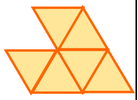
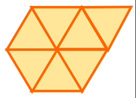
(三)分析三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形的內角和變化

在五上「多邊形」單元有學過內角和的算法是將多邊形分割成三角形，以固定一個頂點開始連對角線，因為頂點往左右相連的邊無法形成對角線，所以要減去 2。每個三角形內角和為 180 度，與分割成三角形的個數相乘，就可算出內角和。

多邊形計算內角和時，跟多邊形的邊數及三角形有關，這些性質我們也有討論到，所以我們想繼續討論內角和(I)，發展出內角和的公式，並與課本學過的內角和公式進行比較。

1.歸納三角多連塊的內角和公式

我們先列出三角一連塊到三角七連塊的幾何性質：

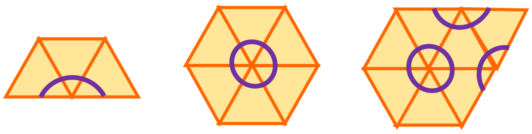
								
P	1	2	3	4	5	6	6	7
L	3	4	5	6	7	6	8	7
S	0	0	1	0	0	0	2	2
R	0	0	0	0	0	1	0	1
A	3	4	4	6	7	6	6	5
I	180	360	360	720	900	720	720	540

我們的發現：①一個三角形的內角和是 180 度，兩個三角形的內角和是 2×180=360 度，所以三角二連塊的內角和是 360 度，也可以想成是 P×180。

②三角三連塊如果用 P×180 來算內角和，會發現不符合，因為三連塊會形成 1 個平角，如下圖，要減去 1 個平角 180 度，所以是(P－1)×180＝360 度。

③三角六連塊會形成 1 個周角，如下圖，要減去 1 個周角 360 度，也就是 2 個 180 度，所以是(P－2)×180＝720 度。

④三角七連塊會形成 1 個周角及 2 個平角，如下圖，要減去 1 個周角 360 度及 2 個平角共 360 度，所以是(P－2－2)×180＝540 度。



⑤計算三角多連塊內角和 I 時，要同時考慮 S 和 R 對 I 的影響，出現 1 個 S，要減去 1 個 180 度；而 1 個周角等於 2 個 180 度，出現 1 個 R，要減去 2 個 180 度；所以內角和可以表示成 I＝(P－S－2×R)×180。

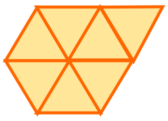
2.比較三角多連塊的內角和公式與多邊形內角和公式

因為課本學過的內角和與多邊形的邊數有關，所以我們想以課本學過的觀念出發，去討論內角和公式，並比較與我們的三角多連塊內角和公式是否相同。

(1)多邊形與多連塊的幾何性質定義

多邊形內角和公式＝(N－2)×180，因為正多邊形邊的數量與角的數量相同，但是在三角多連塊中，周長與角的數量不一定相同，所以我們需要先確認多邊形內角和公式中的 N 會對應到三角多連塊的哪一個幾何性質。

觀察右圖，以多邊形來看，N＝5；以三角七連塊來看，L＝7，A＝5。因為三角七連塊的周長 L 是以小三角形為單位，但以多邊形而言，同一直線算一條邊，所以多邊形的 N 與 L 不相等。換個角度思考，多邊形邊的數量和角的數量相等，所以我們再來看角的數量，我們算多連塊角的數量時，會減去形成一直線的平角及在內部的周角，算的就是多邊形的內角，所以多邊形的 N 與三角多連塊的 A 相等。



(2)比較三角多連塊內角和公式與多邊形內角和公式

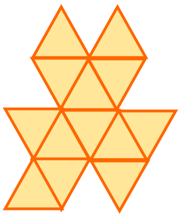
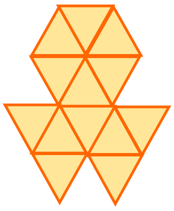
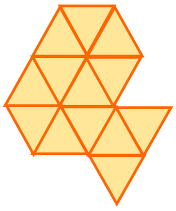
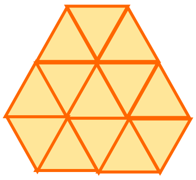
確定 N＝A 的關係後，我們再加上 A＝P－S－2×(R－1)，推論多邊形內角和公式是否和三角多連塊的內角和公式相等，過程如下：

多邊形內角和公式	N＝A、A＝P－S－2×(R－1)	三角多連塊的內角和公式
(N－2)×180	I＝(N－2)×180 ＝(A－2)×180 ＝[P－S－2×(R－1)－2]×180 ＝(P－S－2×R)×180	I＝(P－S－2×R)×180

推論後，確定我們的三角多連塊內角和公式與多邊形內角和公式相等。

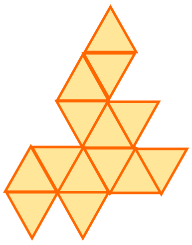
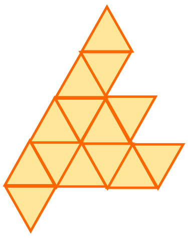
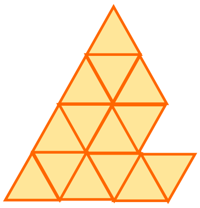
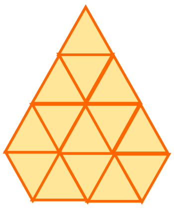
3.分析三角多連塊同樣連塊數的內角和變化

從三角多連塊的內角和公式可以知道，要計算內角和需要同時考慮平角及周角，所以我們列出 13 連塊來比較 S 和 R 對 I 的影響。

13 連塊 P=13				
S	1	2	2	3
R	0	1	2	3
I	2160(=13-1-2x0)	1620(=13-2-2x1)	1260(=13-2-2x2)	720(=13-3-2x3)

我們的發現：觀察 13 連塊，S 多 1，I 會少 180；R 多 1，I 會少 360；若同時有 S 及 R，就要依序將兩種變化都加在一起，I 要減去 1xS、再減去 2xR。

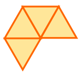
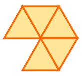
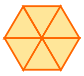
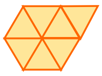
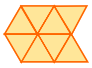
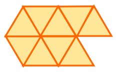
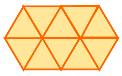
我們往下驗證 14 連塊，確認是否也是符合 13 連塊的結論：

14 連塊 P=14				
S	1	4	6	5
R	0	1	2	3
I	2340(=14-1-2x0)	1440(=14-4-2x1)	720(=14-6-2x2)	540(=14-5-2x3)

我們的發現：14 連塊一樣符合 13 連塊 S、R 對 I 的變化，同時有 S 及 R，就要依序將兩種變化都加在一起，I 要減去 1xS、再減去 2xR。

4.分析三角多連塊擴充圖形的內角和變化

接著我們想觀察擴充一個三角形後，S 跟 R 對 I 會產生什麼變化？我們從一個三角形開始，每次擴充一個三角形，去觀察圖形中出現平角和周角會產生什麼影響。

										
P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	0	0	1	0	0	0	2	2	2	2
R	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
I	180	360	360	720	900	720	540	720	900	720

我們的發現：①觀察三角一連塊到二連塊，擴充一個連塊後，P 多 1，I 會多 180；從三角二連塊到三連塊，P 多 1，I 多 180，S 多 1，I 會少 180，所以最後 I 不變。

②從三角五連塊到三角六連塊，P 多 1，I 多 180；R 增加 1，會讓 I 少 360，所以$+180-360=-180$，最後六連塊的 I 會比五連塊少 180。

③比較三角六連塊到三角十連塊，P 多 4，會讓 I 多 $4\times180=720$，S 多 2，會讓 I 少 $2\times180=360$，R 多 1，會讓 I 少 360，所以$+720-360-360=+0$，最後十連塊的 I 與六連塊相同。

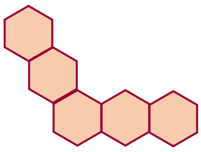
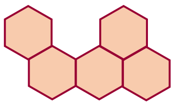
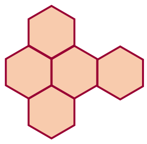
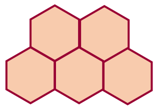
活動三：分析六邊多連塊及的幾何性質並歸納特性

(一)分析六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形的周長變化

1.分析六邊多連塊同樣連塊數的周長變化

延續三角多連塊的周長公式，六邊多連塊不會產生平角，V 字角一樣不會影響周長，所以六邊多連塊的周長公式 $L=6\times P-2\times C$。

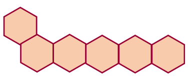
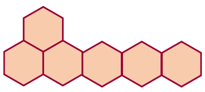
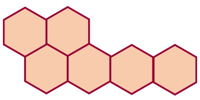
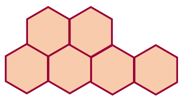
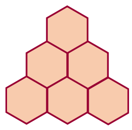
接著，我們繼續討論，六邊多連塊同樣連塊數下，R 對 L 的影響。

六邊五連塊 P=5				
R	0	1	2	3
C	4	5	6	7
L	22	20	18	16

我們的發現：①六邊五連塊 R=0 時，$L=6\times P-2\times C=22$；R 多 1，造成的影響和三角多連塊相同，C 也會多 1，使 L 少 2。所以 $C=P-1+R=P+R-1$。

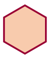
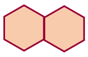
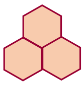
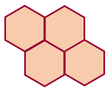
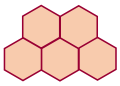
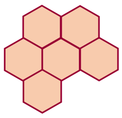
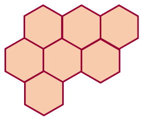
②得到 $C=P+R-1$，再代回 L 的公式，$L=6\times P-2\times C=6\times P-2\times(P+R-1)=4\times P-2\times R+2=4\times P-2\times(R-1)$。

我們往下驗證六邊六連塊，確認是否也是符合六邊五連塊的推論：

六邊 六連塊 P=6					
R	0	1	2	3	4
C	5	6	7	8	9
L	26	24	22	20	18

我們的發現：六邊六連塊也符合，R 多 1，C 也會多 1，使 L 少 2。

2.分析六邊多連塊擴充圖形的周長變化

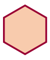
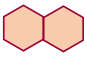
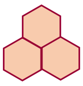
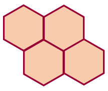
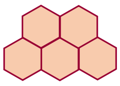
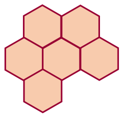
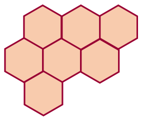
							
P	1	2	3	4	5	6	7
R	0	0	1	2	3	4	5
L	6	10	12	14	16	18	20

我們的發現：①觀察六邊一連塊，L=6，擴充一個連塊後，P 多 1，原本 L 要多 6，但因為連接處會有兩個邊重複，要減去 2，所以 L＝6＋6－2＝10，最後 L 會多 4。但從六邊二連塊到六邊三連塊，L 卻只多 2，因為新增的六邊形讓三連塊形成一個周角，R 多 1，會讓 L 少 2，要再減 2，所以＋4－2＝＋2，最後三連塊的周長會比二連塊多 2。

②從公式來看，L＝4xP－2x(R－1)，可看到如果 P 多 1，L 會多 4；如果 R 多 1，L 會少 2，同樣符合圖形觀察的結果。

(二)分析六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形的角的數量變化

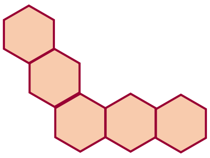
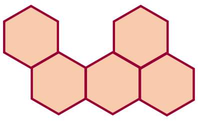
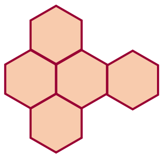
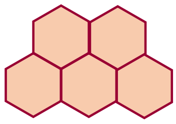
1.歸納六邊多連塊的角的數量公式

							
P	1	2	3	4	5	6	7
R	0	0	1	2	3	4	5
L	6	10	12	14	16	18	20
A	6	10	12	14	16	18	20

觀察六邊多連塊圖形的幾何性質，會發現 A＝L，和三角多連塊的公式比較，三角多連塊的 A＝L－S，而六邊多連塊不會形成平角，不會有一直線的邊，所以 A＝L。

2.分析六邊多連塊同樣連塊數的角的數量變化

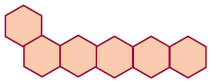
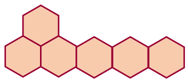
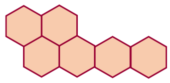
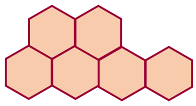
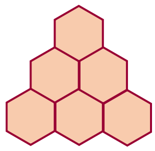
接著，我們繼續討論，六邊多連塊同樣連塊數下，R 對 A 的影響。

六邊五連塊 P=5				
R	0	1	2	3
L	22	20	18	16
A	22	20	18	16

我們的發現：①從六邊五連塊到六連塊，R 多 1，A 會少 2，因為形成周角時，這個周角會被包在圖形中，不會被算進 A，原本 2 個角形成的角，及新增的角都會被減去，所以 A 會減少 2。

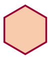
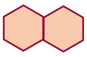
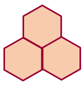
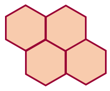
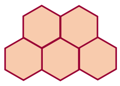
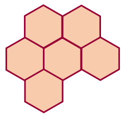
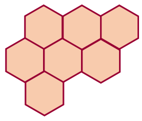
②從公式來看，A＝L＝4×P－2×(R－1)，可看到如果 P 固定都是 5，代表 P 不變，如果 R 多 1，A 會少 2，同樣符合圖形觀察的結果。

我們往下驗證六邊六連塊，確認是否也是符合六邊五連塊的推論：

六邊六連塊 P=6					
R	0	1	2	3	4
L	26	24	22	20	18
A	26	24	22	20	18

我們的發現：六邊六連塊也符合推論，R 多 1，A 會減少 2。

3.分析六邊多連塊擴充圖形的角的數量變化

							
P	1	2	3	4	5	6	7
R	0	0	1	2	3	4	5
L	6	10	12	14	16	18	20
A	6	10	12	14	16	18	20

我們的發現：①觀察六邊一連塊，A=6，擴充一個連塊後，原本 A 要多 6，但因為連接處會有兩個角與原本一連塊的兩個角合在一起，要減去 2，所以 A＝6＋6－2＝10，最後 A 會多 4。所以 P 多 1，A 會多 4。

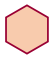
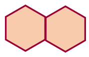
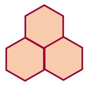
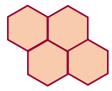
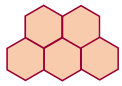
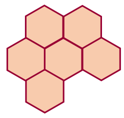
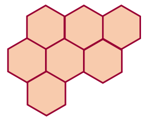
②從六邊二連塊到六邊三連塊，P 多 1，A 會多 4，但 R 多 1，會讓 A 少 2，所以＋4－2＝＋2，最後三連塊的 A 會比二連塊多 2。

(三)分析六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形的內角和變化

以三角多連塊內角和公式為基礎，首先要歸納出六邊多連塊的內角和公式。

1.歸納六邊多連塊的內角和公式

我們先列出六邊一連塊到六邊七連塊的幾何性質：

							
P	1	2	3	4	5	6	7
R	0	0	1	2	3	4	5
L	6	10	12	14	16	18	20
A	6	10	12	14	16	18	20
I	720	1440	1800	2160	2520	2880	3240

我們的發現：①一個六邊形的內角和是 720 度，兩個六邊形的內角和是 720x2＝1440 度，所以六邊二連塊的內角和是 1440 度，也可以想成是 Px720。

②六邊三連塊如果用 Px720 來算內角和，會發現不符合，因為三連塊會形成 1 個周角，要減去 1 個周角 360 度，所以是 Px720－1x360＝1800 度。

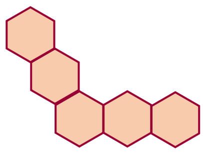
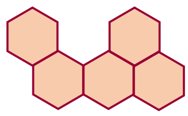
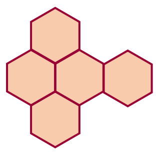
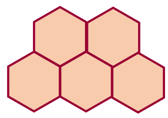
③六邊四連塊會形成 2 個周角，要減去 2 個周角 720 度，也就是 2 個 360 度，所以是 Px720－2x360＝2160 度。

④計算六邊多連塊內角和 I 時，要考慮 R 對 I 的影響，出現 1 個 R，要減去 1 個 360 度，所以內角和可以表示成 I＝Px720－Rx360＝(4xP－2xR)x180。

⑤跟活動二比較三角多連塊內角和公式與多邊形內角和公式的推論相同，多邊形的 N 與六邊多連塊的 A 相等、A＝4xP－2x(R－1)，所以多邊形內角和公式(N－2)x180＝[4xP－2x(R－1)－2]x180＝(4xP－2xR)x180，同樣與六邊多連塊內角和公式相等。

2.分析六邊多連塊同樣連塊數的內角和變化

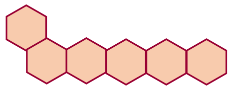
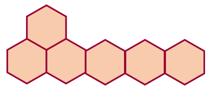
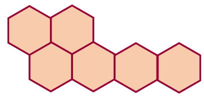
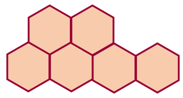
從六邊多連塊的內角和公式可以知道，要計算內角和需要考慮周角，所以我們列出六邊五連塊來比較 R 對 I 的影響。

六邊五連塊 P=5				
R	0	1	2	3
A	22	20	18	16
I	3600 [=(4x5-2x0)x180]	3240 [=(4x5-2x1)x180]	2880 [=(4x5-2x2)x180]	2520 [=(4x5-2x3)x180]

我們的發現：①觀察六邊五連塊，R 多 1，I 會少 360。

②用內角和公式(N－2)x180＝(A－2)x180 來計算，會與 I 相等。

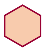
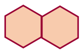
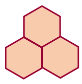
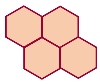
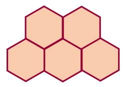
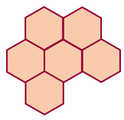
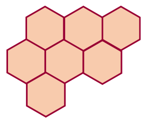
我們往下驗證六邊六連塊，確認是否也是符合六邊五連塊的推論：

六邊 六連塊 P=6				
R	0	1	2	3
A	26	24	22	20
I	4320 [=(4x6-2x0)x180]	3960 [=(4x6-2x1)x180]	3600 [=(4x6-2x2)x180]	3240 [=(4x6-2x3)x180]

我們的發現：六邊六連塊一樣符合六邊五連塊 R 對 I 的變化，R 多 1，I 會少 360。

3.分析六邊多連塊擴充圖形的內角和變化

接著我們想觀察擴充一個六邊形後，R 對 I 會產生什麼變化？我們從六邊一連塊開始，每次擴充一個六邊形，去觀察圖形中出現周角會產生什麼影響。

							
P	1	2	3	4	5	6	7
R	0	0	1	2	3	4	5
A	6	10	12	14	16	18	20
I	720	1440	1800	2160	2520	2880	3240

我們的發現：①觀察六邊一連塊到二連塊，擴充一個連塊後，P 多 1，I 會多 720；從六邊二連塊到三連塊，P 多 1，I 多 720；R 多 1，I 會少 360，所以最後＋720－360＝＋360，I 會多 360 度。

②從公式來看，I＝(4xP－2xR)x180，可看到如果 P 多 1，I 會多 4x180＝720；R 多 1，I 會少 2x180＝360，同樣符合我們的推論。

討論完活動三之後，我們想繼續挑戰，接著思考，我們原本都是探討在圖形外圍擴充一個三角形或六邊形，如果改變條件，變成在圖形內部，一個一個減少三角形或六邊形個數，來形成我們指定的多連塊圖形，是不是可以繼續探討。嘗試後，發現太簡單，我們跟老師討論，老師說可以反向思考，是否可以調整規則，改成阻擋圖形形成。

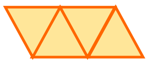
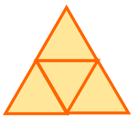
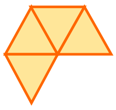
我們跟老師討論後，試著製作 2 階到 10 階的正三角形，放大成大型棋盤紀錄紙，在棋盤上，將要阻擋的位置放上棋子，發現似乎有所規律，在挑戰過程中，大家互相比較不同拿法的差異，啟發我們的好奇心，繼續進行活動四的研究。

活動四：在 n 階正三角形及 n 階正六邊形中，探討讓指定圖形無法放入，需拿掉的最少個數及位置，觀察增加的規律並歸納成通用公式

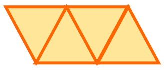
規則：在 n 階正三角形中，要想辦法讓指定圖形無法放入，可以任意拿掉小的正三角形，拿

掉的位置就不能有圖形覆蓋上去，最少要拿掉幾個小正三角形，才能讓指定的圖形無論是旋轉或翻轉，都無法放入 n 階正三角形中。

(一)在 n 階正三角形中，探討讓三角四連塊無法放入，需拿掉的最少三角形個數及位置並歸納成通用公式

三角四連塊有 3 種圖形，  T4-3-(5)  T4-3-(1)  T4 ，我們挑選具有點對稱的 T4-3-(5)及線對稱的 T4-3-(1)來挑戰，並觀察規律。

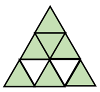
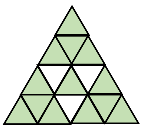
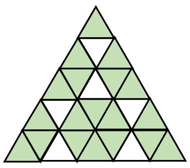
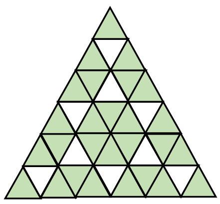
1. 在 3~12 階三角形中，讓三角四連塊 T4-3-(5)無法放入，需拿掉的最少三角形個數及位置

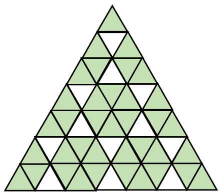
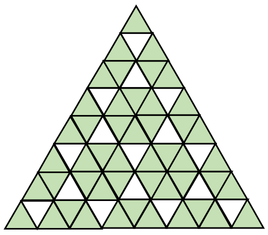
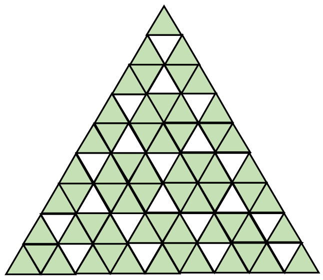
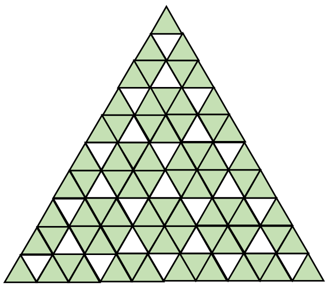
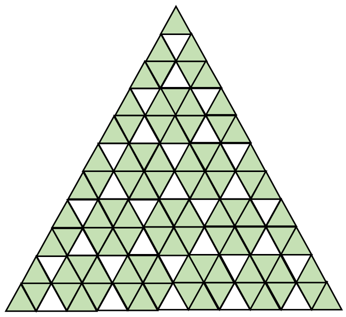
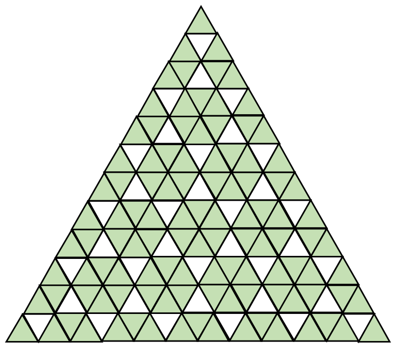
 T4-3-(5)	我們要設法讓 T4-3-(5)無法放入 n 階正三角形中。

一開始我們在找可拿掉的位置的時候，是橫向一排一排找，但是找完一遍之後，會發現有可放入的位置。討論之後，原來是要考慮圖形可以旋轉或是翻轉，要有更嚴格限制。加入圖形可旋轉或是翻轉之後再繼續嘗試，發現中間區域容易有遺漏。最後，改成先沿著外圍最長的兩個邊長每四個三角形檢查一次後，再往內沿著次短邊每四個檢查一次。

方法確定有規律之後，我們要檢查拿出來的數量是最少。發現拿出來的數量會等於原來 n 階三角形的三角形總個數除以 4。例如: 對 6 階三角形來說，總個數 36，除以 4 之後等於 9，和拿取的數量一致；對 7 階三角形來說，總個數 49，除以 4 之後等於 12，和拿取的數量一致。可以確定，每四個三角形都會有 1 個被拿走，拿走的數量是最少。

(1) 在 3~12 階三角形中，讓 T4-3-(5)無法放入，需拿掉的最少三角形個數及位置如下：

3 階	4 階	5 階	6 階
			
2	2+1=3	1+1+2+2=6	1+1+2+2+3=9

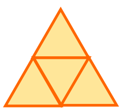
7 階	8 階	9 階
		
1+1+2+2+3+3=12	1+1+2+2+3+3+4=16	1+1+2+2+3+3+4+4=20
10 階	11 階	12 階
		
1+1+2+2+3+3+4+4+5=25	1+1+2+2+3+3+4+4+5+5=30	1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6=36

(2)需拿掉的最少三角形個數解：

我們用$f_1(n)$來表示讓 T4-3-(5)無法放入，需拿掉的最少三角形個數，分成奇數階(n 為奇數)及偶數階(n 為偶數)兩種解，公式如下

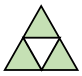
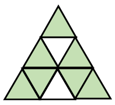
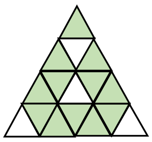
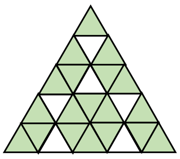
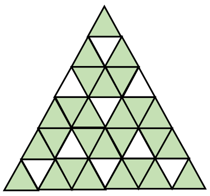
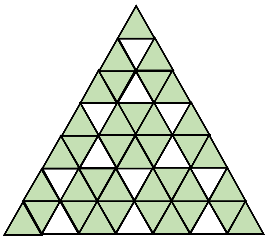
$$f_1(n) = \begin{cases} \frac{n^2-1}{4}，n = 奇數(n \geq 5) \\ \frac{n^2}{4}，n = 偶數(n \geq 6) \end{cases}$$

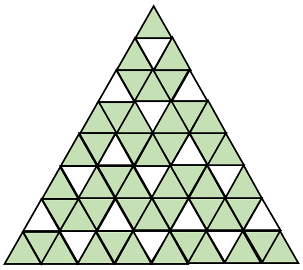
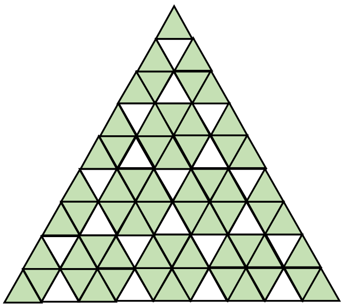
2.在 2 階~13 階三角形中，讓三角四連塊 T4-3-(1)無法放入，需拿掉的最少三角形個數及位置

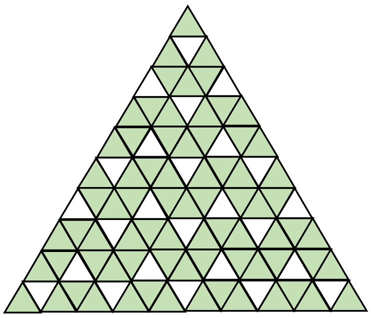
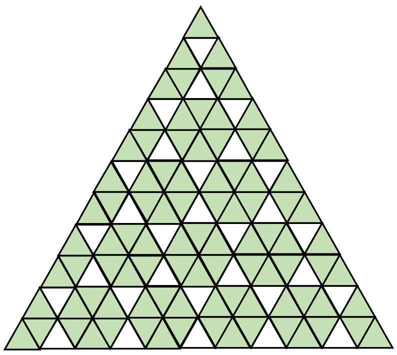
 T4-3-(1)	我們要設法讓 T4-3-(1)無法放入 n 階正三角形中。

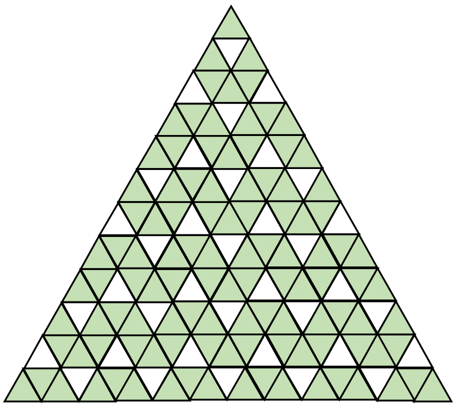
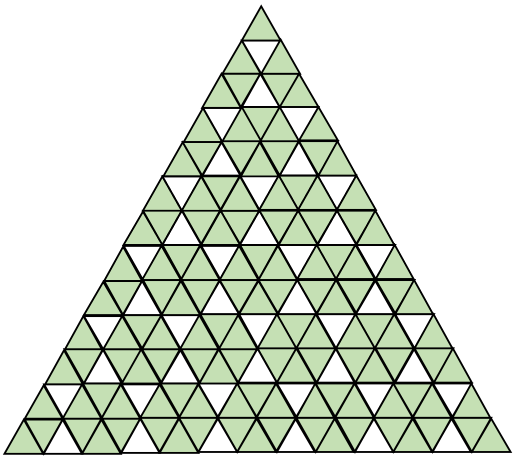
在 n 階三角形中拿取最少三角形阻擋 T4-3-(1)置入，拿取方法以及確認是否拿走最少個的算法，如同之前討論阻擋 T4-3-(5)置入一樣。

(1) 在 2~13 階三角形中，讓 T4-3-(1)無法放入，需拿掉的最少三角形個數及位置如下：

2 階	3 階	4 階
		
1	2	1+1+2=4
5 階	**6 階**	**7 階**
		
1+1+2+2=6	1+2+1+2+3=9	1+1+2+2+3+3=12

8 階	9 階
	
1+1+3+3+2+2+4=16	1+1+2+2+3+3+4+4=20

10 階	11 階
	
1+2+1+2+3+4+3+4+5=25	1+1+2+2+3+3+4+4+5+5=30

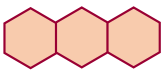
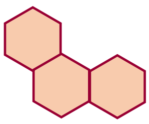
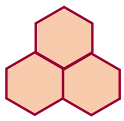
12 階	13 階
	
1+2+1+2+3+4+3+4+5+6+5=36	1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6=42

(2)需拿掉的最少三角形個數解：

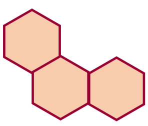
我們用$f_2(n)$來表示讓 T4-3-(1)無法放入，需拿掉的最少三角形個數，分成奇數階(n 為奇數)及偶數階(n 為偶數)兩種解，公式如下

$$f_2(n)=\begin{cases}\frac{n^2-1}{4}，\mathrm{n}=\text{奇數}(n\geq 3)\\ \frac{n^2}{4}，\mathrm{n}=\text{偶數}(n\geq 2)\end{cases}$$

(二)在 n 階正六邊形中，探討讓六邊三連塊無法放入，需拿掉的最少六邊形個數及位置並歸納成通用公式

六邊三連塊有 3 種圖形， H3-2-(3)  H3-2-(2)  H3 ，我們挑選具有線對稱的 H3-2-(2)及點對稱的 H3 來挑戰，並觀察規律。

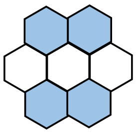
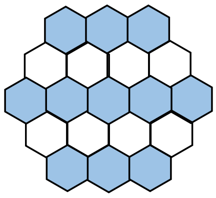
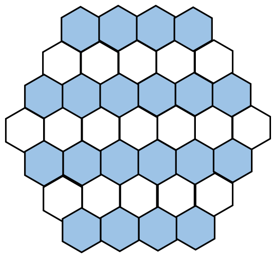
1.在 2~8 階正六邊形中，讓六邊三連塊 H3-2-(2)無法放入，需拿掉的最少六邊形個數及位置

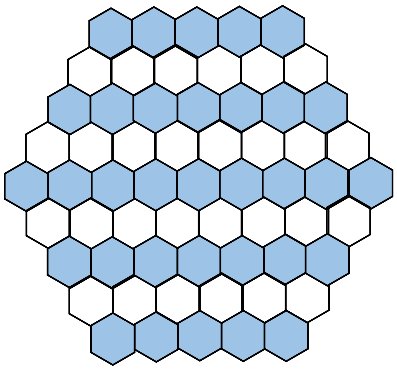
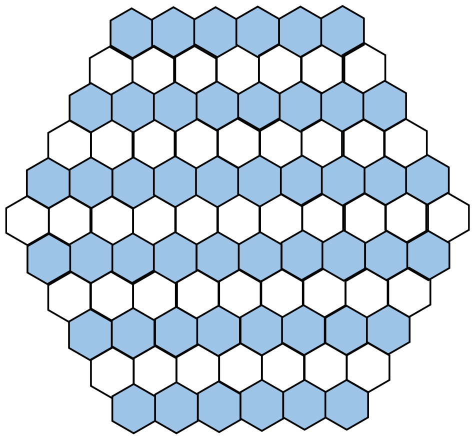
 H3-2-(2)	我們要設法讓 H3-2-(2)無法放入 n 階正六邊形中。

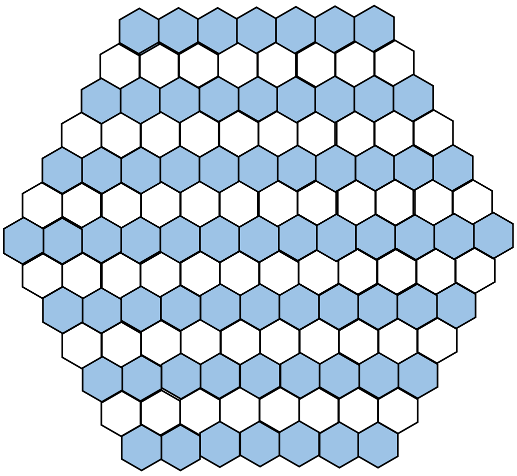
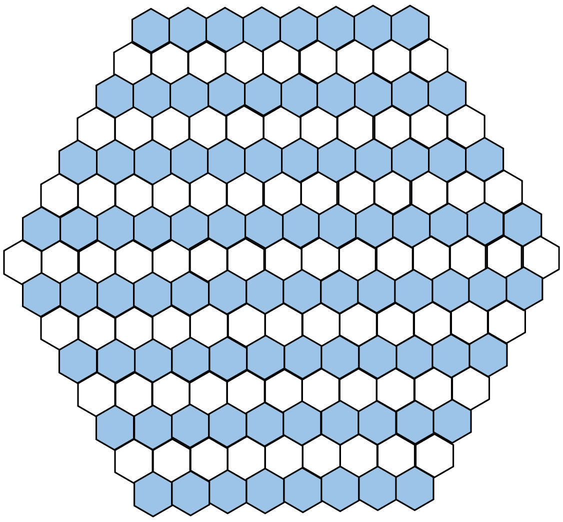
沿用在 n 階三角形時所討論出來的方法，先從外圍開始拿並一同考慮圖形可以有旋轉翻轉的情況，發現圖形呈現一排排而且整排拿掉的規律。接著，需要確認拿走的數量是最少的，我們想法是指定圖形最大可以覆蓋到三排，以三排為一個單位檢查看看。

對 3 階六邊形來說，第 1 列到第 3 列排共有 12 個六邊形，12 除以 3 等於 4，和拿掉的數量相符。第 3 列到第 5 列一樣有 12 個六邊形，12 除以 3 等於 4，和拿掉的數量相符。對 4 階六邊形來說，第 1 列到第 3 列排共有 15 個六邊形，15 除以 3 等於 5，和拿掉的數量相符。第 3 列到第 5 列一樣有 19 個六邊形，19 除以 3 等於 6，和拿掉的數量相符。第 5 列到第 7 列一樣有 15 個六邊形，15 除以 3 等於 5，和拿掉的數量相符。隨著階數增加，都有一樣情況。可以確定，每 3 個六邊形都會有 1 個被拿走，拿走的數量是最少。

(1) 在 2~8 階三角形中，讓 H3-2-(2)無法放入，需拿掉的最少六邊形個數及位置如下：

2 階	3 階	4 階
		
3	4+4=8	5+7+5=17

5 階	6 階
	
6+8+8+6=28	7+9+11+9+7=43

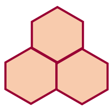
<table>
<tr><th>7 階</th><th>8 階</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8+10+12+12+10+8=60</td><td>9+11+13+15+13+11+9=81</td></tr>
</table>

(2)需拿掉的最少六邊形個數解：

我們用$f_3(n)$來表示讓 H3-2-(2)無法放入，需拿掉的最少六邊形個數，分成奇數階(n 為奇數)及偶數階(n 為偶數)兩種解，公式如下:

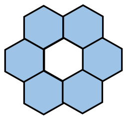
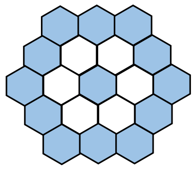
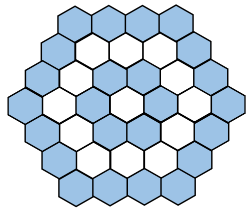
$$f_3(n)=\begin{cases}\frac{3n^2-4n+1}{2}，\mathrm{n}=\text{奇數}(n\geq 3)\\ \frac{3n^2-4n+2}{2}，\mathrm{n}=\text{偶數}(n\geq 4)\end{cases}$$

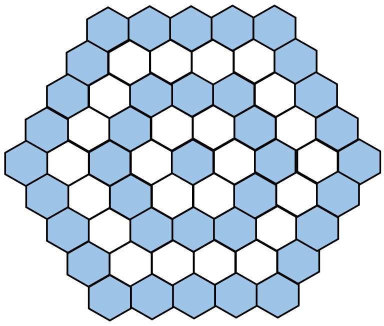
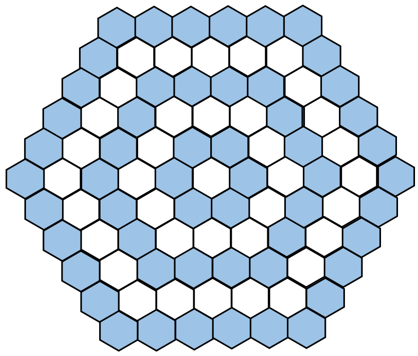
2. 在 2 階~8 階三角形中，讓六邊三連塊 H3 無法放入，需拿掉的最少六邊形個數及位置

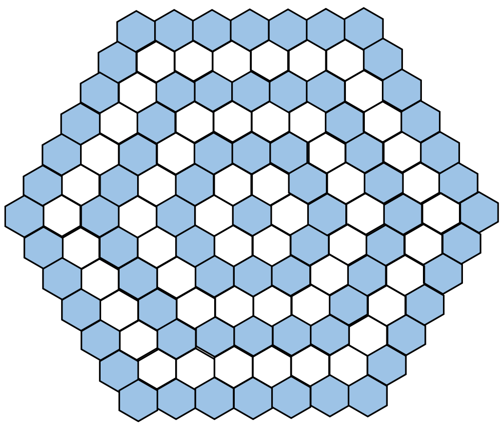
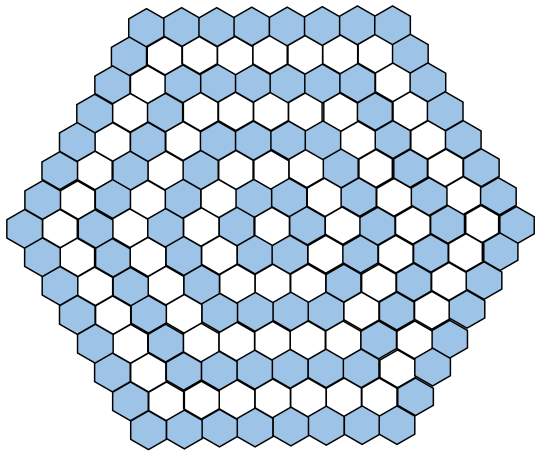
<table>
<tr><td>
H3</td><td>我們要設法讓 H3 無法放入 n 階正六邊形中。</td></tr>
</table>

沿用在 n 階三角形時所討論出來的方法，發現圖形呈現環狀而且有規律地由外往內排列。接著，需要確認拿走的數量是最少的，我們想法是可以沿用討論 n 階三角形時的計算方法，因為在拿取時也是由外往內。對 3 階六邊形來說，總個數 19，除以 3 之後等於 6，和拿取的數量一致；對 4 階三角形來說，總個數 37，除以 3 之後等於 12 再加上中間的 1 個，等於 13，和拿取的數量一致。隨著階數增加，奇數階跟偶數階都有一樣情況。可以確定，每 3 個六邊形都會有 1 個被拿走，拿走的數量是最少。

(1) 在 2~8 階三角形中，讓 H3 無法放入，需拿掉的最少六邊形個數及位置如下：

2 階	3 階	4 階
		
1	6×1=6	1+6×2=13

5 階	6 階
	
6×1+6×3=24	1+6×2+6×4=37

7 階	8 階
	
6×1+6×3+6×5=54	1+6×2+6×4+6×6=72

(2)需拿掉的最少六邊形個數解：

我們用$f_4(n)$來表示讓 H3 無法放入，需拿掉的最少六邊形個數，分成奇數階(n 為奇數)及偶數階(n 為偶數)兩種解，公式如下

$$f_4(n)=\begin{cases} 6\times\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \text{，n} = \text{奇數}(n\geq 3) \\ 1+\frac{6n(n-2)}{4} \text{，n} = \text{偶數}(n\geq 2) \end{cases}$$

伍、未來展望

活動四中，三角多連塊以及六邊多連塊各選了 2 個連塊來做實驗，但還剩下很多連塊未能有嚴謹的討論以及歸納。對 n 階三角形的討論中，阻擋特定形狀三角多連塊放入後，常常會出現拿走相同數量但是不同規律位置，很難歸納規律產生公式。或是不同形狀的相同連塊數，會有不同拿法，很難發展出一致性的步驟。

n 階六邊形的討論中，和 n 階三角形不同的是，常會出的不同形狀不同數量的六邊多連塊，拿法和位置卻一致。針對上面的觀察到的情況，需要觀察更多的連塊，做更深入的探討，留在之後討論。

陸、結論

一、可擴充位置數量公式：

透過二連塊組合到五連塊的過程，發現三角多連塊和六邊多連塊的可擴充位置，會受到多連塊個數 P、連接邊 C、V 字角的影響，歸納整理成以下公式：

(一) 三角多連塊可擴充位置數量公式：$E=3\times P-2\times C-1\times V$。

(二) 六邊多連塊可擴充位置數量公式：$E=6\times P-2\times C-1\times V$。

二、透過比較三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形發現平角（S）、周角（R）會影響三角多連塊的周長（L）、角的數量（A）及內角和（I）。其中平角（S）會影響角的數量（A）及內角和（I），周角（R）會影響周長（L）、角的數量（A）及內角和（I），整理出以下公式：

(一) $L=P-2\times(R-1)$。

(二) $A=P-S-2\times(R-1)$。

(三) $I=(P-S-2\times R)\times 180$。

三、透過比較六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形發現六邊多連塊沒有平角（S），只有周角（R）會影響六邊多連塊的周長（L）、角的數量（A）及內角和（I）。整理出以下公式：

(一) $L=4\times P-2\times(R-1)$。

(二) $A=4\times P-2\times(R-1)$。

(三) $I=(4\times P-2\times R)\times 180$。

四、在 n 階正三角形及 n 階正六邊形中，探討讓指定圖形無法放入，需拿掉的最少個數及位置，歸納成以下結論：

(一) 透過在 n 階正三角形中，讓 T4-3-(5)、T4-3-(1)無法放入，需拿掉的最少個數和位置，有高度的相似，得到公式如下：

1. $f_1(n)$ 表示讓 T4-3-(5)無法放入，需拿掉的最少三角形個數，

$$f_1(n)=\begin{cases}\frac{n^2-1}{4}，\mathrm{n}=\text{奇數}(n\geq 5)\\ \frac{n^2}{4}，\mathrm{n}=\text{偶數}(n\geq 6)\end{cases}$$

2. $f_2(n)$表示讓 T4-3-(1)無法放入，需拿掉的最少三角形個數，

$$f_2(n)=\begin{cases}\frac{n^2-1}{4}，\mathrm{n}=\text{奇數}(n\geq 3)\\ \frac{n^2}{4}，\mathrm{n}=\text{偶數}(n\geq 2)\end{cases}$$

(二) 透過在 n 階正六邊形中，讓 H3-2-(2)、H3 無法放入，需拿掉的最少個數和位置，結論如下：

1.讓 H3-2-(2)無法放入，得到隔排拿取的規律，用$f_3(n)$表示讓 H3-2-(2)無法放入，需拿掉的最少六邊形個數，公式如下：

$$f_3(n)=\begin{cases}\frac{3n^2-4n+1}{2}，\mathrm{n}=\text{奇數}(n\geq 3)\\ \frac{3n^2-4n+2}{2}，\mathrm{n}=\text{偶數}(n\geq 4)\end{cases}$$

2.讓 H3 無法放入，得到環狀拿取的規律，用$f_4(n)$表示讓 H3 無法放入，需拿掉的最少六邊形個數，公式如下：

$$f_4(n)=\begin{cases}6\times\left(\frac{n-1}{2}\right)^2，\mathrm{n}=\text{奇數}(n\geq 3)\\ 1+\frac{6n(n-2)}{4}，\mathrm{n}=\text{偶數}(n\geq 2)\end{cases}$$

柒、參考資料

(1)國立台灣科學教育館/全國中小學科學展覽會網站 參考歷屆作品。

(2)南投縣草屯鎮平林國民小學。五方連塊之乾坤大挪移武功祕笈。中華民國第 50 屆中小學科學展覽會作品說明書。

(3)臺中市私立明道普霖斯頓國民小學。滾動棋積—三角正多面體與滾積木遊戲。中華民國第 51 屆中小學科學展覽會作品說明書。

(4)高雄市楠梓區楠梓國民小學。天羅地網尋芳蹤 只為盡訪六連塊。中華民國第 52 屆中小

學科學展覽會作品說明書。
(5)彰化縣員林鎮員林國小。無鎖不能一在 n×n 方格中卡住五連方格的探討。中華民國第 54 屆中小學科學展覽會作品說明書
(6)南一版數學第九冊第五單元線對稱圖形、第十單元正方體與長方體。

註：作品書中所有圖形及圖片，皆由作者親自繪製。

【評語】080413

本研究首先歸納三角多連塊及六邊多連塊外圍可擴充位置數量公式並列出圖形,接著分析三角多連塊及六邊多連塊的幾何性質並歸納特性，最後則是在 n 階正三角形及 n 階正六邊形中，探討讓指定圖形無法放入，需拿掉的最少個數及位置，觀察增加的規律並歸納成通用公式。作者先透過討論與觀察連塊數量較少時的結果,接著再進一步繪圖分析以及推論得到最一般情形時的結論，過程中探索路徑清晰且對該問題進行的深刻反思。

作品海報

環遊
世界三六形

壹、前言

一、研究動機

五上的第十單元正方體與長方體單元裡，正方體的展開圖共有11種，每種都是不同組合的六方連塊。六方連塊共有35種，但是其中只有11種可以摺成正方體，六方連塊少一塊變成五方連塊，不能摺成正方體，而且五方連塊只剩下12種。我們發現五方連塊跟六方連塊之間，雖然只差一塊，種類跟特性卻差別很大。

我們好奇除了正方形組成的多連塊之外，是否可以用其他規則的形狀來組成多連塊。一開始，我們試著用正三角形來組成多連塊，發現用正三角形組成的五連塊種類比五方連塊的種類要少很多，引起我們的好奇心，想去深入研究其中的原因。

二、研究目的

(一)歸納三角多連塊及六邊多連塊外圍可擴充位置數量公式並列出圖形。
(二)分析三角多連塊的幾何性質並歸納特性。
(三)分析六邊多連塊的幾何性質並歸納特性。
(四)在n階正三角形及n階正六邊形中，探討讓指定圖形無法放入，需拿掉的最少個數及位置，觀察增加的規律並歸納成通用公式。

貳、名詞解釋及命名

名詞解釋

1. 可擴充位置：給定多連塊下，連塊外圍可新增的位置。
2. 三角多連塊：由同樣大小的正三角形，邊對邊對齊，相接而成的幾何圖形。
3. 六邊多連塊：由同樣大小的正六邊形，邊對邊對齊，相接而成的幾何圖形。
4. 擴充圖形：給定多連塊下，新增一個連塊後的圖形。
5. n階正三角形：每邊個數n個正三角形。
6. n階正六邊形：每邊個數n個正六邊形。

命名

1. P：多方連塊個數。
2. C：連接邊個數，兩個多邊形連接在一起的共同邊數量。
3. V：V字角，在多邊形外圍擴充多邊形，遇到的重複數量。
4. E：可擴充位置個數。 5. L：周長。 6. A：角的數量。
7. S：平角。 8. R：周角。 9. I：內角和。

參、研究過程或方法

活動一：歸納三角多連塊及六邊多連塊外圍可擴充位置數量公式並列出圖形。

(一)三角二連塊～三角五連塊的所有圖形及命名，並歸納外圍可擴充位置數量公式。
(二)六邊二連塊～六邊四連塊的所有圖形及命名，並歸納外圍可擴充位置數量公式。

活動二：分析三角多連塊的幾何性質並歸納特性。

(一)分析三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形的周長變化。
(二)分析三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形的角的數量變化。
(三)分析三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形的內角和變化。

活動三：分析六邊多連塊的幾何性質並歸納特性。

(一)分析六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形的周長變化。
(二)分析六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形的角的數量變化。
(三)分析六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形的內角和變化。

活動四：在n階正三角形及n階正六邊形中，探討讓指定圖形無法放入，需拿掉的最少個數及位置，觀察增加的規律並歸納成通用公式。

(一)在n階正三角形中，探討讓三角四連塊無法放入，需拿掉的最少三角形個數及位置並歸納成通用公式。
(二)在n階正六邊形中，探討讓六邊三連塊無法放入，需拿掉的最少六邊形個數及位置並歸納成通用公式。

肆、研究結果

活動一：歸納三角多連塊、六邊多連塊外圍可擴充位置數量公式並列出圖形

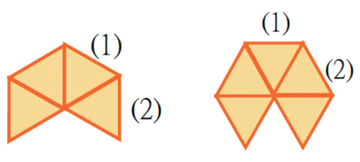
(一)三角多連塊圖形命名，並歸納外圍可擴充位置數量公式

1.命名規則：各層數字間用分號區隔，第一層命名後再以外圍新增的連塊進行新一層的命名，以此類推，分層越少越好。

(1)第1層是字母+數字：以多連塊形狀英文開頭第一個字母命名，三角形用T，T後面的數字代表多連塊的總數。

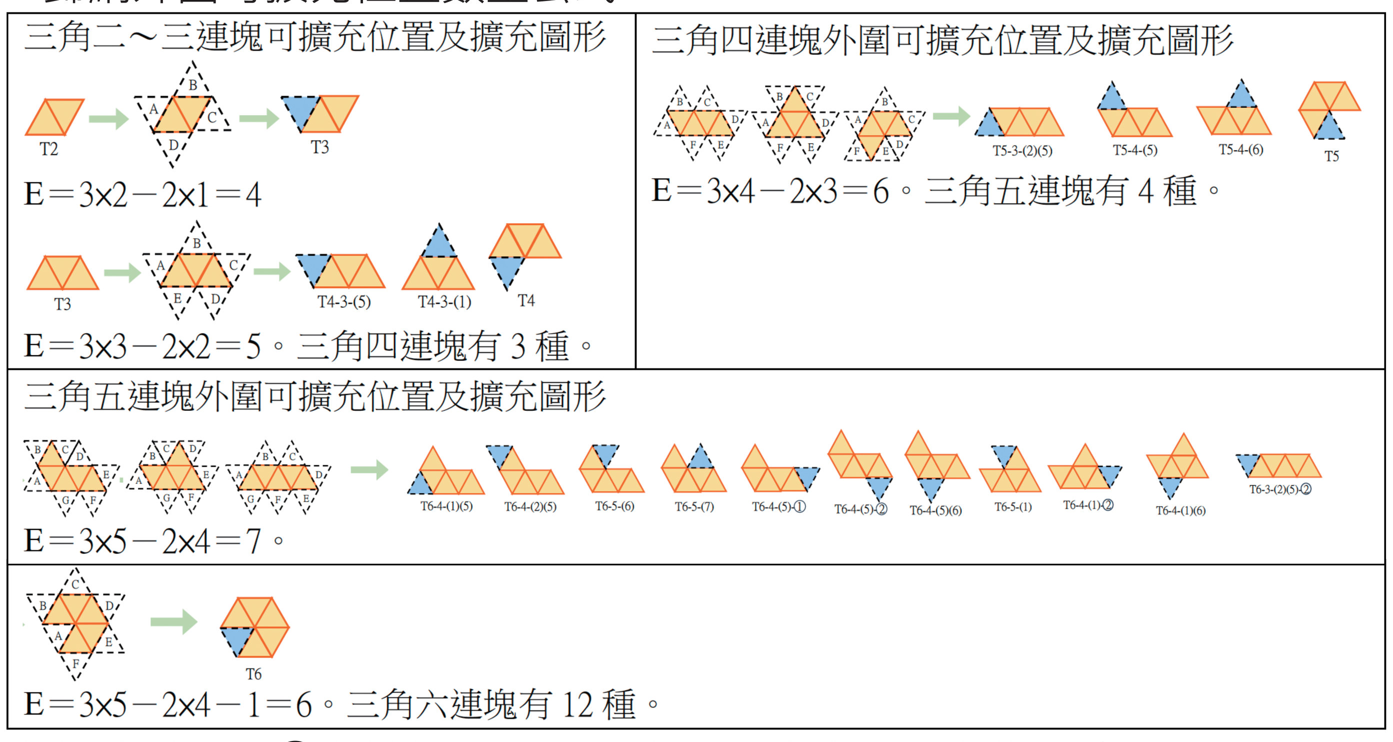
(2)第2層是第2個數字：表示同一頂點上，連接最多連塊當頂點的數量。

(3)第3層是第3個數字：以第2層連接的多連塊為基底，畫出對稱軸，以擴充多邊形的連接邊命名，對稱軸所在的那一條邊或往右的那一條邊當成(1)，順時針往右為(2)，以此類推，此基底多連塊新增的擴充連塊編號為第3個數字。



(4)第4層是第4個數字：以上一層新增的擴充連塊為基底，連接邊為0，順時針往右為①、②…，新增的擴充連塊編號即為第4個數字。

2.歸納外圍可擴充位置數量公式



我們的發現：①在計算三角二連塊到五連塊可擴充位置數量的過程中，我們發現都是3×三角形個數，減去2×連接邊個數，再減去1×V字角個數，所以「E＝3×P－2×C－1×V」。

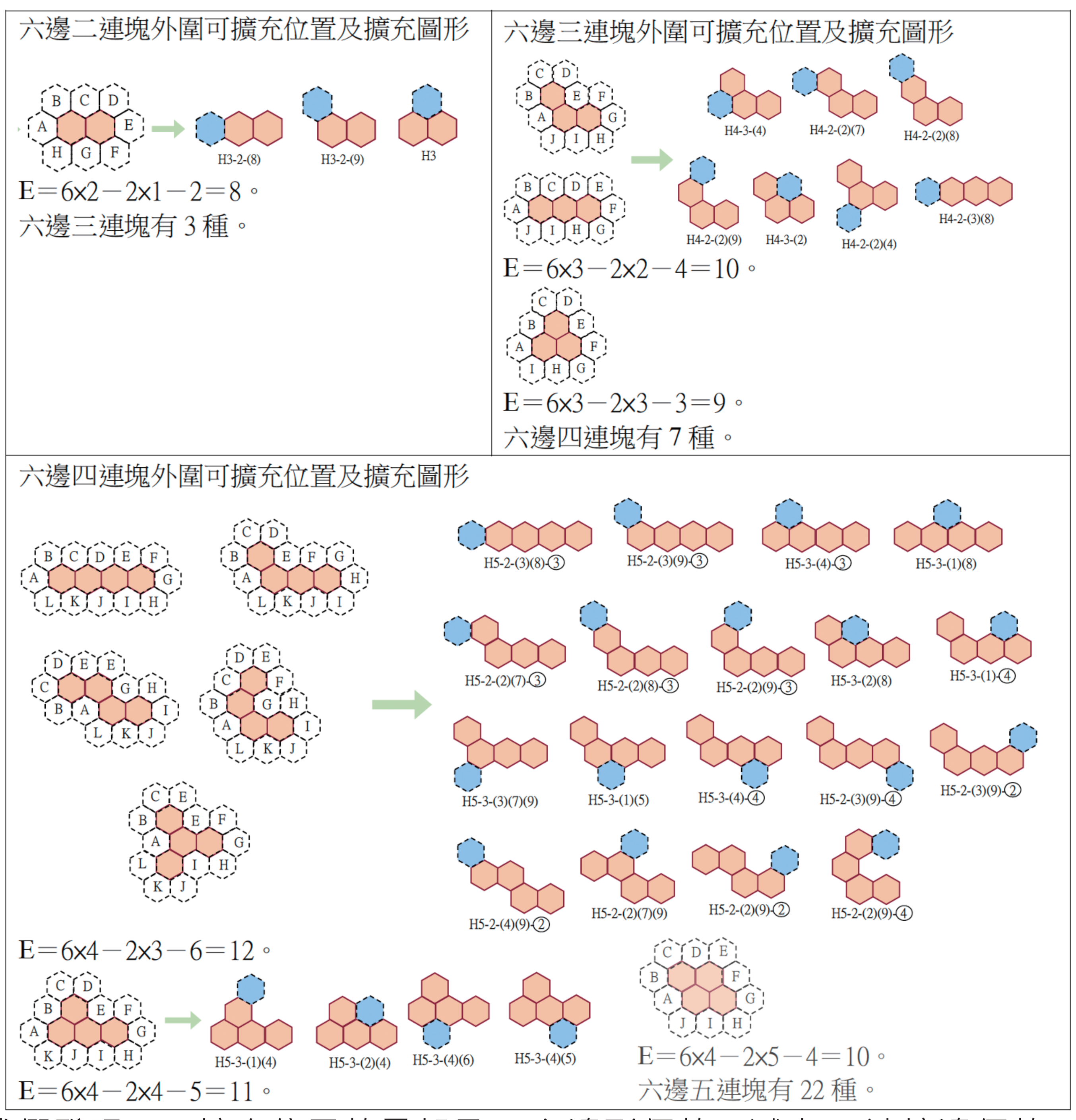
②命名規則可幫助判斷翻轉後相同圖形，將對稱軸往右的第1邊當起始邊，若第3層括號內數字相加等於「起始邊+L」就表示這兩個是重複圖形。例如T6－4－(2)(6)和T6－4－(1)(5)相同。

③具有對稱性的圖形，擴充後的數量大約只有E的一半。

(二)六邊多連塊圖形命名，並歸納外圍可擴充位置數量公式

1.命名規則：六邊形開頭用H，其餘命名規則與三角多連塊相同，各層數字間用分號區隔。

2.歸納外圍可擴充位置數量公式



我們發現：可擴充位置數量都是6×六邊形個數，減去2×連接邊個數，再減去1×V字角個數，所以E可表示成「E＝6×P－2×C－1×V」。

活動二：分析三角多連塊及的幾何性質並歸納特性

(一)分析三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形的周長變化

1.歸納三角多連塊的周長公式

E=3P-2C-V	4	5	6	6	6	7	7
周長(L)	4	5	6	7	6	8	7

我們發現多一個V字角，周長L會比E多1，因為V字角會影響擴充位置，造成重複擴充，所以E要減去V字角；但是V字角包含在周長中，所以計算周長時，不用減掉V字角，周長可以表示成L＝3×P－2×C。

2.分析三角多連塊同樣連塊數的周長變化

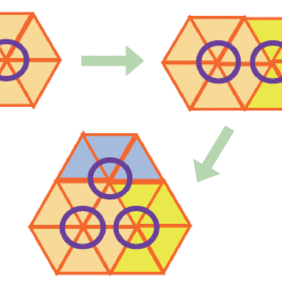
(1)圖形中出現平角

三角五連塊 P=5				
S	0	1	2	3
L	7	7	7	7

我們發現圖形中出現平角對周長沒有影響，因為形成平角的邊都是在圖形的周界上，計算周長時都會被算到，對圖形內部的連接邊C沒有影響，周長一樣是3×P－2×C。

(2)圖形中出現周角

從三角六連塊開始，才會形成周角，要形成第二個周角，所需要的最少連塊數是10連塊，往10連塊上方再加3塊，就可再形成第三個周角，為了觀察周角產生的影響，我們從13連塊開始討論。



13 連塊 P=13				
R	0	1	2	3
C	12	13	14	15
L	15(=3x13-2x12)	13(=3x13-2x13)	11(=3x13-2x14)	9(=3x13-2x15)

+1
+1
-2

我們的發現：

①三角多連塊在連塊數相同的情況下，每多出現1個R，L就會少2。觀察其中的差別，發現13連塊R＝0時，C＝12，而R多1，連接邊C就會多1，造成算出來的周長會少2，所以R會影響C，再造成L的變化。

②回頭檢查三角二連塊到三角六連塊，原本R＝0時，C＝P－1，但出現周角時，周角在圖形內部，造成C跟著增加，所以C＝P－1＋R＝P＋R－1。

③算出C之後，L＝3×P－2×C＝3×P－2×(P＋R－1)＝3×P－2×P－2×R＋2＝P－2×(R－1)。

我們往下驗證14連塊，確認是否也是符合13連塊的結論：

14 連塊 P=14				
R	0	1	2	3
C	13(=14+0-1)	14(=14+1-1)	15(=14+2-1)	16(=14+3-1)
L	16(=3x14-2x13)	14(=3x14-2x14)	12(=3x14-2x15)	10(=3x14-2x16)

我們的發現：14連塊一樣符合13連塊的算法，發現C＝P＋R－1這個關係後，原本活動一E的公式就可以寫成E＝3×P－2×(P＋R－1)－1×V＝P－V－2×(R－1)。

3.分析三角多連塊擴充圖形的周長變化

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	0	0	1	0	0	0	2	2	2	2
R	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
L	3	4	5	6	7	6	7	8	9	8

+1 +1 +1 +1 +1 -2 -1

我們的發現：

①觀察三角一連塊，L=3，擴充一個連塊，原本L要多3，但因為連接處會有兩個邊重複，要減去2，所以L＝3＋3－2＝4，最後L會多1。從三角五連塊到三角六連塊，新增的三角形讓六連塊多了1個周角，R多1，L會少2，所以＋1－2＝－1，最後六連塊的周長會比五連塊少1。②因為S對L沒有影響，比較三角六連塊和三角十連塊，P多4，L會多4，S雖然多2，但L不會變化，R多1，L會少2，所以＋4－2＝＋2

(二)分析三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形的角的數量變化

1.歸納三角多連塊的角的數量公式

P	1	2	3	4	5	6	6	7
E	3	4	5	6	6	6	7	7
L	3	4	5	6	7	6	8	7
S	0	0	1	0	0	0	2	2
A	3	4	4	6	7	6	6	5

當形成平角時，平角會在圖形中形成一直線，不會被算進角的數量。沒有平角的圖形，邊的數量就是周長，也是角的數量，L＝A；有平角的圖形，角的數量要用周長再減去平角的數量，L－S＝A，A＝L－S＝3×P－2×C－S＝3×P－2×(P＋R－1)－S＝ P－S－2×(R－1)。

2.分析三角多連塊同樣連塊數的角的數量變化

(1)圖形中出現平角

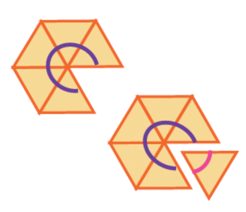
三角五連塊 P=5				
S	0	1	2	3
A	7	6	5	4

從三角五連塊的圖形，可觀察到S多1，A就會少1，因為形成平角時，這個平角會在圖形中形成一直線，不會被算進A，所以這個平角會被減去，A會減少1。

(2)圖形中出現周角

13 連塊 P=13				
S	1	2	2	3
R	0	1	2	3
A	14	11	9	6

在13連塊的圖形中，當S多1，A會少1，但同時又有R時，還會讓A再減少2，因為形成周角時，這個周角會被包在圖形中，不會被算進A，原本5個角形成的角，及新增的角都會被減去，所以A會減少2。



3.分析三角多連塊擴充圖形的角的數量變化

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	0	0	1	0	0	0	2	2	2	2
R	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
A	3	4	4	6	7	6	5	6	7	6

我們的發現：①觀察三角一連塊，A=3，擴充一個連塊後，原本A要多3，但因為連接處會有兩個角與原本一連塊的兩個角合在一起，要減去2，A＝3＋3－2＝4，與原本一連塊相比A會多1。但從三角二連塊到三角三連塊，A卻是相同，因為新增的三角形讓三連塊形成一個平角，要再減1，最後A就會與二連塊相同。

②從三角五連塊到三角六連塊，都沒有平角，R增加1，會讓A少2，＋1－2＝－1，最後六連塊的A會比五連塊少1。

③比較三角六連塊到三角十連塊，P多4，會讓A多4，S多2，會讓A少2，R多1，會讓A少2，所以＋4－2－2＝＋0，最後十連塊的A與六連塊相同。

(三)分析三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形的內角和變化

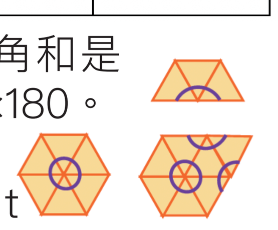
1.歸納三角多連塊的內角和公式

P	1	2	3	4	5	6	6	7
L	3	4	5	6	7	6	8	7
S	0	0	1	0	0	0	2	2
R	0	0	0	0	0	1	0	1
A	3	4	4	6	7	6	6	5
I	180	360	360	720	900	720	720	540

我們的發現：①一個三角形的內角和是180度，兩個三角形的內角和是2x180=360度，所以三角二連塊的內角和是360度，也可以想成是Px180。

②三角三連塊會形成1個平角，要減去180度，I＝(P－1)x180＝360。

③三角六連塊會形成1個周角，要減去360度，I＝(P－2)x180＝720。t



④三角七連塊會形成1個周角及2個平角，要減去360度，I＝(P－2－2)x180＝540度。

⑤計算三角多連塊內角和時，要同時考慮S和R對I的影響，出現1個S，要減去1個180度；而出現1個R，要減去2個180度；所以內角和可以表示成I＝(P－S－2xR)x180。

2.比較三角多連塊的內角和公式與多邊形內角和公式

(1)多邊形與多連塊的幾何性質定義

觀察右圖，以多邊形來看，N＝5；以三角七連塊來看，L＝7，A＝5。因為三角七連塊的周長L是以小三角形為單位，但以多邊形而言，同一直線算一條邊，所以多邊形的N與L不相等。換個角度思考，多邊形邊的數量和角的數量相等，所以我們再來看角的數量，我們算多連塊角的數量時，會減去形成一直線的平角及在內部的周角，算的就是多邊形的內角，所以多邊形的N與三角多連塊的A相等。

(2)比較三角多連塊內角和公式與多邊形內角和公式

確定N＝A的關係後，我們再加上A＝P－S－2x(R－1)，推論多邊形內角和公式是否和三角多連塊的內角和公式相等，過程如下：

多邊形內角和公式	N＝A、A＝P－S－2x(R－1)	三角多連塊的內角和公式
(N－2)x180	I＝(N－2)x180 ＝(A－2)x180 ＝[P－S－2x(R－1)－2]x180 ＝(P－S－2xR)x180	I＝(P－S－2xR)x180

推論後，確定我們的三角多連塊內角和公式與多邊形內角和公式相等。

3.分析三角多連塊同樣連塊數的內角和變化

從三角多連塊的內角和公式可以知道，要計算內角和需要同時考慮平角及周角，所以我們列出13連塊來比較S和R對I的影響。

13 連塊 P=13				
S	1	2	2	3
R	0	1	2	3
I	2160(=13-1-2x0)	1620(=13-2-2x1)	1260(=13-2-2x2)	720(=13-3-2x3)

我們的發現：觀察13連塊，S多1，I會少180；R多1，I會少360；若同時有S及R，就要依序將兩種變化都加在一起，I要減去1xS、再減去2xR。

4.分析三角多連塊擴充圖形的內角和變化

接著我們想觀察擴充一個三角形後，S跟R對I會產生什麼變化？我們從一個三角形開始，每次擴充一個三角形，去觀察圖形中出現平角和周角會產生什麼影響。

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	0	0	1	0	0	0	2	2	2	2
R	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
I	180	360	360	720	900	720	540	720	900	720

我們的發現：①觀察三角一連塊到二連塊，　P多1，I會多180；從三角二連塊到三連塊，P多1，I多180，S多1，I會少180，所以最後I不變。

②從三角五連塊到三角六連塊，P多1，I多180；R增加1，會讓I少360，所以＋180－360＝－180，最後六連塊的I會比五連塊少180。

③比較三角六連塊和三角十連塊，P多4，會讓I多4x180＝720，S多2，I會少2x180=360，R多1，I會少360，所以＋720－360－360＝＋0，最後十連塊的I與六連塊相同。

活動三：分析六邊多連塊及的幾何性質並歸納特性

(一)分析六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形的周長變化

1.分析六邊多連塊同樣連塊數的周長變化

六邊五連塊 P=5				
R	0	1	2	3
C	4	5	6	7
L	22	20	18	16

我們的發現：①六邊五連塊R=0時，L＝6xP－2xC＝22；R多1，造成的影響和三角多連塊相同，C也會多1，使L少2。所以C＝P－1＋R＝P＋R－1。

②得到C＝P＋R－1，L＝6xP－2xC＝6xP－2x(P＋R－1)＝4xP－2xR＋2＝4xP－2x(R－1)。

2.分析六邊多連塊擴充圖形的周長變化

P	1	2	3	4	5	6	7
R	0	0	1	2	3	4	5
L	6	10	12	14	16	18	20

我們的發現：①觀察六邊一連塊，L=6，擴充一個連塊後，P多1，原本L要多6，但因為連接處會有兩個邊重複，要減去2，所以L＝6＋6－2＝10，最後L會多4。但從六邊二連塊到六邊三連塊，L卻只多2，因為新增的六邊形讓三連塊形成一個周角，R多1，會讓L少2，要再減2，所以＋4－2＝＋2，最後三連塊的周長會比二連塊多2。

②從公式來看，L＝4xP－2x(R－1)，可看到如果P多1，L會多4；如果R多1，L會少2，同樣符合圖形觀察的結果。

(二)分析六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形的角的數量變化

1.歸納六邊多連塊的角的數量公式

P	1	2	3	4	5	6	7
R	0	0	1	2	3	4	5
L	6	10	12	14	16	18	20
A	6	10	12	14	16	18	20

觀察六邊多連塊圖形的幾何性質，會發現A＝L，和三角多連塊的公式比較，三角多連塊的A＝L－S，而六邊多連塊不會形成平角，不會有一直線的邊，所以A＝L。

2.分析六邊多連塊同樣連塊數的角的數量變化

六邊五連塊 P=5				
R	0	1	2	3
L	22	20	18	16
A	22	20	18	16

我們的發現：

①從六邊五連塊到六連塊，R多1，A會少2，因為形成周角時，周角會被包在圖形中，不會被算進A，原本2個角形成的角，及新增的角都會被減去，A會減少2。

②從公式來看，A＝L＝4xP－2x(R－1)，如果P固定都是5，代表P不變，R多1，A會減少2，同樣符合圖形觀察的結果。

3.分析六邊多連塊擴充圖形的角的數量變化

P	1	2	3	4	5	6	7
R	0	0	1	2	3	4	5
L	6	10	12	14	16	18	20
A	6	10	12	14	16	18	20

我們的發現：①觀察六邊一連塊，A=6，擴充一個連塊後，原本A要多6，但因為連接處會有兩個角與原本一連塊的兩個角合在一起，要減去2，所以A＝6＋6－2＝10，最後A會多4。所以P多1，A會多4。

②從六邊二連塊到六邊三連塊，P多1，A會多4，但R多1，會讓A少2，所以＋4－2＝＋2，最後三連塊的A會比二連塊多2。

(三)分析六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形的內角和變化

1.歸歸納六邊多連塊的內角和公式

P	1	2	3	4	5	6	7
R	0	0	1	2	3	4	5
L	6	10	12	14	16	18	20
A	6	10	12	14	16	18	20
I	720	1440	1800	2160	2520	2880	3240

我們的發現：①計算六邊多連塊內角和時，要考慮R對I的影響，出現1個R，要減去1個360度，所以內角和可以表示成I＝Px720－Rx360＝(4xP－2xR)x180。

②多邊形的N與六邊多連塊的A相等，A＝4xP－2x(R－1)，所以多邊形內角和公式(N－2)x180＝[4xP－2x(R－1)－2]x180＝(4xP－2xR)x180，同樣與六邊多連塊內角和公式相等。

2.分析六邊多連塊同樣連塊數的內角和變化

六邊五連塊 P=5				
R	0	1	2	3
A	22	20	18	16
I	3600 [=(4x5-2x0)x180]	3240 [=(4x5-2x1)x180]	2880 [=(4x5-2x2)x180]	2520 [=(4x5-2x3)x180]

我們的發現：①觀察六邊五連塊，R多1，I會少360。

②用內角和公式(N－2)x180＝(A－2)x180來計算，會與I相等。

3.分析六邊多連塊擴充圖形的內角和變化

P	1	2	3	4	5	6	7
R	0	0	1	2	3	4	5
A	6	10	12	14	16	18	20
I	720	1440	1800	2160	2520	2880	3240

我們的發現：①觀察六邊一連塊到二連塊，P多1，I會多720；從六邊二連塊到三連塊，P多1，I多720；R多1，I會少360，所以最後＋720－360＝＋360，I會多360度。

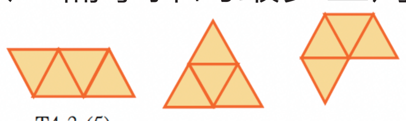
②從公式來看，I＝(4xP－2xR)x180，可看到如果P多1，I會多4x180＝720；R多1，I會少2x180＝360，同樣符合我們的推論。

活動四：在n階正三角形及n階正六邊形中，探討讓指定圖形無法放入，需拿掉的最少個數及位置，觀察增加的規律並歸納成通用公式

規則：在n階正三角形中，要想辦法讓指定圖形無法放入，可以任意拿掉小的正三角形，拿掉的位置就不能有圖形覆蓋上去，最少要拿掉幾個小正三角形，才能讓指定的圖形無論是旋轉或翻轉，都無法放入n階正三角形中。

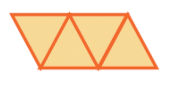
(一)在n階正三角形中，探討讓三角四連塊無法放入，需拿掉的最少三角形個數及位置並歸納成通用公式

三角四連塊有3種圖形，我們挑選具有點對稱的T4–3–(5)及線對稱的T4–3–(1)來挑戰，並觀察規律。

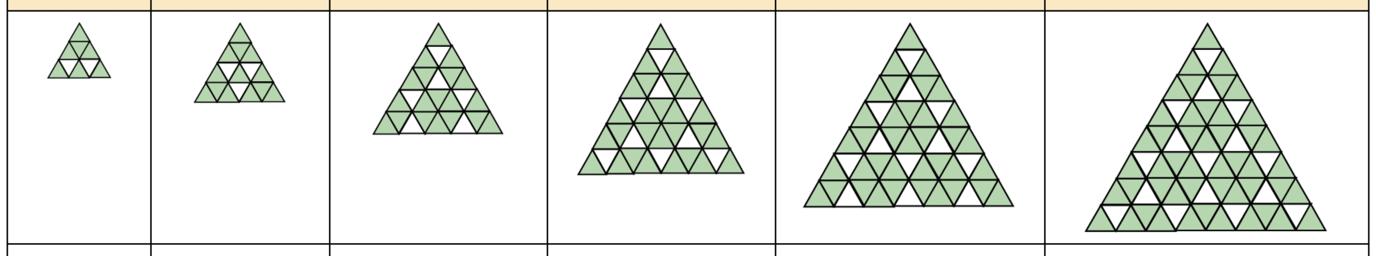


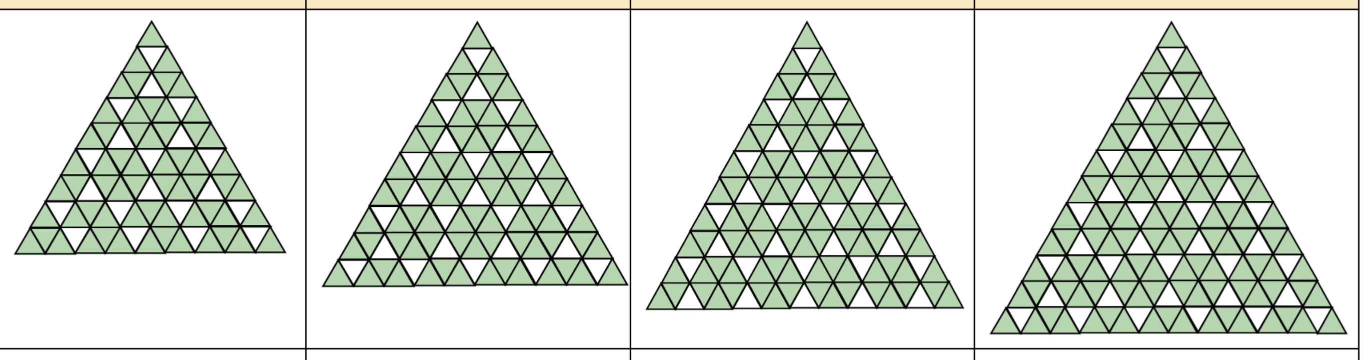
T4-3-(5)　T4-3-(1)　T4

1.在3~12階三角形中，讓三角四連塊T4–3–(5)無法放入，需拿掉的最少三角形個數及位置

 T4-3-(5)	我們要設法讓T4–3–(5)無法放入n 階正三角形中。

(1)在3~12階三角形中，讓T4–3–(5)無法放入，需拿掉的最少三角形個數及位置如下：

3 階	4 階	5 階	6 階	7 階	8 階
					
2	2+1=3	1+1+2+2=6	1+1+2+2+3=9	1+1+2+2+3+3=12	1+1+2+2+3+3+4=16

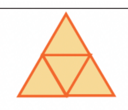
9 階	10 階	11 階	12 階
			
1+1+2+2+3+3 +4+4=20	1+1+2+2+3+3 +4+4+5=25	1+1+2+2+3+3 +4+4+5+5=30	1+1+2+2+3+3 +4+4+5+5+6=36

(2)需拿掉的最少三角形個數解：

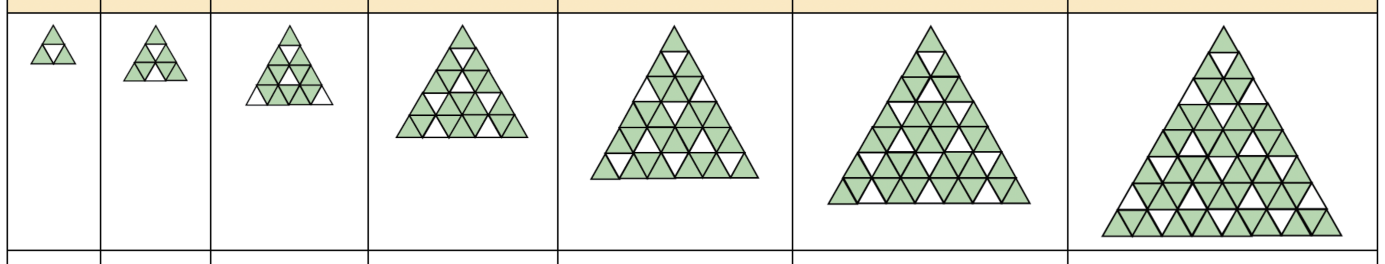
我們用 $f_1(n)$ 來表示讓T4–3–(5)無法放入，需拿掉的最少三角形個數，分成奇數階(n為奇數)及偶數階(n為偶數)兩種解，公式如右圖

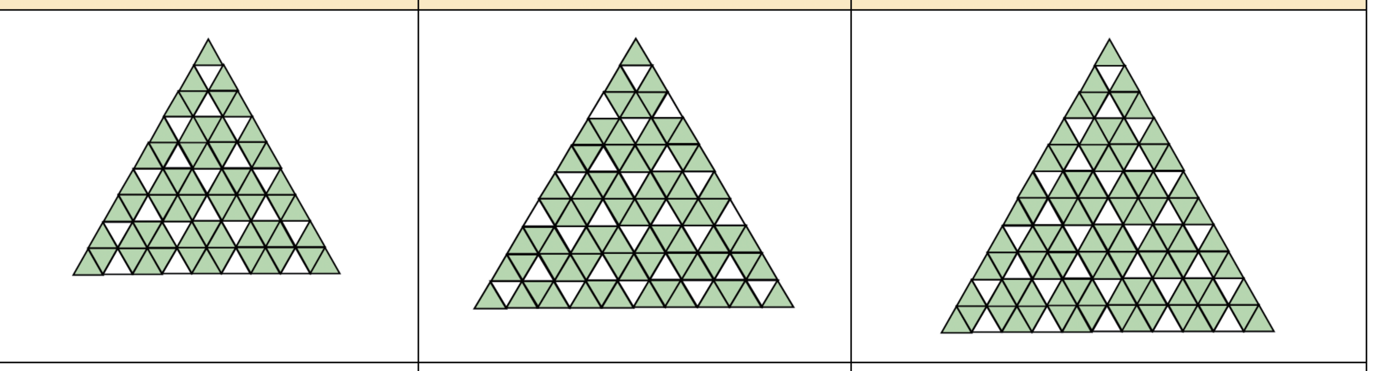
$$f_1(n)=\begin{cases}\frac{n^2-1}{4}，n=\text{奇數}(n\geq 5)\\ \frac{n^2}{4}，n=\text{偶數}(n\geq 6)\end{cases}$$

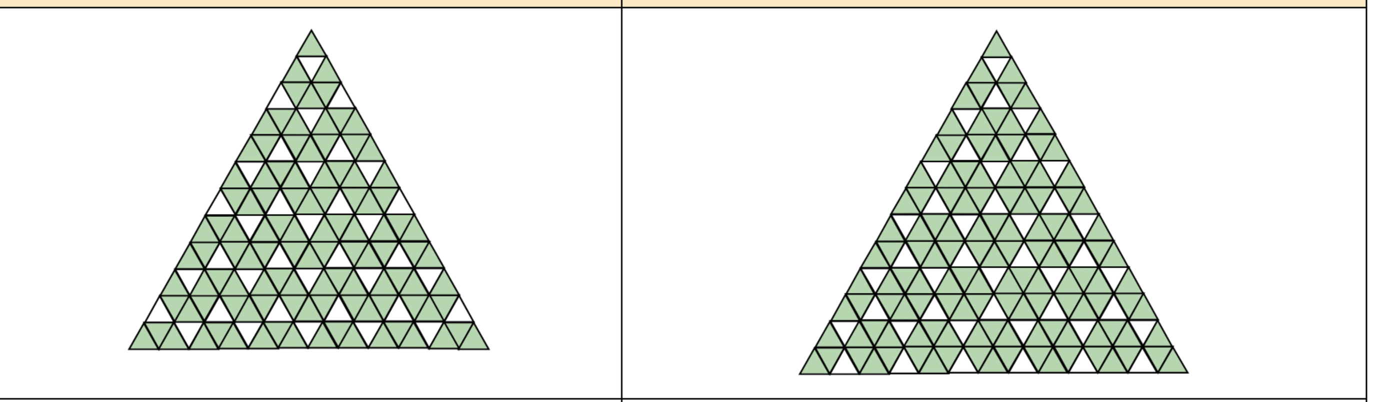
2.在2階~13階三角形中，讓三角四連塊T4–3–(1)無法放入，需拿掉的最少三角形個數及位置

 T4-3-(1)	我們要設法讓T4–3–(1)無法放入n階正三角形中。

(1)在2~13階三角形中，讓T4–3–(1)無法放入，需拿掉的最少三角形個數及位置如下：

2 階	3 階	4 階	5 階	6 階	7 階	8 階
						
1	2	1+1+2=4	1+1+2+2=6	1+2+1+2+3=9	1+1+2+2+3+3=12	1+1+3+3+2+2+4=16

9 階	10 階	11 階
		
1+1+2+2+3+3+4+4=20	1+2+1+2+3+4+3+4+5=25	1+1+2+2+3+3+4+4+5+5=30

12 階	13 階
	
1+2+1+2+3+4+3+4+5+6+5=36	1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6=42

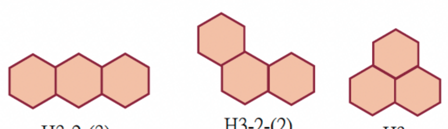
(2)需拿掉的最少三角形個數解：

我們用 $f_2(n)$ 來表示讓T4–3–(1)無法放入，需拿掉的最少三角形個數，分成奇數階(n為奇數)及偶數階(n為偶數)兩種解，公式如右圖

$$f_2(n)=\begin{cases}\frac{n^2-1}{4}，n=\text{奇數}(n\geq 3)\\ \frac{n^2}{4}，n=\text{偶數}(n\geq 2)\end{cases}$$

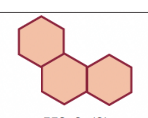
(二)在n階正六邊形中，探討讓六邊三連塊無法放入，需拿掉的最少六邊形個數及位置

六邊三連塊有3種圖形，我們挑選具有線對稱的H3–2–(2)及點對稱的H3來挑戰，並觀察規律。

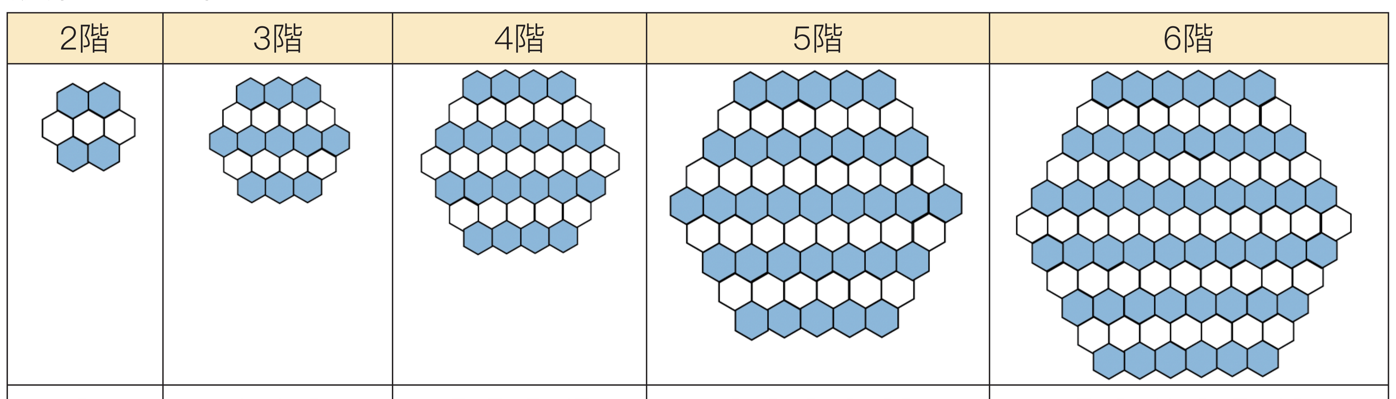


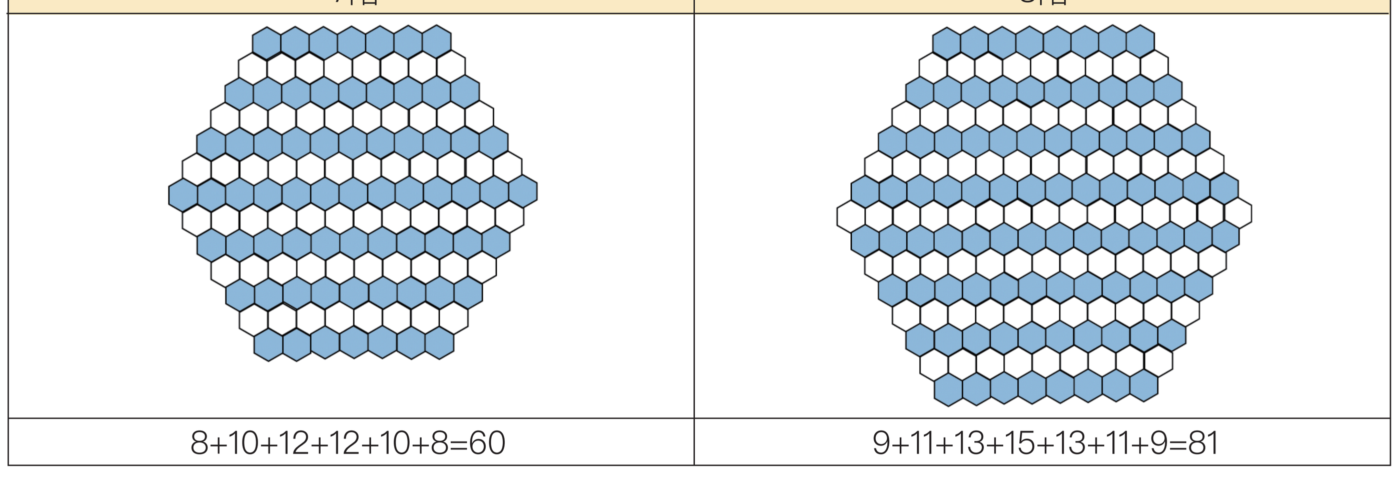
H3-2-(3)　H3-2-(2)　H3

1.在2~8階正六邊形中，讓六邊三連塊H3–2–(2)無法放入，需拿掉的最少六邊形個數及位置

 H3-2-(2)	我們要設法讓H3–2–(2)無法放入n階正六邊形中。

(1)在2~8階三角形中，讓H3–2–(2)無法放入，需拿掉的最少六邊形個數及位置如下：

2階	3階	4階	5階	6階
				
3	4+4=8	5+7+5=17	6+8+8+6=28	7+9+11+9+7=43

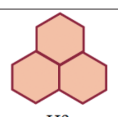
7階	8階
	
8+10+12+12+10+8=60	9+11+13+15+13+11+9=81

(2)需拿掉的最少六邊形個數解：

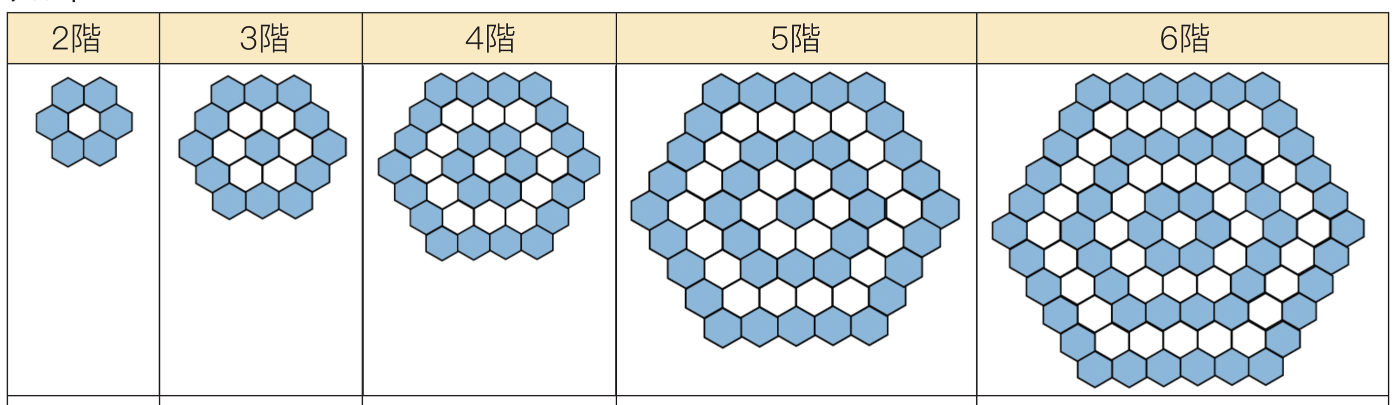
我們用 $f_3(n)$ 來表示讓H3–2–(2)無法放入，需拿掉的最少六邊形個數，分成奇數階(n為奇數)及偶數階(n為偶數)兩種解，公式如右:

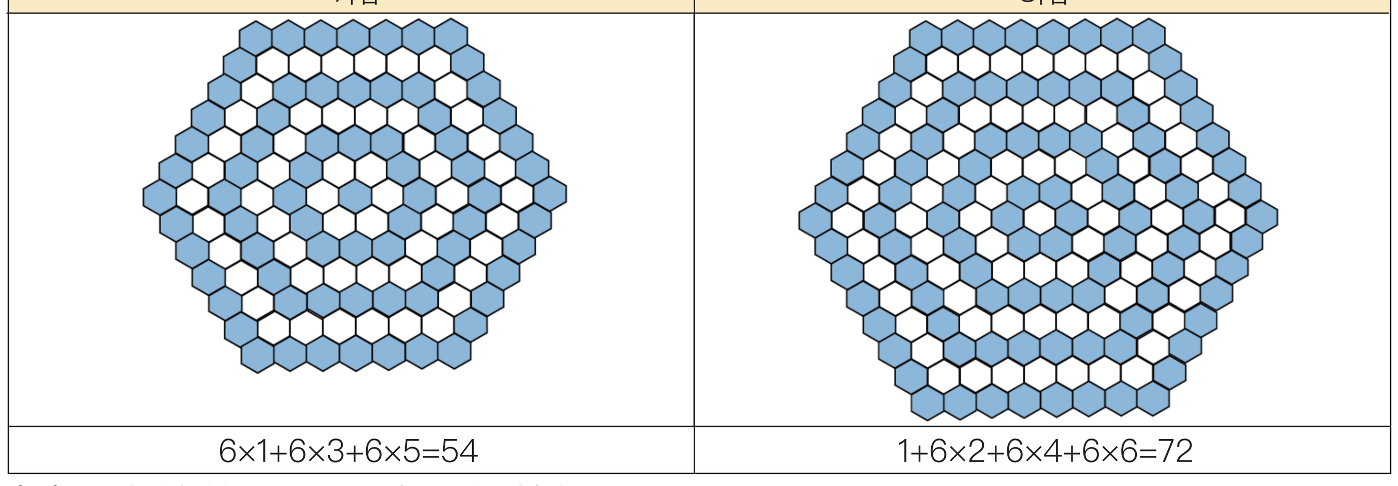
$$f_3(n)=\begin{cases}\frac{3n^2-4n+1}{2}，n=\text{奇數}(n\geq 3)\\ \frac{3n^2-4n+2}{2}，n=\text{偶數}(n\geq 4)\end{cases}$$

2.在2階~8階三角形中，讓六邊三連塊H3無法放入，需拿掉的最少六邊形個數及位置

 H3	我們要設法讓H3無法放入n階正六邊形中。

(1)在2~8階三角形中，讓H3無法放入，需拿掉的最少六邊形個數及位置如下：

2階	3階	4階	5階	6階
				
1	6×1=6	1+6×2=13	6×1+6×3=24	1+6×2+6×4=37

7階	8階
	
6×1+6×3+6×5=54	1+6×2+6×4+6×6=72

(2)需拿掉的最少六邊形個數解：

我們用 $f_4(n)$ 來表示讓H3無法放入，需拿掉的最少六邊形個數，分成奇數階(n為奇數)及偶數階(n為偶數)兩種解，公式如右圖

$$f_4(n)=\begin{cases}6\times\left(\frac{n-1}{2}\right)^2，n=\text{奇數}(n\geq 3)\\ 1+\frac{6n(n-2)}{4}，n=\text{偶數}(n\geq 2)\end{cases}$$

伍、未來展望

活動四中，三角多連塊以及六邊多連塊各選了2個連塊來做實驗，但還剩下很多連塊未能有嚴謹的討論以及歸納。對n階三角形的討論中，阻擋特定形狀三角多連塊放入後，常常會出現拿走相同數量但是不同規律位置，很難歸納規律產生公式。或是不同形狀的相同連塊數，會有不同拿法，很難發展出一致性的步驟。

n階六邊形的討論中，和n階三角形不同的是，常會出的不同形狀不同數量的六邊多連塊，拿法和位置卻一致。針對上面的觀察到的情況，需要觀察更多的連塊，做更深入的探討，留在之後討論。

陸、結論

一、可擴充位置數量公式：

透過二連塊組合到五連塊的過程，發現三角多連塊和六邊多連塊的可擴充位置，會受到多連塊個數P、連接邊C、V字角的影響，歸納整理成以下公式：

(一)三角多連塊可擴充位置數量公式：E＝3×P－2×C－1×V。

(二)六邊多連塊可擴充位置數量公式：E＝6×P－2×C－1×V。

二、透過比較三角多連塊同樣連塊數及擴充圖形發現平角(S)、周角(R)會影響三角多連塊的周長(L)、角的數量(A)及內角和(I)。平角(S)會影響角的數量(A)及內角和(I)，周角(R)會影響周長(L)、角的數量(A)及內角和(I)，整理出以下公式：

(一) L＝P－2×(R－1)。

(二) A＝P－S－2×(R－1)。

(三) I＝(P－S－2×R)×180。

三、透過比較六邊多連塊同樣連塊數及擴充圖形發現六邊多連塊沒有平角(S)，只有周角(R)會影響六邊多連塊的周長(L)、角的數量(A)及內角和(I)。整理出以下公式：

(一) L＝4×P－2×(R－1)。

(二) A＝4×P－2×(R－1)。

(三) I＝(4×P－2×R)×180。

四、在n階正三角形及n階正六邊形中，探討讓指定圖形無法放入，需拿掉的最少個數及位置，歸納成以下結論：

(一)透過在n階正三角形中，讓T4–3–(5)、T4–3–(1)無法放入，需拿掉的最少個數和位置，有高度的相似，得到公式如下：

1.$f_1(n)$表示讓T4–3–(5)無法放入，需拿掉的最少三角形個數，

$$f_1(n)=\begin{cases}\frac{n^2-1}{4}，n=\text{奇數}(n\geq 5)\\ \frac{n^2}{4}，n=\text{偶數}(n\geq 6)\end{cases}$$

2. $f_2(n)$ 表示讓T4–3–(1)無法放入，需拿掉的最少三角形個數，

$$f_2(n)=\begin{cases}\frac{n^2-1}{4}，n=\text{奇數}(n\geq 3)\\ \frac{n^2}{4}，n=\text{偶數}(n\geq 2)\end{cases}$$

(二)透過在n階正六邊形中，讓H3–2–(2)、H3無法放入，需拿掉的最少個數和位置，結論如下：

1.讓H3–(2)無法放入，得到隔排拿取的規律，用$f_3(n)$表示讓H3–2 –(2)無法放入，需拿掉的最少六邊形個數公式如右：

$$f_3(n)=\begin{cases}\frac{3n^2-4n+1}{2}，n=\text{奇數}(n\geq 3)\\ \frac{3n^2-4n+2}{2}，n=\text{偶數}(n\geq 4)\end{cases}$$

2. 讓H3無法放入，得到環狀拿取的規律，用$f_4(n)$表示讓H3無法放入，需拿掉的最少六邊形個數，公式如右：

$$f_4(n)=\begin{cases}6\times\left(\frac{n-1}{2}\right)^2，n=\text{奇數}(n\geq 3)\\ 1+\frac{6n(n-2)}{4}，n=\text{偶數}(n\geq 2)\end{cases}$$

柒、參考資料

(1)國立台灣科學教育館/全國中小學科學展覽會網站 參考歷屆作品。

(2)南投縣草屯鎮平林國民小學。五方連塊之乾坤大挪移武功祕笈。中華民國第 50 屆中小學科學展覽會作品說明書。

(3)臺中市私立明道普霖斯頓國民小學。滾動棋積—三角正多面體與滾積木遊戲。中華民國第 51 屆中小學科學展覽會作品說明書。

(4)高雄市楠梓區楠梓國民小學。天羅地網尋芳蹤 只為盡訪六連塊。中華民國第 52 屆中小學科學展覽會作品說明書。

(5)彰化縣員林鎮員林國小。無鎖不能—在n×n方格中卡住五連方格的探討。中華民國第54屆中小學科學展覽會作品說明書

(6)南一版數學第九冊第五單元線對稱圖形、第十單元正方體與長方體。

註：作品書中所有圖形及圖片，皆由作者親自繪製。