中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080411

先發制勝！巴什博弈獲勝策略研究

學校名稱： 臺南市永康區復興國民小學

作者：	指導老師：
小六 莊溫妮 小六 陳崴丞 小六 洪昱成 小六 辛宥辰 小五 郭向軒 小五 陳奕璇	黃聿禪 周群堯

關鍵詞： 巴什博弈、獲勝策略、動態規劃

作品名稱：先發制勝！巴什博弈獲勝策略研究

摘要

巴什博弈是一種減法賽局，規則為：玩家輪流從總數（P）中減去數值（M），最後使得 P=0。我們針對 3 種不同的遊戲規則進行研究，發現「M 的條件限制會改變關鍵數字和必勝樣態」，其獲勝策略如下：

1. 若 M=1~K，關鍵數字為 K+1。當 P=N(K+1)時，後手保持 P=N(K+1) 樣態，必勝；當 P=N(K+1)+X 時，先手先拿取 X，然後轉換身分為後手，保持 P=N(K+1)樣態，必勝。
2. 若 M=1~$\frac{P}{2}$，關鍵數字為 2、5、11、23、47…。當 P=6×2^{n-2}-1 時，後手「保持 P=6×2^{n-2}-1 樣態」必勝。反之，先手應拿取 P+1-6×2^{n-2}，然後保持 P=6×2^{X}-1 樣態。
3. 若 M為質數，則關鍵數字為 4。當 P 除以 4 的餘數為 0 時，後手「保持 P=N×4 樣態」，必勝。當 P 除以 4 的餘數不為 0 時，先手利用「同餘互補」的模式，先拿走 5 或 2 或 3，然後持續保持 P=N×4 樣態，必勝。

壹、 前言

一、 研究動機

在今年的冬令營活動中，老師給我們看了一段海盜拿金幣的網路影片(網路資料，引用網址參見柒.參考文獻一)，影片中分析了海盜拿金幣的巧妙手法。老師解釋說：這是巴什博弈（Bash Game）的一種經典遊戲，是一種減法賽局。如果以 P 表示桌上的金幣數量，M 表示每次拿取的數量，那我們就可以把遊戲視為一種「P-M 的動態變化過程」。

剛開始，我們只是依照影片的說明進行遊戲，勝負完全靠機率，沒有任何

策略可言。後來老師建議我們：紀錄獲勝的M值與P值變化情形，然後找出其中的規律或共通點。經過觀察和歸納，我們發現：即使是不同的遊戲規則，似乎總是存在著某一種規律，可以讓先手的同學獲勝！

經過討論，我們決定分別以「間距值=1且固定K值」、「間距值=1但不固定K值」和「不固定間距值且不固定K值」等三種不同規則為研究對象，試著去找出這三種不同規則的獲勝策略，並且分析不同的獲勝機率、建立獲勝策略的推論以及如何應用在其他的Nim遊戲。

本作品共有三個研究問題，其研究動機說明如下：

(一).<研究問題一>是屬於傳統的簡單Nim(拈)遊戲，我們是根據海盜拿金幣的影片而開始進行研究的。

(二).<研究問題二>是男生組在<研究問題一>輸給女生組之後，隨意提出的新規則。剛開始，男生組只是想讓女生組無法掌握關鍵數字而已，後來才發現：這個新規則很有趣，而且最後一定會平手，所以又加入了例外規則來分勝負。而在遊戲過程中，男生組從2→5→11→23…關鍵數字中，找出「保持$6\times2^{n-2}-1$樣態」的獲勝策略。

(三).至於<研究問題三>的發想，則是因為女生組想要比賽老師教的質數表，才提出更改規則的要求。但是，男生組馬上發現遊戲的漏洞：1不是質數。所以，雙方又加了例外規則。後來男生組利用「4的倍數必是2的偶數倍」的特性，找到同餘互補模式的獲勝策略。

二、 研究目的

我們發現：幾乎所有的獲勝紀錄都會出現相同的P值，我們把這些P值稱為關鍵數字，只要這些數字出現，後手必然獲勝。我們把「關鍵數字+後手身分」稱為必勝樣態。我們進一步觀察，若有一方能一直保持必勝樣態，則最終必然獲勝。我們把「如何讓己方最終可以完成P=0的過程」稱為獲勝策略。而

我們的研究目的，主要就是在研究以下三個問題：

〈研究問題一：若固定 K 值為 K，M=1~K 是否存在獲勝策略？〉

〈研究問題二：若每輪的 K 值 K≦$\frac{P}{2}$，M=1～$\frac{P}{2}$是否存在獲勝策略？例外規則：當 P=1 時，強制 M=1〉

〈研究問題三：若 M 為質數，每輪的 K 值<P，是否存在獲勝策略？例外規則：當 P=1 時，強制 M=1〉

最後我們還希望能研究結論應用在其他博弈遊戲方面，做為以後進一步研究博弈理論的基礎。

三、 應用的數學教材單元

我們將本作品中所應用的數學教材單元整理如下表：

年級	單元	版本	在本作品中的應用
六上	第一單元 質因數分解	南一	〈研究問題三〉 判斷 M 是否為質數？
五下	第一單元 分數的計算	南一	〈研究問題二〉 確認每輪的 K 值與 P 值變化情形。
五上	第二單元 因數與倍數	南一	〈研究問題一〉 關鍵數字的數學歸納
四下	第四單元 整數的除法	康軒	〈研究問題三〉 同餘互補模式的餘數判斷
圖表來源：本圖表由作者親自製作。			

四、 研究限制

（一）、 我們是以雙人巴什博弈為研究對象，在遵循遊戲規則的要求下，完成 P=0 者獲勝。

(二)、 本研究為零和賽局，如有雙方僵持平手狀態，則設定例外規則，以方便探討對雙方最有利的獲勝策略。

(三)、 先拿取金幣者稱為「先手」，另一方稱為「後手」。因為遊戲為輪流進行拿取，所以先手和後手的身分會不停互換。

(四)、 本研究的金幣個數都是大於 0 的正整數。

(五)、 本研究使用的英文字母變數定義如下：

1. A、B 代表遊戲雙方，通常以 A 為率先拿取金幣的玩家。
2. M 表示遊戲回合中被拿取的金幣數量。MA 和 MB 分別代表 A 和 B 玩家在該回合拿取的數量。M1、M2、M3…代表玩家在第 1、2、3…回合的拿取數量。
3. K 為大於 0 的正整數且為 M 的最大值。
4. N 與 n 為大於 0 的正整數。
5. P 表示桌上現有的金幣數量，隨著雙方拿取，P 值會逐漸減少。PA 和 PB 分別代表在輪到 A 和 B 回合時桌上的金幣數量。

五、文獻探討

在研究過程中，我們透過網路搜尋和圖書館查閱，找到以下相關的資料：

1. 撿石頭

中華民國第四十七屆中小學科學展覽會國小組數學科作品。

引用網址參見柒.參考文獻二。

作者：臺北縣樹林市大同國民小學 小六 羅嵩詠、陳宇軒、蔡承璋。

與本作品的關聯：這個作品是以 100 顆石頭建模，雖然和我們的三種規則不相同，但是文中的「主控制點」觀念和我們的關鍵數字的想法類似；而安全殘局的想法也跟我們<研究問題三>的「保證不輸」的想法接近。不

過，因為這個作品是偏重於「拈」的解題思考，與我們的<研究問題二>和<研究問題三>的有所不同。

2. 搶 30 的餘波

<<讓我們來玩數學吧！>>第 90~99 頁。參見柒.參考文獻三。

與本作品的關聯：這本書是老師推薦我們去圖書館借的。書中從第 90 頁開始，詳細的分析搶 30 的致勝秘訣和各種變型。其中第 96 頁提到的「週期節奏」，啟發了我們對<研究問題一>的「動態規劃」的想法。至於書中「第三類變型」，則是帶給我們利用例外規則「P=1 強制 M=1」取勝的想法。

3. 零和賽局

網路資料，引用網址參見柒.參考文獻四。

與本作品的關聯：這個維基百科的網路解說，主要是幫我們釐清「零和賽局（zero-sum game）」的定義。在本作品中，我們為了探討必勝狀態，必須打破「零和賽局」的平手僵持狀態，所以在<研究問題二>和<研究問題三>中，我們設定了例外規則，藉以解決 M>K 或 M>P 的困境，讓原本可能出現的平手局面變成最終必有勝負的賽局。

4. 昌爸工作坊

網路資料，引用網址參見柒.參考文獻五。

與本作品的關聯：我們是用來玩<研究問題一>的遊戲，然後從遊戲中發現關鍵數字。

5. WEBSIM AI 網站-定義代數 P

網路資料，作者自行利用 AI 生成的網路程式，引用網址參見柒.參考文獻六。

與本作品的關聯：因為<研究問題二>的公式計算很麻煩，所以我們先教 AI 如何利用公式計算關鍵數字，然後讓 AI 幫我們分析先手拿取數量。如右圖所示(圖片來源：作者親自利用 AI 生成程式，引用網址參見

柒.參考文獻六)。以 P= 9999999999999998 為例，這個程式可以根據公式幫我們找出關鍵數字為 6755399441055743，並建議先手拿取數量為 3244600558944255。

6. SCRATCH 官網-質數拿金幣

網路資料，作者自行撰寫的 SCRATCH 程式，引用網址參見柒.參考文獻七。

與本作品的關聯：因為網路沒有與<研究問題三>相似的遊戲，所以我們寫了一個 SCRATCH 小遊戲。以 P=100 為例，如右圖所示(圖片來源：作者親自撰寫程式，引用網址參見柒.參考文獻七)。我們用這個程式來進行模擬遊戲，並根據遊戲結果來歸納<研究問題三>的關鍵數字和動態規劃。

貳、 研究設備及器材

桌上型電腦 1 台、Excel 軟體、筆記簿與研究日誌 2 本

參、 研究過程或方法

針對本作品的三個研究問題，我們都固定採取以下四個研究過程：

一、 **模型計算 (Modular Arithmetic)**：在採取對己方最有利選擇的情況下，列出不同 M 與 P 的變化紀錄並判斷勝負。

二、 **數學歸納 (Mathematical Induction)**：觀察記錄表格，歸納出先手與後手的關鍵數字與必勝樣態。

三、 **動態規劃 (Dynamic Programming)**：分別從先手和後手的角度考慮，規劃如何動態調整 M 值以維持必勝樣態的 P 值。

四、 **驗證實驗結果(Verify experimental results)**：驗證我們的獲勝策略是否適用於不同的 P 值。

<研究問題一：若固定 K 值為 K，M=1~K 是否存在獲勝策略？>

一、問題分析

(一)、 本問題的必勝樣態有兩種：一是「不管每輪的 P 值如何改變，A 必將獲勝」，二是「不管每輪的 P 值如何改變，B 必將獲勝」。

(二)、 每次的 P 值減少數量範圍為 1≦M≦K。

(三)、 本問題是一種充份資訊的變化：雙方都可以清楚的看到對手的拿取數量 M 與 P 值的變化情形。

(四)、 每次的 M 值都可以在 1≦M≦K 的範圍中自由變化。雙方必須設法維持己方的必勝樣態，設法在輪到己方的回合中出現 P=0 的獲勝局面。

二、研究過程：

(一)、 模型計算：分別以 K=1、K=2 和 K=3 建立 P=10、P=20 和 P=30 的 3 組 M 值變化模型。

模型 1 計算

K=1，雙方每次最多可拿取數量為 1。M=1，雙方每次可選擇拿取數量為 1。P 值與勝負情況如下表所示。

P值	獲勝者	說明
1	先手	MA=1
2	後手	MA=1，MB=1
3	先手	MA=1。身分轉換，進入P=2
4	後手	MA=1，MB=1。身分不變，進入P=2
5	先手	MA=1。身分轉換，進入P=4
6	後手	MA=1，MB=1。身分不變，進入P=4
7	先手	MA=1。身分轉換，進入P=6
8	後手	MA=1，MB=1。身分不變，進入P=6
9	先手	MA=1。身分轉換，進入P=8
10	後手	MA=1，MB=1。身分不變，進入P=8
圖表來源：本圖表由作者親自製作。		

表格說明：P 值=桌上現有金幣數量，MA 表示 A 玩家每輪拿取數量，MB 表示 B 玩家每輪拿取數量。因為本遊戲為雙人輪流拿取，所以身分會互換。

模型 1 表格觀察結果：

1. 先手獲勝次數：後手獲勝次數=5：5=1：1，雙方無優勢。
2. 當 P≦K=1 時，先手必勝。P=K+1 時後手必勝。
3. 當 P 值為 1、3、5、7、9 時，先手必勝。當 P 值為 2、4、6、8、10 時，後手必勝。

模型 2 計算

K=2，雙方每次最多可拿取數量為 2。M=1~2，雙方每次可選擇拿取數量為 1 或 2。P 值與勝負情況如下表所示。

P值	獲勝者	說明
1	先手	MA=1
2	先手	MA=2
3	後手	若MA=1則MB=2，若MA=2則MB=1
4	先手	MA=1，身分轉換，進入P=3
5	先手	MA=2，身分轉換，進入P=3
6	後手	若MA=1則MB=2，若MA=2則MB=1。身分不變，進入P=3
7	先手	MA=1，身分轉換，進入P=6
8	先手	MA=2，身分轉換，進入P=6
9	後手	若MA=1則MB=2，若MA=2則MB=1。身分不變，進入P=6
10	先手	MA=1，身分轉換，進入P=9
11	先手	MA=2，身分轉換，進入P=9
12	後手	若MA=1則MB=2，若MA=2則MB=1。身分不變，進入P=9
13	先手	MA=1，身分轉換，進入P=12
14	先手	MA=2，身分轉換，進入P=12
15	後手	若MA=1則MB=2，若MA=2則MB=1。身分不變，進入P=12
16	先手	MA=1，身分轉換，進入P=15
17	先手	MA=2，身分轉換，進入P=15
18	後手	若MA=1則MB=2，若MA=2則MB=1。身分不變，進入P=15
19	先手	MA=1，身分轉換，進入P=18
20	先手	MA=2，身分轉換，進入P=18
21	後手	若MA=1則MB=2，若MA=2則MB=1。身分不變，進入P=18
圖表來源：本圖表由作者親自製作。		

表格說明：如模型 1。

模型 2 表格觀察結果：

1. 先手獲勝次數：後手獲勝次數=14：7=2：1，先手明顯優勢。
2. 當 P≦K=2 時，先手必勝。P=K+1 時後手必勝。
3. 從 P=4 以後，都是 P=1、P=2、P=3 的重複出現。
4. P 值為 3、6、9、12、15、18 時後手必勝。其餘是先手必勝。

模型 3 計算

K=3，雙方每次最多可拿取數量為 3。M=1~3，雙方每次可選擇拿取數量為 1 或 2 或 3。P 值與勝負情況如下表所示。

P值	獲勝者	說明
1	先手	MA=1
2	先手	MA=2
3	先手	MA=3
4	後手	若MA=1則MB=3，若MA=2則MB=2，若MA=3則MB=1
5	先手	MA=1，身分轉換，進入P=4
6	先手	MA=2，身分轉換，進入P=4
7	先手	MA=3，身分轉換，進入P=4
8	後手	若MA=1則MB=3，若MA=2則MB=2，若MA=3則MB=1。身分不變，進入P=4
9	先手	MA=1，身分轉換，進入P=8
10	先手	MA=2，身分轉換，進入P=8
11	先手	MA=3，身分轉換，進入P=8
12	後手	若MA=1則MB=3，若MA=2則MB=2，若MA=3則MB=1。身分不變，進入P=8
13	先手	MA=1，身分轉換，進入P=12
14	先手	MA=2，身分轉換，進入P=12
15	先手	MA=3，身分轉換，進入P=12
16	後手	若MA=1則MB=3，若MA=2則MB=2，若MA=3則MB=1。身分不變，進入P=12
17	先手	MA=1，身分轉換，進入P=16
18	先手	MA=2，身分轉換，進入P=16
19	先手	MA=3，身分轉換，進入P=16
20	後手	若MA=1則MB=3，若MA=2則MB=2，若MA=3則MB=1。身分不變，進入P=16
21	先手	MA=1，身分轉換，進入P=20
22	先手	MA=2，身分轉換，進入P=20
23	先手	MA=3，身分轉換，進入P=20
24	後手	若MA=1則MB=3，若MA=2則MB=2，若MA=3則MB=1。身分不變，進入P=20
25	先手	MA=1，身分轉換，進入P=24
26	先手	MA=2，身分轉換，進入P=24
27	先手	MA=3，身分轉換，進入P=24
28	後手	若MA=1則MB=3，若MA=2則MB=2，若MA=3則MB=1。身分不變，進入P=24
29	先手	MA=1，身分轉換，進入P=28
30	先手	MA=2，身分轉換，進入P=28
31	先手	MA=2，身分轉換，進入P=28
32	後手	若MA=1則MB=3，若MA=2則MB=2，若MA=3則MB=1。身分不變，進入P=28
圖表來源：本圖表由作者親自製作。		

表格說明：如模型 1。

模型 3 表格觀察結果：

1. 先手獲勝次數：後手獲勝次數=24：8=3：1，先手明顯優勢。
2. 當 P≦K=3 時，先手必勝。P=K+1 時後手必勝。
3. 從 P=5 以後，都是 P=1、P=2、P=3、P=4 的重複出現。
4. P=4、8、12、16、20、24、28 時後手必勝。其餘先手必勝。

(二)、 數學歸納：

經由以上三個模型的表格觀察結果，我們歸納出以下事項：

1. 隨著 K 與 P 的增加，先手的優勢地位越加明顯。
2. 在模型 1 中，後手獲勝的第一個 P 值是 2，其後都是 2 的倍數；在模型 2 中，後手獲勝的第一個 P 值是 3，其後都是 3 的倍數；在模型 3 中，後手獲勝的第一個 P 值是 4，其後都是 4 的倍數。可見後手獲勝與第一個獲勝 P 值有關。
3. 三個模型的第一個後手獲勝 P 值都是 K+1，其後的獲勝 P 值都是 n(K+1)。
4. 先手在 P>K+1 且 P≠n(K+1)時，可以藉由身分轉換方式，進入 P=K+1 而獲勝。

綜合以上：若固定 K 值，在 M=1~K 規則中，存在著關鍵數字 K+1。在 P>K+1 時，AB 雙方都應該設法完成 P=n(K+1)，因為此時可以讓己方身分變為後手而此時為後手必勝，所以 P=n(K+1)是必勝樣態。

(三)、 動態規劃：

根據模型計算和數學歸納結果，AB 雙方最有利的動態規劃如下：

1. 當 P 除以 K+1 的餘數為 0 時，後手最有利的動態規劃是：「如果先手拿取 MA 個，則後手拿取 MB=K+1-MA 個，使得 P 始終保持 n(K+1)狀態，最終必能完成 P=0 而獲得勝利。」此時先手只能隨機拿取 M 個，等待後手犯錯才能以『身分轉換』的方法扭轉勝負。
2. 當 P 除以 K+1 的餘數為 X>0 時，先手最有利的動態規劃是：「先拿取 X 個，進入 P=n(K+1)樣態，利用『身分轉換』將己方轉為後手，然後按照後手的動態規畫，每次拿取 K+1-M 個，即可完成 P=0 而獲得勝利。」
3. 因遊戲規則設定最少拿 1 個，且 N 必為 1 的倍數，所以不論雙方如何進行動態規畫，最終必然有一方獲勝，雙方不會出現平手僵局。

（四）、 驗證實驗結果：

根據以上的模型計算、數學歸納和動態規劃，我們認為：在符合 M=1~K 規則且無失誤狀態下，對任意大於 0 的正整數 P，確實存在必勝策略。

舉例說明如下：

舉例 1：P 除以 K+1 的餘數為 X=0 的情況。

假設桌上有 33 個金幣，規則為：每次可拿取 1 個或 2 個或 3 個…10 個。此時 P=33，K=10，M=1~10，關鍵數字 K+1=1+10=11，因為 P 除以 11 的餘數為 0，所以後手必勝。P 值變化如下：

遊戲回合	A拿取數	B拿取數	P值
1	M1	1+10-M1	33-M1-(1+10-M1)=22
2	M2	1+10-M2	22-M2-(1+10-M2)=11
3	M3	1+10-M3	11-M3-(1+10-M3)=0

圖表來源：以上圖表由作者親自製作。

表格說明：遊戲回合=遊戲進行第幾輪，A 拿取數和 B 拿取數=A 和 B 在該遊戲回合的拿取金幣數量，P 值為該遊戲回合 A、B 拿取後的桌上金幣數量。

在上表中，後手的獲勝策略是：藉由「在己方後手的情況下，保持 P=n(K+1)樣態」的動態規劃，最終完成 P=0 而獲得勝利。

舉例 2：P 除以 K+1 的餘數為 X 且 X>0 的情況。

假設桌上有 100 個金幣，規則為：每次可拿取 1 個或 2 個或 3 個…10 個。此時 P=100，K=10，M=1~10，關鍵數字 K+1=1+10=11，因為 P 除以 11 的餘數為 1，所以先手必勝。P 值變化如下：

遊戲回合	A拿取數	PA	B拿取數	PB
1	1	99	M1=1~10	99-M1
2	11-M1	99-M1-(11-M1)=88 (以下計算方法相同)	M2=1~10	88-M2
3	11-M2	77	M3=1~10	77-M3
4	11-M3	66	M4=1~10	66-M4
5	11-M4	55	M5=1~10	55-M5
6	11-M5	44	M6=1~10	44-M6
7	11-M6	33	M7=1~10	33-M7
8	11-M7	22	M8=1~10	22-M8
9	11-M8	11	M9=1~10	11-M9
10	11-M9	0 (因為11-M9≦10，可以一次取完)	無法拿取	

圖表來源：以上圖表由作者親自製作。

表格說明：遊戲回合=遊戲進行到第幾輪，A 拿取數和 B 拿取數=A 和 B 在該遊戲回合的拿取金幣數量，PA 和 PB=該遊戲回合 A、B 拿取後的桌上金幣數量。

在上表中，先手的獲勝策略是：藉由「先拿取 P 除以 K+1 的餘數，轉換身分後，保持 P=n(K+1)樣態」的動態規劃，最終完成 P=0 而獲得勝利。

經由以上的實驗結果證實：<研究問題一>確實存在獲勝策略：只要利用 K+1 這個關鍵數字，維持「己方為後手身分且 P=n(K+1)」的動態規劃，最終必然獲勝。

<研究問題二：若每輪的 K 值 $K \leqq \frac{P}{2}$，M=1～$\frac{P}{2}$是否存在獲勝策略？

例外規則：當 P=1 時，強制 M=1>

一、 問題分析

(一)、 本問題的K值在每輪都會變動，與<研究問題一>的固定K值不同。隨著雙方輪流拿取的數量，P值會逐漸減少而導致每輪的K值也會逐漸變小。

(二)、 比較<研究問題一>和<研究問題二>，兩者的M值同樣都是最小為1，而且間距值也固定為1(連續正整數)。但前者的K值在遊戲進行中是不會變動的，而後者的K值在遊戲進行中是一直變動的。

(三)、 本問題可能存在雙方平手的僵局：因為當P=1時，$\frac{P}{2}$<1，M最小值=1與K≦$\frac{P}{2}$的規則相互矛盾，使得雙方都無法完成P=0而形成平手。

(四)、 因為我們的作品是建立在P=0的獲勝規則基礎上，所以我們加上一個例外規則：當P=1時，強制玩家直接拿取1個(M=1)，不受K≦$\frac{P}{2}$之限制。有此例外規則，本問題才能產生必勝樣態。

(五)、 M是1~K的連續正整數，在P>1時，每輪P值減少數量範圍為1≦M≦$\frac{P}{2}$。若$\frac{P}{2}$≧1不成立時，強制M=1，使得P=0，結束遊戲。

(六)、 本問題是一種充份資訊的變化：雙方都可以清楚的看到對手的拿取數量M與P值的變化情形。

(七)、 每輪的MA與MB值都可以在1≦M≦K的範圍中自由變化。

(八)、 本問題和<研究問題一>不同，玩家除了可以設法出現P=0的獲勝局面之外；也可以設法在輪到己方的回合中出現P=1的情況，然後用「例外規則：強制M=1」的方式完成P=0而獲勝。

二、 研究過程

(一)、 模型計算

因為本問題的K值是隨P值而變動，所以我們直接以P=95建立模型。

P值	獲勝者	說明		P值	獲勝者	說明
1	先手	強制M=1		48	先手	MA=1，先手轉換身分進入P=47
2	後手	MA必為1，後手轉換身分進入P=1		49	先手	MA=2，先手轉換身分進入P=47
3	先手	MA必為1，先手轉換身分進入P=2		50	先手	MA=3，先手轉換身分進入P=47
4	先手	MA=2，先手轉換身分進入P=2		51	先手	MA=4，先手轉換身分進入P=47
5	後手	若MA=1~2，則MB=2~1。進入P=2		52	先手	MA=5，先手轉換身分進入P=47
6	先手	MA=1，先手轉換身分進入P=5		53	先手	MA=6，先手轉換身分進入P=47
7	先手	MA=2，先手轉換身分進入P=5		54	先手	MA=7，先手轉換身分進入P=47
8	先手	MA=3，先手轉換身分進入P=5		55	先手	MA=8，先手轉換身分進入P=47
9	先手	MA=4，先手轉換身分進入P=5		56	先手	MA=9，先手轉換身分進入P=47
10	先手	MA=5，先手轉換身分進入P=5		57	先手	MA=10，先手轉換身分進入P=47
11	後手	若MA=1~5，則MB=5~1。進入P=6		58	先手	MA=11，先手轉換身分進入P=47
12	先手	MA=1，先手轉換身分進入P=11		59	先手	MA=12，先手轉換身分進入P=47
13	先手	MA=2，先手轉換身分進入P=11		60	先手	MA=13，先手轉換身分進入P=47
14	先手	MA=3，先手轉換身分進入P=11		61	先手	MA=14，先手轉換身分進入P=47
15	先手	MA=4，先手轉換身分進入P=11		62	先手	MA=15，先手轉換身分進入P=47
16	先手	MA=5，先手轉換身分進入P=11		63	先手	MA=16，先手轉換身分進入P=47
17	先手	MA=6，先手轉換身分進入P=11		64	先手	MA=17，先手轉換身分進入P=47
18	先手	MA=7，先手轉換身分進入P=11		65	先手	MA=18，先手轉換身分進入P=47
19	先手	MA=8，先手轉換身分進入P=11		66	先手	MA=19，先手轉換身分進入P=47
20	先手	MA=9，先手轉換身分進入P=11		67	先手	MA=20，先手轉換身分進入P=47
21	先手	MA=10，先手轉換身分進入P=11		68	先手	MA=21，先手轉換身分進入P=47
22	先手	MA=11，先手轉換身分進入P=11		69	先手	MA=22，先手轉換身分進入P=47
23	後手	若MA=1~11，則MB=11~1。進入P=11		70	先手	MA=23，先手轉換身分進入P=47
24	先手	MA=1，先手轉換身分進入P=23		71	先手	MA=24，先手轉換身分進入P=47
25	先手	MA=2，先手轉換身分進入P=23		72	先手	MA=25，先手轉換身分進入P=47
26	先手	MA=3，先手轉換身分進入P=23		73	先手	MA=26，先手轉換身分進入P=47
27	先手	MA=4，先手轉換身分進入P=23		74	先手	MA=27，先手轉換身分進入P=47
28	先手	MA=5，先手轉換身分進入P=23		75	先手	MA=28，先手轉換身分進入P=47
29	先手	MA=6，先手轉換身分進入P=23		76	先手	MA=29，先手轉換身分進入P=47
30	先手	MA=7，先手轉換身分進入P=23		77	先手	MA=30，先手轉換身分進入P=47
31	先手	MA=8，先手轉換身分進入P=23		78	先手	MA=31，先手轉換身分進入P=47
32	先手	MA=9，先手轉換身分進入P=23		79	先手	MA=32，先手轉換身分進入P=47
33	先手	MA=10，先手轉換身分進入P=23		80	先手	MA=33，先手轉換身分進入P=47
34	先手	MA=11，先手轉換身分進入P=23		81	先手	MA=34，先手轉換身分進入P=47
35	先手	MA=12，先手轉換身分進入P=23		82	先手	MA=35，先手轉換身分進入P=47
36	先手	MA=13，先手轉換身分進入P=23		83	先手	MA=36，先手轉換身分進入P=47
37	先手	MA=14，先手轉換身分進入P=23		84	先手	MA=37，先手轉換身分進入P=47
38	先手	MA=15，先手轉換身分進入P=23		85	先手	MA=38，先手轉換身分進入P=47
39	先手	MA=16，先手轉換身分進入P=23		86	先手	MA=39，先手轉換身分進入P=47
40	先手	MA=17，先手轉換身分進入P=23		87	先手	MA=40，先手轉換身分進入P=47
41	先手	MA=18，先手轉換身分進入P=23		88	先手	MA=41，先手轉換身分進入P=47
42	先手	MA=19，先手轉換身分進入P=23		89	先手	MA=42，先手轉換身分進入P=47
43	先手	MA=20，先手轉換身分進入P=23		90	先手	MA=43，先手轉換身分進入P=47
44	先手	MA=21，先手轉換身分進入P=23		91	先手	MA=44，先手轉換身分進入P=47
45	先手	MA=22，先手轉換身分進入P=23		92	先手	MA=45，先手轉換身分進入P=47
46	先手	MA=23，先手轉換身分進入P=23		93	先手	MA=46，先手轉換身分進入P=47
47	後手	若MA=1~23，則MB=23~1。進入P=23		94	先手	MA=47，先手轉換身分進入P=47
				95	後手	若MA=1~47，則MB=47~1。進入P=47
圖表來源：本圖表由作者親自製作。						

表格說明：P 值表示「桌上現有金幣數量」。獲勝者表示「完成 P=0 的最後獲勝者」。MA 表示「先手每輪拿取金幣數量」，MB 表示「後手每輪拿取金幣數量」。

以 P=11 為例說明：MA=1~5 表示先手 A 可以任意選擇拿取 1~5 個金幣，MB=5~1 表示後手 B 可以對應 MA 拿取相對應的金幣，使得 MA+MB=6。例如：若 MA=2 時，則 MB 對應拿取 4 個，使得桌上金幣數量進入 P=5 的狀態。然後再依

相同的方法進入 P=2 的狀態，就可以判斷後手必勝。

模型觀察結果：

1. 先手獲勝次數：後手獲勝次數=89：6，先手明顯優勢。
2. P 值為 2、5、11、23、47、95 時，後手必勝。其餘都是先手必勝。
3. 在<研究問題一>中，每當 P=n(K+1)時後手必勝，P 值固定差距 K+1。但在本問題中，因為每輪的 K 值都會變動，所以後手必勝的 P 值並非 K+1，而 P 值間的差距也不固定。

(二)、 數學歸納

經由以上三個模型的表格觀察結果，我們歸納出以下事項：

1. 隨著 P 的增加，先手的優勢也越加明顯。
2. 在模型中，後手獲勝的 6 個 P 值的差距依次是 3、6、12、24、48，後 4 者都是 6 的倍數且分別為 $6\times1=6\times2^{0}$、$6\times2=6\times2^{1}$、$6\times4=6\times2^{2}$、$6\times8=6\times2^{3}$。
3. 從差距可以推知：後手獲勝的第 n 個 P 值與第 n-1 個 P 值的差應為 $6\times2^{n-3}$，例如模型中後手獲勝的第 6 個 P 值與第 5 個 P 值的差為 $6\times2^{n-3}=6\times2^{6-3}=6\times2^{3}=48$，而後手獲勝的第 5 個 P 值是 47，所以後手獲勝的第 6 個 P 值應為 47+48=95，與模型計算吻合。進而推論：後手獲勝的第 7 個 P 值與第 6 個 P 值的差為 $6\times2^{n-3}=6\times2^{7-3}=6\times2^{4}=96$，而後手獲勝的第 6 個 P 值是 95，所以第 7 個後手獲勝的 P 值應為 95+96=191。
4. 除了 2 以外，模型中的後手獲勝 P 值都可以用 $6\times2^{n-2}-1$ 來表示，n 為第幾個後手獲勝 P 值。例如模型計算中第 3 個後手獲勝 P 值為：$6\times2^{n-2}-1=6\times2^{3-2}-1=6\times2^{1}-1=11$。
5. 根據模型計算可以推知：本表格之後的第 7 個後手獲勝 P 值應為：$6\times2^{7-2}-1=6\times2^{5}-1=191$。而 $191-95=96=6\times2^{4}$，與上面的推論結果相同。
6. 在 P≧3 之後，A 和 B 雙方的最有利選擇都是設法讓己方以後手的身分進入 P=2 的樣態，然後利用例外規則獲勝。如果沒有例外規則，本遊戲

將無法進行(成為平手狀態)。

綜合以上：在 $K \leqq \frac{P}{2}$，$M=1 \sim \frac{P}{2}$規則中，當 P>2 以後，存在著關鍵數字 $6\times2^{n-2}-1$，$n \geqq 2$，為後手必勝樣態。因此，若 P>2，則 AB 雙方都應該設法完成 $P=6\times2^{n-2}-1$ 的必勝樣態且保持己方為後手，必能確保獲勝。

(三)、 動態規劃

根據模型計算和數學歸納結果，AB 雙方最有利的動態規劃如下：

1. 當 P=1 時，先手利用例外規則拿取 1 個，完成 P=0 而獲勝。
2. 當 P=2 時，先手只能拿 1 個，後手利用例外規則拿取 1 個，完成 P=0 而獲勝。
3. 當 P>2 且 $P=6\times2^{n-2}-1$ 時，後手最有利的動態規劃是：若先手拿取 M 個，則後手拿取 $6\times2^{n-3}-M$ 個，使得 P 始終保持 $6\times2^{n-2}-1$ 狀態，最終必能進入 P=2 而利用例外規則獲勝。此時先手只能隨機拿取，等待後手犯錯才能以『身分轉換』的方法扭轉勝負。
4. 當 P>2 且 $P=6\times2^{n-2}-1+X$ 時，先手最有利的動態規劃是：先拿取 X 個，進入 $P=6\times2^{n-2}-1$ 狀態，同時身分轉換為後手，再按照上面的後手動態規劃，持續保持「$P=6\times2^{n-2}-1$ 且為後手身分」的必勝樣態，最終必能進入 P=2 而利用例外規則獲勝。此時後手只能隨機拿取，等待先手犯錯才能以「身分轉換」的方法扭轉勝負。
5. 當 P 除以 2 的餘數為 1 時，因為 K 是大於 0 的正整數，所以此時必須選擇 $K<\frac{P}{2}$，而不能選擇 $K=\frac{P}{2}$。
6. 當 K 最小值為 1 時，P 必然為 K 的整數倍，此時不論雙方如何進行動態規畫，最終必然有一方獲勝。但是，當 K 最小值為$\frac{P}{2}$時，有可能 K<1(例如 P=1)，這與「K 是 M 的最大值」相矛盾，會使得遊戲無法進行，所以我們必須加上例外規則，才能進行研究。

(四)、 驗證實驗結果

根據模型計算、數學歸納和動態規劃結果，我們認為：在符合 K≦$\frac{P}{2}$，M=1～$\frac{P}{2}$規則且無失誤狀態下，對任意大於 2 的正整數 P，確實存在必勝策略。舉例說明如下：

舉例 1：P=6×2^{n-2}-1 的情況。

假設桌上有 1535 個金幣，此時 P=1535，n=12，n-2=10，K≦$\frac{P}{2}$，M=1～K，關鍵數字 P=6×2^{n-2}-1，則後手必勝。P 值變化如下：

遊戲回合	MA	PA	MB	PB
1	1~767	1535-MA	6*128-MA	135-MA-(6*128-MA)=767 (以下計算方法相同)
2	1~383	767-MA	6*64-MA	383
3	1~191	383-MA	6*32-MA	191
4	1~95	191-MA	6*16-MA	95
5	1~47	95-MA	6*8-MA	47
6	1~23	47-MA	6*4-MA	23
7	1~11	23-MA	6*2-MA	11
8	1~5	11-MA	6*1-MA	5
9	1~2	5-MA	3-MA	2
10	1 (M=1)	1	1 (例外規則)	0
圖表來源：本圖表由作者親自製作。				

表格說明：遊戲回合=遊戲進行第幾輪，MA 和 MB=A 和 B 在該遊戲回合拿取的金幣數量，PA 和 PB=該遊戲回合 A 和 B 拿取後的桌上金幣數量。

在上表中，後手的獲勝策略是：「保持 P=6×2^{n-2}-1 樣態，而且每輪都維持 n 遞減 1 的 P 值」的動態規劃，利用例外規則，最終完成 P=0 而獲得勝利。

舉例 2：P=6×2^{n-2}-1+X(X 是大於 0 的正整數)的情況。

假設桌上有 400 個金幣，此時 P=400，n=8，n-2=6，K≦$\frac{P}{2}$，M=1～K，X=17，關鍵數字 P=6×2^{n-2}-1，則先手必勝。P 值變化如下：

遊戲回合	MA	PA	MB	PB
1	17	400-17=383	M1	383-M1
2	192-M1	191	M2	191-M2
3	96-M2	95	M3	95-M3
4	48-M3	47	M4	47-M4
5	24-M4	23	M5	23-M5
6	12-M5	11	M6	11-M6
7	6-M6	5	M7	5-M7
8	3-M7	2	1	1
9	1	0	無法拿取	
圖表來源：本圖表由作者親自製作。				

表格說明：遊戲回合=遊戲進行第幾輪，MA 和 MB=A 和 B 在該遊戲回合的拿取金幣數量，PA 和 PB=該遊戲回合 A、B 拿取後的桌上金幣數量。

在上表中，先手的獲勝策略是：「先拿取 X 個，轉換身分為後手且保持 $P=6\times2^{n-2}-1$ 樣態，而且每輪都維持 n 遞減 1 的 P 值」的動態規劃，進入 P=2 後，利用例外規則，最終完成 P=0 而獲得勝利。

經由以上的實驗結果證實：利用 $P=6\times2^{n-2}-1$ 的後手必勝樣態，維持「己方為後手身分且 $P=6\times2^{n-2}-1$」的動態規劃，<研究問題二>確實存在獲勝策略。

<研究問題三：若 M 為質數，每輪的 K 值<P，是否存在獲勝策略？例外規則：當 P=1 時，強制 M=1>

一、 問題分析

(一)、 <研究問題三>與<研究問題一>、<研究問題二>有以下不同：

1. <研究問題一>和<研究問題二>的 MA 或 MB 最小值為 1，但<研究問題三>的 MA 或 MB 最小值為 2。
2. <研究問題一>每輪的 K 值都是固定的；<研究問題二>的 K 值不固定但限定不可大於$\frac{P}{2}$；而<研究問題三>的 K 值不但可以變動的，而且允許 K 值逼近 P 值，只要符合 K 是質數且 K≦P 即可。

3. <研究問題一>和<研究問題二>的 M 值間距固定為 1，<研究問題三>的 M 值間距不固定(兩個值數之間的差並不固定)。

4. <研究問題三>和<研究問題二>相同，K 值會隨著 P 值逐漸減少而導致每輪的 K 值也會逐漸變小。

(二)、 雖然目前無法證實質數的最大值，但只要 P 是有限的正整數，則在 1~P 值之間，必然存在少於 P 個的質數，這些質數就是<研究問題三>的 M，而 K 則是每輪最大的 M 值。

(三)、 和<研究問題二>相同，本問題也可能出現雙方平手的僵局：因為 MA 和 MB 的最小值是 2(最小質數)，當 P=1 時，P<M 會使得 A 和 B 雙方都無法完成 P=0 而形成平手。因此，如同<研究問題二>的解決方法，我們加上一個例外規則來產生必勝樣態。

(四)、 本問題也是一種充份資訊的變化：雙方都可以充分掌握對手的拿取數量 M 與 P 值的變化情形。

(五)、 除了 P=1 以外，每輪的 MA 與 MB 值都可以在 2~K 的範圍中自由變化，但必須符合 M 與 K 為質數之規則。

(六)、 本問題和<研究問題二>相同，玩家除了可以設法在輪到己方的回合中完成 P=0 之外；也可以設法在讓對方出現 P=1 的情況，然後用「例外規則：強制 M=1」的方式完成 P=0 而獲勝。

二、 研究過程

(一)、 模型計算

和<研究問題二>相同，本問題的 K 值也是隨 P 值而變動。因為超過 100 的質數較不容易辨認，而且老師教我們的質數表也只有到 97，所以我們經過討論後，決定直接以 P=100 來建立模型。

P值	獲勝者	說明		P值	獲勝者	說明
1	先手	強制M=1		51	先手	MA=3，轉換身分進入P=48
2	先手	P為質數，先手獲勝。		52	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
3	先手	P為質數，MA=3		53	先手	P為質數，先手獲勝。
4	後手	若MA=2則MB=2，若MA=3則MB=1。 後手完成P=0而獲勝		54	先手	MA=2，轉換身分進入P=52
5	先手	P為質數，MA=5		55	先手	MA=3，轉換身分進入P=52
6	先手	MA=2，轉換身分進入P=4		56	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
7	先手	P為質數，先手獲勝。		57	先手	MA=5，轉換身分進入P=52
8	後手	*同餘互補模式，進入P=4n		58	先手	MA=2，轉換身分進入P=56
9	先手	MA=5，轉換身分進入P=4		59	先手	P為質數，先手獲勝。
10	先手	MA=2，轉換身分進入P=8		60	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
11	先手	P為質數，先手獲勝。		61	先手	P為質數，先手獲勝。
12	後手	*同餘互補模式，進入P=4n		62	先手	MA=2，轉換身分進入P=60
13	先手	P為質數，先手獲勝。		63	先手	MA=3，轉換身分進入P=60
14	先手	MA=2，轉換身分進入P=12		64	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
15	先手	MA=3，轉換身分進入P=12		65	先手	MA=5，轉換身分進入P=60
16	後手	*同餘互補模式，進入P=4n		66	先手	MA=2，轉換身分進入P=64
17	先手	P為質數，先手獲勝。		67	先手	P為質數，先手獲勝。
18	先手	MA=2，轉換身分進入P=16		68	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
19	先手	P為質數，先手獲勝。		69	先手	MA=5，轉換身分進入P=64
20	後手	*同餘互補模式，進入P=4n		70	先手	MA=2，轉換身分進入P=68
21	先手	MA=5，轉換身分進入P=16		71	先手	P為質數，先手獲勝。
22	先手	MA=2，轉換身分進入P=20		72	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
23	先手	P為質數，先手獲勝。		73	先手	P為質數，先手獲勝。
24	後手	*同餘互補模式，進入P=4n		74	先手	MA=2，轉換身分進入P=72
25	先手	MA=5，轉換身分進入P=20		75	先手	MA=3，轉換身分進入P=72
26	先手	MA=2，轉換身分進入P=24		76	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
27	先手	MA=3，轉換身分進入P=24		77	先手	MA=5，轉換身分進入P=72
28	後手	*同餘互補模式，進入P=4n		78	先手	MA=2，轉換身分進入P=76
29	先手	P為質數，先手獲勝。		79	先手	P為質數，先手獲勝。
30	先手	MA=2，轉換身分進入P=28		80	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
31	先手	P為質數，先手獲勝。		81	先手	MA=5，轉換身分進入P=76
32	後手	*同餘互補模式，進入P=4n		82	先手	MA=2，轉換身分進入P=80
33	先手	MA=5，轉換身分進入P=28		83	先手	P為質數，先手獲勝。
34	先手	MA=2，轉換身分進入P=32		84	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
35	先手	MA=3，轉換身分進入P=32		85	先手	MA=5，轉換身分進入P=80
36	後手	*同餘互補模式，進入P=4n		86	先手	MA=2，轉換身分進入P=84
37	先手	P為質數，先手獲勝。		87	先手	MA=3，轉換身分進入P=84
38	先手	MA=2，轉換身分進入P=36		88	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
39	先手	MA=3，轉換身分進入P=36		89	先手	P為質數，先手獲勝。
40	後手	*同餘互補模式，進入P=4n		90	先手	MA=2，轉換身分進入P=88
41	先手	P為質數，先手獲勝。		91	先手	MA=3，轉換身分進入P=88
42	先手	MA=2，轉換身分進入P=40		92	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
43	先手	P為質數，先手獲勝。		93	先手	MA=5，轉換身分進入P=88
44	後手	*同餘互補模式，進入P=4n		94	先手	MA=2，轉換身分進入P=92
45	先手	MA=5，轉換身分進入P=40		95	先手	MA=3，轉換身分進入P=92
46	先手	MA=2，轉換身分進入P=44		96	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
47	先手	P為質數，先手獲勝。		97	先手	P為質數，先手獲勝。
48	後手	*同餘互補模式，進入P=4n		98	先手	MA=2，轉換身分進入P=96
49	先手	MA=5，轉換身分進入P=44		99	先手	MA=3，轉換身分進入P=96
50	先手	MA=2，轉換身分進入P=48		100	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
圖表來源：本圖表由作者親自製作。						

表格說明：P 值=桌上現有金幣數量。獲勝者=能夠完成 P=0 的玩家。MA=先手第一次拿取的金幣數量。轉換身分=先手轉為後手或後手轉為先手。P=4n 表示 P 值必然為某個 4 的倍數。

在<研究問題三>中，先手的最有利選擇是拿取「P 除以 4 的餘數」；而後手的最有利選擇則是根據先手除以 4 的餘數而做出相對應的選擇。我們稱前者為「同餘模式」、後者為「互補模式」，兩者並稱「同餘互補模式」。說明如下：

1. **同餘模式**：若確定 P 為質數且 P 除以 4 的餘數為 1 或 2 或 3，則 MA=1 或 2 或 3。這個模式可以確保 P 值必是 4 的倍數。因為**所有的質數都不是 4 的倍數**，所以拿取後的 P 值必然不是質數，而使得先手立於不敗之地。
2. **互補模式**：若對方拿取數量除以 4 的餘數為 1 或 2 或 3 時，則己方拿取數量為 3 或 2 或 5。因為所有的質數都不是 4 的倍數，所以不會出現餘數為 0 的情形。利用互補模式，我們可以確保 MA+MB=4n。

以 P=95 為例說明：因為 P 除以 4 的餘數為 3，所以先手選擇 MA=3(同餘模式)，使得 P=92，同時轉換身分為後手而進入互補模式：若對方拿取數量除以 4 的餘數為 1 或 2 或 3 時，則己方拿取數量為 3 或 2 或 5。這樣可以始終保持 P=4n 的必勝樣態，直到 P=4 時，己方必然獲勝。

模型觀察結果：

1. 先/後手獲勝次數=75：25=3：1，先手明顯優勢。
2. P=4、8、12、16……時，後手必勝。
3. 本問題雖然 K 值每輪都會變動，但後手必勝的 P 值差距固定為 4。

(二)、 數學歸納：

1. 先手優勢與 P 值大小明顯無關(都可以透過同餘互補模式獲勝)。
2. 在模型中，後手獲勝的 P 值差距都是 4。
3. 模型中的後手獲勝 P 值都可以用 4n 來表示。
4. 根據模型推知：第 26 個關鍵數字應為 4×26=104，與歸納 2 相同。
5. 先手有 2 種獲勝策略，以 P=7 為例：先手可拿取 MA=7 使得 P=0，亦可拿取 MA=3 進入同餘互補模式，利用 P=4 而獲勝。

綜合以上，我們確認：在 M 為質數的規則中，存在著關鍵數字 4。

(三)、 動態規劃：

根據模型計算和數學歸納結果，A、B 雙方最有利的動態規劃如下：

1. 當 P=1 時，先手利用例外規則拿取 1 個，完成 P=0 而獲勝。
2. 當 P=2 或 3 時，先手利用 M 為質數直接獲勝。
3. 當 P=4 時，若先手拿取 3 個，則 4-3=1，後手利用例外規則獲勝。若先手拿取 2 個，則 4-2=2，後手利用 2 為質數直接獲勝。
4. 當 P>4 且 P=4n+X 時，先手最有利的動態規劃是：先拿取 X 個，進入 P=4n 狀態，同時身分轉換為後手，再持續保持「P=4n 且為後手身分」的必勝樣態，最終必能進入 P=1 而利用例外規則獲勝。
5. 當 P=4n 時，後手最有利的動態規劃是：利用「互補模式」獲勝：若 MA 除以 4 的餘數為 1，則 MB=3；若 MA 除以 4 的餘數為 2，則 MB=2；若 MA 除以 4 的餘數為 3，則 MB=5(MB 不能為 1，因為 1 不是質數)。如此保持 P=4n 的必勝樣態，後手必勝。

(四)、 驗證實驗結果：

根據以上的模型計算、數學歸納和動態規劃的結果，我們發現：當 M 限制為質數時，對任意正整數 P 而言，確實存在必勝策略。舉例說明如下：

舉例 1：P=4n+X 的情況

假設桌上有 105 個金幣，此時 P=26×4+1，P 除以 4 的餘數為 1，則先手必勝。P 值變化如下：

遊戲回合	MA	PA	MB	PB
1	1	105-1=104	MB1(小於PA1的任意質數)	PA1-MB1
2	PB1÷4的餘數	PB1-MA2(為4的倍數)	MB2(小於PA2的任意質數)	PA2-MB2
3	PB2÷4的餘數	PB2-MA3(為4的倍數)	MB3(小於PA3的任意質數)	PA3-MB3
4	PB3÷4的餘數	PB3-MA4(為4的倍數)	MB4(小於PA4的任意質數)	PA4-MB4
5	PB4÷4的餘數	PB4-MA5(為4的倍數)	MB5(小於PA5的任意質數)	PA5-MB5
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
n	PB(n-1)÷4的餘數	4	2或3	2或1
n+1	若PBn=2，則MA=2，直接拿取獲勝 若PBn=1，則利用例外規則獲勝	0	遊戲結束	

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

先手動態規畫：105÷4 的餘數為 1，所以先拿走 1 個金幣，使得 PA=104=26×4，而後依照互補模式，維持 PA=4n 狀態，最後當 PA=4 時，先手必勝。

舉例 2：P=4n 的情況。

假設桌上有 400 個金幣，此時 P=100×4，P÷4 的餘數為 0，則後手必勝。P 值變化如下：

遊戲回合	MA	PA	MB	PB
1	MA1(小於400的任意質數)	400-MA1	PA1÷4的餘數	PA1-MB1(為4的倍數) (以下計算方法相同)
2	MA2(小於PB1的任意質數)	PB1-MA2	PA2÷4的餘數	PA2-MB2(為4的倍數)
3	MA3(小於PB2的任意質數)	PB2-MA3	PA3÷4的餘數	PA3-MB3(為4的倍數)
4	MA4(小於PB3的任意質數)	PB3-MA4	PA4÷4的餘數	PA4-MB4(為4的倍數)
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
n	MAn	PB(n-1)-MAn	PAn÷4的餘數	4
n+1	2或3	2或1	若PA=2，則MB2，直接拿取獲勝 若PA=1，則利用例外規則獲勝	0
圖表來源：本圖表由作者親自製作。				

後手動態規畫：400÷4 的餘數為 0，若先手拿走 MA，則後手拿 4-MA 除以 4 的餘數，始終維持 P=4n 狀態。最後當 PB=4 時，後手必勝。

經由以上的實驗結果證實：<研究問題三>的關鍵數字是 4，即使 M 與 K 不固定，只要利用同餘互補模式，最終必然獲勝。

肆、研究結果

一、經由模型計算→數學歸納→動態規畫→驗證實驗結果的研究過程，我們確認：在本作品的三個研究問題中都存在著獲勝策略。

二、經由模型計算可知：若 P 值為隨機取數，則先手獲勝次數高於後手。

三、<研究問題一>的關鍵數字是 K+1，後手必勝樣態是 P=n(K+1)。因為每輪的 K 值固定，所以關鍵數字出現的頻率是固定的，較容易預測。

四、<研究問題二>的關鍵數字是 $6\times2^{n-2}-1$，$n\geqq2$，後手必勝樣態是 P=2 或 $P=6\times2^{n-2}-1$，$n\geqq2$，先手必勝樣態是 $P=6\times2^{n-2}-1+X$，$n\geqq2$。因為每輪的 P 值都會變動，所以關鍵數字出現的頻率也不固定，較不容易預測。

五、<研究問題三>的關鍵數字是 4，必勝樣態是 P=4n。不管 P 值如何變動，只要利用我們設計的同餘互補模式，就必然會出現必勝樣態。

六、在三個研究問題中，必勝樣態都是後手必勝，而且都是在 P 值等於關鍵數字時出現。所以後手的動態規畫都是設法維持 P=關鍵數字，而先手的動態規畫則是設法在身分轉換時剛好讓 P 值呈現必勝狀態。

七、三個研究問題的獲勝策略並不相同：<研究問題一>是利用 MA=P 或 MB=P 而獲勝；<研究問題二>是利用例外規則 M=1 而完成 P=0；<研究問題三>則是在 P=2 時，利用 M=2 而獲勝；而在 P=1 時，則利用例外規則 M=1 獲勝。

八、透過研究問題的結果驗證，我們確定了關鍵數字與必勝樣態的存在，而我們的獲勝策略就是：「利用動態規劃來維持己方的必勝樣態」。

伍、討論

一、如果 P 是隨機取數，在這三種規則中，先手與後手的獲勝機率相同嗎？

討論結果：三種規則中的先手與後手的獲勝機率並不相同，都是先手優勢。

(一)、 在 M=1~K 的規則中，後手只有在 P 除以 K+1 的餘數為 0 時，才會出現必勝樣態。若 P 為隨機取數，則後手獲勝機率為$\frac{1}{1+K}$，而先手獲勝機率為$1-\frac{1}{1+K}$。只有在 K=1 時先手與後手的獲勝機率才會相等，各為$\frac{1}{2}$，而後隨著 K 值增加，先手的獲勝機率也會大幅增加。

(二)、 在 K≦$\frac{P}{2}$，M=1～$\frac{P}{2}$規則中，後手只有在 P=2 與 P=$6\times2^{n-2}-1$ 時才出現必勝樣態。因為 K 值並不固定，所以先手與後手的獲勝機率也不固定。若 P 為隨機取數，在 $6\times2^{n-2}-1$≦P 的條件下，後手獲勝機率為$\frac{n}{P}$，先手為$\frac{P-n}{P}$，隨著 P 值增加，先手獲勝機率會大幅增加。

(三)、 在 M為質數規則中，後手只有在 P>3 且 P÷4 的餘數為 0 時才會出現必勝樣態，後手獲勝的機率為$\frac{1}{4}$，先手獲勝機率為$\frac{3}{4}$，先手依然占有優勢。

從以上討論中發現，不管哪一種規則，只要 P 值是隨機取數，都是先手的獲勝機率較高。

二、如果將<研究問題二>修改為：< 若每輪的 K 值≦$\frac{P}{3}$，M=1~$\frac{P}{3}$是否存在獲勝策略？例外規則：當$\frac{P}{3}$<1 時，強制 M=1 >，是否依然存在獲勝策略呢？

討論結果：我們按照「模型計算→數學歸納→動態規劃→驗證實驗結果」的研究過程進行討論，發現即使修改 K 和 M 的條件限制，一樣會出現關鍵數字，所以依然存在獲勝策略。

(一)、 模型計算：我們以 P=92 建立模型如下。

P值	獲勝者	說明
1	先手	強制M=1
2	後手	強制MA=1 、MB=1 。
3	先手	MA必為1 ，先手轉換身分進入P=2
4	後手	MA=1 ，MB=1 ，進入P=2
5	先手	MA=1 ，先手轉換身分進入P=4
6	先手	MA=2 ，先手轉換身分進入P=4
7	後手	MA=1~2 ，MB=2~1 ，進入P=4
8	先手	MA=1 ，先手轉換身分進入P=7
9	先手	MA=2 ，先手轉換身分進入P=7
10	先手	MA=3 ，先手轉換身分進入P=7
11	後手	MA=1~3 ，MB=3~1 ，進入P=7
12	先手	MA=1 ，先手轉換身分進入P=11
13	先手	MA=2 ，先手轉換身分進入P=11
14	先手	MA=3 ，先手轉換身分進入P=11
15	先手	MA=4 ，先手轉換身分進入P=11
16	先手	MA=5 ，先手轉換身分進入P=11
17	後手	MA=1~5 ，MB=5~1 ，進入P=11
18~25	先手	MA=1~8 ，先手轉換身分進入P=17
26	後手	MA=1~8 ，MB=8~1 ，進入P=17
27~39	先手	MA=1~13 ，先手轉換身分進入P=26
40	後手	MA=1~13 ，MB=13~1 ，進入P=26
41~60	先手	MA=1~20 ，先手轉換身分進入P=40
61	後手	MA=1~20 ，MB=20~1 ，進入P=40
62~91	先手	MA=1~30 ，先手轉換身分進入P=61
92	後手	MA=1~30 ，MB=30~1 ，進入P=61
圖表來源 ： 本圖表由作者親自製作 。		

表格說明：如<研究問題 二 >之模型表格說明。

(二)、 數學歸納：從上表中發現關鍵數字為 2、4、7、11、17、26、40、61 和 92，我們以一個公式來歸納關鍵數字的規律：a_n=ROUNDDOWN［$a_{(n-1)}$ ÷2x3+1］(ROUNDDOWN 表示無條件捨去至整數位)。例如:n=5，則 $a_5=a_4$÷2x3+1=11÷2x3+1=17.5≈17。經過驗算，發現本表的關鍵數字都符合這個規律，所以我們推論：第 10 個關鍵數字應為 92÷2x3+1=139。而實際進行遊戲，發現當 MA=1~46 時，MB=46~1，P-(MA+MB)=139-47=92，證實我們的推論是正確的！

(三)、 動態規劃：當 P=關鍵數字 a_n +X 時，先手拿取 MA=X，使得 P=a_n。例如 P=91=61+30 時，則 MA=X=30，表示先手應拿取 30 個，使得 P=61 且轉換身分為後手，然後依此模式進入 P=2 而獲勝。後手則必須設法維持 MA+MB=a_n-$a_{(-1)}$的必

勝樣態且保持後手身份。例如 P=92，若 MA=1~30，則 MB=30~1，使得 MA+MB=92-61=31。後手依此模式，始終維持 P=關鍵數字而獲勝。

(四)、 驗證實驗結果：依上述數學歸納之規律，我們推論第 10 個關鍵數字為 92÷2×3+1=139，然後我們用 SCRATCH 撰寫遊戲程式(遊戲網址參見柒.參考文獻八)，經過反覆測試，確認無誤。我們將 10000 以下的關鍵數字列表如下：

A	B	C	D	E	F	G
編號	關鍵數字	程式預測下一個關鍵數字	B/2	D*3	E+1	F與C差距
1	2					
2	4	7	2	6	7	0
3	7	11	3.5	10.5	11.5	0.5
4	11	17	5.5	16.5	17.5	0.5
5	17	26	8.5	25.5	26.5	0.5
6	26	40	13	39	40	0
7	40	61	20	60	61	0
8	61	92	30.5	91.5	92.5	0.5
9	92	139	46	138	139	0
10	139	209	69.5	208.5	209.5	0.5
11	209	314	104.5	313.5	314.5	0.5
12	314	472	157	471	472	0
13	472	709	236	708	709	0
14	709	1064	354.5	1063.5	1064.5	0.5
15	1064	1597	532	1596	1597	0
16	1597	2396	798.5	2395.5	2396.5	0.5
17	2396	3595	1198	3594	3595	0
18	3595	5393	1797.5	5392.5	5393.5	0.5
19	5393	8090	2696.5	8089.5	8090.5	0.5
20	8090	12136	4045	12135	12136	0
規律：若E欄帶有小數，則無條件進位；若為整數則直接+1						
圖表來源：本圖表為作者親自製作。						

我們發現：即使更改規則為「K 值≦$\frac{P}{3}$，M=1~$\frac{P}{3}$」後，本遊戲依然存在獲勝策略。我們將此發現應用在「K 值≦$\frac{P}{4}$，M=1~$\frac{P}{4}$」的規則中，發現依然存在關鍵數字：a_n=ROUNDDOWN [$a_{(n-1)}$÷3×4+1](實驗過程及結果請參見我們的研究日誌)。所以我們推論：對最多可拿取$\frac{1}{N}$的遊戲而言，當$\frac{P}{N}$≧1 時，關鍵數字之公式為：a_n=ROUNDDOWN [$a_{(n-1)}$÷N×(N+1)+1]。其獲勝策略為：利用動態規劃維持 P= a_n的必勝狀態。以<研究問題 二>的「K 值≦$\frac{P}{2}$，M=1~$\frac{P}{2}$」規則做驗證，依公式計算可得 a_7=a_6÷1×2+1=95÷1×2+1=191，雖然計算方法不同，但計算結果相同！

三、研究結果如何應用在 Nim 遊戲？

說明：Nim 遊戲的種類繁多，但基本都是採取「多個 P 值同時存在，且 M=1~K(M 與 K 為固定值)」的規則設計。

討論結果：以下我們以「桌上有 X、Y、Z 三堆金幣，分別是 6 個、7 個、8 個，2 人輪流拿取，每次可拿 1 個或 2 個，必須取完 X 堆才能拿取 Y 堆、Y 堆取完才能拿取 Z 堆，不可跨區拿取。最終取完金幣者獲勝。」的 Nim 遊戲為例，說明如何經過模型計算、數學歸納、動態規劃和驗證實驗結果，找到獲勝策略。

在這個 Nim 遊戲中，PX=6、PY=7、PZ=8。M=1~2，K=2，關鍵數字是 K+1=3。

1. **模型計算：**根據我們在<研究問題一>所建立的模型計算結果，可以預測：P=6，P 除以 3 的餘數為 0，後手必勝；P=7，P 除以 3 的餘數為 1，先手必勝；P=8，P 除以 3 的餘數為 2，先手必勝。
2. **數學歸納：**A、B 兩人輪流拿，如果 A 先拿，其變化如下：

   (1).X 堆變化：本輪為 P=n(K+1)樣態，A 為先手拿取 MA 個，B 拿取 K+1-MA 個，最終 B 獲勝。

   (2).Y 堆變化：本輪為 P=n(K+1)+1 樣態，因 B 在 X 堆為最後拿取者，所以本輪依然是 A 為先手。不管 A 拿取幾個，B 都拿取 K+1-MA 個，最終必然剩下 P=1 個，A 必然獲勝。

   (3). Z 堆變化：本輪為 P=n(K+1)+2 樣態，因為 B 在 Y 堆強迫 A 獲勝，所以本輪變成 B 為先手。B 先拿取 2 個，完成轉換身分為後手，而後 A 拿取 MA 個，B 拿取 K+1-MA 個，最終 B 獲勝。
3. **動態規劃：**根據上面的數學歸納，遊戲的勝負關鍵在於誰能取得 Z 堆的先手，也就是說，先在 Z 堆開局的遊戲回合中取走 2 個的玩家必為最後獲勝者。而要成為 Z 堆先手身分的條件是 Y 堆的輸家；而 Y 堆輸家的身分必須是 Y 堆後手；而要成為 Y 堆後手身分的條件是 X 堆的獲勝者。反推遊戲雙方進行情形如下：

   Z 堆獲勝→Z 堆先手→Y 堆失敗→Y 堆後手→X 堆獲勝→X 堆後手

   所以本局為後手必勝的樣態，獲勝策略為保持「X 堆獲勝、Y 堆失敗」。
4. **驗證實驗結果：**我們將以上的動態規劃，根據 MA 和 MB 的變化情形作成表格，證明先手無論怎麼拿取，後手都必然獲勝。

(1).X 堆動態規劃變化情形如下表，B 最後都以後手身分獲勝。

遊戲回合	A拿取數	B拿取數	P值6，A=先手
1	M1=1~2	1+2-M1	6-M1-(1+2-M1)=3
2	M2	1+2-M2	3-M2-(1+2-M2)=0
圖表來源：本圖表由作者親自製作。			

(2).Y 堆動態規劃變化情形如下表，B 會維持 MA+MB=3 的動態規劃，強制 A 以 M=1 獲勝而取得 Z 堆的先手身分。

遊戲回合	A拿取數	B拿取數	P值7，A=先手
1	M1=1~2	1+2-M1	7-M1-(1+2-M1)=4
2	M2=1~2	1+2-M2	4-M2-(1+2-M2)=1
3	M3=1	0	
圖表來源：本圖表由作者親自製作。			

(3).Z 堆動態規劃變化情形如下表，B 會先拿取 2 個，維持後手身分與 P=n(K+1)樣態而獲勝。

遊戲回合	A拿取數	B拿取數	P值8，B=先手
1		2	8-2=6
2	M2=1~2	1+2-M2	6-M2-(1+2-M2)=3
3	M3=1~2	1+2-M3	3-M2+(1+2-M3)=0
圖表來源：本圖表由作者親自製作。			

5. 如果取消 X 堆→Y 堆→Z 堆的順序限制，則先手可以利用「MA=1 且轉換身分」的獲勝策略，重新進行動態規劃，進而扭轉勝負局面。

(1).A 先拿取 Z 堆中的 1 個，使得 PX=6、P=7、PZ=7。

(2).不管 B 拿取哪堆，A 就跟著拿取哪堆，始終維持 PX=n(K+1)、PY=n(K+1)+1、PZ=n(K+1)+1 的必勝樣態。

(3).根據 A 的動態規劃，必然是 PX 後手勝、PY 與 PZ 先手勝。

(4).當 PX=0 率先出現時，因為 A 已轉換身分為後手，必在 PX 獲勝，B 必然為 PY 或 PZ 的先手，且在 PY 或 PZ 中獲勝。若 B 在 PY 獲勝，則 A 成為 PZ 先手，必勝。若 B 在 PZ 獲勝，則 A 成為 PY 先手，必勝。

(5). 當 PY=0 率先出現時，因為 A 已轉換身分為後手，B 必在 PY 獲勝。則 A 選擇 PZ 的先手且必然獲勝而成為 PX 的後手，則 A 必勝。

(6). 若 PZ=0 率先出現時，同(5)，A 必勝。

陸、結論

一、經過模型計算，我們發現在 P=隨機取數的情況下，先手的獲勝機率確實高於後手：<研究問題一>中出現 P=N(K+1)的機率只有$\frac{1}{1+K}$，而 K 越大，$\frac{1}{1+K}$越小。在<研究問題二>中出現 P=6×2^{N-2}-1 的機率則是以近乎$\frac{1}{2}$倍的速率急速縮小。這是因為當 N 增加 1 時，P 會以近乎 2 倍的比率增加。例如當 N=4 時，P4=6×2^{4-2}-1=6×4-1=23；當 N=5 時，P5=6×2^{5-2}-1=6×8-1=47，而$\frac{P4}{P5}$=$\frac{23}{47}$相當接近於$\frac{1}{2}$。至於<研究問題三>中出現 P=4N 的機率則固定為$\frac{1}{4}$。

二、根據數學歸納，我們確認本研究的三種巴什博弈規則，存在著三個關鍵數字：P=K+1、P=6×2^{0}-1 和 P=4。這三個關鍵數字關係到後手的必勝樣態，而如何設法維持己方的必勝狀態，就是本研究的獲勝策略。

三、先手可以透過 MA=X 和身分轉換同時出現的方式，造成 P-X=n(K+1)、P-X=6×2^{n-2}-1 和 P-X=4N 的樣態而完成 P=0 或是利用例外規則而最終獲勝。

四、雖然我們無法確定質數的最大值，也無法熟記所有的質數；但是，透過同餘互補模式，我們還是可以完成必勝樣態：不論 P 值多大，只要找出 P÷ 4 的餘數，就可以用 2、3、5 這三個數完成 P=4N 的樣態。

五、在<研究問題一>中，因為 M 最小值與 P 的最小值相同，所以不會產生雙方平手的僵局。在<研究問題二>中，當 P=1 時，K=$\frac{1}{2}$，形成 M>K 的規則矛盾。在<研究問題三>中，當 P=1 時，會形成 M>P 的矛盾現象。為了解決 M>K 或 M>P 的困境，我們設定了「強制 M=1」的例外規則。

六、利用<討論 二>的歸納公式，我們推論出「每次最多可拿取$\frac{P}{K}$的遊戲，其關鍵數字公式為：a_n=ROUNDDOWN［$a_{(n-1)}$ ÷K×(K+1)+1］。」，確認本作品的研究結果有助於建立不同規則的獲勝策略！

七、我們將獲勝策略的觀念應用在不同的遊戲，以模型計算、數學歸納、動態

規劃和驗證實驗結果的步驟順利找出 $K \leqq \frac{P}{N}$ 和三堆Nim 遊戲的獲勝策略。

八、我們的研究結果，可以應用在很多層面，如：資源配置與競爭、談判與協商……等。例如:有兩個國家為爭奪利益而進行談判，雙方都有不同的策略（如讓步、堅持、威脅等）。我們可以將利益視為 P 值，策略視為 M 值，談判過程視為動態規劃，雙方可以因應對方的 MA 值，調整己方的 MB 值（如調整條件，威嚇對方……等），最終找到必勝狀態。

總而言之，巴什博弈雖然是一種減法賽局，但其實是考驗玩家能否透過模型計算、數學歸納、動態規劃和驗證實驗結果找出獲勝策略。而在遊戲過程中，玩家不但要利用模型計算和數歸納找到關鍵數字，還要設法利用動態規劃維持必勝樣態，同時更要巧妙的運用身分轉換的方式，才能獲得最終勝利！

柒、參考文獻

一、 網路影片.(2025) 海盜拿金幣 https://www.youtube.com/watch?v=1olHX3naEww

二、 羅嵩詠、陳宇軒、蔡承璋. (2007). 撿石頭(中華民國第四十七屆中小學科學展覽會國小組數學科作品)。https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/elementary/080407.pdf

三、 黃敏晃.(2011). 讓我們來玩數學吧！.天下遠見出版股份有限公司。

四、 維基百科.(2025).零和賽局。https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9B%B6%E5%92%8C%E5%8D%9A%E5%BC%88

五、 李信昌(昌爸工作坊).(2025).搶數字遊戲。http://www.mathland.idv.tw/ggb/ggbhtml5/grab.htm

六、 WEBSIM(作者用 AI 生成程式).(2025).代數 P 輸入。https://websim.com/p/avgereovtwn36a2wch14

七、 SCRATCH 官網(作者自製程式).(2025).質數拿金幣。https://scratch.mit.edu/projects/1117084888/

八、 SCRATCH 官網(作者自製程式).(2025). 0512-2 只能拿 3 分之 1。https://scratch.mit.edu/projects/1174164876/editor/

【評語】080411

本作品從「海盜分金幣，誰拿最後一個輸」的網路影片出發，研究原始問題和兩種變形類似題，找出來必贏的策略。透過大量實驗觀察、再歸納、然後得出結論，算是完整的探討與研究。可惜的是：這三題都容易在書本中或網路上找到。為了”看似公平”，賽局博弈問題的設計不容易，然後才有先手或後手必贏的策略之繁瑣研究；經典的題型就是 Nim game。巴什博弈或是 Nim game 都是賽局理論的教科書級別的問題，它的變形也蠻多的。作為科展題目，變形老問題的要點是：以前好像沒人想過可以這樣變化，但是又不能變到完全做不出來。建議善用網路做預選題目的篩檢。

作品海報

先發致勝！巴什博弈獲勝策略研究

摘要

巴什博弈是一種減法賽局，我們針對 3 種不同的遊戲規則進行研究，發現「M 的條件限制會改變關鍵數字」，其獲勝策略如下：

1. 若 M=1~K，關鍵數字為 K+1，後手保持 P=N(K+1) 樣態，必勝；
2. 若 M=1~$\frac{P}{2}$，關鍵數字為 2、5、11、23、47…，後手「保持 P=6×2^{n-2}-1 樣態」必勝。
3. 若 M為質數，則關鍵數字為 4，先手利用「同餘互補」的模式，先拿走 5 或 2 或 3，然後持續保持 P=Nx4 樣態，必勝。

壹、 前言

一、 研究動機

(一).<研究問題一>是屬於傳統的簡單 Nim(拈)遊戲，我們是根據海盜拿金幣的影片而開始進行研究的。

(二).<研究問題二>是男生組想讓女生組無法掌握關鍵數字，後來才從 2→5→11→23…關鍵數字中，找出「保持 6×2^{n-2}-1 樣態」的獲勝策略。

(三).至於<研究問題三>的發想，則是因為女生組想要比賽老師教的質數表，後來男生組利用「4 的倍數必是 2 的偶數倍」的特性，找到同餘互補模式的獲勝策略。

二、 研究目的

<研究問題一：若固定 K 值，M=1~K 是否存在獲勝策略？>

<研究問題二：若每輪的 K 值 K≦$\frac{P}{2}$，M=1~$\frac{P}{2}$是否存在獲勝策略？例外規則：當 P=1 時，強制 M=1>

<研究問題三：若 M 為質數，每輪的 K 值<P，是否存在獲勝策略？例外規則：當 P=1 時，強制 M=1>

三、 應用的數學教材單元

年級	單元	版本	在本作品中的應用
六上	第一單元 質因數分解	南一	<研究問題三> 判斷 M 是否為質數？
五下	第一單元 分數的計算	南一	<研究問題二> 確認每輪的 K 值與 P 值變化情形。
五上	第二單元 因數與倍數	南一	<研究問題一> 關鍵數字的數學歸納
四下	第四單元 整數的除法	康軒	<研究問題三> 同餘互補模式的餘數判斷

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

四、 研究限制

(一)、 我們是以雙人巴什博弈為研究對象，完成 P=0 者獲勝。

(二)、 本研究的金幣個數都是大於 0 的正整數。

(三)、 本研究使用的英文字母變數定義如下：

1. A、B 代表遊戲雙方，通常以 A 為率先拿取金幣的玩家。
2. MA 和 MB 分別代表 A 和 B 玩家在該回合拿取的數量。
3. K 為大於 0 的正整數且為 M 的最大值。
4. N 與 n 為大於 0 的正整數。
5. PA 和 PB 分別代表在輪到 A 和 B 回合時桌上的金幣數量。

貳、 研究設備及器材

桌上型電腦 1 台、Excel 軟體、筆記簿與研究日誌 2 本

參、 研究過程或方法

針對本作品的三個研究問題，我們都固定採取以下四個研究過程：

一、 **模型計算 (Modular Arithmetic)：**在採取對己方最有利選擇的情況下，列出不同 M 與 P 的變化紀錄並判斷勝負。

二、 **數學歸納 (Mathematical Induction)：**觀察記錄表格，歸納出先手與後手的關鍵數字與必勝樣態。

三、 **動態規劃 (Dynamic Programming)：**分別從先手和後手的角度考慮，規劃如何動態調整 M 值以維持必勝樣態的 P 值。

四、 **驗證實驗結果(Verify experimental results)：**驗證我們的獲勝策略是否適用於不同的 P 值。

<研究問題一：若固定 K 值，M=1~K 是否存在獲勝策略？>

(一)、 **模型計算：**分別以 K=1、K=2 和 K=3 建立 P=10、P=21 和 P=32 的 3 組 M 值變化模型。

K=1、 P=10

P值	關鍵者	說明
1	先手	MA=1
2	後手	MA=1，MB=1
3	先手	MA=1，身分轉換，進入P=2
4	後手	MA=1，MB=1，身分不變，進入P=3
5	先手	MA=1，身分轉換，進入P=4
6	後手	MA=1，MB=1，身分不變，進入P=5
7	先手	MA=1，身分轉換，進入P=6
8	後手	MA=1，MB=1，身分不變，進入P=7
9	先手	MA=1，身分轉換，進入P=8
10	後手	MA=1，MB=1，身分不變，進入P=9

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

K=2、P=21

P值	關鍵者	說明
1~3	先手	MA=1~3
4	後手	若MA=1~3，則MB=3~1
5~7	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=4
8	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=4
9~11	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=8
12	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=8
13~15	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=12
16	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=12
17~19	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=16
20	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=16
21~23	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=20
24	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=20
25~27	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=24
28	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=24
29~31	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=28
32	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=28

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

K=3、P=32

P值	關鍵者	說明
1~3	先手	MA=1~3
4	後手	若MA=1~3，則MB=3~1
5~7	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=4
8	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=4
9~11	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=8
12	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=8
13~15	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=12
16	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=12
17~19	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=16
20	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=16
21~23	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=20
24	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=20
25~27	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=24
28	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=24
29~31	先手	MA=1~3，身分轉換，進入P=28
32	後手	若MA=1~3，則MB=3~1，身分不變，進入P=28

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

(二)、 數學歸納：

若固定 K 值，在 M=1~K 規則中，存在著關鍵數字 K+1。在 P>K+1 時，AB 雙方都應該設法完成 P=n(K+1)，因為此時可以讓己方身分變為後手而此時為後手必勝，所以 P=n(K+1)是必勝樣態。

(三)、 動態規劃：

1. 當 P 除以 K+1 的餘數為 0 時，後手最有利的動態規劃是：「如果先手拿取 MA 個，則後手拿取 MB=K+1-MA 個，使得 P 始終保持 n(K+1)狀態，最終必能完成 P=0 而獲得勝利。」此時先手只能隨機拿取 M 個，等待後手犯錯才能以『身分轉換』的方法扭轉勝負。
2. 當 P 除以 K+1 的餘數為 X>0 時，先手最有利的動態規劃是：「先拿取 X 個，進入 P=n(K+1)樣態，利用『身分轉換』將己方轉為後手，然後按照後手的動態規畫，每次拿取 K+1-M 個，即可完成 P=0 而獲得勝利。」

(四)、 驗證實驗結果：

舉例 1： P=33，K=10，M=1~10

遊戲回合	A拿取數	B拿取數	P值
1	M1	1+10-M1	33-M1-(1+10-M1)=22
2	M2	1+10-M2	22-M2-(1+10-M2)=11
3	M3	1+10-M3	11-M3-(1+10-M3)=0

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

舉例： P=100，K=10，M=1~10

遊戲回合	B拿取數	A拿取數	P值
1		1	99
2	M2	11-M2	99-M2-(11-M2)=88
3	M3	11-M3	88-M2-(11-M2)=77
4	M4	11-M4	77-M2-(11-M2)=66
5	M5	11-M5	66-M2-(11-M2)=55
6	M6	11-M6	55-M2-(11-M2)=44
7	M7	11-M7	44-M2-(11-M2)=33
8	M8	11-M8	33-M2-(11-M2)=22
9	M9	11-M9	22-M2-(11-M2)=11
10	M10	11-M10	11-M2-(11-M2)=0

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

實驗結果證實：<研究問題一>存在獲勝策略：利用 K+1 這個關鍵數字，維持「己方為後手身分且 P=n(K+1)」的動態規劃，必然獲勝。

<研究問題二：若每輪的 K 值 $K \leqq \frac{P}{2}$，$M=1 \sim \frac{P}{2}$是否存在獲勝策略？例外規則：當 P=1 時，強制 M=1>

(一)、 **模型計算：**

因為 K 值是隨 P 值變動，直接以 P=95 建立模型。

P值	獲勝者	說明
1	先手	強制M=1
2	後手	MA必為1，後手轉換身分進入P=1
3~4	先手	MA=1~2，先手轉換身分進入P=2
5	後手	若MA=1~2，則MB=2~1，進入P=2
6~10	先手	MA=1~5，先手轉換身分進入P=5
11	後手	若MA=1~5，則MB=5~1，進入P=6
12~22	先手	MA=1~11，先手轉換身分進入P=11
23	後手	若MA=1~11，則MB=11~1，進入P=11
24~46	先手	MA=1~23，先手轉換身分進入P=23
47	後手	若MA=1~23，則MB=23~1，進入P=23
48~94	先手	MA=1~47，先手轉換身分進入P=47
95	後手	若MA=1~47，則MB=47~1，進入P=47

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

(二)、 數學歸納

在 $K \leqq \frac{P}{2}$，$M=1 \sim \frac{P}{2}$規則中，當 P>2 以後，存在著關鍵數字 $6 \times 2^{n-2}-1$，n≧2，為後手必勝樣態。因此，若 P>2，則 AB 雙方都應該設法完成 $P=6 \times 2^{n-2}-1$ 的必勝樣態且保持己方為後手，必能確保獲勝。

(三)、 動態規劃

根據模型計算和數學歸納結果，A、B 雙方最有利的動態規劃如下：

1. 當 P=1 時，先手利用例外規則拿取 1 個，完成 P=0 而獲勝。
2. 當 P=2 時，MA=1，後手利用例外規則完成 P=0 而獲勝。
3. 當 P>2 且 $P=6 \times 2^{n-2}-1$ 時，後手拿取 $6 \times 2^{n-3}$–MA 個，使得 P 始終保持 $6 \times 2^{n-2}-1$ 狀態，最終必能進入 P=2 而利用例外規則獲勝。
4. 當 P>2 且 $P=6 \times 2^{n-2}-1+X$ 時，先手先拿取 X 個，進入 $P=6 \times 2^{n-2}-1$ 狀態，同時身分轉換為後手，最終必能進入 P=2 而獲勝。

(四)、 **驗證實驗結果**

舉例 1：P=1535，n=12，$K \leqq \frac{P}{2}$，M=1~K

遊戲回合	MA	PA	MB	PB
1	1-767	1535-MA	6*128-MA	1535-MA-(6*128-MA)=767 (以下計算方法相同)
2	1-383	767-MA	6*64-MA	383
3	1-191	383-MA	6*32-MA	191
4	1-95	191-MA	6*16-MA	95
5	1-47	95-MA	6*8-MA	47
6	1-23	47-MA	6*4-MA	23
7	1-11	23-MA	6*2-MA	11
8	1-5	11-MA	6*1-MA	5
9	1-2	5-MA	3-MA	2
10	1 (M=1)	1	1 (例外規則)	0

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

舉例 2： P=400，n=8，$K \leqq \frac{P}{2}$，M=1~K

遊戲回合	MA	PA	MB	PB
1	17	400-17=383	M1	383-M1
2	192-M1	191	M2	191-M2
3	96-M2	95	M3	95-M3
4	48-M3	47	M4	47-M4
5	24-M4	23	M5	23-M5
6	12-M5	11	M6	11-M6
7	6-M6	5	M7	5-M7
8	3-M7	2	1	1
9	1	0	無法拿取	

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

實驗結果證實：利用 $P=6 \times 2^{n-2}-1$ 的後手必勝樣態，維持「己方為後手身分且 $P=6 \times 2^{n-2}-1$」的動態規劃，<研究問題二>確實存在獲勝策略。

<研究問題三：若 M 為質數，每輪的 K 值<P，是否存在獲勝策略？例外規則：當 P=1 時，強制 M=1>

(一)、 模型計算

因為超過 100 的質數較不容易辨認，而且老師教我們的質數表也只有到 97，所以我們經過討論後，決定直接以 P=100 來建立模型。

在<研究問題三>中，先手的最有利選擇是拿取「P 除以 4 的餘數」；而後手的最有利選擇則是根據先手除以 4 的餘數而做出相對應的選擇。我們稱前者為「同餘模式」、後者為「互補模式」，兩者並稱「同餘互補模式」:

1. **同餘模式：**若確定 P 為質數且 P 除以 4 的餘數為 1 或 2 或 3，則 MA=1 或 2 或 3。這個模式可以確保 P 值必是 4 的倍數。因為**所有的質數都不是 4 的倍數**，所以拿取後的 P 值必然不是質數，而使得先手立於不敗之地。
2. **互補模式：**若對方拿取數量除以 4 的餘數為 1 或 2 或 3 時，則己方拿取數量為 3 或 2 或 5。因為所有的質數都不是 4 的倍數，所以不會出現餘數為 0 的情形。利用互補模式，我們可以確保 MA+MB=4n。

P值	獲勝者	說明	P值	獲勝者	說明
1	先手	強制M=1	51	先手	MA=3，轉換身分進入P=48
2	先手	P為質數，先手獲勝。	52	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
3	先手	P為質數，MA=3	53	先手	P為質數，先手獲勝。
4	後手	若MA=2則MB=2，若MA=3則MB=1，後手完成P=0而獲勝	54	先手	MA=2，轉換身分進入P=52
5	先手	P為質數，MA=5	55	先手	MA=3，轉換身分進入P=52
6	先手	MA=2，轉換身分進入P=4	56	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
7	先手	P為質數，先手獲勝。	57	先手	MA=5，轉換身分進入P=52
8	後手	*同餘互補模式，進入P=4n	58	先手	MA=2，轉換身分進入P=56
9	先手	MA=5，轉換身分進入P=4	59	先手	P為質數，先手獲勝。
10	先手	MA=2，轉換身分進入P=8	60	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
11	先手	P為質數，先手獲勝。	61	先手	P為質數，先手獲勝。
12	後手	*同餘互補模式，進入P=4n	62	先手	MA=2，轉換身分進入P=60
13	先手	P為質數，先手獲勝。	63	先手	MA=3，轉換身分進入P=60
14	先手	MA=2，轉換身分進入P=12	64	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
15	先手	MA=3，轉換身分進入P=12	65	先手	MA=5，轉換身分進入P=60
16	後手	*同餘互補模式，進入P=4n	66	先手	MA=2，轉換身分進入P=64
17	先手	P為質數，先手獲勝。	67	先手	P為質數，先手獲勝。
18	先手	MA=2，轉換身分進入P=16	68	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
19	先手	P為質數，先手獲勝。	69	先手	MA=5，轉換身分進入P=64
20	後手	*同餘互補模式，進入P=4n	70	先手	MA=2，轉換身分進入P=68
21	先手	MA=5，轉換身分進入P=16	71	先手	P為質數，先手獲勝。
22	先手	MA=2，轉換身分進入P=20	72	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
23	先手	P為質數，先手獲勝。	73	先手	P為質數，先手獲勝。
24	後手	*同餘互補模式，進入P=4n	74	先手	MA=2，轉換身分進入P=72
25	先手	MA=5，轉換身分進入P=20	75	先手	MA=3，轉換身分進入P=72
26	先手	MA=2，轉換身分進入P=24	76	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
27	先手	MA=3，轉換身分進入P=24	77	先手	MA=5，轉換身分進入P=72
28	後手	*同餘互補模式，進入P=4n	78	先手	MA=2，轉換身分進入P=76
29	先手	P為質數，先手獲勝。	79	先手	P為質數，先手獲勝。
30	先手	MA=2，轉換身分進入P=28	80	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
31	先手	P為質數，先手獲勝。	81	先手	MA=5，轉換身分進入P=76
32	後手	*同餘互補模式，進入P=4n	82	先手	MA=2，轉換身分進入P=80
33	先手	MA=5，轉換身分進入P=28	83	先手	P為質數，先手獲勝。
34	先手	MA=2，轉換身分進入P=32	84	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
35	先手	MA=3，轉換身分進入P=32	85	先手	MA=5，轉換身分進入P=80
36	後手	*同餘互補模式，進入P=4n	86	先手	MA=2，轉換身分進入P=84
37	先手	P為質數，先手獲勝。	87	先手	MA=3，轉換身分進入P=84
38	先手	MA=2，轉換身分進入P=36	88	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
39	先手	MA=3，轉換身分進入P=36	89	先手	P為質數，先手獲勝。
40	後手	*同餘互補模式，進入P=4n	90	先手	MA=2，轉換身分進入P=88
41	先手	P為質數，先手獲勝。	91	先手	MA=3，轉換身分進入P=88
42	先手	MA=2，轉換身分進入P=40	92	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
43	先手	P為質數，先手獲勝。	93	先手	MA=5，轉換身分進入P=88
44	後手	*同餘互補模式，進入P=4n	94	先手	MA=2，轉換身分進入P=92
45	先手	MA=5，轉換身分進入P=40	95	先手	MA=3，轉換身分進入P=92
46	先手	MA=2，轉換身分進入P=44	96	後手	*同餘互補模式，進入P=4n
47	先手	P為質數，先手獲勝。	97	先手	P為質數，先手獲勝。
48	後手	*同餘互補模式，進入P=4n	98	先手	MA=2，轉換身分進入P=96
49	先手	MA=5，轉換身分進入P=44	99	先手	MA=3，轉換身分進入P=96
50	先手	MA=2，轉換身分進入P=48	100	後手	*同餘互補模式，進入P=4n

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

(二)、 數學歸納：

在 M 為質數的規則中，存在著關鍵數字 4，以 P=7 為例：先手可拿取 MA=7 使得 P=0，亦可拿取 MA=3 進入同餘互補模式，利用 P=4 而獲勝。

(三)、 動態規劃：

當 P>4 且 P=4n+X 時，先手先拿取 X 個，進入 P=4n 狀態，轉換為後手，最終進入 P=1 而獲勝。

當 P=4n 時，後手利用「互補模式」保持 P=4n 的必勝樣態，後手必勝。

(四)、 驗證實驗結果：

舉例 1：P=105， P÷4 **的餘數為 1**。

遊戲回合	MA	PA	MB	PB
1	1	105-1=104	MB1(小於PA1的任意質數)	PA1-MB1
2	PB1÷4的餘數	PB1-MA2(為4的倍數)	MB2(小於PA2的任意質數)	PA2-MB2
3	PB2÷4的餘數	PB2-MA3(為4的倍數)	MB3(小於PA3的任意質數)	PA3-MB3
4	PB3÷4的餘數	PB3-MA4(為4的倍數)	MB4(小於PA4的任意質數)	PA4-MB4
5	PB4÷4的餘數	PB4-MA5(為4的倍數)	MB5(小於PA5的任意質數)	PA5-MB5
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
n	PB(n-1)÷4的餘數	4	2或3	2或1
n+1	若PBn=2，則MA=2 若PBn=1，則MA=1	0	遊戲結束	

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

舉例 2： P=400，P÷4 的餘數為 0

遊戲回合	MA	PA	MB	PB
1	MA1(小於400的任意質數)	400-MA1	PA1÷4的餘數	PA1-MB1(為4的倍數) (以下計算方法相同)
2	MA2(小於PB1的任意質數)	PB1-MA2	PA2÷4的餘數	PA2-MB2(為4的倍數)
3	MA3(小於PB2的任意質數)	PB2-MA3	PA3÷4的餘數	PA3-MB3(為4的倍數)
4	MA4(小於PB3的任意質數)	PB3-MA4	PA4÷4的餘數	PA4-MB4(為4的倍數)
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
n	MAn	PB(n-1)-MAn	PAn÷4的餘數	4
n+1	2或3	2或1	若PA=2，則MB=2 若PA=1，則MB=1	0

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

肆、研究結果

一、經由模型計算→數學歸納→動態規畫→驗證實驗結果的研究過程，我們確認：在本作品的三個研究問題中都存在著獲勝策略。

二、若 P 值為隨機取數，則先手獲勝次數高於後手。

三、<研究問題一>的關鍵數字是 K+1，後手必勝樣態是 P=n(K+1)。

四、<研究問題二>的關鍵數字是 $6 \times 2^{n-2}-1$，n≧2，後手必勝樣態是 P=2 或 $P=6 \times 2^{n-2}-1$，n≧2，先手必勝樣態是 $P=6 \times 2^{n-2}-1+X$，n≧2。

五、<研究問題三>的關鍵數字是 4，必勝樣態是 P=4n。不管 P 值如何變動，只要利用我們設計的同餘互補模式，就必然會出現必勝樣態。

六、在三個研究問題中，必勝樣態都是後手必勝，而且都是在 P 值等於關鍵數字時出現。

七、三個研究問題的獲勝策略並不相同：<研究問題一>是利用 MA=P 或 MB=P 而獲勝；<研究問題二>是利用例外規則 M=1 而完成 P=0；<研究問題三>則是在 P=2 時，利用 M=2 而獲勝；而在 P=1 時，則利用例外規則 M=1 獲勝。

八、透過研究問題的結果，我們確定了關鍵數字與必勝樣態的存在，而我們的獲勝策略就是：「利用動態規劃來維持己方的必勝樣態」。

伍、討論

一、若 P 是隨機取數，在三種規則中，先手與後手的獲勝機率相同嗎？

討論結果：三種規則中的獲勝機率並不相同，都是先手優勢。

在<研究問題一>中，後手獲勝機率為$\frac{1}{1+K}$，而先手獲勝機率為$1-\frac{1}{1+K}$。在<研究問題二>中，後手獲勝機率為$\frac{n}{P}$，先手為 $1-\frac{n}{P}$。在<研究問題三>中，後手獲勝的機率為$\frac{1}{4}$，先手獲勝機率為$\frac{3}{4}$，先手占有優勢。

二、如果將<研究問題二>修改為：< 若每輪的 K 值≦$\frac{P}{3}$，M=1～$\frac{P}{3}$是否存在獲勝策略？例外規則：當$\frac{P}{3}$<1 時，強制 M=1 >，是否依然存在獲勝策略呢？

討論結果：我們按照「模型計算→數學歸納→動態規劃→驗證實驗結果」的研究過程進行討論，發現即使修改 K 和 M 的條件限制，一樣會出現關鍵數字，所以依然存在獲勝策略。

(一)、 **模型計算：**我們以 P=92 建立模型如下。

P值	獲勝者	說明
1	先手	強制M=1
2	後手	強制MA=1、MB=1。
3	先手	MA必為1，先手轉換身分進入P=2
4	後手	MA=1，MB=1，進入P=2
5	先手	MA=1，先手轉換身分進入P=4
6	先手	MA=2，先手轉換身分進入P=4
7	後手	MA=1~2，MB=2~1，進入P=4
8	先手	MA=1，先手轉換身分進入P=7
9	先手	MA=2，先手轉換身分進入P=7
10	先手	MA=3，先手轉換身分進入P=7
11	後手	MA=1~3，MB=3~1，進入P=7
12	先手	MA=1，先手轉換身分進入P=11
13	先手	MA=2，先手轉換身分進入P=11
14	先手	MA=3，先手轉換身分進入P=11
15	先手	MA=4，先手轉換身分進入P=11
16	先手	MA=5，先手轉換身分進入P=11
17	後手	MA=1~5，MB=5~1，進入P=11
18~25	先手	MA=1~8，先手轉換身分進入P=17
26	後手	MA=1~8，MB=8~1，進入P=17
27~39	先手	MA=1~13，先手轉換身分進入P=26
40	後手	MA=1~13，MB=13~1，進入P=26
41~60	先手	MA=1~20，先手轉換身分進入P=40
61	後手	MA=1~20，MB=20~1，進入P=40
62~91	先手	MA=1~30，先手轉換身分進入P=61
92	後手	MA=1~30，MB=30~1，進入P=61

圖表來源：本圖表由作者親自製作。

(二)、 **數學歸納：**從上表中發現關鍵數字為 2、4、7、11、17、26、40、61 和 92，我們以一個公式來歸納關鍵數字的規律：a_n=ROUNDDOWN [$a_{(n-1)}$ ÷2×3+1] (ROUNDDOWN 表示無條件捨去至整數位)。

(三)、 **動態規劃：**當 P=關鍵數字 a_n +X 時，先手拿取 MA=X，使得 P=a_n 且轉換身分為後手，然後依此模式進入 P=2 而獲勝。

(四)、 **驗證實驗結果：**依上述數學歸納之規律，我們用 SCRATCH 撰寫遊戲程式(遊戲網址參見柒.參考文獻八)，反覆測試 P<10000，結果如右圖。

A	B	C	D	E	F	G
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	2					
2	4	7	2	6	7	0
3	7	11	3.5	10.5	11.5	0.5
4	11	17	5.5	16.5	17.5	0.5
5	17	26	8.5	25.5	26.5	0.5
6	26	40	13	39	40	0
7	40	61	20	60	61	0
8	61	92	30.5	91.5	92.5	0.5
9	92	139	46	138	139	0
10	139	209	69.5	208.5	209.5	0.5
11	209	314	104.5	313.5	314.5	0.5
12	314	472	157	471	472	0
13	472	709	236	708	709	0
14	709	1064	354.5	1063.5	1064.5	0.5
15	1064	1597	532	1596	1597	0
16	1597	2396	798.5	2395.5	2396.5	0.5
17	2396	3595	1198	3594	3595	0
18	3595	5393	1797.5	5392.5	5393.5	0.5
19	5393	8090	2696.5	8089.5	8090.5	0.5
20	8090	12136	4045	12135	12136	0
[illegible]						

圖表來源：本圖表為作者親自製作。

我們推論：對最多可拿取$\frac{1}{N}$的遊戲而言，當$\frac{P}{N}$≧1 時，關鍵數字之公式為：a_n=ROUNDDOWN [$a_{(n-1)}$ ÷(N-1)×N)]+1。

三、研究結果如何應用在 Nim 遊戲？

討論結果：Nim 遊戲的種類繁多，都是多個 P 值同時存在，且採取 M=1~K 的規則設計。以下我們以「桌上有 X、Y、Z 三堆金幣，分別是 6 個、7 個、8 個，2 人輪流拿取，每次可拿 1 個或 2 個，必須取完 X 堆才能拿取 Y 堆、Y 堆取完才能拿取 Z 堆，不可跨區拿取。最終取完金幣者獲勝。」為例說明。

1. 模型計算：根據<研究問題一>的結論，可以預測：PX 後手必勝、PY 先手必勝、PZ 先手必勝。
2. 數學歸納：A、B 兩人輪流拿，如果 A 先拿，其變化如下：
   (1).X 堆變化：本輪為 P=n(K+1)樣態，A 為先手拿取 MA 個，B 拿取 K+1-MA 個，最終 B 獲勝。
   (2).Y 堆變化：本輪為 P=n(K+1)+1 樣態， A 為先手獲勝。
   (3). Z 堆變化：本輪為 P=n(K+1)+2 樣態，B 為先手獲勝。
3. 動態規劃：遊戲的勝負關鍵在於誰能取得 Z 堆的先手，反推遊戲雙方進行情形如下：
   <u>Z 堆獲勝→Z 堆先手→Y 堆失敗→Y 堆後手→X 堆獲勝→X 堆後手</u>
4. 實驗驗證：我們將以上的 MA 和 MB 的變化情形作成表格，證明後手都必然獲勝。

PX=6 動態規劃變化

遊戲回合	MA	PA	MB	PB
1	MA1=1~2	6-MA1	3-MA1	PA1-MB1=3
2	MA2=1~2	3-MA2	3-MA2	PA2-MB2=0

圖表來源：作者自製

PY=7 動態規劃變化

遊戲回合	MA	PA	MB	PB
1	MA1=1~2	7-MA1	3-MA1	PA1-MB1=4
2	MA2=1~2	4-MA2	3-MA2	PA2-MB2=1
3	MA3=1	0	0	0

圖表來源：作者自製

PZ=8 動態規劃變化

遊戲回合	MA	PA	MB	PB
1	0(後手)	8	2	PA1-MB1=6
2	MA2=1~2	6-MA2	3-MA2	PA2-MB2=3
3	MA3=1~2	3-MA3	3-MA3	PA3-MB3=0

圖表來源：作者自製

陸、結論

一、若 P 為隨機取數<研究問題一>中出現 P=N(K+1)的機率只有$\frac{1}{1+K}$。在<研究問題二>中出現 P=6x2^{N-2}-1 的機率則以近乎$\frac{1}{2}$倍的速率縮小。<研究問題三>中出現 P=4N 的機率則固定為$\frac{1}{4}$。

二、根據數學歸納，確認本研究存在著三種關鍵數字：P=K+1、P=6×2^0-1 和 P=4。這三個關鍵數字關係到後手的必勝樣態，而設法維持己方的必勝狀態，就是本研究的獲勝策略。

三、先手可以透過身分轉換方式，造成 P-X=n(K+1)、P-X=6×2^{n-2}-1 和 P-X=4N 的樣態而獲勝。

四、透過同餘互補模式，不論 P 值多大，都可以用 2、3、5 這三個數完成 P=4N 的樣態。

五、<研究問題一>因為 M 最小值與 P 的最小值相同，所以是零和賽局。<研究問題二>和<研究問題三>是非零和賽局，必須以「強制 M=1 的例外規則」來解決非零和賽局的困境。

六、我們推論：a_n=ROUNDDOWN [$a_{(n-1)}$ ÷(N-1)×N)]+1 是 K=$\frac{1}{N}$的遊戲規則的關鍵數字公式。

七、我們可以將必勝樣態與身分轉換的觀念應用在不同的 Nim 遊戲。

八、我們的研究結果，可以應用在很多層面，如：資源配置與競爭、談判與協商……等。

總而言之，巴什博弈雖然是一種減法賽局，但其實是考驗玩家能否透過模型計算、數學歸納和動態規劃找出獲勝策略。玩家不但要找到關鍵數字，還要利用動態規劃維持必勝樣態，才能獲得最終勝利！

柒、參考文獻

一、 網路影片.(2025) 海盜拿金幣 https://www.youtube.com/watch?v=1olHX3naEww

二、 羅嵩詠、陳宇軒、蔡承瑋. (2007). 撿石頭(中華民國第四十七屆中小學科學展覽會國小組數學科作品)。https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/elementary/080407.pdf

三、 黃敏晃.(2011). 讓我們來玩數學吧！.天下遠見出版股份有限公司。

四、 維基百科.(2025).零和賽局。 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9B%B6%E5%92%8C%E5%8D%9A%E5%BC%88

五、 李信昌(昌爸工作坊).(2025).搶數字遊戲。 http://www.mathland.idv.tw/ggb/ggbhtml5/grab.htm

六、 WEBSIM(作者用 AI 生成程式).(2025).代數 P 輸入。 https://websim.com/p/avgereovtwn36a2wchl4

七、 SCRATCH 官網(作者自製程式).(2025).質數拿金幣。 https://scratch.mit.edu/projects/1117084888/

八、 SCRATCH 官網(作者自製程式).(2025). 0512-2 只能拿 3 分之 1。 https://scratch.mit.edu/projects/1174164876/editor/