

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組 數學科

(鄉土)教材獎

080412

有正就贏

學校名稱：苗栗縣苑裡鎮中正國民小學

作者：	指導老師：
小四 尤晨融	葉美娟
小四 尤晨熙	康芸琳
小四 李千燁	
小四 鄭匡佑	

關鍵詞：正方形、比率、玩的順序

有正就贏

摘要

本研究的目的是探討巧克力遊戲，切到剩 1 塊巧克力，對方無法再切時，就贏得遊戲，巧克力紙板的形狀及尺寸與遊戲獲勝的關係。

研究結果發現：巧克力紙板是正方形，後行者切出正方形給先行者，就會贏得遊戲。若正方形的邊長為 A ，先行者切給後行者 n 條，先行者贏的比率的分母為 $(A-1)+(n-1)^2$ ，分子為 $(A-2)+(n-1)^2$ 。

巧克力紙板是寬為 A ，長為 B 的長方形，先行者切出正方形給後行者，就會贏得遊戲。若 $A \leq 2$ ，後行者贏的比率的分母 = $A+B-2$ ；若 $A > 2$ ，後行者贏的比率的分母 = $A \times (A-2) + B$ 。

此遊戲獲勝的關鍵是「正方形」，先行者或後行者只要能切出正方形尺寸給對方，就會贏得遊戲。

壹、前言

一本書中有一個切巧克力的遊戲，當對方拿到只剩一塊巧克力，而無法再切時，你就贏了。玩 2×2 的正方形巧克力紙板時，不管怎麼玩，先行者總是輸。但玩其他更大尺寸的正方形，我們發現先行者有機會贏，因此我們很好奇，先行者或後行者贏得遊戲的訣竅是什麼？不同形狀的巧克力紙板，先行者或後行者，該如何玩才能提高贏得遊戲的機會？輸贏機會的問題探究將利用教科書有關「比率」概念。因此我們想探討巧克力紙板的形狀與尺寸、玩家誰先出手這些變因，如何影響遊戲的輸贏？因此我們將探究以下兩個研究問題：

一、巧克力紙板形狀與尺寸與遊戲獲勝的關係為何？

二、遊戲的先行者或後行者與遊戲獲勝的關係為何？

貳、研究設備及器材

一、研究器材：

方格紙、色鉛筆。

二、遊戲規則說明：

兩人猜拳，贏的人先行，用剪刀沿著一個分成數塊的巧克力板上剪成 2 份，剪的時候，中間不能轉彎，之後再將其中一份給對方。對方也用剪刀將拿到的巧克力板剪成 2 份，再拿其中一份給對方，如此輪流，直到對方只剩 1 塊，無法再將巧克力剪成 2 份時，即為贏家。

三、名詞解釋：

(一)先行者：遊戲中第一個先切巧克力的人。

(二)後行者：遊戲中第二個切巧克力的人。

(三)操作性定義：巧克力紙板放置橫向的縱切與放置縱向的橫切是視為同一種切法。如下圖所示，若切出的條數是相同的，則是同一種切法。

直切	橫切	橫切	直切	直切	橫切
算一種切法		算一種切法		算一種切法	

三、研究過程或方法

本實驗研究的變項包含(一)不同尺寸的正方形大小，先行者與遊戲獲勝的關係
(請見實驗一~實驗四)

(二)不同尺寸的正方形大小，後行者與遊戲獲勝的關係
(請見實驗五)

(三)不同尺寸的長方形大小，先行者與遊戲獲勝的關係
(請見實驗六)

(四)不同尺寸的長方形大小，後行者與遊戲獲勝的關係
(請見實驗七~實驗八)

實驗(一)：巧克力紙板為邊長 2cm~4cm 的正方形時，先行者與遊戲獲勝的關係。

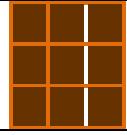
實驗步驟：

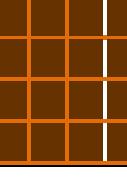
1. 在方格紙上，用色鉛筆畫出邊長 2cm~4cm 的正方形。
2. 先行者按照遊戲規則在方格紙上畫出後行者所有可能切出的情況。

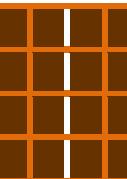
實驗(一)的結果：

表一：巧克力尺寸為邊長 2cm~4cm 的正方形，巧克力切法與先行者輸贏的情況表

巧克力尺寸(cm)	切的情況
2x2	
	輸。
先行者只有 1 種給法，無法贏後行者。	

3x3					
	給 1 條的情況		給 2 條的情況		
					
	輸	贏	贏	贏	贏
	先行者有 2 種給法，給後行者 2 條時，贏的次數最多。				

4x4					
	給 1 條的情況		給 3 條的情況		
					
	輸	贏	贏	贏	贏
	贏 2 次 輸 1 次				

			
給 2 條的情況			
			
贏	贏	贏	
輸			

先行者有 3 種給法，給後行者 3 條時，贏的次數最多。

實驗(一)的發現與討論：

- 由表一的結果可知，邊長 2×2 的正方形，先行者一定會輸。
- 巧克力紙板為邊長 3×3 的正方形，切給後行者 2 條時，贏的次數較多，贏的機會較大。
- 巧克力紙板為邊長 4×4 的正方形，切給後行者 3 條時，贏的次數較多，贏的機會較大。
- 正方形的巧克力紙板，先行者切給後行者的條數越多，贏得遊戲的機會越大嗎？因此我們設計了實驗(二)。

實驗(二)：巧克力紙板為邊長 $5\text{cm} \sim 6\text{cm}$ 的正方形時，先行者與遊戲獲勝的關係。

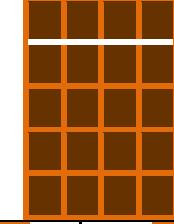
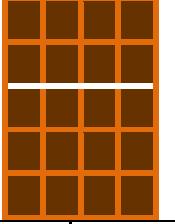
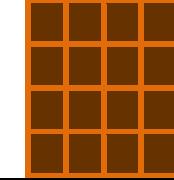
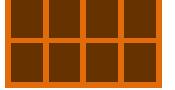
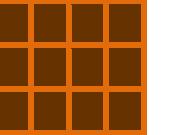
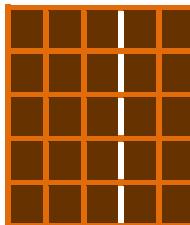
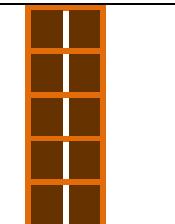
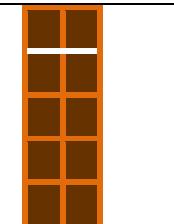
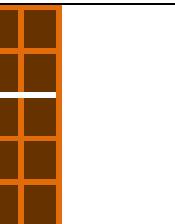
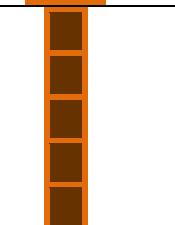
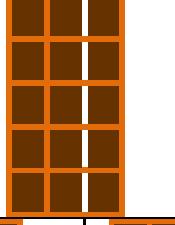
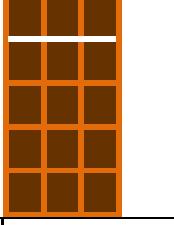
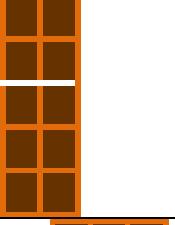
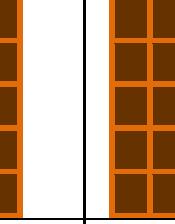
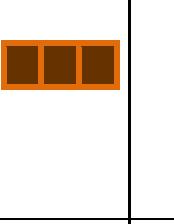
實驗步驟：

- 在方格紙上，用色鉛筆畫出邊長 $5\text{cm} \sim 6\text{cm}$ 的正方形。
- 先行者遊戲規則在方格紙上畫出後行者所有可能切出的情況。

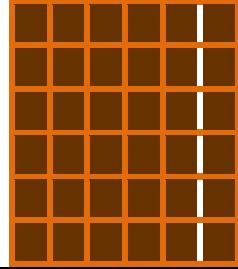
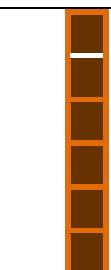
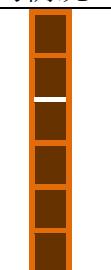
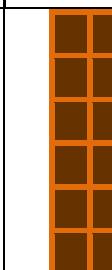
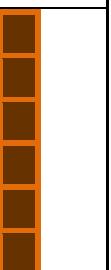
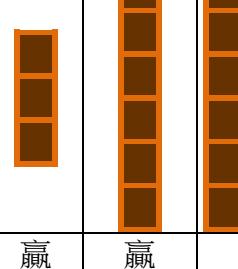
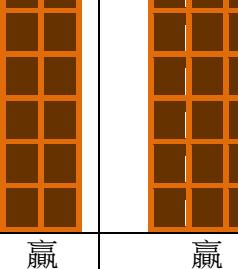
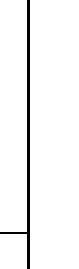
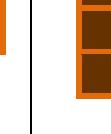
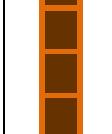
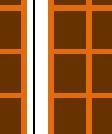
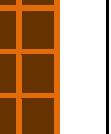
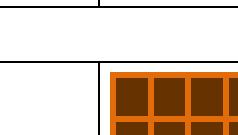
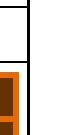
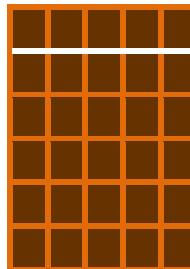
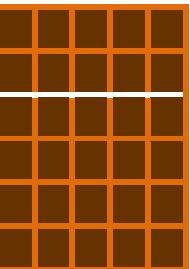
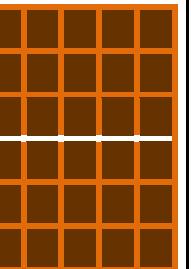
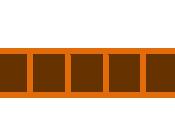
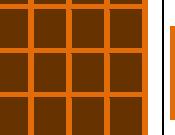
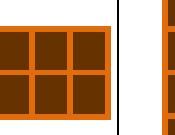
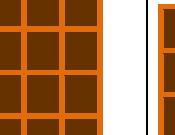
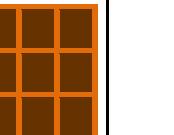
實驗(二)的結果：

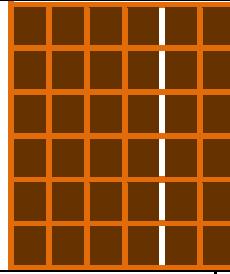
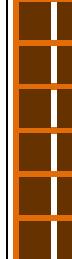
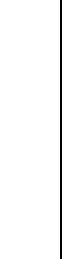
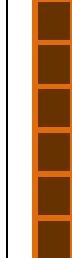
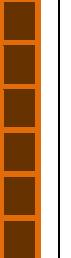
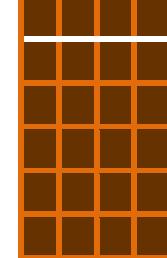
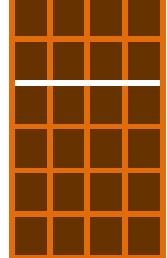
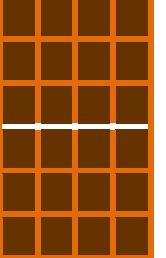
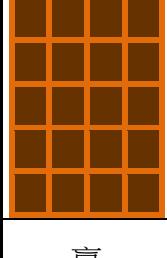
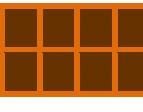
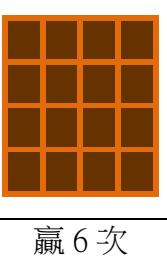
表二：巧克力紙板為邊長 5cm 的正方形，巧克力切法與先行者輸贏的情況表

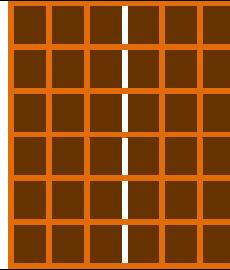
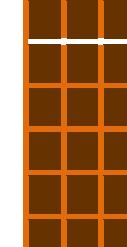
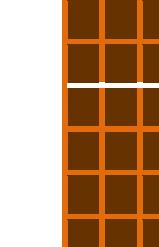
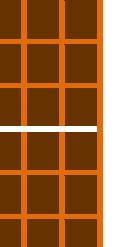
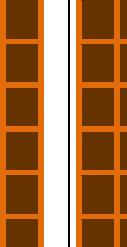
紙板尺寸(cm)	切的情況						
	給 1 條的情況				給 4 條的情況		
5×5							
	輸	贏	贏	贏	贏	贏	贏

		給 4 條的情況									
											
											
贏		贏 6 次 輸 1 次		贏		贏					
5x5											
給 2 條的情況											
											
											
贏		贏	贏	輸		贏					
給 3 條的情況											
											
											
贏		贏	贏	贏	贏	贏	贏 2 次 輸 1 次				

表三：巧克力紙板為邊長 6cm 的正方形，巧克力切法與先行者輸贏的情況表

紙板尺寸(cm)	切的情況								
6×6									
	給 1 條的情況					給 5 條的情況			
									
									
	輸	贏	贏	贏	贏	贏	贏	贏	贏
	給 5 條的情況								
									
									
	贏	贏 12 次 輸 1 次		贏	贏	贏	贏	贏	

								
	給 2 條的情況							
								
6x6								
	贏	贏	贏	輸	贏	贏	贏	贏
	給 4 條的情況							
								
								
	贏	贏	贏	贏 6 次 輸 1 次				贏

							
	給 3 條的情況						
6x6							
							
	贏	贏	贏	贏	贏	贏	贏 2 次 輸 1 次

實驗(二)的發現與討論：

- 由表二的實驗結果可知，巧克力紙板為邊長 5×5 的正方形，先行者切給後行者 4 條時，贏的次數較多，贏的機會較大。
- 由表三的實驗結果可知，巧克力紙板為邊長 6×6 的正方形，先行者切給後行者 5 條時，贏的次數較多，贏的機會較大。
- 雖然從實驗(一)的結果發現，只要是 2×2 的正方形，先行者一定輸。然而，實驗(二)的研究結果卻發現其他更大尺寸的正方形，先行者切給後行者的巧克力板的尺寸一定是長方形，後行者只要切 2×2 的正方形給先行者，先行者一定輸；但切其他尺寸的正方形給先行者，就會有輸 1 次的機會產生。
- 先行者切越多條給後行者，贏的機會似乎會較大。
- 那麼，先行者切給後行者的條數與贏的比率之間存著什麼樣的關係呢？因此我們設計了實驗(三)。

實驗(三)：巧克力紙板為不同尺寸的正方形時，先行者切的條數與遊戲獲勝的比率。

實驗步驟：

- 分析並計算實驗(一)和實驗(二)中，巧克力紙板為 2×2 、 3×3 、 4×4 、 5×5 及 6×6 等不同尺寸的正方形，在的不同給法中，先行者贏得遊戲的比率。

2. 玩的過程中，先行者若拿到後行者切出的更小尺寸的正方形巧克力紙板時，會以切最多條數的方式來切給後行者。例如先行者拿到 4×4 的正方形紙板，會以切 3 條的方式切給後行者，來增加自己獲勝的機會。

實驗(三)的結果：

表四：巧克力紙板為正方形時，先行者給的條數與遊戲獲勝的比率表

正方形尺寸	先行者切給後行者的條數		贏的比率
2×2	1 條		0
3×3	1 條	後行者有 2 種給法，先行者只有 1 種一定會贏。	$\frac{1}{2}$
	2 條	後行者有 3 種給法，先行者有 2 種一定會贏。	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ ，所以 3×3 的正方形，切給後行者 2 條，贏的比率最大。			
4×4	1 條	後行者有 3 種給法，先行者有 2 種一定會贏。	$\frac{2}{3}$
	2 條	後行者有 4 種給法，先行者有 3 種一定會贏。	$\frac{3}{4}$
	3 條	後行者有 7 種給法，先行者有 6 種一定會贏。(先行者拿到 3×3 的正方形會以切 2 條的方式切給後行者。)	$\frac{6}{7}$
$\frac{6}{7} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ ，所以 4×4 的正方形，切給後行者 3 條，贏的比率最大。			
5×5	1 條	後行者有 4 種給法，先行者有 3 種一定會贏。	$\frac{3}{4}$
	2 條	後行者有 5 種給法，先行者有 4 種一定會贏。	$\frac{4}{5}$
	3 條	後行者有 8 種給法，先行者有 7 種一定會贏。(先行者拿到 3×3 的正方形會以切 2 條的方式切給後行者。)	$\frac{7}{8}$
	4 條	後行者有 13 種給法，先行者有 12 種一定會贏。(先行者拿到 4×4 的正方形會以切 3 條的方式切給後行者。)	$\frac{12}{13}$
$\frac{12}{13} > \frac{7}{8} > \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$ ，所以 5×5 的正方形，先行者切給後行者 4 條，贏的比率最大。			
6×6	1 條	後行者有 5 種給法，先行者有 4 種一定會贏。	$\frac{4}{5}$
	2 條	後行者有 6 種給法，先行者有 5 種一定會贏。	$\frac{5}{6}$
	3 條	後行者有 9 種給法，先行者有 8 種一定會贏。(先行者拿到 3×3 的正方形會以切 2 條的方式切給後行者。)	$\frac{8}{9}$
	4 條	後行者有 14 種給法，先行者有 13 種一定會贏。(先行者拿到 4×4 的正方形會以切 3 條的方式切給後行者。)	$\frac{13}{14}$
	5 條	後行者有 21 種給法，先行者有 20 種一定會贏。(先行者拿到 5×5 的正方形會以切 4 條的方式切給後行者。)	$\frac{20}{21}$

$\frac{20}{21} > \frac{13}{14} > \frac{8}{9} > \frac{5}{6} > \frac{4}{5}$ ，所以 6×6 的正方形，先行者切給後行者 5 條，贏的比率最大。

表五：巧克力紙板為正方形時，先行者贏的比率與邊長 A 及條數 n 的關係

正方形的尺寸	給的條數 n	贏的比率	比率與邊長 A 及條數 n 的關係
2×2	1	0	數據太少，看不出關係。
3×3	1	$\frac{1}{2}$	切 2 條贏的比率的分母比切 1 條的分母增加 1，而分子會比分母少 1。
	2	$\frac{2}{3}$	
4×4	1	$\frac{2}{3}$	切 1、2、3 條贏的比率的分母與上一個分母之間會以 1、3 的數列增加，與切 1 條的比率的分母之間會以 1、4 的數列增加，而分子都會比分母少 1。
	2	$\frac{3}{4}$	
	3	$\frac{6}{7}$	
5×5	1	$\frac{3}{4}$	切 1、2、3、4 條贏的比率的分母與上一個分母之間會以 1、3、5 的數列增加，與切 1 條的比率的分母之間會以 1、4、9 的數列增加，而分子會比分母少 1。
	2	$\frac{4}{5}$	
	3	$\frac{7}{8}$	
	4	$\frac{12}{13}$	
6×6	1	$\frac{4}{5}$	切 1、2、3、4、5 條的比率的分母與上一個分母之間會以 1、3、5、7 的數列增加，與切 1 條的比率的分母之間會以 1、4、9、16 的數列增加，而分子會比分母少 1。
	2	$\frac{5}{6}$	
	3	$\frac{8}{9}$	
	4	$\frac{13}{14}$	
	5	$\frac{20}{21}$	

綜合以上分析歸納

$$\text{切 1 條贏的比率的分母} = A - 1 + 0 = A - 1 + 0^2 = A - 1 + (1 - 1)^2$$

$$\text{切 2 條贏的比率的分母} = A - 1 + 1 = A - 1 + 1^2 = A - 1 + (2 - 1)^2$$

$$\text{切 3 條贏的比率的分母} = A - 1 + 4 = A - 1 + 2^2 = A - 1 + (3 - 1)^2$$

$$\text{切 4 條贏的比率的分母} = A - 1 + 9 = A - 1 + 3^2 = A - 1 + (4 - 1)^2$$

$$\text{切 5 條贏的比率的分母} = A - 1 + 16 = A - 1 + 4^2 = A - 1 + (5 - 1)^2$$

⋮

$$\text{切 } n \text{ 條贏的比率的分母} = (A - 1) + (n - 1)^2$$

贏的比率的分子會比分母少 1，所以分子 $=(A-2)+(n-1)^2$ ，

因此我們假設切 n 條後贏得遊戲的比率的分母 $=(A-1)+(n-1)^2$ ，分子 $=(A-2)+(n-1)^2$ 。

實驗(三)的發現與討論：

1. 由表四的結果可知，巧克力紙版的正方形尺寸為 $A \times A$ 時，切的條數越多時，後行者可以切的情況越多種，先行者贏的次數越多。因此先行者切 $A-1$ 條給後行者，贏的比率較大。
2. 由表五的結果可知，我們發現先行者切給後行者 n 條後，贏的比率呈現出很有規律的變化。切 n 條贏的比率的分母與切 1 條贏的比率的分母會以 1、4、9、16 的數列增加，分母會比分母少 1。切 1 條贏的比率的分母 $=A-1$ ，所以我們假設當巧克力版的正方形尺寸為 $A \times A$ 時，先行者切 n 條給後行者後，贏得遊戲的比率的分母是 $(A-1)+(n-1)^2$ ，分子 $=(A-2)+(n-1)^2$ 。
3. 上述研究結果 2，是從上面表格的多個數據觀察，推論出一般化的公式，因此我們需再用巧克力紙板為任意一個尺寸大小(以 10×10 為例)的正方形驗證此公式是否正確。

實驗(四)：用巧克力紙板為 10×10 的正方形驗證上述的假設。

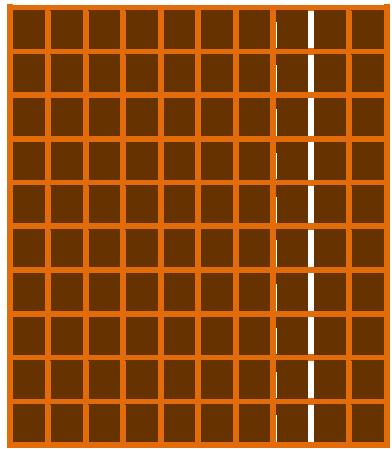
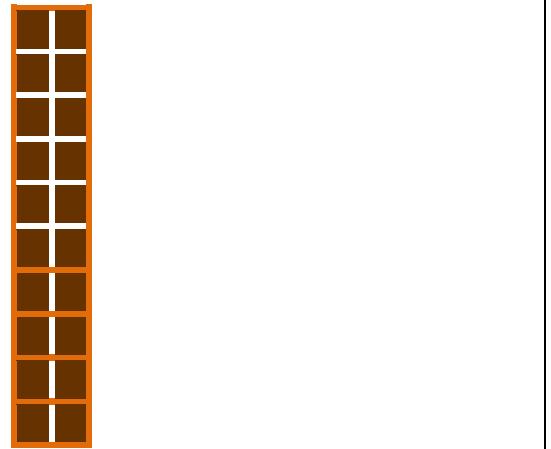
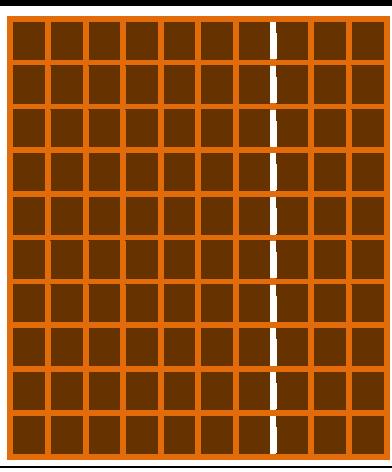
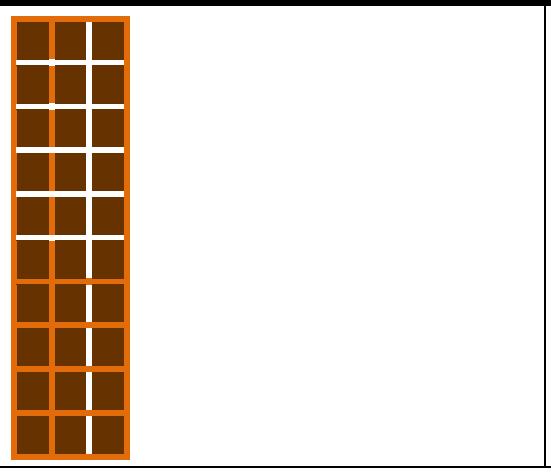
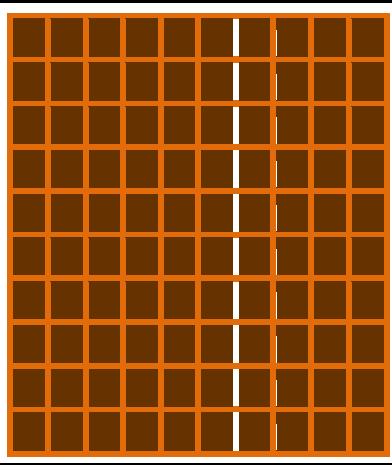
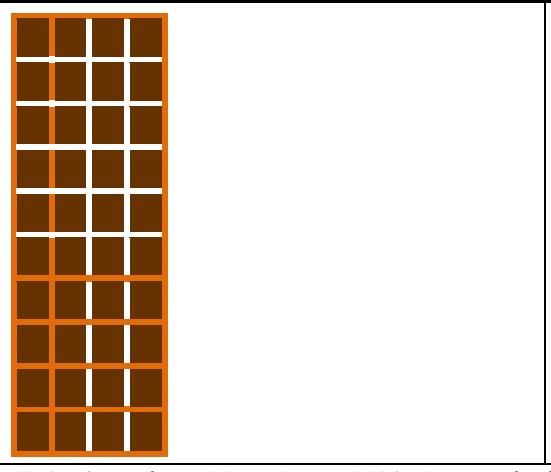
實驗步驟：

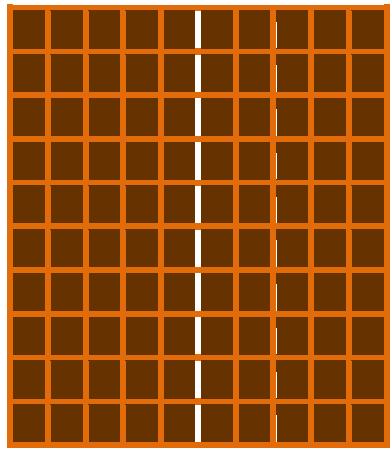
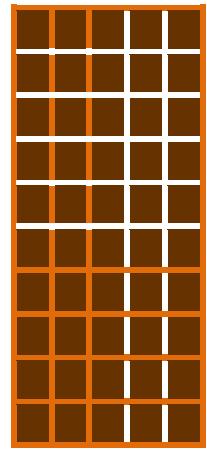
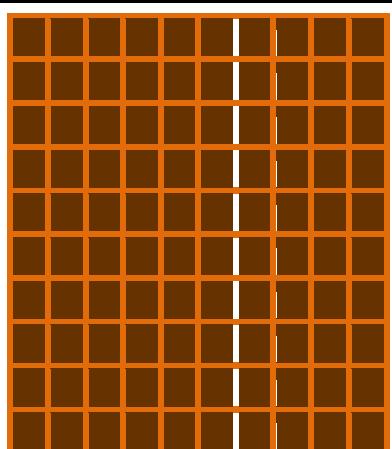
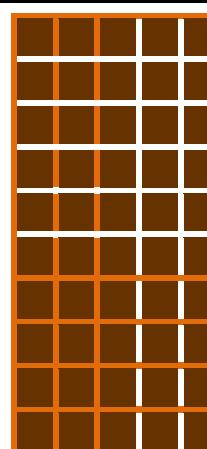
1. 在方格紙上，用色鉛筆畫出邊長 $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ 的正方形。
2. 先行者按照遊戲規則在方格紙上畫出後行者所有可能切出的情況，並計算出先行者切給後行者 6 條後，贏得遊戲的比率。

實驗(四)的結果：

表六：巧克力紙板為邊長 10cm 的正方形，巧克力切法與先行者輸贏的情況表

切的情況	先行者贏的比率
	$A=10, n=1$ 比率的分母 $=(10-1)+(1-1)^2$ $=9+0$ $=9$ 分子比分母少 1 $=8$ 所以切 1 條時， 贏的比率 $=\frac{8}{9}$
先行者給後行者 1 條	後行者共有 5 種切法 9 種給法，只有拿到 1×1 的正方形，先行者會輸，其他 8 種給法，先行者都會贏，贏的比率 $=\frac{8}{9}$ 。

		$A=10, n=2$ 比率的分母 $=(10-1)+(2-1)^2$ $=9+1$ $=10$ 分子比分母少 1 $=9$ 所以切 2 條時， 贏的比率 $=\frac{9}{10}$
先行者給後行者 2 條	後行者共有 6 種切法 10 種給法，只有拿到 2×2 的正方形，先行者會輸，其他 9 種給法，先行者都會贏，贏的比率 $=\frac{9}{10}$ 。	
		$A=10, n=3$ 比率的分母 $=(10-1)+(3-1)^2$ $=9+4$ $=13$ 分子比分母少 1 $=12$ 所以切 3 條時， 贏的比率 $=\frac{12}{13}$
先行者給後行者 3 條	後行者共有 6 種切法 11 種給法，拿到 3×3 的正方形，先行者會輸 1 次，贏 2 次，其他 10 種給法，先行者都會贏，贏的比率 $=\frac{12}{13}$ 。	
		$A=10, n=4$ 比率的分母 $=(10-1)+(4-1)^2$ $=9+9$ $=18$ 分子比分母少 1 $=17$ 所以切 4 條時， 贏的比率 $=\frac{17}{18}$
先行者給後行者 4 條	後行者共有 7 種切法 12 種給法，只有拿到 4×4 的正方形，先行者會輸 1 次，贏 6 次，其他 11 種給法，先行者都會贏，贏的比率 $=\frac{17}{18}$ 。	

			$ \begin{aligned} A &= 10, n = 5 \\ \text{比率的分母} \\ &= (10-1)+(5-1)^2 \\ &= 9+16 \\ &= 25 \\ \text{分子比分母少 1} \\ &= 24 \\ \text{所以切 2 條時，} \\ \text{贏的比率} \\ &= \frac{24}{25} \end{aligned} $
先行者給後行者 5 條	後行者共有 7 種切法 13 種給法，只有拿到 5x5 的正方形，先行者會輸 1 次，贏 12 次，其他 12 種給法，先行者都會贏，贏的比率 = $\frac{24}{25}$ 。		
			$ \begin{aligned} A &= 10, n = 6 \\ \text{比率的分母} \\ &= (10-1)+(6-1)^2 \\ &= 9+25 \\ &= 34 \\ \text{分子比分母少 1} \\ &= 33 \\ \text{所以切 6 條時，} \\ \text{贏的比率} \\ &= \frac{33}{34} \end{aligned} $
先行者給後行者 6 條	後行者共有 8 種切法 14 種給法，只有拿到 6x6 的正方形，先行者會輸 1 次，贏 20 次，其他 13 種給法，先行者都會贏，贏的比率 = $\frac{33}{34}$ 。		

實驗(四)的發現與討論：

- 由表六的結果可知，先行者切給後行者的條數越多，贏得遊戲的比率越大。
- 當巧克力紙板的正方形邊長為 $A\text{cm}$ ；先行者切給後行者 n 條後，贏得遊戲的比率的分母為 $(A-1)+(n-1)^2$ ，分子為 $(A-2)+(n-1)^2$ ，與我們的假設相符合。
- 巧克力紙板為正方形時，先行者會有輸 1 次的機會，那身為後行者時，是否就不會有輸的機會產生？因此我們設計了實驗(五)。

實驗(五)：巧克力紙板為邊長 $2\text{cm} \sim 4\text{cm}$ 的正方形時，後行者與遊戲獲勝的關係。

實驗步驟：

- 在方格紙上，用色鉛筆畫出邊長 $2\text{cm} \sim 4\text{cm}$ 的正方形。
- 後行者按照遊戲規則在方格紙上畫出先行者所有可能切出的情況。

實驗(五)的結果：

表七：邊長為 2cm~4cm 的正方形，巧克力切法與後行者輸贏的情況表

巧克力尺寸(cm)	切的情况	
2x2		
	贏。	
後行者只有 1 種給法，一定會贏。		
3x3		
	給 1 條的情況	給 2 條的情況
	贏	贏
先行者有 2 種給法，後行者只要切正方形給先行者一定會贏。		
4x4		
	給 1 條的情況	給 3 條的情況
	贏	贏
	給 2 條的情況	
	贏	
先行者有 3 種給法，後行者只要切正方形給先行者一定會贏。。		

實驗(五)的發現與討論：

- 由表七的結果可知，巧克力紙板為正方形時，先行者只能將正方形切出長方形給後行者，後行者只要切出正方形給先行者，後行者一定會贏先行者。
- 如果巧克力紙板的形狀是長方形，先行者與遊戲獲勝的關係又會是如何呢？因此我們設計了實驗(六)。

實驗(六)：巧克力紙板為寬 1cm~4cm 的長方形時，先行者與遊戲獲勝的關係。

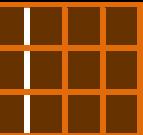
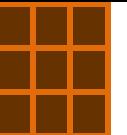
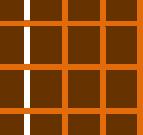
實驗步驟：

- 在方格紙上，用色鉛筆畫出寬為 1cm~4cm，長為其他長度的長方形，各 4 個。
- 先行者按照遊戲規則在方格紙上畫出後行者所有可能切出的情況。

實驗(六)的結果：

表八：寬為 1cm~4cm 的長方形，巧克力切法與先行者輸贏的情況表

巧克力紙板尺寸 (cm)		切的情況		遊戲結果
寬 1cm	1x2			先行者一定會贏
	1x3			
	1x4			
	1x5			
寬 2cm	2x3			先行者一定會贏
	2x4			
	2x5			
	2x6			

寬 3cm	3x4			先行者一定會贏
	3x5			
	3x6			
	3x7			
寬 4cm	4x5			先行者一定會贏
	4x6			
	4x7			
	4x8			

實驗(六)的發現與討論：

- 由表八的結果可知，當巧克力紙版為長方形，先行者只要將長方形的巧克力紙板切出正方形尺寸給後行者，先行者一定可以贏後行者。
- 那巧克力紙板為長方形時，身為後行者是否也一定都會贏？或是與正方形一樣會有輸的機會產生？因此我們設計了實驗(七)。

實驗(七)：巧克力紙板為寬 1cm~4cm 的長方形時，後行者與遊戲獲勝的關係。

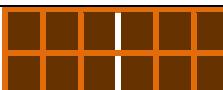
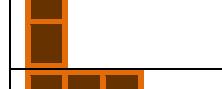
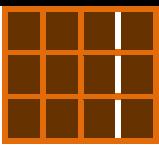
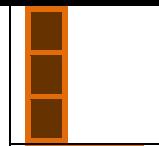
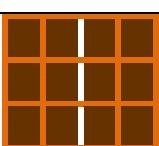
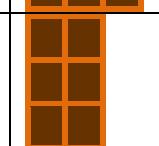
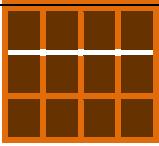
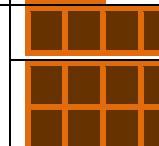
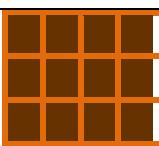
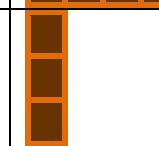
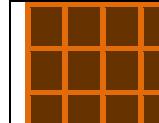
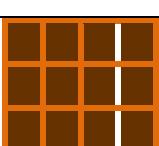
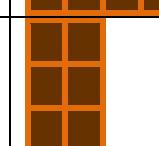
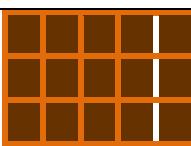
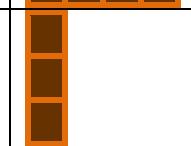
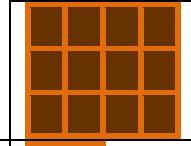
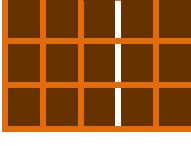
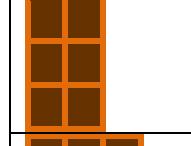
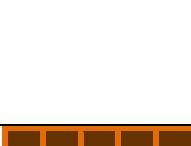
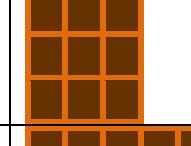
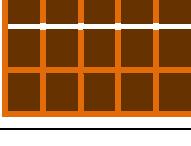
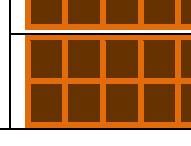
實驗步驟：

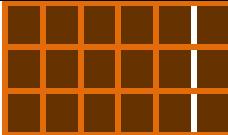
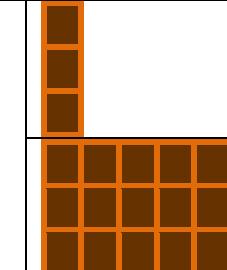
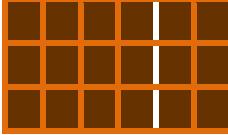
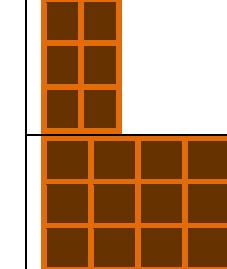
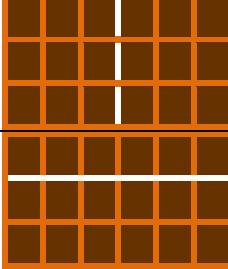
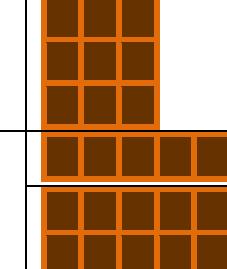
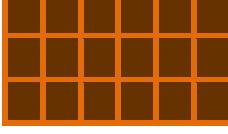
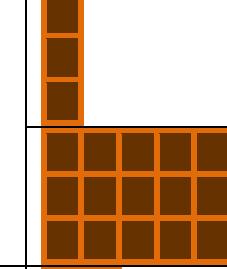
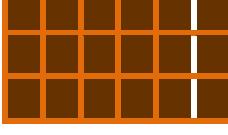
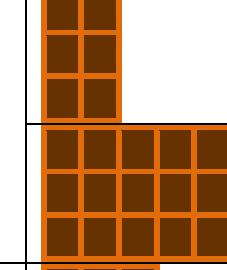
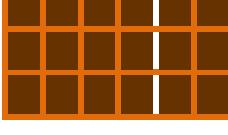
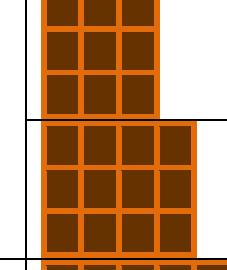
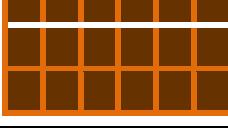
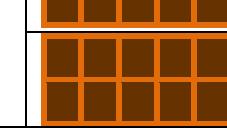
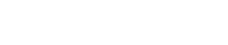
- 在方格紙上，用色鉛筆畫出寬為 1cm~4cm，長為其他長度的長方形，各 4 個。
- 後行者按照遊戲規則在方格紙上畫出先行者所有可能會切出的情況。

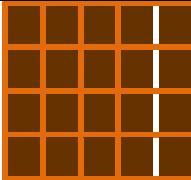
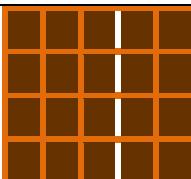
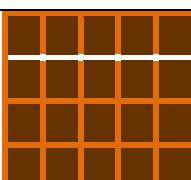
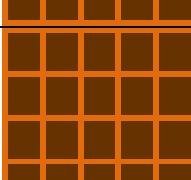
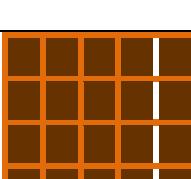
實驗(七)的結果：

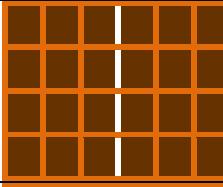
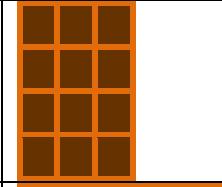
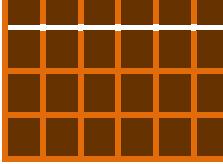
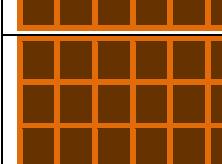
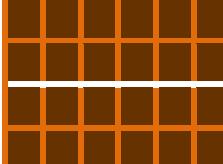
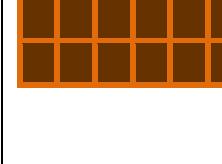
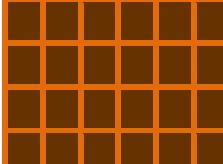
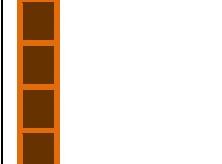
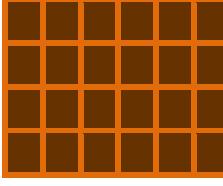
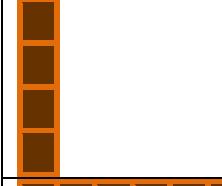
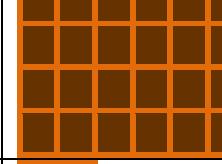
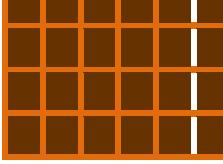
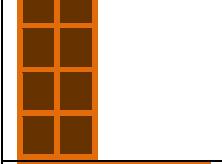
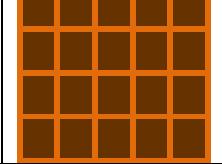
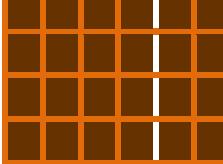
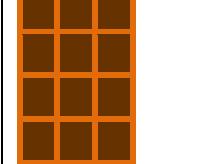
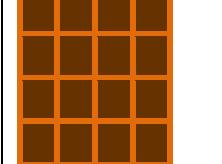
表九：寬為 1cm~4cm 的長方形，巧克力切法與後行者輸贏的情況表

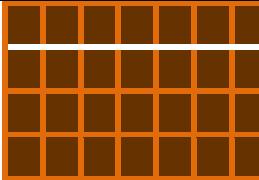
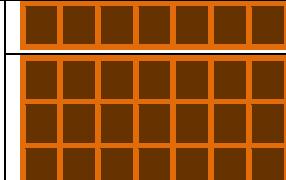
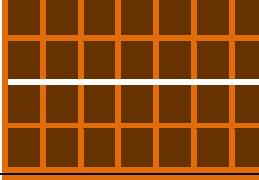
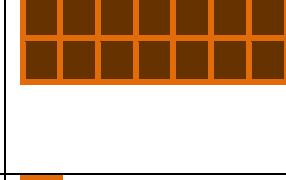
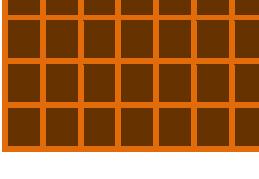
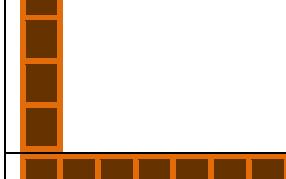
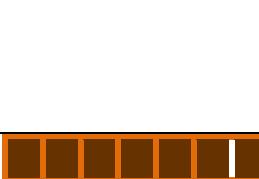
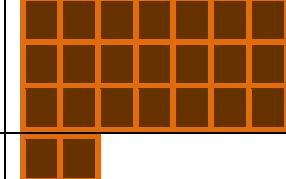
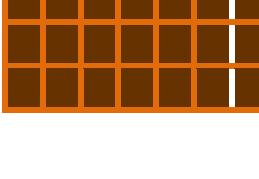
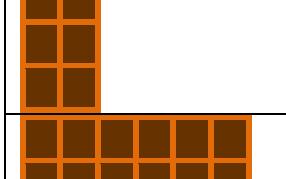
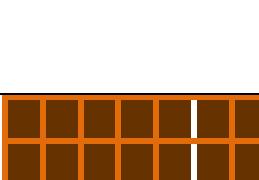
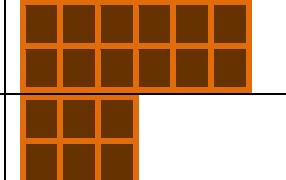
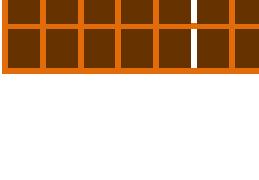
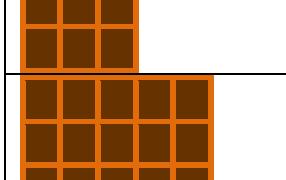
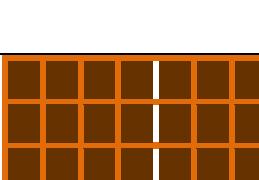
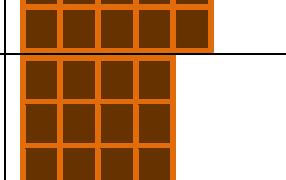
巧克力紙板尺寸 (cm)		切的情況	
寬 1cm	1x2		輸
	1x3		輸
			贏
	1x4		輸
			贏
			贏
			贏
	1x5		輸
			贏
			贏
			贏
寬 2cm	2x3		贏
			輸
			贏
	2x4		贏
			贏
			輸
			贏
	2x5		贏
			贏
			輸
			贏

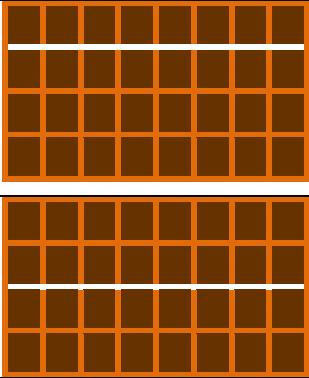
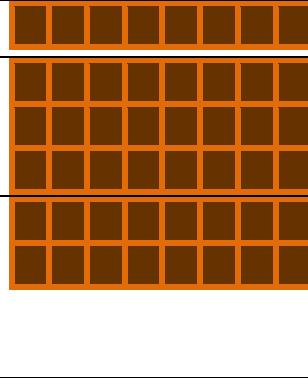
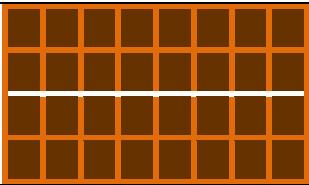
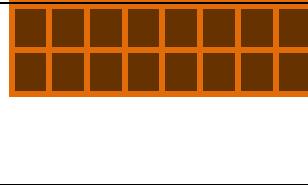
2x6	3x4			贏
				贏
				輸
				贏
				贏
				贏
寬 3cm	3x4			贏
				輸 1 次 贏 2 次
				贏
				贏
				贏
				贏
寬 3cm	3x5			贏
				贏
				輸 1 次 贏 2 次
				贏
				贏

	3x6			贏
				贏
				贏
				輸 1 次 贏 2 次
				贏
				贏
寬 3cm	3x7			贏
				贏
				贏
				輸 1 次 贏 2 次
				贏
				贏

寬 4cm	4x5			贏
				輸 1 次 贏 6 次
				贏
	4x6			贏
				贏
	4x6			贏
				輸 1 次 贏 6 次

寬 4cm	4x6			贏
				贏
				贏
				贏
	4x7			贏
				贏
				贏
				贏
				贏
				輸 1 次 贏 6 次

寬 4cm	4x7			贏
				贏
	4x8			贏
				贏
				贏
				贏
				贏
				輸 1 次 贏 6 次

寬 4cm	4x8			贏
				贏

實驗(七)的發現與討論：

- 由表九的結果可知，巧克力紙版為長方形，若先行者切出正方形給後行者，後行者會有輸 1 次的機會，而其他的切法，後行者都一定可以贏先行者。
- 身為後行者雖會有輸一次的機會，然而當長方形的尺寸越大時，先行者能切給後行者的情況越多，後行者能贏的次數就越多，贏得遊戲的比率就越大。
- 巧克力紙板的長方形尺寸與後行者贏的比率之間又存在著什麼關係呢？因此我們設計了實驗(八)。

實驗(八)：巧克力紙板尺寸為長方形，後行者與贏的比率的關係。

實驗步驟：

- 分析並計算實驗(七)中，寬為 1cm～4cm 的長方形的不同切法中，後行者可以贏得遊戲的比率。

實驗(八)的結果：

表十：巧克力紙板為長方形時，後行者與遊戲獲勝的比率表

長方形尺寸		切法	後行者贏的比率
寬 1cm	1x2	先行者一定只能切 1x1 一格	0
	1x3	先行者有 2 種給法，後行者只有 1 種一定會贏。	$\frac{1}{2}$
	1x4	先行者有 3 種給法，後行者有 2 種一定會贏。	$\frac{2}{3}$
	1x5	先行者有 4 種給法，後行者有 3 種一定會贏。	$\frac{3}{4}$
寬 2cm	2x3	先行者只有 3 種給法，後行者有 2 種一定會贏。	$\frac{2}{3}$
	2x4	先行者只有 4 種給法，後行者有 3 種一定會贏。	$\frac{3}{4}$
	2x5	先行者只有 5 種給法，後行者有 4 種一定會贏。	$\frac{4}{5}$

	2x6	先行者只有 6 種給法，後行者有 5 種一定會贏。	$\frac{5}{6}$
寬 3cm	3x4	先行者只有 5 種給法，後行者拿到 3x3 的正方形時，會輸 1 次，贏 2 次，有 6 種一定會贏。	$\frac{6}{7}$
	3x5	先行者只有 6 種給法，後行者拿到 3x3 的正方形時，會輸 1 次，贏 2 次，有 7 種一定會贏。	$\frac{7}{8}$
	3x6	先行者只有 7 種給法，後行者拿到 3x3 的正方形時，會輸 1 次，贏 2 次，有 8 種一定會贏。	$\frac{8}{9}$
	3x7	先行者只有 8 種給法，後行者拿到 3x3 的正方形時，會輸 1 次，贏 2 次，有 9 種一定會贏。	$\frac{9}{10}$
寬 4cm	4x5	玩家只有 7 種給法，後行者拿到 4x4 的正方形時，會輸 1 次，贏 6 次，有 12 種一定會贏。	$\frac{12}{13}$
	4x6	玩家只有 8 種給法，後行者拿到 4x4 的正方形時，會輸 1 次，贏 6 次，有 13 種一定會贏。	$\frac{13}{14}$
	4x7	玩家只有 9 種給法，後行者拿到 4x4 的正方形時，會輸 1 次，贏 6 次，有 14 種一定會贏。	$\frac{14}{15}$
	4x8	玩家只有 10 種給法，後行者拿到 4x4 的正方形時，會輸 1 次，贏 6 次，有 15 種一定會贏。	$\frac{15}{16}$

表十一：巧克力紙板為長方形時，寬 Acm 長 Bcm 的長方形與後行者贏的比率的關係表

長方形尺寸		贏的比率		比率與寬 A 及長 B 的關係
寬 1cm	1x2	0		數據太少，看不出關係。
	1x3	$\frac{1}{2}$	A=1，B=3 比率的分母= $1+3-2=2$	比率的分母從 2 開始，以 2、3、4 的數列增加，且分子比分母少 1。
	1x4	$\frac{2}{3}$	A=1，B=4 比率的分母= $1+4-2=3$	分母是先行者針對長方形尺寸能切出的種類數量= $A+B-2$
	1x5	$\frac{3}{4}$	A=1，B=5 比率的分母= $1+5-2=4$	
寬 2cm	2x3	$\frac{2}{3}$	A=2，B=3 比率的分母= $2+3-2=3$	比率的分母從 3 開始，以 3、4、5、6 的數列增加，且分子比分母少 1。
	2x4	$\frac{3}{4}$	A=2，B=4 比率的分母= $2+4-2=4$	分母是先行者針對長方形尺寸能切出的種類數量= $A+B-2$
	2x5	$\frac{4}{5}$	A=2，B=5 比率的分母= $2+5-2=5$	
	2x6	$\frac{5}{6}$	A=2，B=6 比率的分母= $2+6-2=6$	
寬 3cm	3x4	$\frac{6}{7}$	A=3，B=4 比率的分母= $3+(3-2)+4=7$	比率的分母從 7 開始，以 7、8、9、10 的數列增加，且分子比分母少 1。

	3x5	$\frac{7}{8}$	A=3, B=5 比率的分母= $3 \times (3-2) + 5 = 8$	分母是先行者針對長方形尺寸能切出的種類數量(A+B-2)扣除拿到以寬為邊長的正方形的這1種情況後，再加上拿到以3為邊長的正方形切2條的種類數量(A-1)+(A-1-1) ² 因此(A+B-2-1)+[(A-1)+(A-1-1) ²] =(A+B-3)+(A-1)+(A-2) ² =(A+B-2)+(A-1)+A ² -4A+4 =A ² -2A+B=Ax(A-2)+B。
寬 4cm	4x5	$\frac{12}{13}$	A=4, B=5 比率的分母= $4 \times (4-2) + 5 = 13$	比率的分母從13開始，以13、14、15、16的數列增加，且分子比分母少1。
	4x6	$\frac{13}{14}$	A=4, B=6 比率的分母= $4 \times (4-2) + 6 = 14$	分母同樣是是先行者針對長方形尺寸能切出的種類數量(A+B-2)扣除拿到以寬為邊長的正方形的這1種情況後，再加上拿到以4為邊長的正方形切3條的種類數量(A-1)+(A-1-1) ²
	4x7	$\frac{14}{15}$	A=4, B=7 比率的分母= $4 \times (4-2) + 7 = 15$	因此寬為A長為B長方形，後行者贏的比率的分母 =Ax(A-2)+B。
	4x8	$\frac{15}{16}$	A=4, B=8 比率的分母= $4 \times (4-2) + 8 = 16$	
長方形的寬為A，長為B， $A \leq 2$ 時，後行者可以贏的比率的分母= $A+B-2$ ； $A > 2$ 時，後行者可以贏的比率的分母= $Ax(A-2)+B$ 。				

實驗(八)的發現與討論：

- 由表十一的結果可知，巧克力紙板的長方形的寬固定，長方形的長越長時，先行者的切法越多種，後行者贏的比率會越大。
- 身為後行者，只有當先行者切出正方形給後行者時，後行者會有輸1次的機會，而此時若長方形的寬為A，長為B， $A \leq 2$ 時，後行者可以贏的比率的分母= $A+B-2$ ； $A > 2$ 時，後行者可以贏的比率的分母= $Ax(A-2)+B$ 。

肆、討論

一、本研究是在研究切巧克力紙版的遊戲獲勝的訣竅，在研究中發現不管是玩長方形或是正

方形總是會有輸 1 次的情況產生。而輸的這 1 次都是拿到 2×2 的正方形後就會輸了，原來是因為大尺寸的巧克力紙板會越切越小，最終還是會有 1 種情況是切成 2×2 的正方形，如此一來，就會因為拿到 2×2 而輸了。

二、因此此遊戲的獲勝訣竅如下：



所以玩正方形尺寸的巧克力紙版，身為後行者，能運用贏的策略來贏得遊戲；身為先行者，要能選擇分散風險的方式來提升贏的機會。反之，玩長方形尺寸的巧克力紙版，身為先行者，能運用贏的策略來贏得遊戲；身為後行者，要能選擇分散風險的方式來提升贏的機會。

三、本研究主要的貢獻是探討數學遊戲贏的策略，可以利用此研究中遊戲輸贏的邏輯性或策略去設計桌遊或遊戲 app，讓數學變得更有趣、更實用。此外數學遊戲也能培養我們的觀察數據、找規律性、提出假設、驗證假設、及系統性思考，讓我們在未來遇到問題時，能做出更理性的選擇。

伍、結論

- 一、巧克力紙板尺寸為正方形時，先行者只能將正方形的巧克力紙板切成長方形給後行者，後行者只要切出正方形給先行者，就一定會贏得遊戲。
- 二、當巧克力紙板尺寸為正方形時，先行者雖然會有輸的機會，但切越多條數給後行者，贏得遊戲的比率就越大。若巧克力紙板的正方形尺寸的邊長為 A ， n 為切給後行者的條數，先行者贏得遊戲的比率的分母為 $(A-1)+(n-1)2$ ，分子為 $(A-2)+(n-1)2$ 。
- 三、巧克力紙板為長方形時，先行者只要將長方形的巧克力紙板切出正方形尺寸給後行者，就一定會贏得遊戲。
- 四、當巧克力紙板為長方形時，後行者雖然會有輸的機會，但若長方形的尺寸越大，後行者贏得遊戲的比率越大。長方形的寬為 A ，長為 B ， $A \leq 2$ 時，後行者可以贏的比率的分母 = $A+B-2$ ； $A > 2$ 時，後行者可以贏的比率的分母 = $A \times (A-2) + B$ 。
- 五、此遊戲要獲勝的關鍵是「正方形」，不管巧克力紙板的形狀或尺寸為何，先行者或後行者只要能切出正方形尺寸給對方，就一定可以贏得遊戲。

陸、參考資料及其他

- 一、數學王國大冒險 4 動手又動腦的數學，作者：櫻井進、智慧鳥，出版社：五南圖書出版股份有限公司

【評語】080412

賽局的題型，想贏就得留下方塊給對方，對方收到正方也必定切為非正方。如此一來一往，最後對方一定收下 1×1 的最後一塊。賽局的必贏策略極難找，但是一旦找到卻往往不難證明。本研究透過大量實驗觀察、再歸納、然後得出結論，但數學證明的書寫略嫌不足。正如標題 ”有正就贏” ，送給對手正方形，對手必然切為非正方形，然後自己又可切為正方形；結論看似簡單，但探討研究時卻要一番折磨。本題也是 Nim game 的最簡單形式 ”兩堆石頭選堆任意拿，但不能拿光光，面對 $(1, 1)$ 者輸(PS. 並不是拿完才結束)”。Nim game 有極多的變形，作為科展題目，變形老問題的要點是：以前好像沒人想過可以這樣變化，但是又不能變到完全做不出來。

作品海報



摘要

本研究的目的是探討巧克力遊戲，切到剩1塊巧克力，對方無法再切時，就贏得遊戲，巧克力紙板的形狀及尺寸與遊戲獲勝的關係。

研究結果發現：巧克力紙板是正方形，後行者切出正方形給先行者，就會贏得遊戲。若正方形的邊長為A，先行者切給後行者n條，先行者贏的比率的分母為 $(A-1) + (n-1)^2$ ，分子為 $(A-2) + (n-1)^2$ 。

巧克力紙板是寬為A，長為B的長方形，先行者切出正方形給後行者，就會贏得遊戲。若A≤2，後行者贏的比率的分母=A+B-2；若A>2，後行者贏的比率的分母=A×(A-2)+B。

此遊戲獲勝的關鍵是「正方形」，先行者或後行者只要能切出正方形尺寸給對方，就會贏得遊戲。

壹、前言

一本書中有一個切巧克力的遊戲，當對方拿到只剩1塊巧克力，而無法再切時，你就贏了。玩 2×2 的正方形巧克力紙板時，不管怎麼玩，先行者總是輸。但玩其他更大尺寸的正方形，我們發現先行者有機會贏，因此我們很好奇，先行者或後行者贏得遊戲的訣竅是什麼？不同形狀的巧克力紙板，先行者或後行者，該如何玩才能提高贏得遊戲的機會？輸贏機會的問題探究將利用教科書有關「比率」概念。因此我們想探討巧克力紙板的形狀與尺寸、玩家誰先出手這些變因，如何影響遊戲的輸贏？因此我們將探究以下兩個研究問題：

一、巧克力紙板形狀與尺寸與遊戲獲勝的關係為何？

二、遊戲的先行者或後行者與遊戲獲勝的關係為何？

貳、研究設備及器材

一、研究器材：

方格紙、色鉛筆。

二、遊戲規則說明：

兩人猜拳，贏的人先行，用剪刀沿著一個分成數塊的巧克力板上剪成2份，剪的時候，中間不能轉彎，之後再將其中一份給對方。對方也用剪刀將拿到的巧克力板剪成2份，再拿其中一份給對方，如此輪流，直到對方只剩1塊，無法再將巧克力剪成2份時，即為贏家。

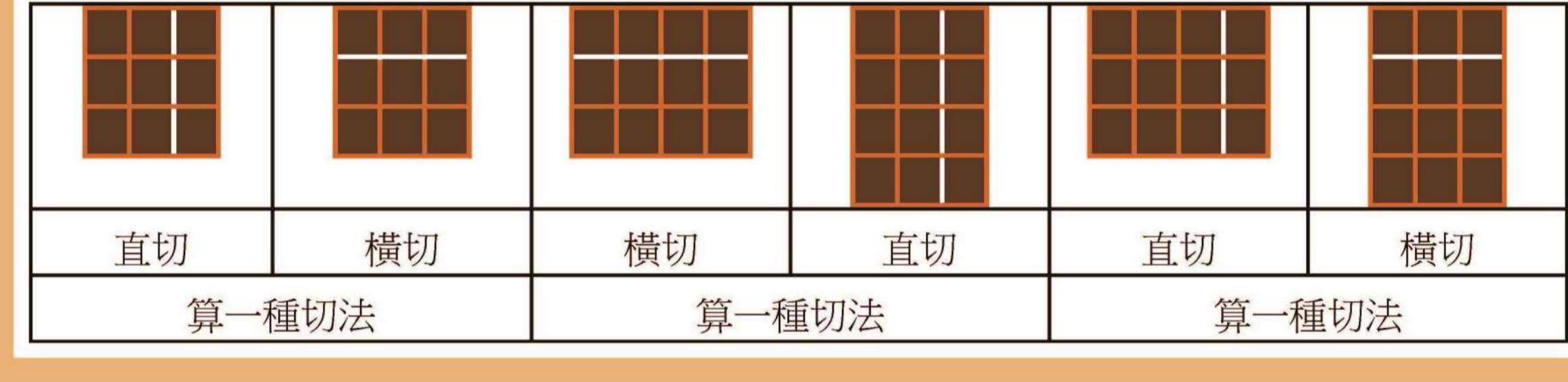
三、名詞解釋：

(一)先行者：遊戲中第一個先切巧克力的人。

(二)後行者：遊戲中第二個切巧克力的人。

(三)操作性定義：巧克力紙板放置橫向的縱切與放置縱向的橫切是視為同一種切法。

如下圖所示，若切出的條數是相同的，則是同一種切法。



三、研究過程或方法

本實驗研究的變項包含

(一)不同尺寸的正方形大小，先行者與遊戲獲勝的關係(請見實驗一~實驗四)

(二)不同尺寸的正方形大小，後行者與遊戲獲勝的關係(請見實驗五)

(三)不同尺寸的長方形大小，先行者與遊戲獲勝的關係(請見實驗六)

(四)不同尺寸的長方形大小，後行者與遊戲獲勝的關係(請見實驗七~實驗八)

實驗(一)：巧克力紙板為邊長 $2\text{cm} \sim 4\text{cm}$ 的正方形時，先行者與遊戲獲勝的關係。

實驗步驟：

1. 在方格紙上，用色鉛筆畫出邊長 $2\text{cm} \sim 4\text{cm}$ 的正方形。

2. 先行者按照遊戲規則在方格紙上畫出後行者所有可能切出的情況。

實驗(一)的結果：

表一：巧克力尺寸為邊長 $2\text{cm} \sim 4\text{cm}$ 的正方形，巧克力切法與先行者輸贏的情況表

巧克力尺寸(cm)	切的情況					
2x2						
						輸。
先行者只有1種給法，無法贏後行者。						
3x3						
給1條的情況						
4x4						
給2條的情況						
5x5						
給3條的情況						
6x6						

實驗(一)的發現與討論：

- 由表一的結果可知，邊長 2×2 的正方形，先行者一定會輸。
- 巧克力紙板為邊長 3×3 的正方形，切給後行者2條時，贏的次數較多，贏的機會較大。
- 巧克力紙板為邊長 4×4 的正方形，切給後行者3條時，贏的次數較多，贏的機會較大。
- 正方形的巧克力紙板，先行者切給後行者的條數越多，贏得遊戲的機會越大嗎？因此我們設計了實驗(二)。

實驗(二)：巧克力紙板為邊長 $5\text{cm} \sim 6\text{cm}$ 的正方形時，先行者與遊戲獲勝的關係。

實驗步驟：

1. 在方格紙上，用色鉛筆畫出邊長 $5\text{cm} \sim 6\text{cm}$ 的正方形。

2. 先行者遊戲規則在方格紙上畫出後行者所有可能切出的情況。

實驗(二)的結果：

表二：巧克力紙板為邊長 5cm 的正方形，巧克力切法與先行者輸贏的情況表

紙板尺寸(cm)	切的情況					
	給1條的情況			給4條的情況		
5x5						
	輸	贏	贏	贏	贏	贏
給4條的情況						
	贏	贏6次	輸1次	贏	贏	贏
給2條的情況						
	贏	贏	贏	輸	贏	
給3條的情況						
	贏	贏	贏	贏	贏	贏2次

表三：巧克力紙板為邊長 6cm 的正方形，巧克力切法與先行者輸贏的情況表

紙板尺寸(cm)	切的情況					
	給1條的情況			給5條的情況		
6x6						
	輸	贏	贏	贏	贏	贏
給5條的情況						
	贏	贏12次	輸1次	贏	贏	贏

3x4		先行者一定會贏
3x5		
3x6		
3x7		
寬 3cm		
4x5		先行者一定會贏
4x6		
4x7		
4x8		
寬 4cm		

實驗(六)的發現與討論：

- 由表八的結果可知，當巧克力紙板為長方形，先行者只要將長方形的巧克力紙板切出正方形尺寸給後行者，先行者一定可以贏後行者。
- 那巧克力紙板為長方形時，身為後行者是否也一定都會贏？或是與正方形一樣會有輸的機會產生？因此我們設計了實驗(七)。

實驗(七)：巧克力紙板為寬1cm~4cm的長方形時，後行者與遊戲獲勝的關係。

實驗步驟：

- 在方格紙上，用色鉛筆畫出寬為1cm~4cm，長為其他長度的長方形，各4個。
- 後行者按照遊戲規則在方格紙上畫出先行者所有可能會切出的情況。

實驗(七)的結果：

表九：寬為1cm~4cm的長方形，巧克力切法與後行者輸贏的情況表

巧克力紙板尺寸 (cm)	切的情況		輸
	1x2	1x3	
寬 1cm			輸
			贏
			輸
			贏
			輸
			贏
			贏
			贏
			贏
			贏
寬 2cm			贏
			輸
			贏
			贏
			輸
			贏
			贏
			輸
			贏
			贏
寬 3cm			贏
			輸 1次 贏 2次
			贏
			贏
			贏
			輸 1次 贏 2次
			贏
			贏
			贏
			贏
寬 3cm			贏
			贏
			贏
			輸 1次 贏 2次
			贏
			贏
			贏
			贏
			贏
			贏

實驗(七)的發現與討論：

- 由表九的結果可知，巧克力紙板為長方形，若先行者切出正方形給後行者，後行者會有輸1次的機會，而其他的切法，後行者都一定可以贏先行者。
- 身為後行者雖會有輸一次的機會，然而當長方形的尺寸越大時，先行者能切給後行者的情況越多，後行者能贏的次數就越多，贏得遊戲的比率就越大。
- 巧克力紙板的長方形尺寸與後行者贏的比率之間又存在著什麼關係呢？因此我們設計了實驗(八)。

實驗(八)：巧克力紙板尺寸為長方形，後行者與贏的比率的關係。

實驗步驟：

- 分析並計算實驗(七)中，寬為1cm~4cm的長方形的不同切法中，後行者可以贏得遊戲的比率。

實驗(八)的結果：

表十：巧克力紙板為長方形時，後行者與遊戲獲勝的比率表

長方形尺寸	切法	後行者贏的比率
寬 1cm	1x2 先行者一定只能切1x1一格	0
	1x3 先行者有2種給法，後行者只有1種一定會贏。	$\frac{1}{2}$
	1x4 先行者有3種給法，後行者有2種一定會贏。	$\frac{2}{3}$
	1x5 先行者有4種給法，後行者有3種一定會贏。	$\frac{3}{4}$
寬 2cm	2x3 先行者只有3種給法，後行者有2種一定會贏。	$\frac{2}{3}$
	2x4 先行者只有4種給法，後行者有3種一定會贏。	$\frac{3}{4}$
	2x5 先行者只有5種給法，後行者有4種一定會贏。	$\frac{4}{5}$
	2x6 先行者只有6種給法，後行者有5種一定會贏。	$\frac{5}{6}$
寬 3cm	3x4 先行者只有5種給法，後行者拿到3x3的正方形時，會輸1次，贏2次，有6種一定會贏。	$\frac{6}{7}$
	3x5 先行者只有6種給法，後行者拿到3x3的正方形時，會輸1次，贏2次，有7種一定會贏。	$\frac{7}{8}$
	3x6 先行者只有7種給法，後行者拿到3x3的正方形時，會輸1次，贏2次，有8種一定會贏。	$\frac{8}{9}$
	3x7 先行者只有8種給法，後行者拿到3x3的正方形時，會輸1次，贏2次，有9種一定會贏。	$\frac{9}{10}$
寬 4cm	4x5 輸 1次 贏 6次	
	4x6 輸 1次 贏 6次	
	4x7 輸 1次 贏 6次	
	4x8 輸 1次 贏 6次	

表十一：巧克力紙板為長方形時，寬Acm長Bcm的長方形與後行者贏的比率的關係表

長方形尺寸	贏的比率	比率與寬A及長B的關係
寬 1cm	1x2 0	數據太少，看不出關係。
	1x3 $\frac{1}{2}$	比率的分母從2開始，以2、3、4的數列增加，且分子比分母少1。
	1x4 $\frac{2}{3}$	分子是先行者針對長方形尺寸能切出的種類數量=A+B-2
	1x5 $\frac{3}{4}$	比率的分母=1+5-2=4
寬 2cm	2x3 $\frac{2}{3}$	比率的分母從3開始，以3、4、5、6的數列增加，且分子比分母少1。
	2x4 $\frac{3}{4}$	分子是先行者針對長方形尺寸能切出的種類數量=A+B-2
	2x5 $\frac{4}{5}$	比率的分母=2+4-2=4
	2x6 $\frac{5}{6}$	比率的分母=2+6-2=6
寬 3cm	3x4 $\frac{6}{7}$	比率的分母從7開始，以7、8、9、10的數列增加，且分子比分母少1。
	3x5 $\frac{7}{8}$	分子是先行者針對長方形尺寸能切出的種類數量(A+B-2)+1
	3x6 $\frac{8}{9}$	比率的分母=3x(3-2)+5=8
	3x7 $\frac{9}{10}$	因此(A+B-2)+1+(A-1)+(A-1-1)²=(A+B-3)+(A-1)+(A-2)²=10=(A+B-2)+(A-1)+A²-4A+4=A²-2A+B=Ax(A-2)+B。
寬 4cm	4x5 $\frac{12}{13}$	比率的分母從13開始，以13、14、15、16的數列增加，且分子比分母少1。
	4x6 $\frac{13}{14}$	分子同樣是先行者針對長方形尺寸能切出的種類數量(A+B-2)扣除拿到以寬為邊長的正方形的這1種情況後，再加上拿到以3為邊長的正方形切2條的種類數量(A-1)+(A-1-1)²
	4x7 $\frac{14}{15}$	=10=(A+B-3)+(A-1)+(A-2)²=15=(A+B-2)+(A-1)+A²-4A+4=A²-2A+B=Ax(A-2)+B。
	4x8 $\frac{15}{16}$	因此寬為A長為B長方形，後行者贏的比率的分母=Ax(A-2)+B。

實驗(八)的發現與討論：

- 由表十一的結果可知，巧克力紙板的長方形的寬固定，長方形的長越長時，先行者的切法越多種，後行者贏的比率會越大。
- 身為後行者，只有當先行者切出正方形給後行者時，後行者會有輸1次的機會，而此時若長方形的寬為A，長為B，A≤2時，後行者可以贏的比率的分母=A+B-2；A>2時，後行者可以贏的比率的分母=A×(A-2)+B。

肆、討論

- 本研究是在研究切巧克力紙版的遊戲獲勝的訣竅，在研究中發現不管是玩長方形或是正方形總是會有輸1次的情況產生。而輸的這1次都是拿到2×2的正方形後就會輸了，原來是因為大尺寸的巧克力紙板會越切越小，最終還是會有1種情況是切成2×2的正方形，如此一來，就會因為拿到2×2而輸了。

二、因此此遊戲的獲勝訣竅如下：

- 先行者 → 切最多條數給對方，分散輸的風險。
- 後行者 → 切出正方形給對方，一定會贏。

- 長方形 → 先行者 → 切出正方形給對方，一定會贏。
- 長方形 → 後行者 → 玩大尺寸的長方形，分散輸的風險。

所以玩正方形尺寸的巧克力紙版，身為後行者，能運用贏的策略來贏得遊戲；身為先行者，要能選擇分散風險的方式來提升贏的機會。反之，玩長方形尺寸的巧克力紙版，身為先行者，能運用贏的策略來贏得遊戲；身為後行者，要能選擇分散風險的方式來提升贏的機會。

- 本研究主要的貢獻是探討數學遊戲贏的策略，可以利用此研究中遊戲輸贏的邏輯性或策略去設計桌遊或遊戲app，讓數學變得更有趣、更實用。此外數學遊戲也能培養我們的觀察數據、找規律性、提出假設、驗證假設、及系統性思考，讓我們在未來遇到問題時，能做出更理性的選擇。

伍、結論

- 巧克力紙板尺寸為正方形時，先行者只能將正方形的巧克力紙板切成長方形給後行者，後行者只要切出正方形給先行者，就一定會贏得遊戲。
- 當巧克力紙板尺寸為正方形時，先行者雖然會有輸的機會，但切越多條數給後行者，贏得遊戲的比率就越大。若巧克力紙板的正方形尺寸的邊長為A，n為切給後行者的條數，先行者贏得遊戲的比率的分母為(A-1)+(n-1)²，分子為(A-2)+(n-1)²。
- 巧克力紙板為長方形時，先行者只要將長方形的巧克力紙板切出正方形尺寸給後行者，就一定會贏得遊戲。
- 當巧克力紙板為長方形時，後行者雖然會有輸的機會，但若長方形的尺寸越大，後行者贏得遊戲的比率越大。長方形的寬為A，長為B，A≤2時，後行者可以贏的比率的分母=A+B-2；A>2時，後行者可以贏的比率的分母=A×(A-2)+B。
- 此遊戲要獲勝的關鍵是「正方形」，不管巧克力紙板的形狀或尺寸為何，先行者或後行者只要能切出正方形尺寸給對方，就一定可以贏得遊戲。

陸、參考資料及其他

- 數學王國大冒險4動手又動腦的數學，作者：櫻井進、智慧鳥，出版社：五南圖書出版股份有限公司

表五：巧克力紙板為正方形時，先行者贏的比率與邊長A及條數n的關係

正方形的尺寸	給的條數n	贏的比率	比率與邊長A及條數n的關係
2x2	1	0	數據太少，看不出關係。
3x3	1	$\frac{1}{2}$	切2條贏的比率的分母比切1條的分母增加1，而分子會比分母少1。
	2	$\frac{2}{3}$	
4x4	1	$\frac{2}{3}$	切1、2、3條贏的比率的分母與上一個分母之間會以1、3的數列增加，與切1條的比率的分母之間會以1、4的數列增加，而分子都會比分母少1。
	2	$\frac{3}{4}$	
	3	$\frac{6}{7}$	
5x5	1	$\frac{3}{4}$	切1、2、3、4條贏的比率的分母與上一個分母之間會以1、3、5的數列增加，與切1條的比率的分母之間會以1、4、9的數列增加，而分子會比分母少1。
	2	$\frac{4}{5}$	
	3	$\frac{7}{8}$	
	4	$\frac{12}{13}$	
6x6	1	$\frac{4}{5}$	切1、2、3、4、5條的比率的分母與上一個分母之間會以1、3、5、7的數列增加，與切1條的比率的分母之間會以1、4、9、16的數列增加，而分子會比分母少1。
	2	$\frac{5}{6}$	
	3	$\frac{8}{9}$	
	4	$\frac{13}{14}$	
	5	$\frac{20}{21}$	

綜合以上分析歸納

$$\text{切1條贏的比率的分母} = A - 1 + 0 = A - 1 + 0^2 = A - 1 + (1 - 1)^2$$

$$\text{切2條贏的比率的分母} = A - 1 + 1 = A - 1 + 1^2 = A - 1 + (2 - 1)^2$$

$$\text{切3條贏的比率的分母} = A - 1 + 4 = A - 1 + 2^2 = A - 1 + (3 - 1)^2$$

$$\text{切4條贏的比率的分母} = A - 1 + 9 = A - 1 + 3^2 = A - 1 + (4 - 1)^2$$

$$\text{切5條贏的比率的分母} = A - 1 + 16 = A - 1 + 4^2 = A - 1 + (5 - 1)^2$$

$$\text{切n條贏的比率的分母} = (A - 1) + (n - 1)^2$$

贏的比率的分子會比分母少1，所以分子 = $(A - 2) + (n - 1)^2$ ，

因此我們假設切n條後贏得遊戲的比率的分母 = $(A - 1) + (n - 1)^2$ ，分子 = $(A - 2) + (n - 1)^2$ 。

實驗(三)的發現與討論：

- 由表四的結果可知，巧克力紙板的正方形尺寸為 $A \times A$ 時，切的條數越多時，後行者可以切的情況越多種，先行者贏的次數越多。因此先行者切 $A - 1$ 條給後行者，贏的比率較大。
- 由表五的結果可知，我們發現先行者切給後行者n條後，贏的比率呈現出很有規律的變化。切n條贏的比率的分母與切1條贏的比率的分母會以1、4、9、16的數列增加，分母會比分母少1。切1條贏的比率的分母 = $A - 1$ ，所以我們假設當巧克力版的正方形尺寸為 $A \times A$ 時，先行者切n條給後行者後，贏得遊戲的比率的分母是 $(A - 1) + (n - 1)^2$ ，分子 = $(A - 2) + (n - 1)^2$ 。
- 上述研究結果2，是從上面表格的多個數據觀察，推論出一般化的公式，因此我們需再用巧克力紙板為任意一個尺寸大小(以 10×10 為例)的正方形驗證此公式是否正確。

實驗(四)：用巧克力紙板為 10×10 的正方形驗證上述的假設。

實驗步驟：

- 在方格紙上，用色鉛筆畫出邊長 $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ 的正方形。
- 先行者按照遊戲規則在方格紙上畫出後行者所有可能切出的情況，並計算出先行者切給後行者6條後，贏得遊戲的比率。

實驗(四)的結果：

表六：巧克力紙板為邊長 10cm 的正方形，巧克力切法與先行者輸贏的情況表

切的情況		先行者贏的比率
		$A = 10, n = 1$ 比率的分母 $= (10 - 1) + (1 - 1)^2$ $= 9 + 0$ $= 9$ 分子比分母少1 $= 8$ 所以切1條時， 贏的比率 = $\frac{8}{9}$
		後行者共有5種切法9種給法，只有拿到 1×1 的正方形，先行者會輸，其他8種給法，先行者都會贏，贏的比率 = $\frac{8}{9}$ 。
		$A = 10, n = 2$ 比率的分母 $= (10 - 1) + (2 - 1)^2$ $= 9 + 1$ $= 10$ 分子比分母少1 $= 9$ 所以切2條時， 贏的比率 $= \frac{9}{10}$
		後行者共有6種切法10種給法，只有拿到 2×2 的正方形，先行者會輸，其他9種給法，先行者都會贏，贏的比率 = $\frac{9}{10}$ 。
		$A = 10, n = 3$ 比率的分母 $= (10 - 1) + (3 - 1)^2$ $= 9 + 4$ $= 13$ 分子比分母少1 $= 12$ 所以切3條時， 贏的比率 $= \frac{12}{13}$
		後行者共有6種切法11種給法，拿到 3×3 的正方形，先行者會輸1次，贏2次，其他10種給法，先行者都會贏，贏的比率 = $\frac{12}{13}$ 。
		$A = 10, n = 4$ 比率的分母 $= (10 - 1) + (4 - 1)^2$ $= 9 + 9$ $= 18$ 分子比分母少1 $= 17$ 所以切4條時， 贏的比率 $= \frac{17}{18}$
		後行者共有7種切法12種給法，只有拿到 4×4 的正方形，先行者會輸1次，贏6次，其他11種給法，先行者都會贏，贏的比率 = $\frac{17}{18}$ 。

		$A = 10, n = 5$ 比率的分母 $= (10 - 1) + (5 - 1)^2$ $= 9 + 16$ $= 25$ 分子比分母少1 $= 24$ 所以切2條時， 贏的比率 $= \frac{24}{25}$
先行者給後行者5條	後行者共有7種切法13種給法，只有拿到 5×5 的正方形，先行者會輸1次，贏12次，其他12種給法，先行者都會贏，贏的比率 = $\frac{24}{25}$ 。	
		$A = 10, n = 6$ 比率的分母 $= (10 - 1) + (6 - 1)^2$ $= 9 + 25$ $= 34$ 分子比分母少1 $= 33$ 所以切6條時， 贏的比率 $= \frac{33}{34}$

實驗(四)的發現與討論：

- 由表六的結果可知，先行者切給後行者的條數越多，贏得遊戲的比率越大。
- 當巧克力紙板的正方形邊長為 $Ac\text{m}$ ；先行者切給後行者n條後，贏得遊戲的比率的分母為 $(A - 1) + (n - 1)^2$ ，分子為 $(A - 2) + (n - 1)^2$ ，與我們的假設相符合。
- 巧克力紙板為正方形時，先行者會有輸1次的機會，那身為後行者時，是否就不會有輸的機會產生？因此我們設計了實驗(五)。

實驗(五)：巧克力紙板為邊長 $2\text{cm} \sim 4\text{cm}$ 的正方形時，後行者與遊戲獲勝的關係。

實驗步驟：

- 在方格紙上，用色鉛筆畫出邊長 $2\text{cm} \sim 4\text{cm}$ 的正方形。
- 後行者按照遊戲規則在方格紙上畫出先行者所有可能切出的情況。

實驗(五)的結果：

表七：邊長為 $2\text{cm} \sim 4\text{cm}$ 的正方形，巧克力切法與後行者輸贏的情況表

巧克力尺寸(cm)	切的情況
2x2	
	贏。
3x3	
	給1條的情況
	給2條的情況
	贏
	給1條的情況
	給3條的情況
	贏
4x4	
	給1條的情況
	給2條的情況
	贏
	給2條的情況
	贏
	給3條的情況
	贏

後行者有3種給法，後行者只要切正方形給先行者一定會贏。。

實驗(五)的發現與討論：

- 由表七的結果可知，巧克力紙板為正方形時，先行者只能將正方形切出長方形給後行者，後行者只要切出正方形給先行者，後行者一定會贏先行者。
- 如果巧克力紙板的形狀是長方形，先行者與遊戲獲勝的關係又會是如何呢？因此我們設計了實驗(六)。

實驗(六)：巧克力紙板為寬 $1\text{cm} \sim 4\text{cm}$ 的長方形時，先行者與遊戲獲勝的關係。

實驗步驟：

- 在方格紙上，用色鉛筆畫出寬為 $1\text{cm} \sim 4\text{cm}$ ，長為其他長度的長方形，各4個。
- 先行者按照遊戲規則在方格紙上畫出後行者所有可能切出的情況。

實驗(六)的結果：

表八：寬為 $1\text{cm} \sim 4\text{cm}$ 的長方形，巧克力切法與先行者輸贏的情況表

巧克力紙板尺寸(cm)	切的情況	遊戲結果
1x2		先行者一定會贏
1x3		
1x4		
1x5		
2x3		
2x4		
2x5		
2x6		先行者一定會贏

正方形尺寸	先行者切給後行者的條數	贏的比率
2x2	1條	0
3x3	1條	後行者有2種給法，先行者只有1種一定會贏。
	2條	後行者有3種給法，先行者有2種一定會贏。
4x4	1條	後行者有3種給法，先行者有2種一定會贏。
4x4	2條	後行者有4種給法，先行者有3種一定會贏。
	3條	後行者有7種給法，先行者有6種一定會贏。(先行者拿到 3×3 的正方形會以切2條的方式切給後行者。)
5x5	1條	後行者有4種給法，先行者有3種一定會贏。
5x5	2條	後行者有5種給法，先行者有4種一定會贏。
	3條	後行者有8種給法，先行者有7種一定會贏。(先行者拿到 3×3 的正方形會以切2條的方式切給後行者。)
5x5	4條	後行者有13種給法，先行者有12種一定會贏。(先行者拿到 4×4 的正方形會以切3