中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

佳作

080409

妙筆生花-探討圓形一筆畫不相交圖形

學校名稱： 國立東華大學附設實驗國民小學

作者：	指導老師：
小六 許逸喆	李昕潔
小六 方培安	徐于晶
小六 楊昀熹	

關鍵詞： 圓形一筆畫、排列、解鎖

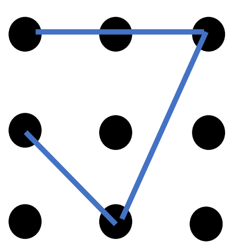
【本研究所有照片、圖片、統計圖表皆為作者自行拍攝、繪製、編製】

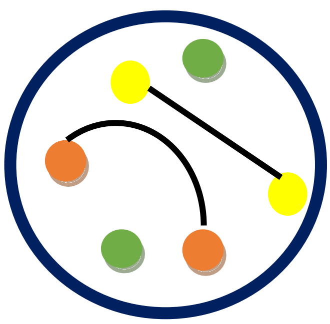
摘要

我們為了解若將手機解鎖的九宮格圖形改成圓形圖形是否會有更多不一樣的解法且更不容易被破解，於是，我們先在圓形圓周上標示若干個點，取任一點作為起點，再經過其他不重複的二點、三點、四點……形成一條連續線段所組成的圖形，這裡簡稱圓形一筆畫圖形，探討此類圖形的種類與路徑。我們除了利用圖示法詳列外，還利用樹狀法、列舉法佐證，除此之外，我們也從文獻中發現部分樹狀法，跟我們的研究似乎同出一轍，最後依據尋找規律歸納通式，並比較傳統九宮格一筆畫圖形與圓形一筆畫圖形在解鎖上的優缺點。

壹、 研究動機

每當爸爸拿起他心愛的手機，就會神神秘秘的在手機上畫下一個圖形，此時手機就會順利地被解鎖了，為了安全起見，每隔一段時間，爸爸就會換不一樣的圖形，爸爸說這樣比較安全，因為九宮格的路徑較簡單不是直向就是橫向，組數也相對較少，在公共場合，旁人可能透過偷窺來記住你的解鎖路徑，進而輕易破解。此舉動引起我對手機解鎖的興趣，心想如果手機解鎖不用正正方方的九宮格圖形，而改用圓形，圓形邊上設點，連線時有角度問題，是不是就比較不容易被記憶而遭破解，圓形點和點之間距離相近要猜測解鎖困難度較高且圓形解鎖方式可能相較簡單的九宮格圖案增加了一些隨機性，如果選擇複雜的圓形路徑，安全性是不是也會相對較高，此外，我們結合了平時下課常玩的不相交圖形遊戲，探討在圓上 N 點取某幾點一筆畫不相交的圖形種類與路徑。





貳、 研究目的與研究問題

我們藉由動手操作找出圓上任意 N 點一筆畫的規律。並且嘗試加入不同的條件，以及改變規則，看看結果是不是會有不一樣的變化？

一、 探討在圓中 N 點任取三點一筆畫連線（不相交）的圖形數及表示法。

二、 探討在圓中 N 點任取四點一筆畫連線（不相交）的圖形數及表示法。

三、 探討在圓中 N 點任取五點一筆畫連線（不相交）的圖形數及表示法。

四、 探討圓中 N 點任取 M 點(M=3~5)一筆畫（不相交）的圖形相關性。

五、 生活中的應用。

參、 解釋名詞

一、 圓形一筆畫解鎖：圓形解鎖和一筆畫結合使用，通常是指在圓形界面上，使用一筆連貫的手勢來完成圖案解鎖。

二、 圖示法：這裡是指運用幾何的點、線……等描繪圓形一筆畫的圖形，繪製成整齊簡單有規律性的圖形。

三、 樹狀法： 是以樹的形狀來表示，主要由一個核心主題分支出不同的項目，再由不同的子項目繼續分支、延伸，形成層次結構，透過階層形式清楚地呈現重點。

四、 列舉法：透過系統化地將圓形一筆畫的圖形列出所有可能的情況，來尋找解答或證明問題。

肆、 預備知識

一、 組合

組合（Combination） 是從一個給定的集合中選取元素的方式，且不考慮選取順序。例如，從 {A, B, C} 選取兩個元素，可能的組合為 {A, B}、{A, C} 和 {B, C}，不區分 {A, B} 和 {B, A}。給定一個含有 n 個不同元素的集合，從中選取 k 個元素的**組合數**（即不考慮順序的選取方式數量）記作：

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{P_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

其中：

n !（n 的階乘）表示 n 到 1 連乘，即 n!=n × (n−1) ×⋯⋯× 1

r !（r 的階乘）表示選取的 r 個元素的階乘。

(n − r) ! 表示未被選中的元素的階乘。

二、 排列

是指從 n 個不同元素中取出 k（k≤n）個元素，按照一定的順序排成一列，叫做排列(permutation)。

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

三、 圓形一筆畫的解鎖方式

結合了圓形排列和「一筆畫」的概念，讓使用者通過滑動手指在圓形排列的點上完成連接，達到解鎖的目的。這種解鎖方式的基本原理是要求用戶用手指在圓形排列的若干個點之間劃出特定的軌跡，具體操作方法如下：

(一)圓形排列的點：圓形一筆畫解鎖方式中，圓形的屏幕會顯示若干個點（通常是 9 個點），這些點按圓形排列。

(二)滑動連接：用戶通過滑動手指，從某個點開始，按照預設的路徑連接其它點。整個過程不需要抬起手指，而是持續滑動來完成圖案的連接。

(三)解鎖成功：當用戶滑動的路徑符合系統設置的解鎖圖案時，手機將解鎖並允許進入主界面。

(四)自定義設置：用戶可以根據自己的需求，自定義所要連接的點及其順序，這樣的設計能夠讓每個用戶擁有獨特的解鎖方式。

伍、 研究過程與方法

問題一：探討在圓中 N 點任取三點一筆畫不相交之圖形數及表示法

我們在紙上畫一個圓，分別在圓周上標示三點、四點、五點……N 點，並且依序找出三點取三點、四點取三點、五點取三點……N 點取三點一筆畫連線的圖形，並計算其圖形種類以及路徑。一開始我們使用圖形分類法，我們在動手操作的過程中發現有許多的圖形會重複，為了可以列舉所有圖像，沒有遺漏，我們應用以下三種方法（圖示法、樹狀法、列舉法）來印證。連線規則如下：

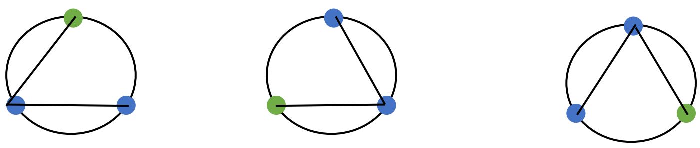
(1) 所有的圖形皆須一筆畫完成。

(2) 不能回到或經過已走過的點。

(3) 所有的路徑不可以交叉。

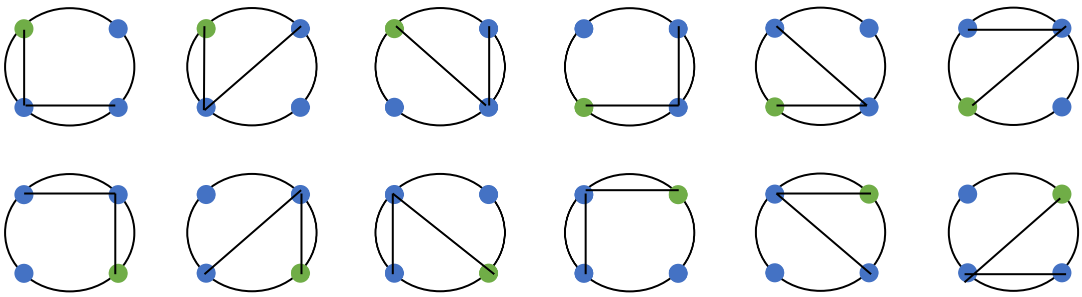
一、 圖示法(以綠色點為出發點)

(一) 圓上標示三點，取三點一筆畫連線不相交之圖形



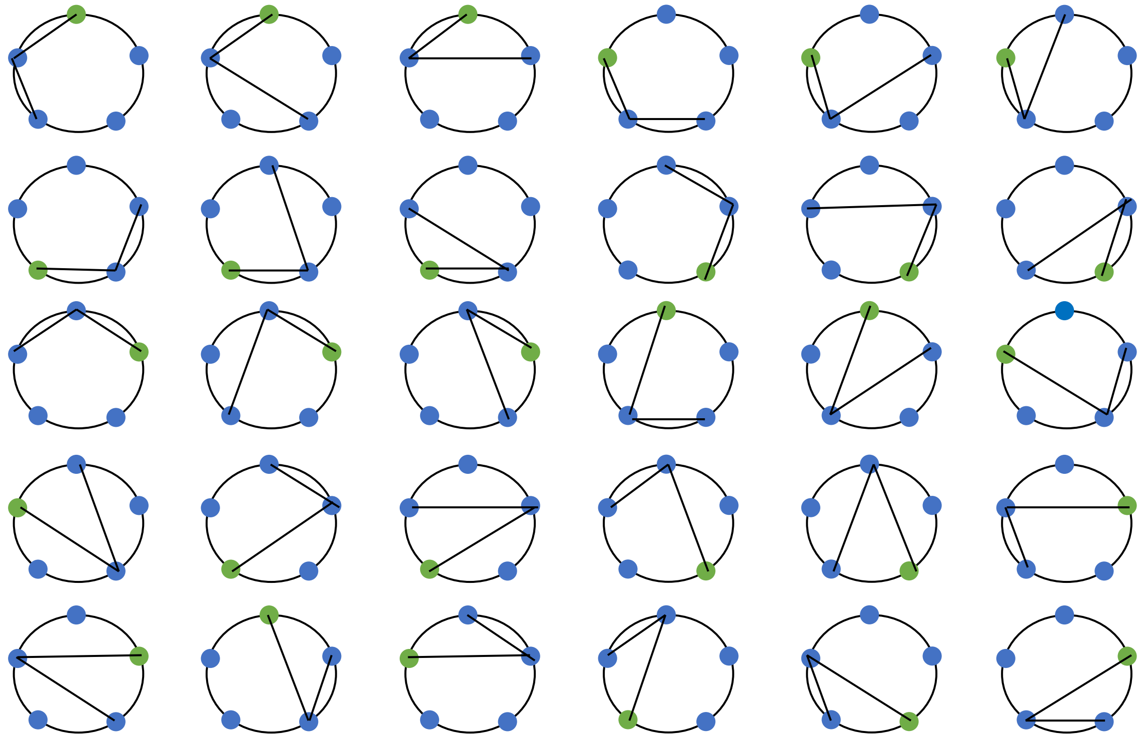
總共有 3 種圖形

(二) 圓上標示四點，取三點一筆畫連線不相交之圖形



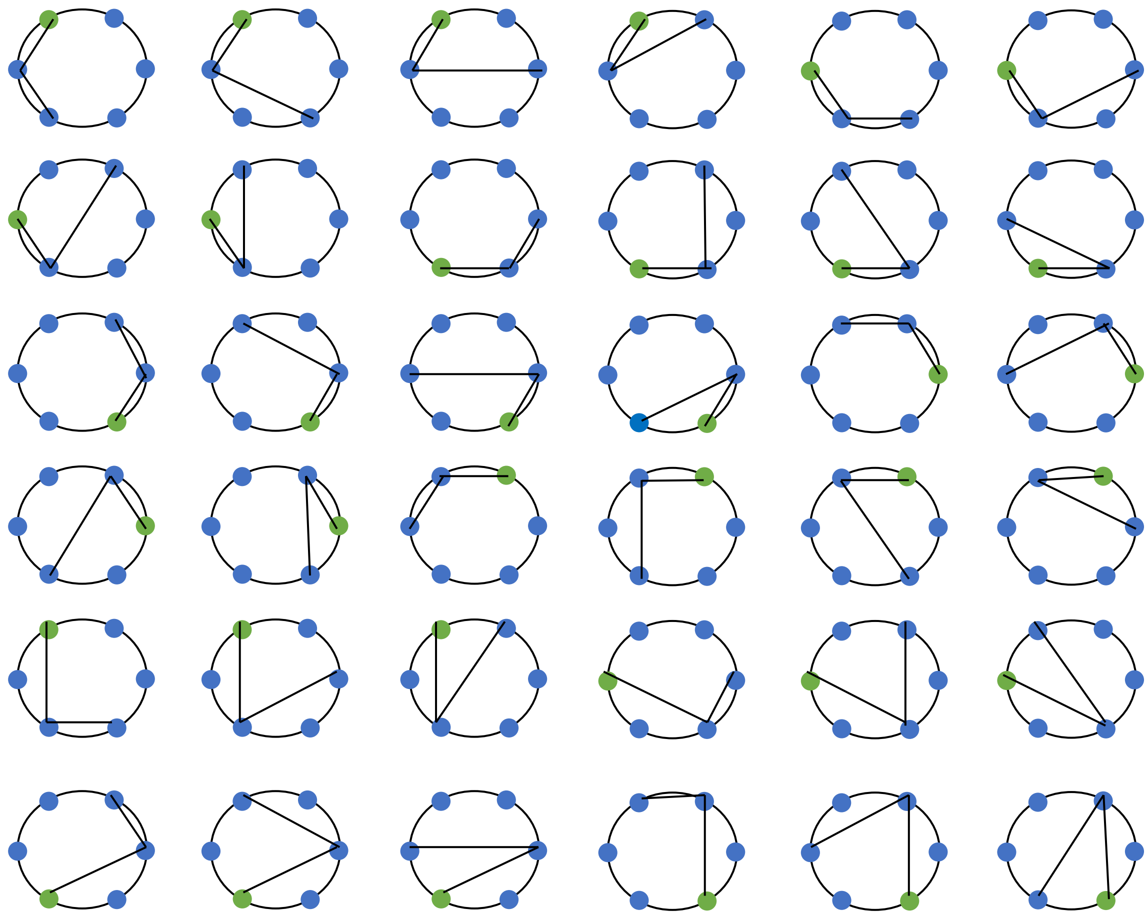
總共有 12 種圖形

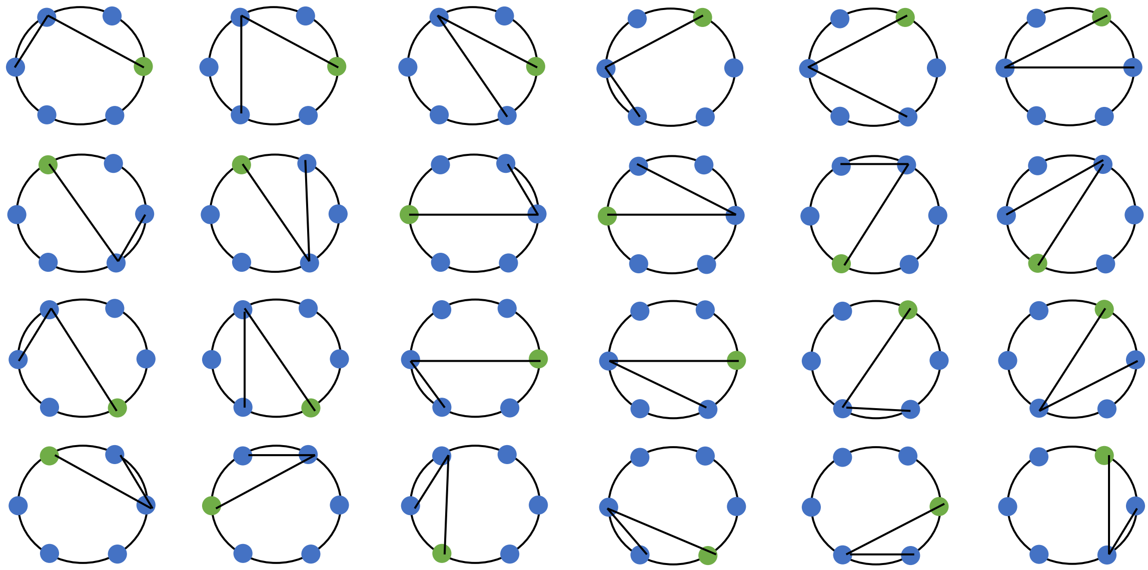
(三) 圓上標示五點，取三點一筆畫連線不相交之圖形



總共有 30 種圖形

(四) 圓上標示六點，取三點一筆畫連線不相交之圖形



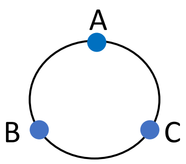


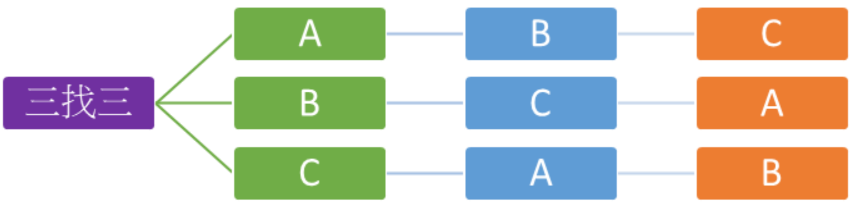
總共有 60 種圖形

二、 樹狀圖

樹狀法是將每個點所能連到的點都詳列出來，但透過分類再去詳列，可以快速的找到解鎖路徑。我們以 A 開頭，找尋方式如下：

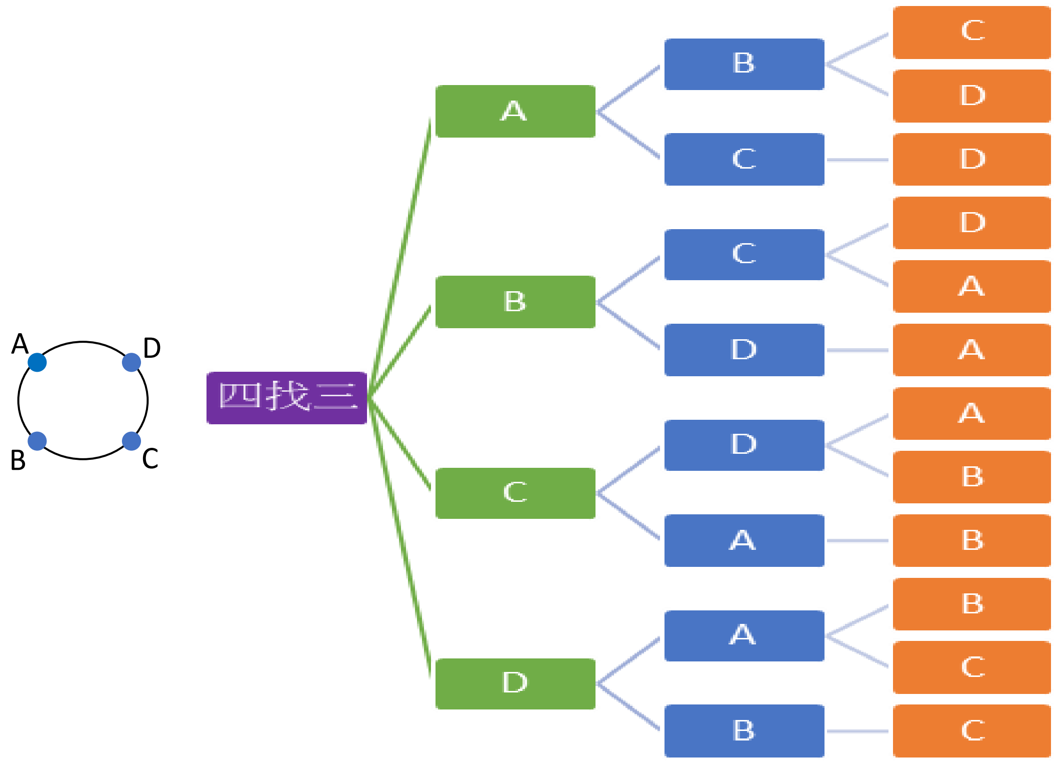
(一) 圖上標示三點，取三點一筆畫連線不相交之樹狀圖





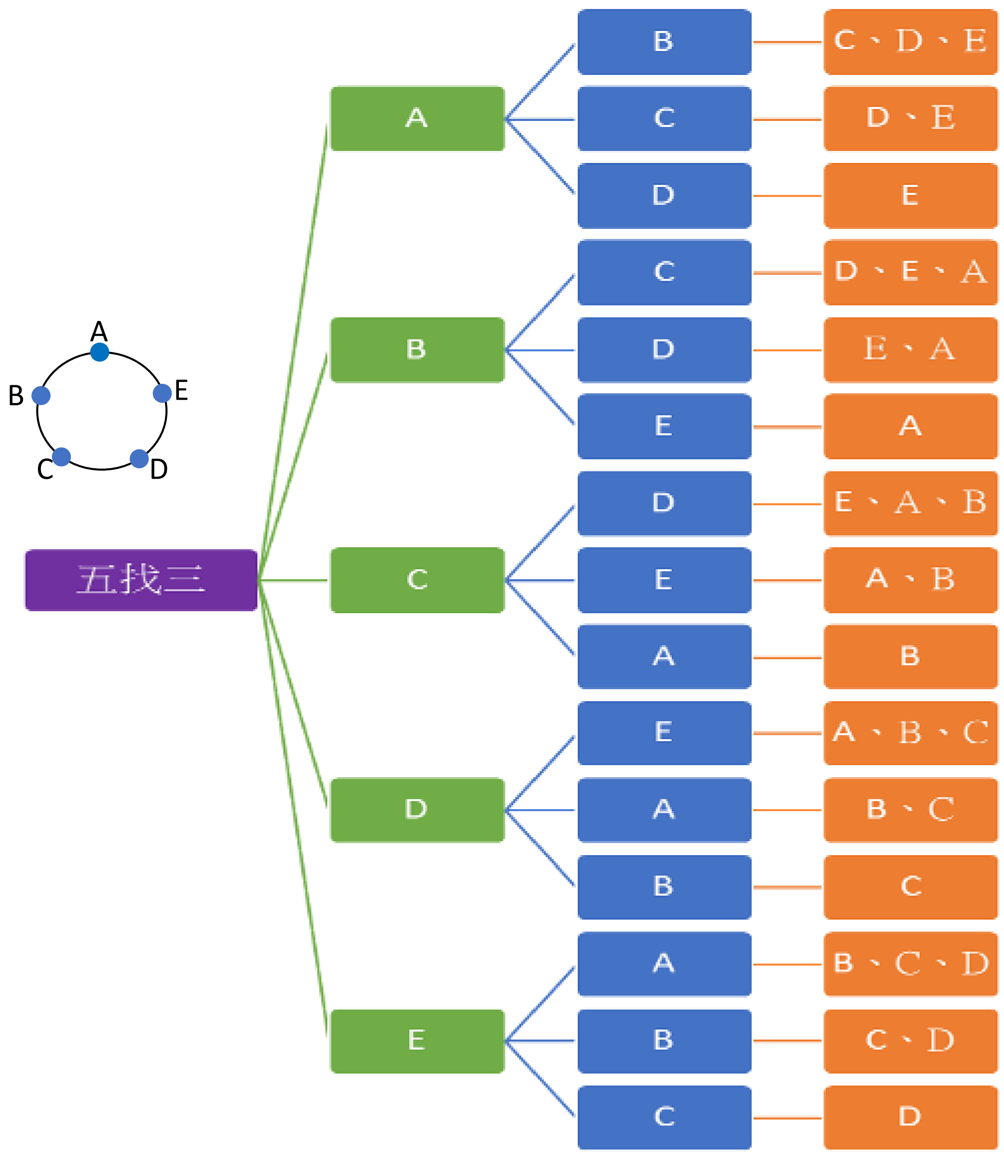
整理：圓上有三點，要找三點連線，所以每一個點都會被連到，連出來的圖形有以上三種。

(二)　圖上標示四點，取三點一筆畫連線不相交之樹狀圖



整理：圓上有四點，要找三點連線，所以每一次會有三個點被連到，我們一律從編號較小的出發，逆時針連線，這樣可以避免連重複的圖形，以 A 點為例，我們先從 A 出發可以連線到 B 點，接著再從 B 點往下連至 C 或 D，這樣從 A 出發的三點一筆畫連線就會有 ABC 與 ABD 兩種，接下來再由 A 出發連至 C 點，因要遵循逆時針走向，所以 C 點只能往下連至 D 點不可往回連 B 點以避免重複，這樣會有一種，最後歸納出從 A 出發的三點一筆畫連線會有三種，同理從 B、C、D 點出發的也都各有三種，總共就會有 12 種。

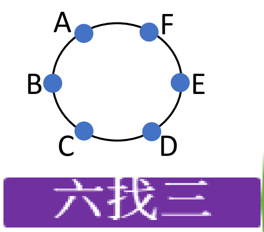
(三)　圖上標示五點，取三點一筆畫連線不相交之樹狀圖

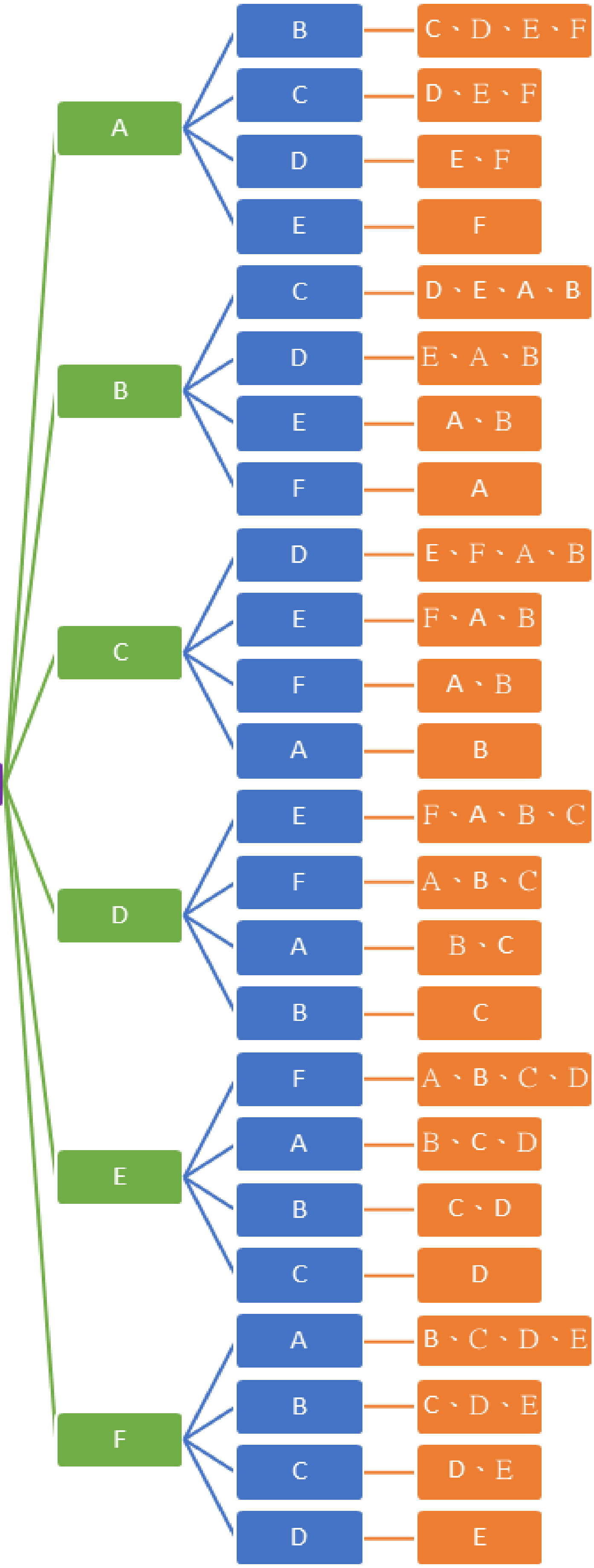


整理：由 A 點出發的有 3＋2＋1=6

亦可以從 B、C、D、E 點出發，所以總共有 6 X 5 = 30 種。

(四)　圖上標示六點，取三點一筆畫連線不相交之樹狀圖





整理：由 A 點出發的有

4+2+3+1=10

亦可以從 B、C、D、E、F

點 出發，所以總共有

6 X 10= 60 種。

三、 列舉法

(一)　圓上標示三點，取三點一筆畫不相交圖形(3 種)

ABC	BCA	CAB

(二)　圓上標示四點，取三點一筆畫不相交圖形(12 種)

ABC	ABD	ACD	BCD	BCA	BDA	CDA	CDB	CAB	DAB
DAC	DBC								

(三)　圓上標示五點，取三點(30 種)

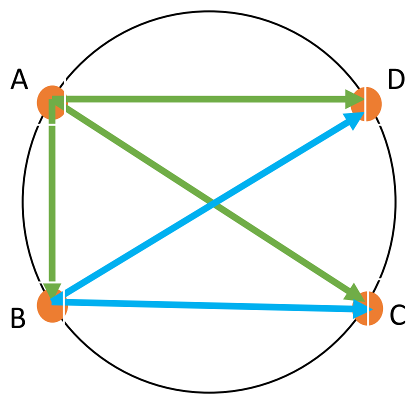
ABC	ABD	ABE	ACD	ACE	ADE	BCD	BCE	BCA	BDE
BDA	BEA	CDE	CDA	CDB	CEA	CEB	CAB	DEA	DEB
DEC	DAB	DAC	DBC	EAB	EAC	EAD	EBC	EBD	ECD

(四)　圓上標示六點，取三點一筆畫不相交圖形(60 種)

ABC	ABD	ABE	ABF	ACD	ACE	ACF	ADE	ADF	AEF
BCD	BCE	BCF	BCA	BDE	BDF	BDA	BEF	BEA	BFA
CDE	CDF	CDA	CDB	CEF	CEA	CEB	CFA	CFB	CAB
DEF	DEA	DEB	DEC	DFA	DFB	DFC	DAB	DAC	DBC
EFA	EFB	EFC	EFD	EAB	EAC	EAD	EBC	EBD	ECD
FAB	FAC	FAD	FAE	FBC	FBD	FBE	FCD	FCE	FDE

、

四、 發現



不論是用圖示法或是樹狀圖，當圓上的 N 點數量變多，我們可能就要花費許多的時間去尋找它的種類和總數，因此我們在動手操作的同時也發現了他有一定的規則，以 N=4 為例，一開始，我們可以在 A、B、C、D 中任意取一點，所以會有四種選擇，假設我們選擇 A 為出發點時，第二步驟會有三個選擇(B、C、D)，第三步驟會有兩個選擇，所以總共會有 24 種走法，但是如果只有計算圖形的總類，其中有一半的圖形會重複(左右對稱)，所以共有 12 種圖形，24 種走法。

五、 歸納

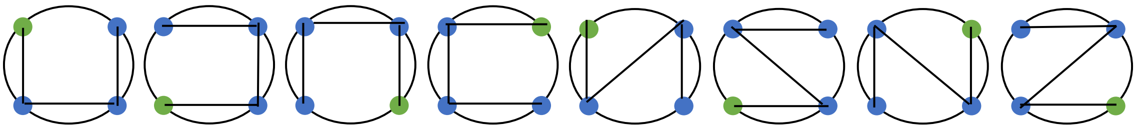
	N=3	N=4	N=5	N=6
圖形總數	$\frac{P_3^3}{2}$	$\frac{P_3^4}{2}$	$\frac{P_3^5}{2}$	$\frac{P_3^6}{2}$
路徑	P_3^3	P_3^4	P_3^5	P_3^6
總數量	3	12	30	60

圓上 N 點任取三點一筆畫連線的圖形數公式：$\frac{P_3^N}{2}$

問題二：探討在圓中 N 點任取四點一筆畫不相交之圖形數及表示法

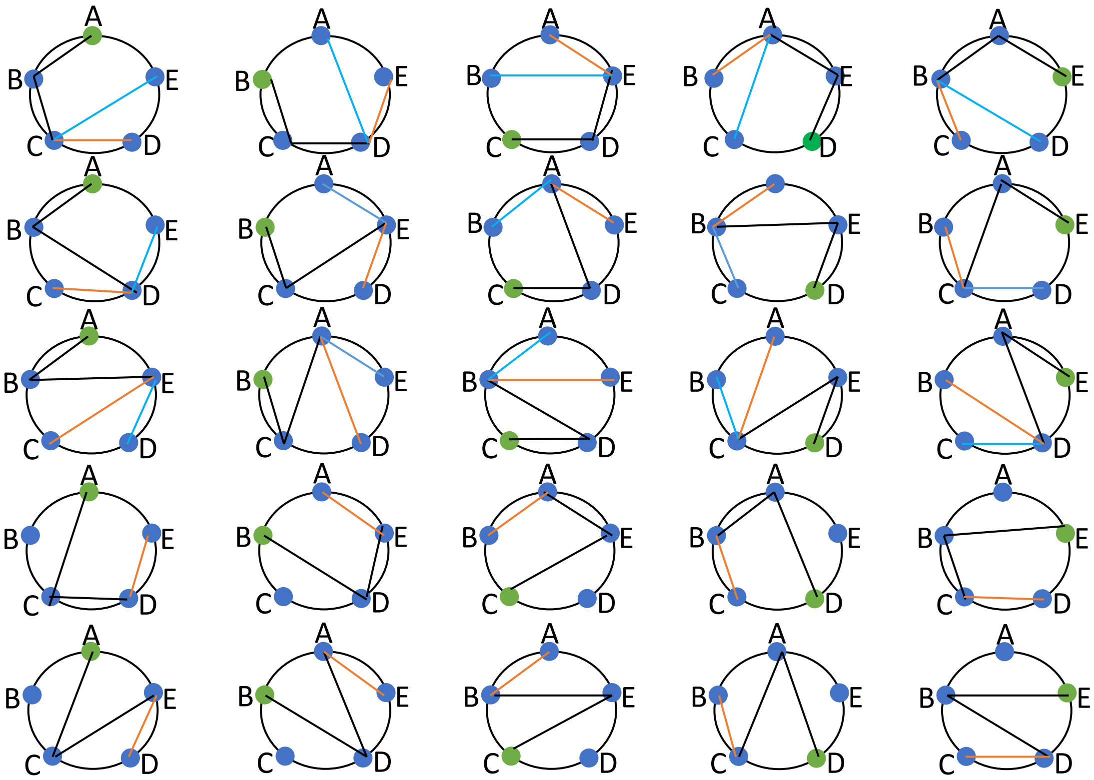
一、 圖示法

(一) 圓上標示四點，取四點一筆畫不相交圖形



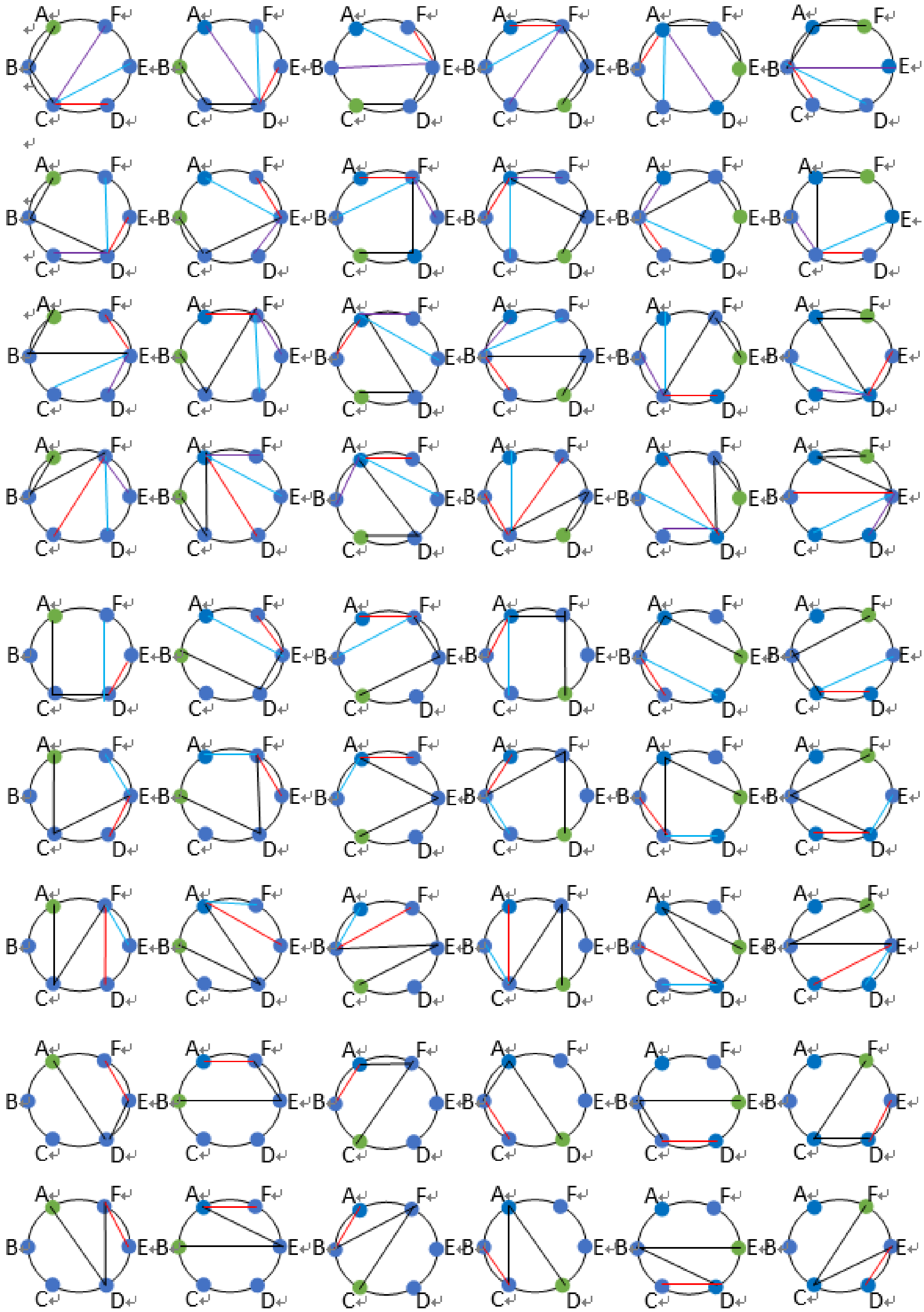
總共有 8 個圖形

(二) 圓上標示五點，取四點一筆畫不相交圖形



整理：為了方便討論，我們將前兩步相同路徑的結合在一起(如上圖黑線)，後面不同顏色的彩線則是分屬不同的圖形解鎖圖形，所以圖形總數：(2 X 15)＋10=40

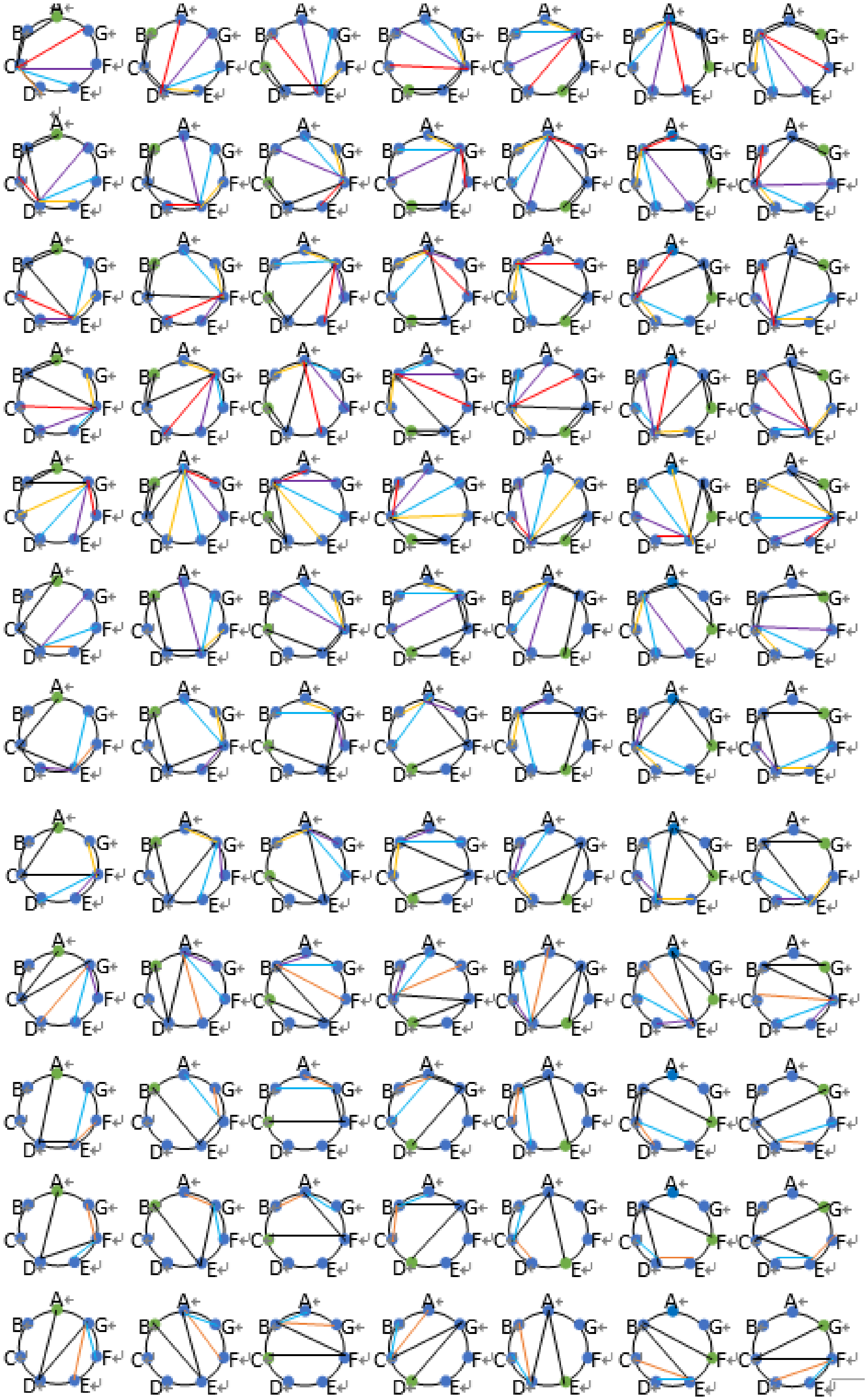
(三)　圓上標示六點，取四點一筆畫不相交圖形

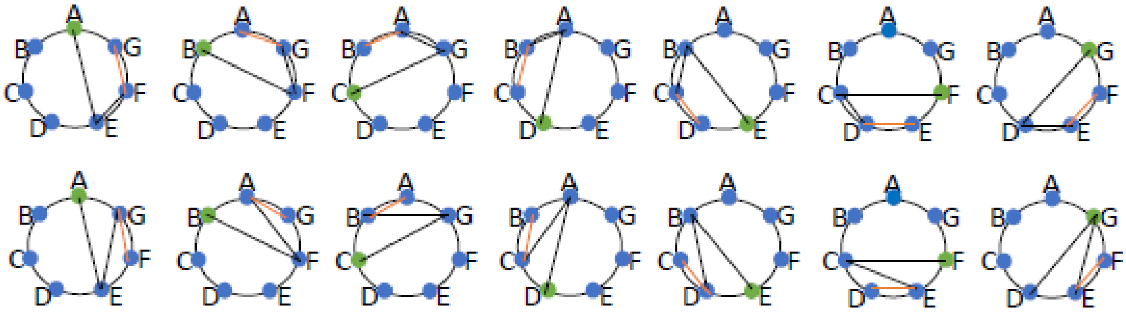


整理：為了探討方便，我們將前兩不相同路徑的結合在一起(如上圖黑線)，後面不同顏色的彩線則是分屬不同的圖形解鎖圖形，所以圖形總數如下：

$3 \times 24 + 2 \times 18 + 1 \times 12 = 120$

(四)　圓上標示七點，取四點一筆畫不相交圖形





整理：為了方便討論，我們將前兩步相同路徑的結合在一起(如上圖黑線)，後面不同顏色的彩線則是分屬不同的圖形解鎖圖形，所以圖形總數如下：

4 X 35 ＋3X 28＋2X21 ＋ 1X14= 280

二、 列舉法

(一)　圓上標示四點，取四點一筆畫不相交圖形(8 種)

ABCD	BCDA	CDAB	DABC	ABDC	BCAD	CBDA	DCAB		

(二)　圓上標示五點，取四點一筆畫不相交圖形(40 種)

ABCD	BCDA	CDEA	DEAB	EABC	ABCE	BCDE	CDEB	DEAC	EABD
ABDC	BCEA	CDAB	DEBA	EACB	ABDE	BCED	CDAE	DEBC	EACD
ABEC	BCAD	CDBA	DECA	EADB	ABED	BCAE	CDBE	DECB	EADC
ACDE	BDEA	CEAB	DABC	EBCD	ACED	BDAE	CEBA	DACB	EBDC

(三)　圓上標示六點，取四點一筆畫不相交圖形(120 種)

ABCD	ABCE	ABCF	BCDE	BCDF	BCDA	CDEF	CDEA	CDEB	DEFA
DEFB	DEFC	EFAB	EFAC	EFAD	FABC	FABD	FABE	ABDC	ABDE
ABDF	BCED	BCEF	BCEA	CDFE	CDFA	CDFB	DEAF	DEAB	DEAC
EFBA	EFBC	EFBD	FACB	FACD	FACE	ABEF	ABEC	ABED	BCFA
BCFD	BCFE	FADB	FADE	FADF	DEBF	DEBC	DEBD	EFCA	EFCD
EFCE	FADB	FADC	FADE	ABFC	ABFD	ABFE	BCAD	BCAE	BCAF
CDAB	CDAE	CDAF	DECF	DECA	DECB	EFDA	EFDB	EFDC	FAEB
FAEC	FAED	ACDE	ACDF	BDEF	BDEA	CEFA	CEFB	DFAB	DFAC
EABC	EABD	FBCD	FBCE	ACED	ACEF	BDFE	BDFA	CEAF	CEAB
DFBA	DFBC	EACB	EACD	FBDC	FBDE	ACFD	ACFE	BDAE	BDAF
CEBF	CEBA	DFCA	DFCB	EADB	EADC	FBEC	FBED	ADEF	BEFA
CFAB	DABC	EBCD	FCDE	ADFE	BEAF	CFBA	DACB	EBDC	FCED

(四)　圓上標示七點，取四點一筆畫連線不相交圖形(280 種)

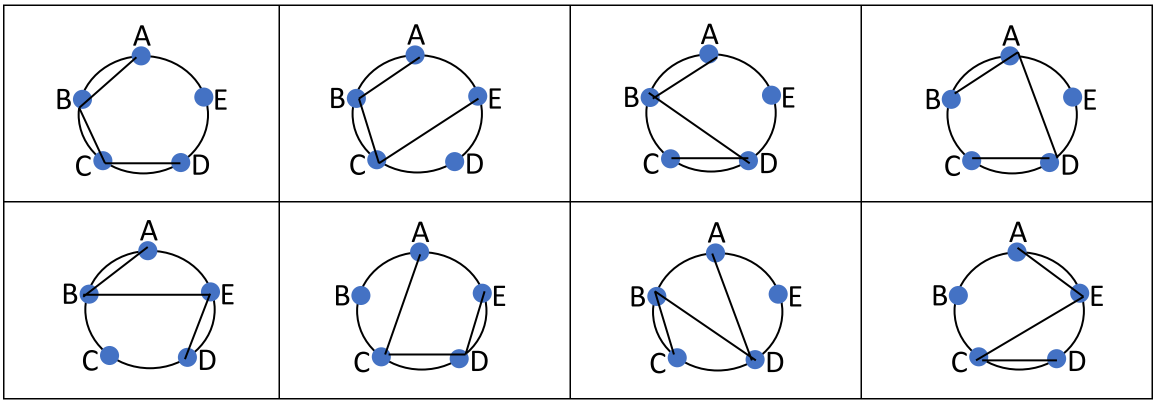
ABCD	ABCE	ABCF	ABCG	ABDC	ABDE	ABDF	ABDG	ABFC	ABFD
ABFE	ABFG	ACDE	ACDF	ACDG	ACFD	ACFE	ACFG	ACGD	ACGE
ACGF	ADEF	ADEG	ADFE	ADFG	ADGE	ADGF	ABEC	ABED	ABEF
ABEG	ABGC	ABGD	ABGE	ABGF	ACED	ACEF	ACEG	AEFG	AEGF
BCDA	BCDE	BCDF	BCDG	BCEA	BCED	BCEF	BCEG	BCFD	BCFE
BCFG	BCFA	BCGA	BCGD	BCGE	BCGF	BCAD	BCAE	BCAF	BCAG
BDEA	BDEF	BDEG	BDGA	BDGE	BDGF	BDAE	BDAF	BDAG	BDFE
BDFA	BDFG	BEFA	BEFG	BEGA	BEGF	BEAF	BEAG	BFGA	BFAG
CDEA	CDEB	CDEF	CDEG	CDFA	CDFB	CDFE	CDFG	CDGA	CDGB
CDGE	CDGF	CDAB	CDAE	CDAG	CDAF	CDBA	CDBE	CDBF	CDBG
CEFA	CEFB	CEFG	CEGA	CEGB	CEGF	CEAB	CEAF	CEAG	CEBA
CEBF	CEBG	CFGA	CFGB	CFAB	CFAG	CFBA	CFBG	CGAB	CGBA
DEFA	DEFB	DEFC	DEFG	DEGA	DEGB	DEGC	DEGF	DEAB	DEAC
DEAF	DEAG	DEBA	DEBC	DEBF	DEBG	DECA	DECB	DECG	DECF
DFGA	DFGB	DFGC	DFAB	DFAC	DFAG	DFBA	DFBC	DFBG	DFCA
DFCB	DFCG	DGAB	DGAC	DGBA	DGBC	DGCA	DGCB	DABC	DACB
EFGA	EFGB	EFGC	EFGD	EFAB	EFAC	EFAD	EFAG	EFBA	EFBC
EFBD	EFBG	EFCA	EFCB	EFCD	EFCG	EFDA	EFDB	EFDC	EFDG
EGAB	EGAC	EGAD	EGBA	EGBC	EGBD	EGCA	EGCB	EGCD	EGDB
EGDC	EGDE	EABC	EABD	EACB	EACD	EADB	EADC	EBCD	EBDC
FGAB	FGAC	FGAD	FGAE	FGBA	FGBC	FGBD	FGBE	FGCA	FGCB
FGCD	FGCE	FGDA	FGDB	FGDC	FGDE	FGEA	FGEB	FGEC	FGED
FABC	FABD	FABE	FACB	FACD	FACE	FADB	FADC	FADE	FAEB
FAEC	FAED	FBCD	FBCE	FBDC	FBDE	FBEC	FBED	FCDE	FCDE
GABC	GABD	GABE	GABF	GACB	GACF	GACE	GACD	GADB	GADC
GADF	GADE	GAEB	GAEC	GAED	GAEF	GAFB	GAFC	GAFD	GAFE
GBCD	GBCE	GBCF	GBDC	GBDE	GBDF	GBEC	GBED	GBEF	GBFC
GBFD	GBFE	GCDE	GCDF	GCED	GCEF	GCFD	GCFE	GDEF	GDFE

三、 發現

歸納圖形時，我們利用三種方法所找出來的圖形皆是 40 種，和我們原先設想的答案 $\frac{P_4^5}{2}$ = 60 種並不相同，後來仔細研究圖形後發現圓中 5 點取 4 點一筆畫圖形不但有左右對稱還有旋轉對稱、鏡射對稱、平移相同、大小相同但方向不同這些特性，所以會有更多的重複，但是他們的答案皆同時除以 3，這真是一個有趣的發現。

我們仔細觀察這些圖形，發現圖形中若 A→B→C→D 是有效圖形，依序改變排列方式，則 B→C→D→A、C→D→A→B、D→A→B→C 也都會是有效圖形。我們

先以圓形中 5 點取 4 點一筆畫為例，其全部有效圖形有 40 種，把改變順序後的圖形視為同一組，總共會有 5 種組合，於是我們將全部有效圖形有 40 種÷ 5 種組合＝8，在這裡我們稱 8 為圓形中 5 點取 4 點一筆畫圖形之基本圖形。(如下)



　　為了驗證這個想法是否正確，我們將相同的概念套用在圓形中 6 點取 4 點一筆畫圖形與圓形中 7 點取 4 點一筆畫圖形中，也都發現了相同的結果。

歸納：我們將全部有效圖形÷組合數＝A (常數)，表示全部有效圖形由 A 種基本圖形構成。$\frac{P_4^5}{3} \div C_4^5$ 、$\frac{P_4^6}{3} \div C_4^6$ 、$\frac{P_4^7}{3} \div C_4^7$ 、$\frac{P_4^8}{3} \div C_4^8$，得到相同的常數 8，表示圓上有 n 個點任取 4 點用一筆畫連成圖形，且線段不交叉的情況下，都是由 8 個基本圖形產出。

四、 歸納

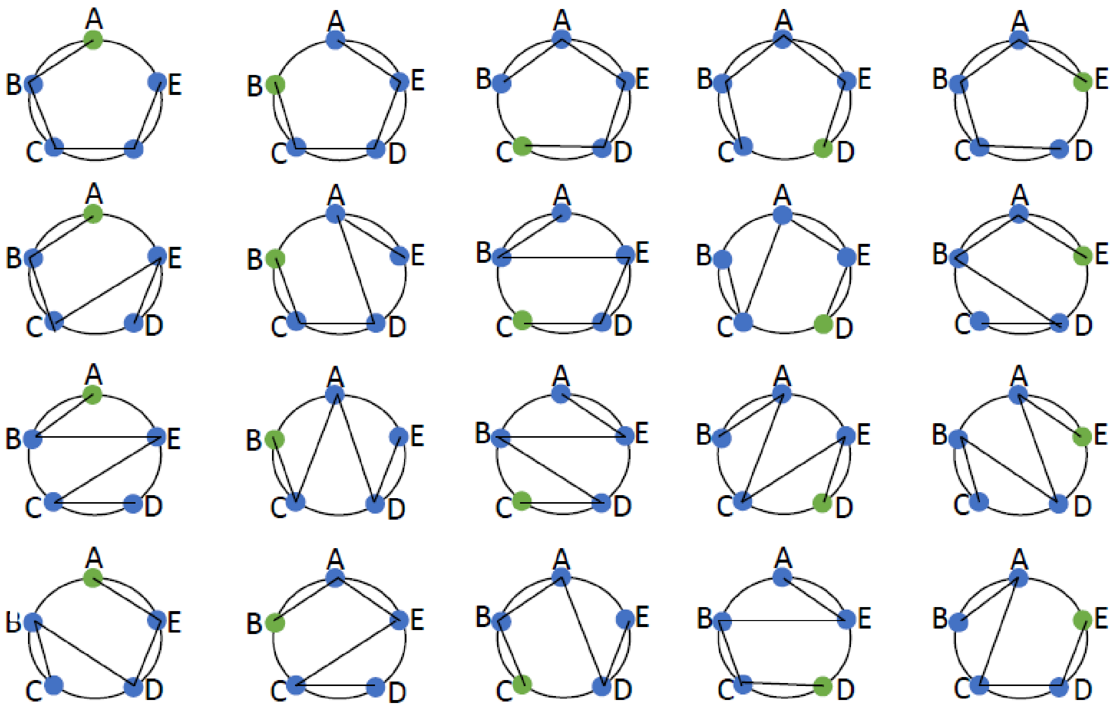
	N=4	N=5	N=6	N=7
圖形總數	$\frac{P_4^4}{3}$	$\frac{P_4^5}{3}$	$\frac{P_4^6}{3}$	$\frac{P_4^7}{3}$
路徑	$\frac{P_4^4}{3} X\ 2$	$\frac{P_4^5}{3} X\ 2$	$\frac{P_4^6}{3} X\ 2$	$\frac{P_4^7}{3} X\ 2$
總數量	8	40	120	280

圓上 N 點任取四點一筆畫連線的圖形數公式：$\frac{P_4^N}{3}$

問題三：探討在圓中 N 點任取五點一筆畫不相交之圖形數及表示法

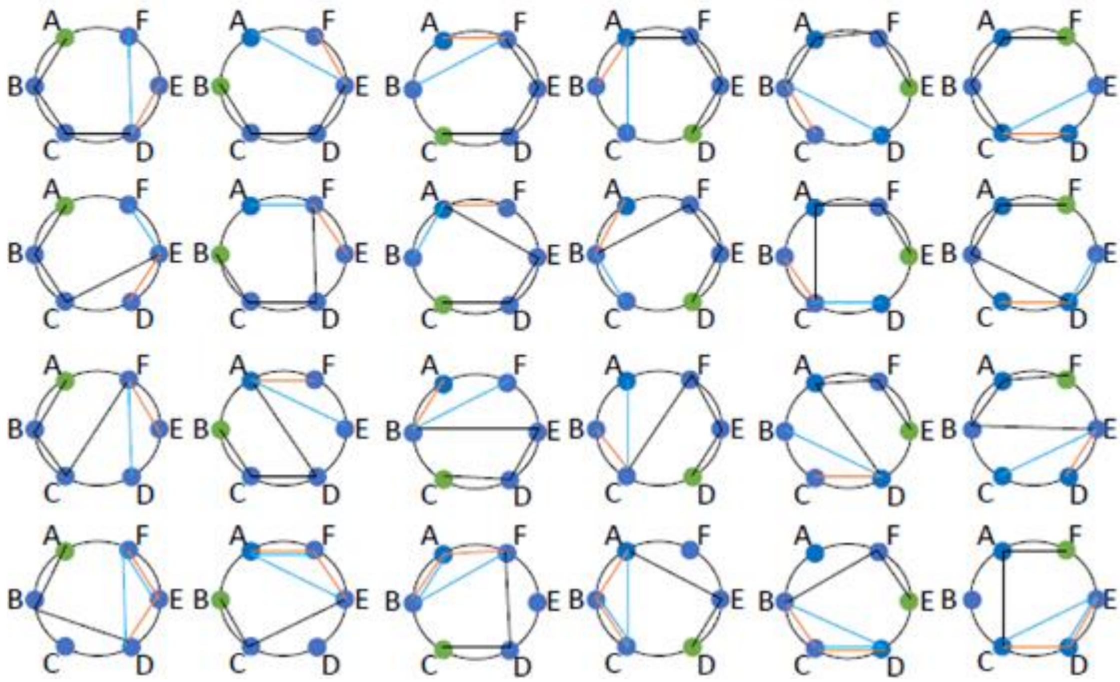
一、 圖示法

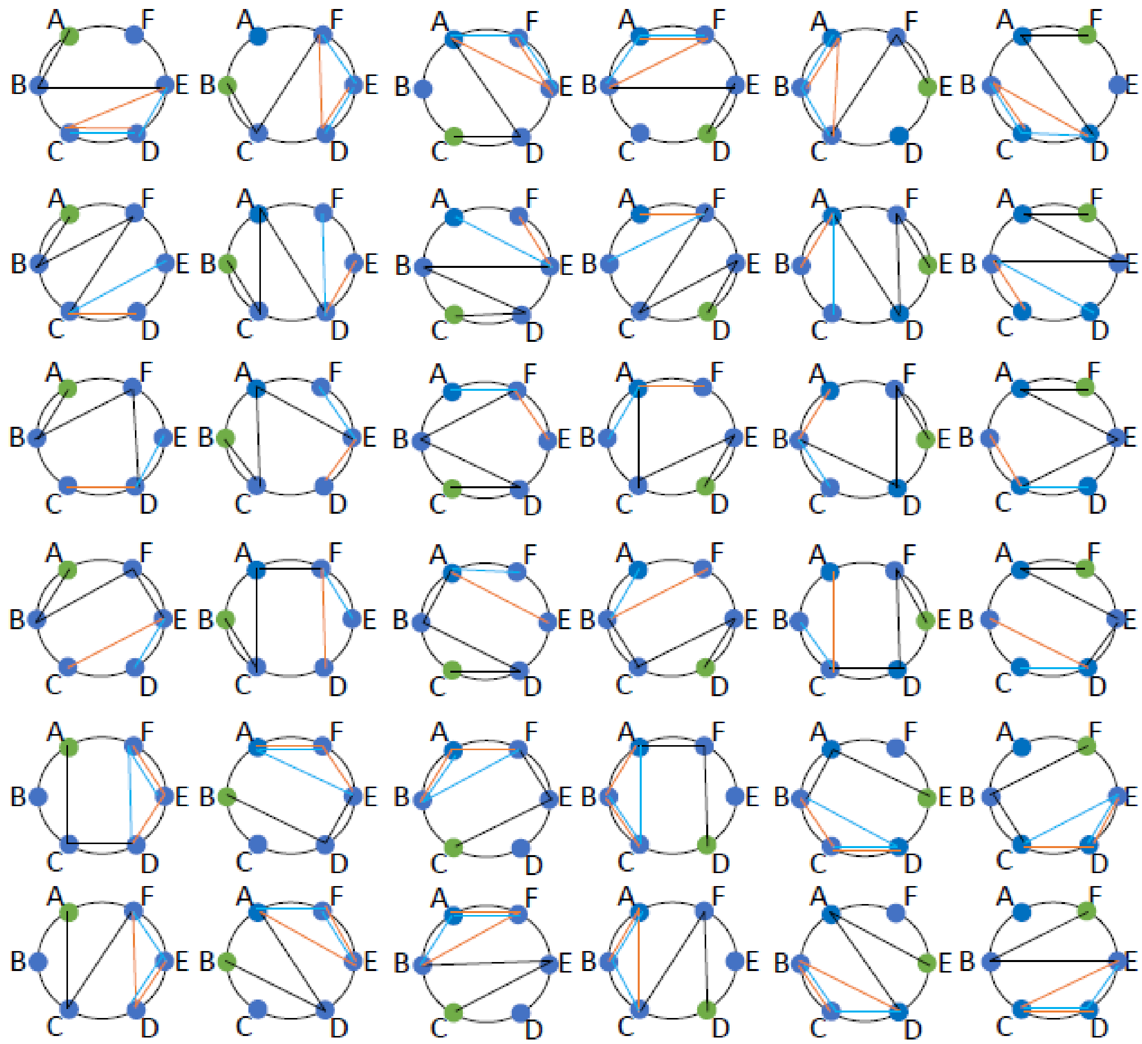
(一) 圓上標示五點，取五點一筆畫連線不相交圖形



總共有 20 種

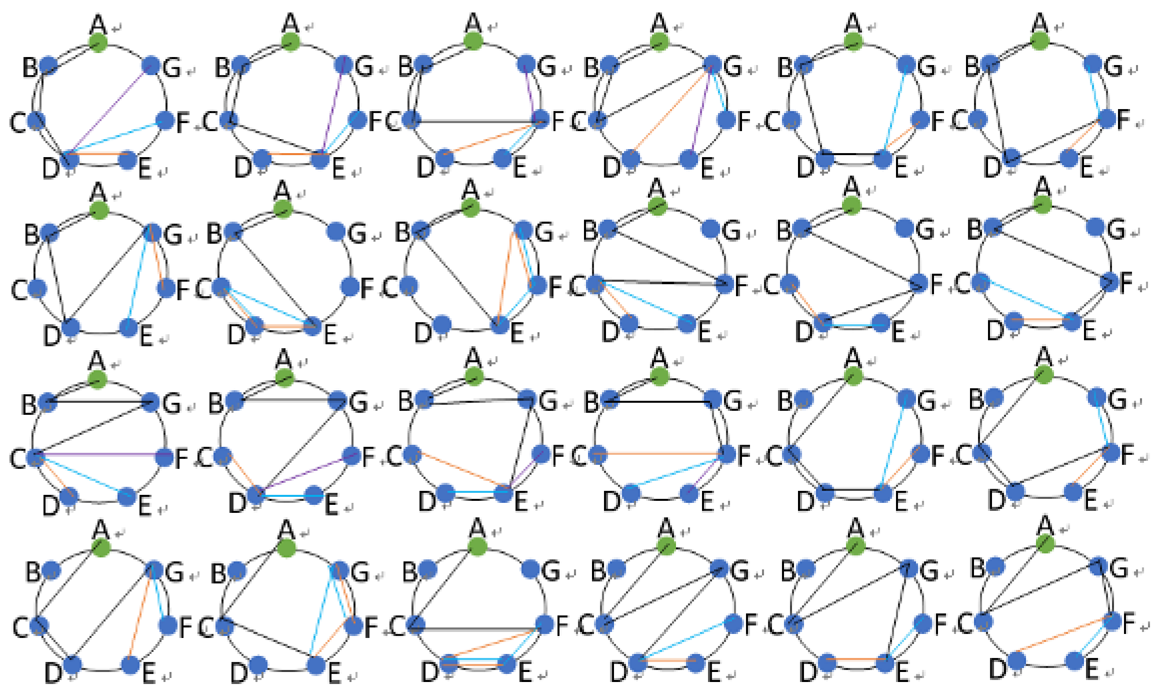
(二) 圓上標示六點，取五點一筆畫連線不相交圖形

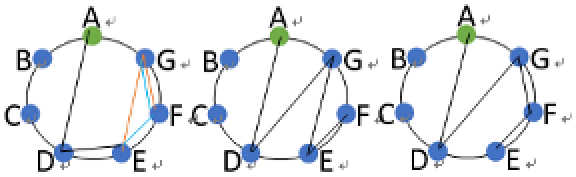




總共有 6 X 20= 120

(三) 圓上標示七點，取五點一筆畫連線不相交圖形



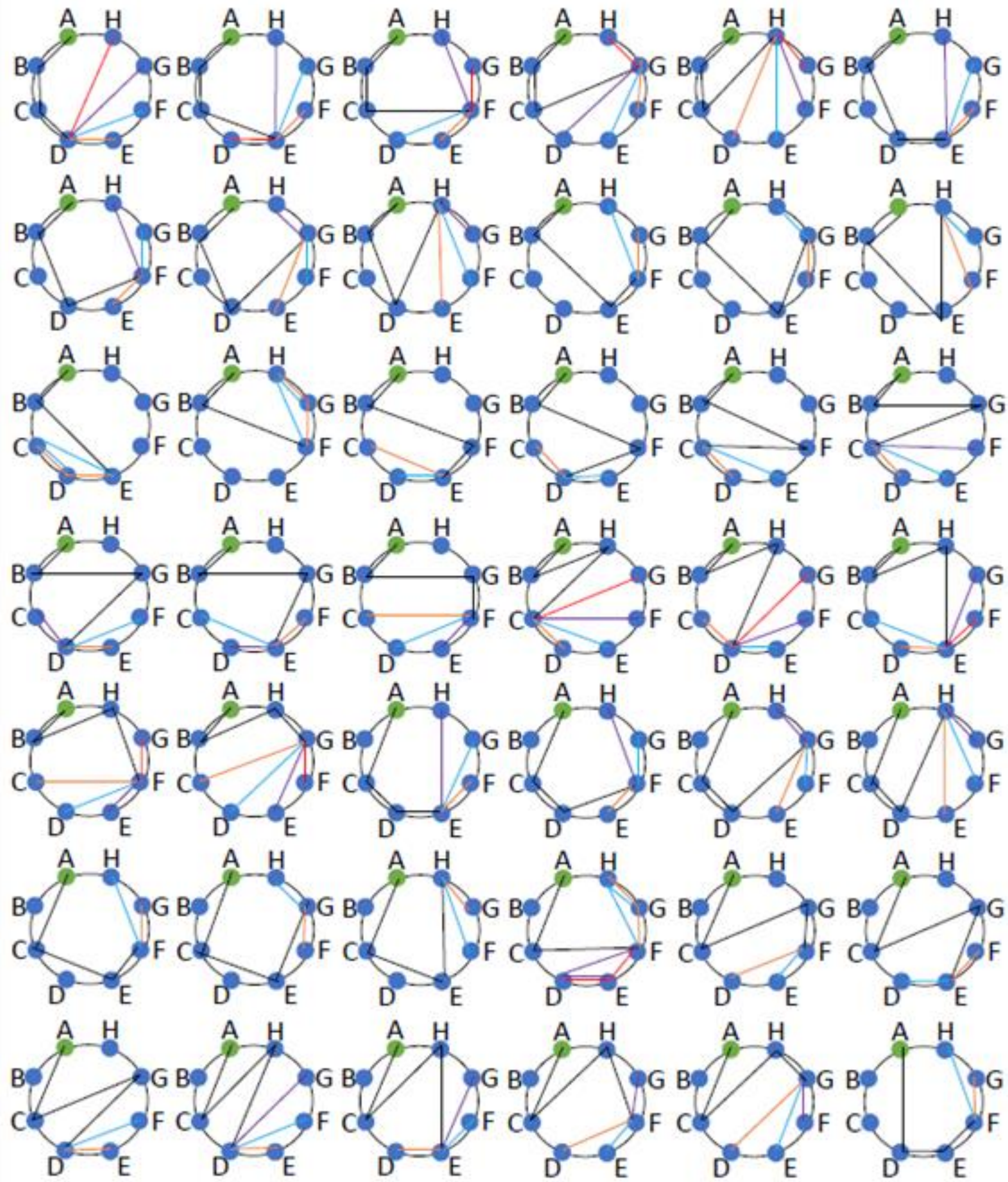


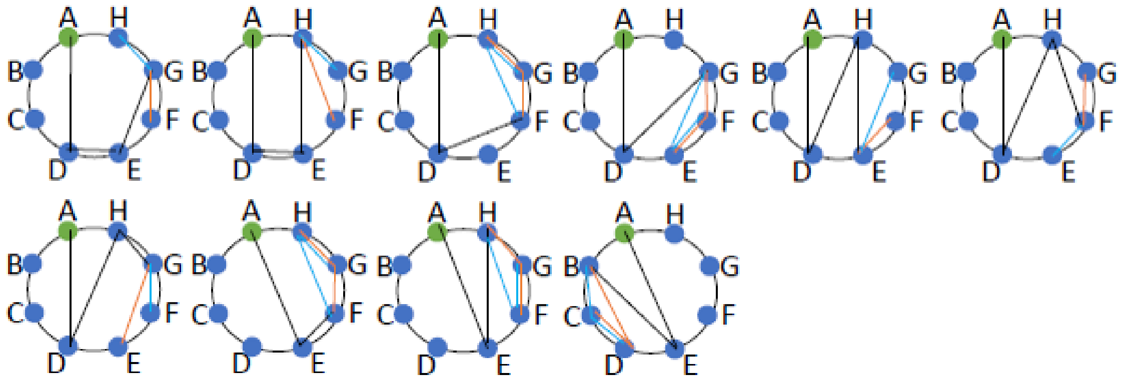
整理：為了方便討論，我們將從 A 點出發前兩步相同路徑的結合在一起(如圖黑線)，後面不同顏色的彩線則是分屬不同的圖形解鎖圖形，所以圖形總數如下：

3 X 8 ＋2X 17＋1X2 = 60

上列圖形接設定從 A 點出發，但若將圖形轉向可以從 B~G 點出發，圖形也會不一樣，所以轉向圖形總數：60 X 7 = 420

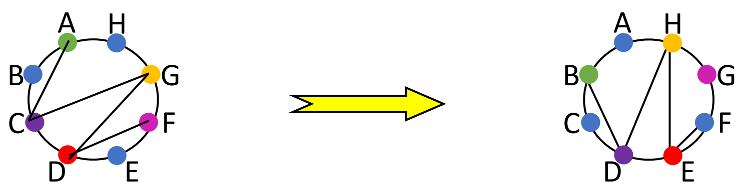
(四) 圓上標示八點，取五點一筆畫連線不相交圖形





整理：為了方便討論，我們將從 A 點出發前兩步相同路徑的結合在一起(如上圖黑線)，後面不同顏色的彩線則是分屬不同的圖形解鎖圖形，所以圖形總數：4 X 11＋3 X 16＋24X2 = 140

上列圖形接設定從 A 點出發，但若將圖形轉向可以從 B~G 點出發，圖形也會不一樣，如下：



所以加上其它轉向圖形總數如下：

140 X 8 = 1120

二、 列舉法

(一) 圓上標示五點，取五點一筆畫連線不相交圖形(20 種)

ABCDE	BCDEA	CDEAB	DEABC	EABCD	ABCED	BCDAE	CDEBA	DEACB	EABDC
ABECD	BCADE	CDBEA	DECAB	EADBC	AEDBC	BAECD	CBADE	DCBEA	EDCAB

(二) 圓上標示六點，取五點一筆畫連線不相交圖形(120 種)

ABCDE	ABCDF	BCDEF	BCDEA	CDEFA	CDEFB	DEFAB	DEFAC	EFABC	EFABD
FABCD	FABCE	ABCEF	ABCED	BCDFA	BCDFE	CDEAB	CDEAF	DEFBA	DEFBC
EFACB	EFACD	FABDC	FABDE	ABCFD	ABCFE	BCDAE	BCDAF	CDEBA	CDEBF
DEFCA	DEFCB	EFADC	EFADB	FABEC	FABED	ABDEF	ABDFE	BCEFA	BCEAF
CDFAB	CDFBA	DEABC	DEACB	EFBCD	EFBDC	FACDE	FACED	ABECD	ABEDC
BCFDE	BCFED	CDAEF	CDAFE	DEBFA	DEBAF	EFCAB	EFCBA	FADBC	FADCB
ABFCD	ABFCE	BCADE	BCADF	CDBEF	CDBEA	DECFA	DECFB	EFDAB	EFDAC
FADBC	FADCB	ABFDC	ABFDE	BCAED	BCAEF	CDBFE	CDBFA	DECAF	DECAB

EFDBA	EFDBC	FAECB	FAECD	ABFEC	ABFED	BCAFD	BCAFE	CDBAF	CDBAE
DECBA	DECBF	EFDCB	EFDCA	FAEDB	FAEDC	ACDFE	ACDEF	BDEAF	BDEFA
CEFAB	CEFBA	DFABC	DFACB	EABDC	EABCD	FBCED	FBCDE	ACFDE	ACFED
BDAEF	BDAFE	CEBFA	CEBAF	DFCBA	DFCAB	EADBC	EADCB	FBECD	FBEDC

(三) 圓上標示七點，取五點一筆畫連線不相交圖形(280 種)

ABCD (E、F、G)	BCDE (F、G、A)	CDEF (G、A、B)	DEFG (A、B、C)	EFGA (B、C、D)
FGAB (C、D、E)	GABC (D、E、F)	ABCE (D、F、G)	BCDF (E、G、A)	CDEG (F、A、B)
DEFA (G、B、A)	EFGB (A、C、D)	FGAC (B、D、E)	GABD (C、E、F)	ABCF (D、E、G)
BCDG (E、F、A)	CDEA (F、G、B)	DEFB (C、G、A)	EFGC (A、B、D)	FGAD (B、C、E)
GABE (C、D、F)	ABCG (D、E、F)	BCDA (E、F、G)	CDEB (A、F、G)	DEFC (A、B、G)
EFGD (A、B、C)	FGAE (B、C、D)	GABF (C、D、E)	ABDE (F、G)	BCEF (A、D、G)
CDFG (A、B、E)	DEGA (B、C、F)	EFAB (C、D、G)	FGBC (A、D、E)	GACD (B、E、F)
ABDF (E、G)	BCEG (F、A)	CDFA (G、B)	DEGB (A、C)	EFAC (B、D)
FGBD (C、E)	GACE (D、F)	ABDG (E、F)	BCEA (F、G)	CDFB (G、A)
DEGC (A、B)	EFAD (B、C)	FGBE (C、D)	GACF (D、E)	ABEDC
BCFED	CDGFE	DEAGF	EFBAG	FGCBA
GADCB	ABECD	BCFDE	CDGEF	DEAFG
EFBGA	FGCAB	GADBC	ABEGF	BCFAG
CDGBA	DEACB	EFBDC	FGCED	GADFE
ABEFG	BCFGA	CDGAB	DEABC	EFBCD
FGCDE	GADEF	ABFC (D、E)	BCGD (E、F)	CDAE (F、G)
DEBF (G、A)	EFCG (A、B)	FGDA (B、C)	GAEB (C、D)	ABFD (C、E)
BCGE (D、F)	CDAF (E、G)	DEBG (F、A)	EFCA (G、B)	FGDB (A、C)
GAEC (B、D)	ABFE (C、D)	BCGF (D、E)	CDAG (E、F)	DEBA (F、G)
EFCB (G、A)	FGDC (A、B)	GAED (B、C)	ABGC (D、E、F)	BCAD (E、F、G)
CDBE (F、G、A)	DECF (G、A、B)	EFDG (A、B、C)	FGEA (B、C、D)	GAFB (C、D、E)
ABGD (C、E、F)	BCAE (D、F、G)	CDBF (E、G、A)	DECG (F、A、B)	EFDA (G、B、C)
FGEB (A、C、D)	GAFC (B、D、E)	ABGE (C、D、F)	BCAF (D、E、G)	CDBG (E、F、A)
DECA (F、G、B)	EFDB (G、A、C)	FGEC (A、B、D)	GAFD (B、C、E)	ABGF (C、D、E)
BCAG (D、E、F)	CDBA (E、F、G)	DECB (F、G、A)	EFDC (G、A、B)	FGED (A、B、C)
GAFE (B、C、D)	ACDE (F、G)	BDE (G、A)	CEF (A、B)	DFG (B、C)
EGA (C、D)	FAB (D、E)	GBC (E、F)	ACDF (E、G)	BDE (F、A)
CEF (G、B)	DFG (A、C)	EGA (B、D)	FAB (C、E)	GBC (D、F)
ACDG (E、F)	BDE (F、G)	CEF (G、A)	DFG (A、B)	EGA (B、C)
FAB (C、D)	GBC (D、E)	ACEFG	BDFGA	CEGAB
DFABC	EGBCD	FACDE	GBDEF	ACEGF
BDFAG	CEGBA	DFACB	EGBDC	FACED
GBDFE	ACFDE	BDGEF	CEAFG	DFBGA
EGCAB	FADBC	GBECD	ACFED	BDGFE
CEAGF	DFBAG	EGCBA	FADCB	GBEDC
ACGD (E、F)	BDAE (F、G)	CEBF (G、A)	DFCG (A、B)	EGDA (B、C)
FAEB (C、D)	GBFC (D、E)	ACGE (D、F)	BDAF (E、G)	CEBG (F、A)

DFCA (G、B)	EGDB (A、C)	FAEC (B、D)	GBFD (C、E)	ACGF (D、E)
BDAG (E、F)	CEBA (F、G)	DFCB (G、A)	EGDC (A、B)	FAED (B、C)
GBFE (C、D)	ADEFG	BEFGA	CFGAB	DGABC
EABCD	FBCDE	GCDEF	ADEGF	BEFAG
CFGBA	DGACB	EABDC	FBCED	GCDFE
ADGEF	BEAFG	CFBGA	DGCAB	EADBC
FBECD	GCFDE	ADGFE	BEAGF	CFBAG
DGCBA	EADCB	FBEDC	GCFED	

註：( )裡的分別表示不同路線，也就是前面路線相同，最後結束的點不同。

(四) 圓上標示八點，取五點一筆畫連線不相交圖形(1120 種)

ABCDE	ABCDF	ABCDG	ABCDH	ABCED	ABCEF	ABCEG	ABCEH	ABCFD	ABCFE
ABCFG	ABCFH	ABCGD	ABCGE	ABCGF	ABCGH	ABCHD	ABCHE	ABCHF	ABCHG
ABDEG	ABDEG	ABDEH	ABDFE	ABDFG	ABDFH	ABDGE	ABDGF	ABDGH	ABDHE
ABDHF	ABDHG	ABEFG	ABEFH	ABEGF	ABEGH	ABECD	ABEDC	ABFGH	ABFHG
ABFEC	ABFED	ABFDC	ABFDE	ABFCD	ABFCE	ABGCD	ABGCE	ABGCF	ABGDC
ABGDE	ABGDF	ABGEC	ABGED	ABGEF	ABGFC	ABGFD	ABGFE	ABHCD	ABHCE
ABHCF	ABHCG	ABHDC	ABHDE	ABHDF	ABHDG	ABHEC	ABHED	ABHEF	ABHEG
ABHFC	ABHFD	ABHFE	ABHFG	ABHGC	ABHGD	ABHGE	ABHGF	ACDEF	ACDEG
ACDEH	ACDFE	ACDFG	ACDFH	ACDGE	ACDGF	ACDGH	ACDHE	ACDHF	ACDHG
ACEFG	ACEFH	ACEGF	ACEGH	ACEHF	ACEHG	ACFDE	ACFED	ACFGH	ACFHG
ACGFD	ACGFE	ACGED	ACGEF	ACGDE	ACGDF	ACHDE	ACHDF	ACHDG	ACHED
ACHEF	ACHEG	ACHFD	ACHFE	ACHFG	ACHGD	ACHGE	ACHGF	ADEFG	ADEFH
ADEGF	ADEGH	ADEHF	ADEHG	ADFGH	ADFHG	ADGEF	ADGFE	ADHEF	ADHEG
ADHFE	ADHFG	ADHGE	ADHGF	AEFGH	AEFHG	AEHGF	AEHFG	AEBCD	AEBDC

註：因為圓上八點找五點一筆畫連線不相交圖形多達一千多種，在此僅列由 A 出發的所有圖形，當起始點由 A 點轉 B 點出發時，其他連線的點也會往逆時針方向移動一格，如 ABCDE ➡ BCDEF ➡ CDEFG ➡ DEFGH ➡ EFGHA ➡ FGHAB ➡ GHABC ➡ HABCD，因此每個圖形都還會再衍生出七種圖形，所以圖形種數總共會有 140X8=1120 種。

三、 發現

我們將全部有效圖形÷組合數＝A (常數)，表示全部有效圖形由 A 種基本圖形構成。剩餘的圖形都會由這 A 種基本圖形在 N 個點中旋轉而產出。相同的方式運用在 n 個點任取 5 點中，$\frac{P_5^6}{6} \div C_5^6$、$\frac{P_5^7}{6} \div C_5^7$得到相同的常數 20（基本圖形）。表示任取 5 點所形成的有效圖形皆由這 20 個基本圖形在 N 個點中旋轉而產出。

四、 歸納

	N=5	N=6	N=7	N=8
圖形總數	$\frac{P_5^5}{6}$	$\frac{P_5^6}{6}$	$\frac{P_5^7}{6}$	$\frac{P_5^8}{6}$
路徑	$\frac{P_5^5}{6}X\ 2$	$\frac{P_5^6}{6}X\ 2$	$\frac{P_5^7}{6}X\ 2$	$\frac{P_5^8}{6}X\ 2$
總數量	20	120	420	1120

圓上 N 點任取四點一筆畫連線的圖形數公式：$\frac{P_5^N}{6}$

問題四：探討圓中 N 點任取 M 點(M=3~5)一筆畫不相交圖形的相關性

一、 困難

想找圓形上一筆畫不相交圖形，我們需要透過圖示法、樹狀法及列舉法來相互驗證，這個過程相當費時費力，也容易因為人為上的疏漏，而無法歸納出正確的通式。

二、 突破

在探討圓上 N 點任取(3~5)點中歸納出的公式，發現排列數÷實數（如$\frac{P_4^N}{3}$）就可算出正確圖形數，於是我們想運用先前歸納出的公式，找出實數（即$\frac{P_6^6}{X}$中的除數 X）的規律。我們想起之前老師和我們玩找規律的遊戲，其中有一題是費氏數列，於是我們從費氏數列中得到靈感，運用前一組已知分母找出後一組未知的分母（除數），快速計算出在圓上 N 點任取 M 點不交叉的有效圖形數。

三、 發現

(一) 不論圓上有幾點，只要任取三點不相交圖形數皆要÷2，任取 4 點皆÷3，任取五點皆÷6，所以只要任取的點數相同，所除的數也會相同。

(二) 逆時針連線，每往下一個點移動時，連線數會少一。

因上述兩點我們發現分母是可以透過推導而產出，所以我們從$\frac{P_3^N}{2}$、$\frac{P_4^N}{3}$、$\frac{P_5^N}{6}$規律中找出$\frac{P_6^6}{X}$ 的除數（X）。圓上 N 點任取 M 點一筆畫不相交之圖形數公式推導如：

$\frac{P_3^N}{2}$、$\frac{P_4^N}{x_1}$、$\frac{P_5^N}{x_2}$、$\frac{P_6^N}{x_3}$、$\frac{P_7^N}{x_4}$、$\frac{P_8^N}{x_5}$、$\frac{P_9^N}{x_6}$、$\frac{P_{10}^N}{x_7}$……

其中：

x_1=2 × P_4^N（4−1）÷2=2×3÷2=3，所以圓上 N 點任取 4 點有效圖形公式為$\frac{P_4^N}{3}$

x_2=x_1 × P_5^N（5−1）÷2=3×4÷2=6，所以圓上 N 點任取 5 點有效圖形公式為$\frac{P_5^N}{6}$

x_3=x_2 × P_6^N（6−1）÷2=6×5÷2=15，所以圓上 N 點任取 6 點有效圖形公式為$\frac{P_6^N}{15}$

(三) 用相同的方式驗算在先前已得知的公式上皆得到與公式相同的答案。故我們推論出圓上 N 點任取 M 點一筆畫不相交之圖形數公式為：

$$P_m^N(x_k)= x_{k-1} \times P_m^N(m-1) \div 2$$

四、 驗證

為了使推導出的公式具可靠性及驗證性，我們思考要運用什麼方式來驗證我們的推論，因為當圓上 8 點任取 8 點時總圖形數高達 40320 張，雖然可透過只找出 A 點不交叉圖形數再乘以要取的點數，但光是 A 點的全部圖形數也達到了 2520 張，所以窮舉法已經無法解決問題，於是我們想到了運用電腦程式來計算排列並使用向量外積計算有交叉線段的圖形數，協助我們快速檢驗所推論的公式是否正確。

接下來開始說明程式中重要程式碼運作邏輯，首先先設定圖片寬度與高度，背景顏色以白色為範例。步驟如下：

(一)先讓程式以P_M^N計算出所有的排列，用 DFS 遞迴方式(如圖 1-1 及 1-2)，計算出所有的排列出來，並儲存。我們先以P_2^4為檢驗，確認程式的正確性。

(二)使用 for 迴圈逐個處理計算每個 N 點對應到圓周上的角度（以弧度表示），以便用 cos/sin 計算每個 N 點在圓上的 X、Y 座標(如圖 2-1 及 2-2)，接下來用步驟 1 產生的所有排列，使用向量外積(叉積) 的邏輯判斷線段是否交叉 (如圖 2-3)，並產生圖形。

(三)在向量外積(叉積)判斷線段是否交叉時，有共同端點是不能計算為交叉(如圖 2-3)。例如線段 A－B，B－C，B 是共同端點，以向量而言，這會被歸類在交叉圖形中，但以我們的圖形而言是不能被計算在交叉圖形數量中。

```
// 產生所有排列（使用 DFS 遞迴法）
    private List<List<int>> GetPermutations(int n, int k)
    {
        var results = new List<List<int>>();  // 建立結果清單，將儲存所有排列結果，每一個結
果是 List<int>
        GeneratePermutations(new List<int>(), new HashSet<int>(), n, k, results);  // 呼
叫遞迴函式，開始產生排列
        return results;  // 回傳所有排列結果
    }

    private void GeneratePermutations(List<int> current, HashSet<int> used, int n, int
```

圖 1-1： 計算排列的程式碼

```
        if (current.Count == k)  // 若目前排列長度已達 k，則為一組完整排列，加入結果
        {
            results.Add(new List<int>(current));  // 複製 current 加入
            return;
        }

        for (int i = 0; i < n; i++)  // 嘗試將每個可能的數字加入排列中
        {
            if (used.Contains(i)) continue;  // 若 i 已經用過，跳過
            current.Add(i);  // 將 i 加入目前排列
            used.Add(i);  // 將 i 標記為已使用
            GeneratePermutations(current, used, n, k, results);  // 遞迴呼叫，繼續填入下一
層的排列
            current.RemoveAt(current.Count - 1);  // 回溯：移除最後一個
            used.Remove(i);  // 解除使用標記，回復狀態
```

圖 1-2：計算排列的程式碼

```
    private void DrawGraph(int N, List<int> perm, Bitmap bmp, out List<string>
crossInfo, Color bgColor)
    {
        // 計算半徑為圖片寬高中較小值的 40%
        int size = Math.Min(bmp.Width, bmp.Height);
        int radius = (int)(size * 0.4);

        // 建立繪圖用物件並設定抗鋸齒模式
        Graphics g = Graphics.FromImage(bmp);
            g.SmoothingMode = System.Drawing.Drawing2D.SmoothingMode.AntiAlias;
            g.Clear(bgColor); // 填滿背景色

            // 計算中心點座標
            PointF center = new PointF(bmp.Width / 2f, bmp.Height / 2f);
            PointF[] points = new PointF[N]; // 用來儲存 N 個點的位置
            float angleOffset = -90 - 30; // 起始角度偏移，從 11 點鐘方向開始排點
            for (int i = 0; i < N; i++)
```

圖 2-1： 圓上點的座標位置程式碼

```
                double angle = (angleOffset + i * 360.0 / N) * Math.PI / 180;
//計算第 i 個點對應到圓周上的角度（以弧度表示）」，以便用 cos/sin 計算該點的 X、Y 座
標。
                points[i] = new PointF(
                    center.X + (float)(radius * Math.Cos(angle)),
                    center.Y + (float)(radius * Math.Sin(angle)));
```

圖 2-2：圓上點的座標位置程式碼

```
        {
            // 如果有共同端點，不算交叉
            if (a1 == b1 || a1 == b2 || a2 == b1 || a2 == b2) return false; // 線段共用端點不視為交叉
            return Intersects(a1, a2, b1, b2);
        }

        // 使用向量外積判斷兩線段是否真正交叉
        private bool Intersects(PointF p1, PointF p2, PointF q1, PointF q2)
        {
            // 向量外積判斷點在另一線段的哪一側
            float d1 = Direction(q1, q2, p1);
            float d2 = Direction(q1, q2, p2);
            float d3 = Direction(p1, p2, q1);
            float d4 = Direction(p1, p2, q2);

            // ☑ 若 d1 與 d2 異號，代表 p1, p2 在 q1→q2 的兩側
            // ☑ 且 d3 與 d4 異號，代表 q1, q2 在 p1→p2 的兩側
            // ❗ 異號意思是數學符號相反（例如 d1 > 0, d2 < 0），乘起來會是負數 → 表示跨越線段
            return d1 * d2 < 0 && d3 * d4 < 0;  //若 d1 * d2 < 0 && d3 * d4 < 0，代表線段 p 與線段 q 的端點分別位於對方兩側，即兩條線段真正相交。

            /* ❗ 異號說明：
               異號指的是兩個數值一正一負，乘積小於 0，例如：+3 * -2 = -6。
               在幾何中這代表向量在直線的兩側，亦即「跨越線段」= 有交叉。
```

圖 2-3：使用向量外積判斷兩線段是否真正交叉及判別共同端點不列入交叉

圖 3：程式畫面及執行結果

設計完成的程式執行結果與我們導論出的公式$\frac{P_6^6}{15}$ =48 一致。

雖然我們設計的程式是會產生圖片(如圖 4)，但因為程式產生圖片非常的耗時間，發現在使用 N=10、M=10 時(P_{10}^{10})，測試結果發現需要 2 小時 45 分鐘(如圖 5-1 及 5-2)，才完成圖形及計數，相當費時。

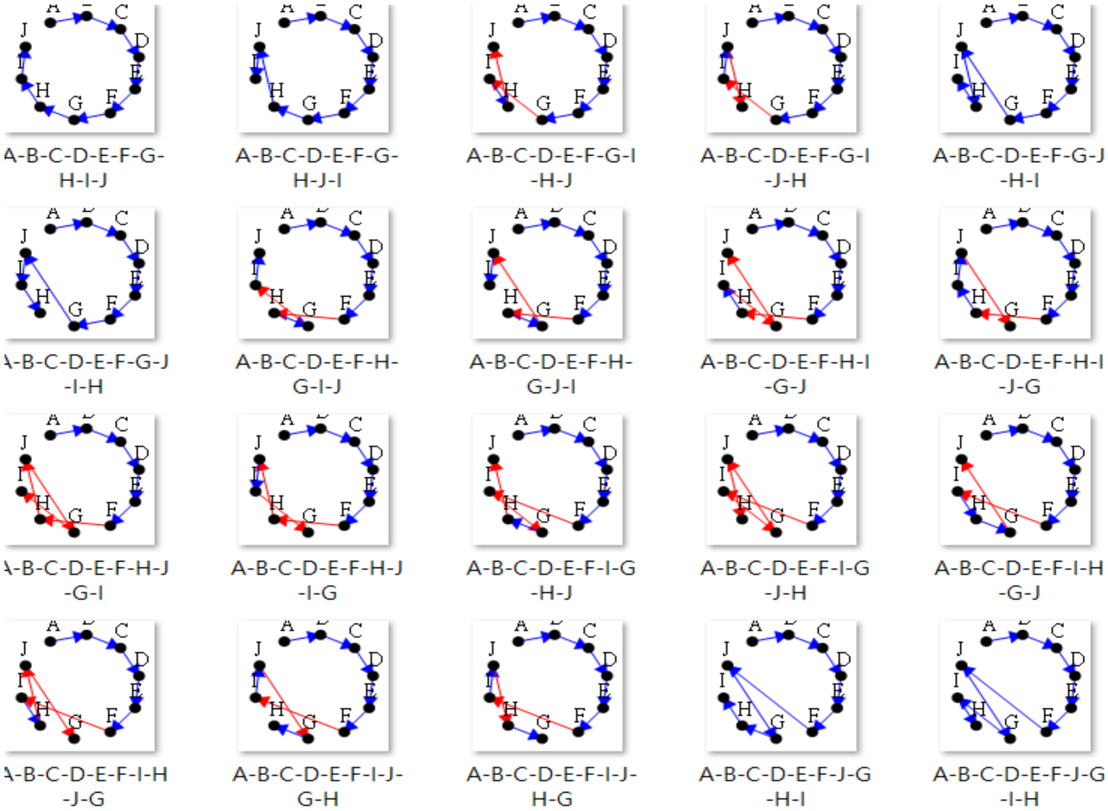
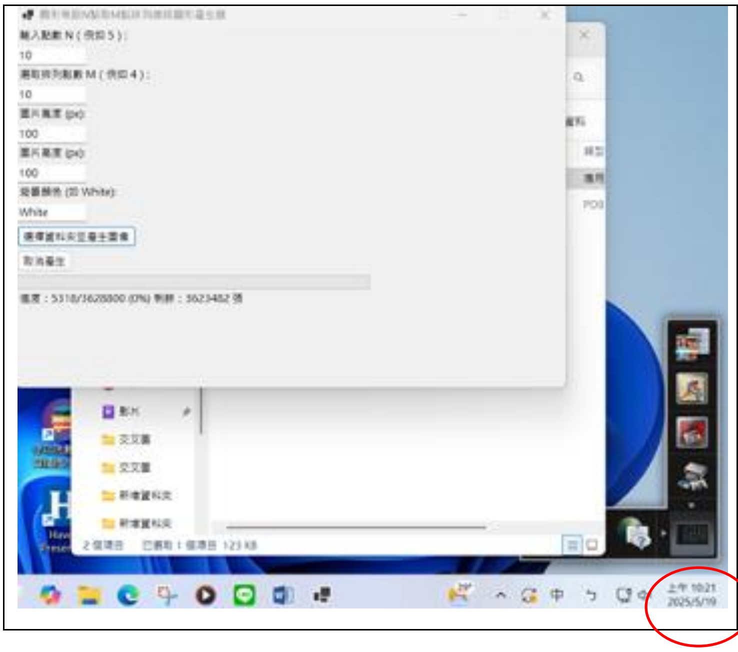


圖 4：以P_{10}^{10}為例，程式所產出的圖（交叉線段由紅色表示）

註：因為圖形會佔太多電腦效能，所以在畫布設定以較小數產圖，所以才會發生點上的英文字被截去一部分，但這不影響我們的研究內容。因為產生圖片太耗時了，所以我們將程式畫圖部分移除，只保留計算有效圖形數的部分，發現這樣的方式節省了許多時間。



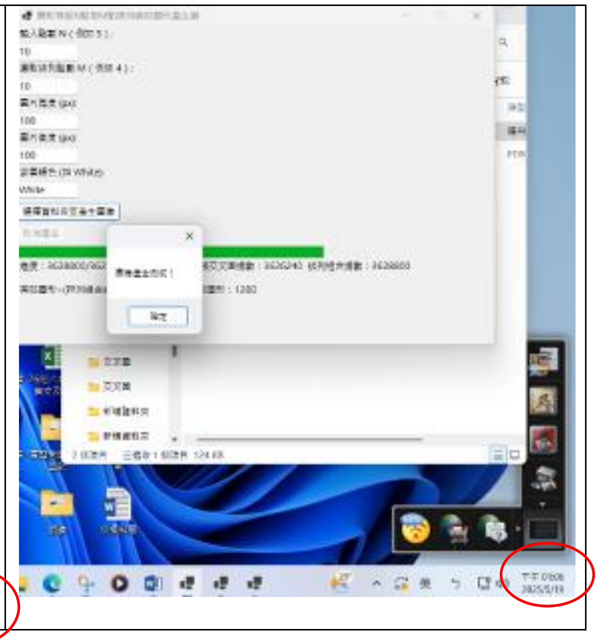


圖 5-1：程式執行及產出圖片起始時間　　圖 5-2：程式執行及產出圖片結束時間

原本設計的程式是會產生圖片，因為有圖片產出所以速度慢，測試只能跑到 10 取 10，超過 11 會耗費許多時間也容易造成電腦當機。於是我們思考如何優化程式的部分，最後決定將畫出圖形改以文字呈現，以提升速度(如圖 6)。並將推導出的公式也寫成另一個程式，測試公式的正確及在電腦上運算速度的差異。用推導公式所寫成的程式花費時間不到 1 秒即可算出一筆畫不相交圖形數(如圖 7)。

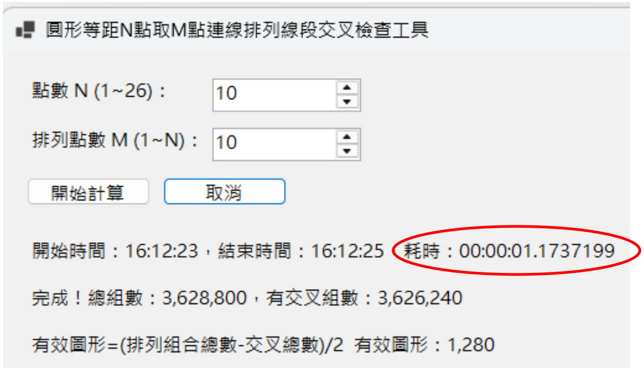


圖 6：只計算有效圖形數程式

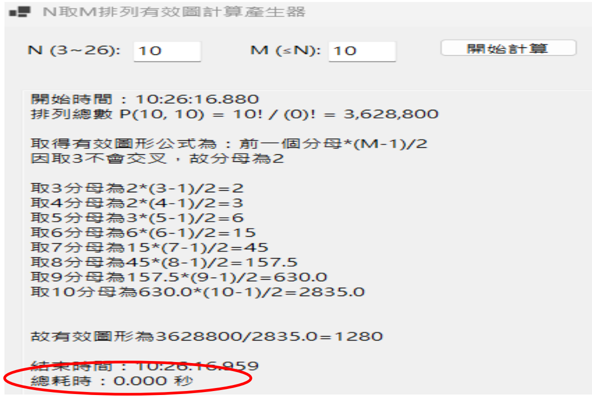


圖 7：用公式計算的程式所花時間

結論： 1.透過電腦程式相互檢驗皆能計算出相同答案，在圓上 N 點取 M 點一筆畫不相交圖形數公式為 ：$P_m^N(x_k) = x_{k-1} \times P_m^N(m-1) \div 2$

2.運用程式可減省人工畫圖時間，但用推導出的公式在計算上更有效率。

問題五： 生 活 中 的 應 用

一、 智慧型手機與平板解鎖

部分手機或應用程式允許用戶設定「圖形解鎖」，圓形一筆畫可以作為獨特的解鎖手勢，增加安全性。

二、 智慧門鎖與安防系統

透過圓形一筆畫圖形解鎖，可以提升便利性，例如在觸控式電子鎖上用一筆畫出特定圓形圖案來開啟門鎖 。

三、 車輛無鑰匙啟動系統

部分智慧車輛允許透過手勢或觸控屏幕輸入解鎖手勢，例如畫一個圓形來啟動引擎或開啟車門，可用於車內觸控螢幕或手機 APP 遙控車輛開關。

四、 智慧手錶與穿戴裝置

可以透過畫圓來解鎖或執行特定操作，如啟動健身模式、開啟應用程式等。

五、 智慧家居控制

圓形一筆畫可用於智慧家居的操作，例如在智慧中控面板上畫圓來開啟燈光、調整音量或控制溫度。

六、 醫療與復健應用

圓形一筆畫運動可以用於手部復健訓練，幫助中風或受傷的患者透過觸控螢幕進行手部靈活性訓練。

陸、 研究結果

一、 圓中 N 點任取三點一筆畫連線的圖形數及表示法

	N=3	N=4	N=5	N=6
圖形總數	$\frac{P_3^3}{2}$	$\frac{P_3^4}{2}$	$\frac{P_3^5}{2}$	$\frac{P_3^6}{2}$
路徑	P_3^3	P_3^4	P_3^5	P_3^6
總數量	3	12	30	60

圓上 N 點任取三點一筆畫連線的圖形數公式：$\frac{P_3^N}{2}$

二、圓中 N 點任取四點一筆畫連線的圖形數及表示法

	N=4	N=5	N=6	N=7
圖形總數	$\frac{P_4^4}{3}$	$\frac{P_4^5}{3}$	$\frac{P_4^6}{3}$	$\frac{P_4^7}{3}$
路徑	$\frac{P_4^4}{3}X\ 2$	$\frac{P_4^5}{3}X\ 2$	$\frac{P_4^6}{3}X\ 2$	$\frac{P_4^7}{3}X\ 2$
總數量	8	40	120	280

圓上 N 點任取四點一筆畫連線的圖形數公式：$\frac{P_4^N}{3}$

三、圓中 N 點任取五點一筆畫連線的圖形數及表示法

	N=5	N=6	N=7	N=8
圖形總數	$\frac{P_5^5}{6}$	$\frac{P_5^6}{6}$	$\frac{P_5^7}{6}$	$\frac{P_5^8}{6}$
路徑	$\frac{P_5^5}{6}X\ 2$	$\frac{P_5^6}{6}X\ 2$	$\frac{P_5^7}{6}X\ 2$	$\frac{P_5^8}{6}X\ 2$
總數量	20	120	420	1120

圓上 N 點任取四點一筆畫連線的圖形數公式：$\frac{P_5^N}{6}$

四、 探討圓中 N 點任取 M 點一筆畫的通式

$P_m^N(x_k)= x_{k-1} \times P_m^N(m-1) \div 2$

五、 生活中的應用

（1） 智慧型手機與平板解鎖

（2） 智慧門鎖與安防系統

（3） 車輛無鑰匙啟動系統

（4） 智慧手錶與穿戴裝置

（5） 智慧家居控制

（6） 醫療與復健應用

柒、 未來研究方向

圓形一筆畫的解鎖方式是一種創新的手機解鎖設計，我們這次探討的主要是在圓周圍上設點，未來可以考慮在圓內部也設點，增加連線的路徑，相較於簡單的九宮格解鎖，圓形一筆畫的解鎖方式增加了滑動連接的元素，它的路徑更增添靈活性且不容易被猜測，這能有效提高解鎖的安全性。圓形的設計也能讓點與點之間的間距更大，這樣使用者誤觸的概率降低，提升了解鎖過程中的精確度。當然圓形一筆畫圖形解鎖的圖形若過於複雜，使用者也會容易忘記，未來可以研究點的設計位置，可以讓使用者簡單記憶又可避免被破解。

捌、 參考資料

遠見天下文化出版股份有限公司（2007）。妙不可言的數學證明

龍騰文化(2022)。高中數學第二冊 數列與級數

龍騰文化(2022)。高中數學第四冊 排列組合與機率

南一（2022）。國中數學第二冊　數與代數的運算

【本研究所有照片、圖片、統計圖表皆為作者自行拍攝、繪製、編製】

【評語】080409

藉由個人手機的圖形密碼解鎖的生活問題轉變為一個數學問題，探索圓周上N個點（N＝3、4、...、8）一筆劃連結M點（M＝3、4、5）的所有可能，但一筆劃必須沒有交點。該研究列舉各種可能之後，歸納推斷出一個公式。然後是對於更大數字的N與M，研究者使用電腦程式來計算總量，也就初步驗證了公式。從這個公式的簡潔性來看，它也許有理論上的遞迴式，而遞迴式通常可以發展出完整的數學歸納法的證明，也就不用電腦程式來”初級驗證”。

作品海報

妙筆生花

探討圓形一筆畫不相交圖形

摘要

我們為了解手機解鎖的九宮格圖形改成圓形圖形是否會有更多不一樣的解法且更不容易被破解，於是，我們先在圓形圖周上標示若干個點，取任一點為起點，再經過其他不重複的點，形成一條連續線段所組成的圖形，探討此類圖形的種類與路徑。我們除了利用圖示法詳列外，還利用樹狀法、列舉法佐證，最後歸納通式，並比較傳統九宮格一筆畫圖形與圓形一筆畫圖形在解鎖上的優缺點。

壹、研究動機

因為九宮格的路徑較簡單不是直向就是橫向，組數也相對較少，在公共場合，旁人可能透過偷窺來記住你的解鎖路徑，進而輕易破解。此舉動引起我對手機解鎖的興趣，心想如果手機解鎖不用正正方方的九宮格圖形，而改用圓形，圓形邊上設點，連線時有角度問題，是不是就比較不容易被記憶而遭破解，圓形點和點之間距離相近要猜測解鎖困難度較高且圓形解鎖方式可能相較簡單的九宮格圖案增加了一些隨機性，此外，我們結合了平時下課常玩的不相交圖形遊戲，探討在圓上N點取某幾點一筆畫不相交的圖形種類與路徑。

貳、研究目的與問題

我們藉由動手操作找出圓上任意N點一筆畫的規律。並且嘗試加入不同的條件，以及改變規則，看看結果是不是會有不一樣的變化？

一、探討在圓中N點任取三點一筆畫連線（不相交）的圖形數及表示法
二、探討在圓中N點任取四點一筆畫連線（不相交）的圖形數及表示法
三、探討在圓中N點任取五點一筆畫連線（不相交）的圖形數及表示法
四、探討圓中N點任取M點(M=3~5)一筆畫（不相交）的圖形相關性。
五、生活中的應用。

參、解釋名詞

一、圓形一筆畫解鎖：圓形解鎖和一筆畫結合使用，通常是指在圓形界面上，使用一筆連貫的手勢來完成圖案解鎖。

二、圖示法：這裡是指運用幾何的點、線……等描繪圓形一筆畫的圖形，繪製成整齊簡單有規律性的圖形。

三、樹狀法： 是以樹的形狀來表示，主要由一個核心主題分支出不同的項目，再由不同的子項目繼續分支、延伸，形成層次結構，透過階層形式清楚地呈現重點。

四、列舉法：透過系統化地將圓形一筆畫的圖形列出所有可能的情況，來尋找解答或證明問題。

肆、預備知識

一、組合：組合(Combination) 是從一個給定的集合中選取元素的方式，且不考慮選取順序。例如，從{A,B,C}選取兩個元素，可能的組合為{A,B}、{A,C}和{B,C}，不區分{A,B}和{B,A}。給定一個含有n 個不同元素的集合，從中選取 k個元素的組合數(即不考慮順序的選取方式數量）記作：

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{P_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

其中：

n！(n 的階乘）表示 n 到 1 連乘，即 n!=n×(n-1)×……×1

r！(r 的階乘）表示選取的 r 個元素的階乘。

(n! − r) 表示未被選中的元素的階乘。

二、排列：是指從 n 個不同元素中取出 k (n≤ k) 個元素，按照一定的順序排成一列，叫做排列(permutation)。

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

三、圓形一筆畫的解鎖方式：結合了圓形排列和「一筆畫」的概念，讓使用者通過滑動手指在圓形排列的點上完成連接，達到解鎖的目的。這種解鎖方式的基本原理是要求用戶用手指在圓形排列的若干個點之間劃出特定的軌跡，具體操作方法如下：

(1)圓形排列的點：圓形一筆畫解鎖方式中，圓形的屏幕會顯示若干個點（通常是 9 個點），這些點按圓形排列。

(2)滑動連接：用戶通過滑動手指，從某個點開始，按照預設的路徑連接其它點。整個過程不需要抬起手指，而是持續滑動來完成圖案的連接。

(3)解鎖成功：當用戶滑動的路徑符合系統設置的解鎖圖案時，手機將解鎖並允許進入主界面。

(4)自定義設置：用戶可以根據自己的需求，自定義所要連接的點及其順序，這樣的設計能夠讓每個用戶擁有獨特的解鎖方式。

伍、研究過程與方法

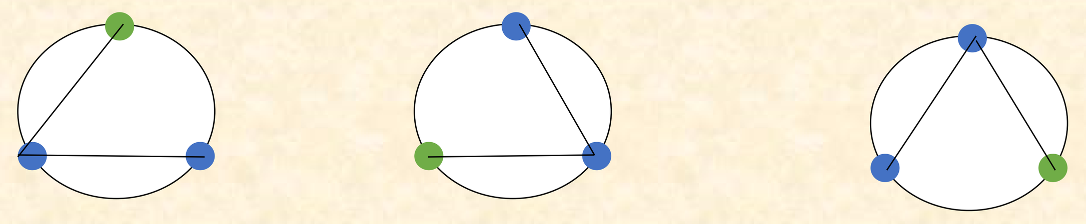
問題一:探討在圓中N點任取三點一筆畫不相交之圖形數及表示法

我們在紙上畫一個圓，分別在圓周上標示三點、四點、五點……N點，並且依序找出三點取三點、四點取三點、五點取三點……N點取三點一筆畫連線的圖形，並計算其圖形種類以及路徑。一開始我們使用圖形分類法，我們在動手操作的過程中發現有許多的圖形會重複，為了可以列舉所有圖像，沒有遺漏，我們應用以下三種方法（圖示法、樹狀法、列舉法）來印證。規則如下：

(1)所有的圖形皆須一筆畫完成。
(2)不能回到或經過已走過的點。
(3)所有的路徑不可以交叉。

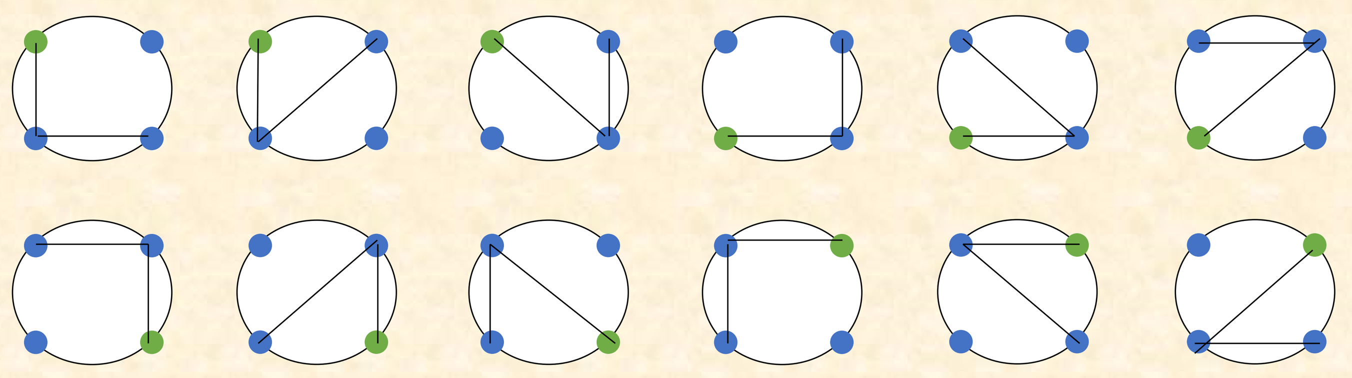
一、圖示法(以綠色點為出發點)

(1)圓上標示三點，取三點一筆畫連線不相交之圖形



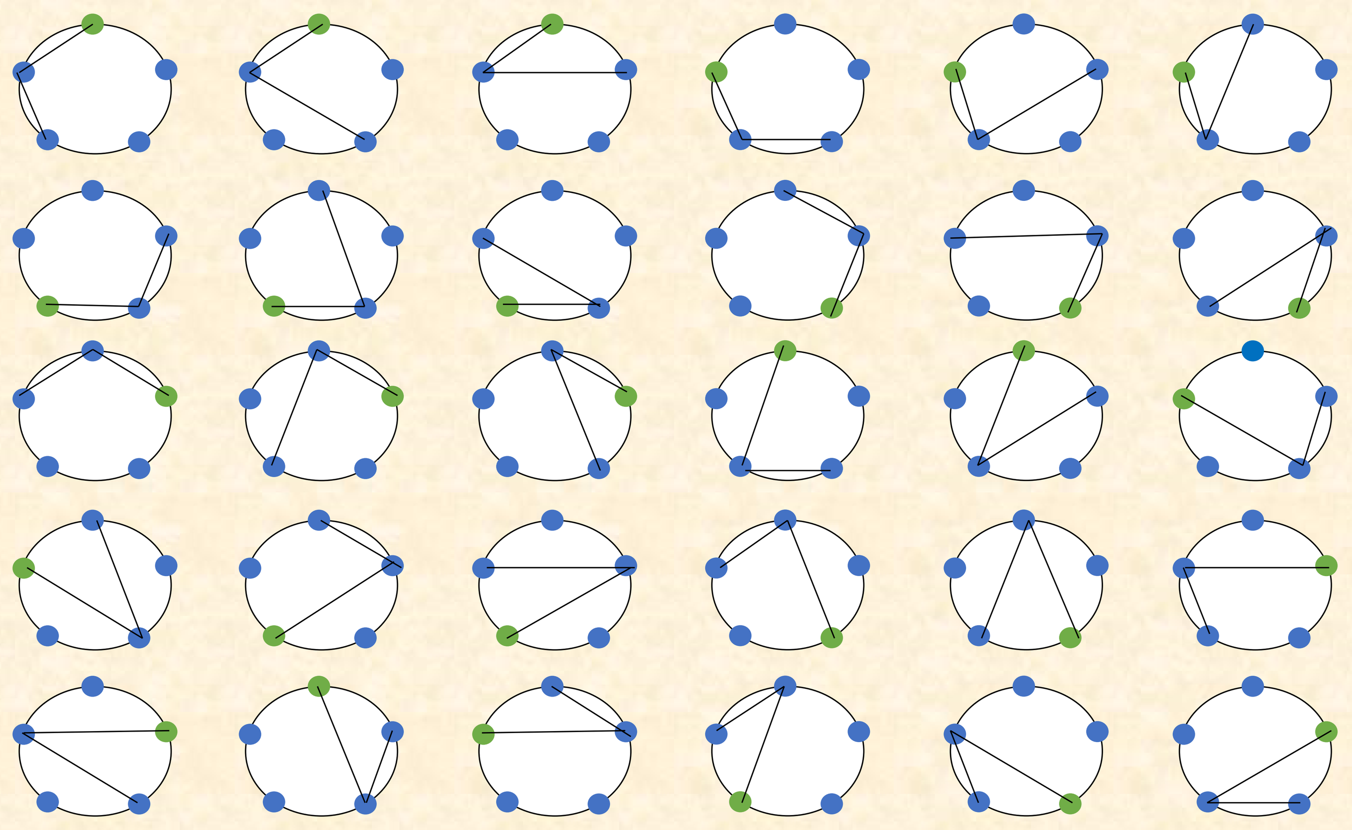
總共有 3 種圖形

(2)圓上標示四點，取三點一筆畫連線不相交之圖形



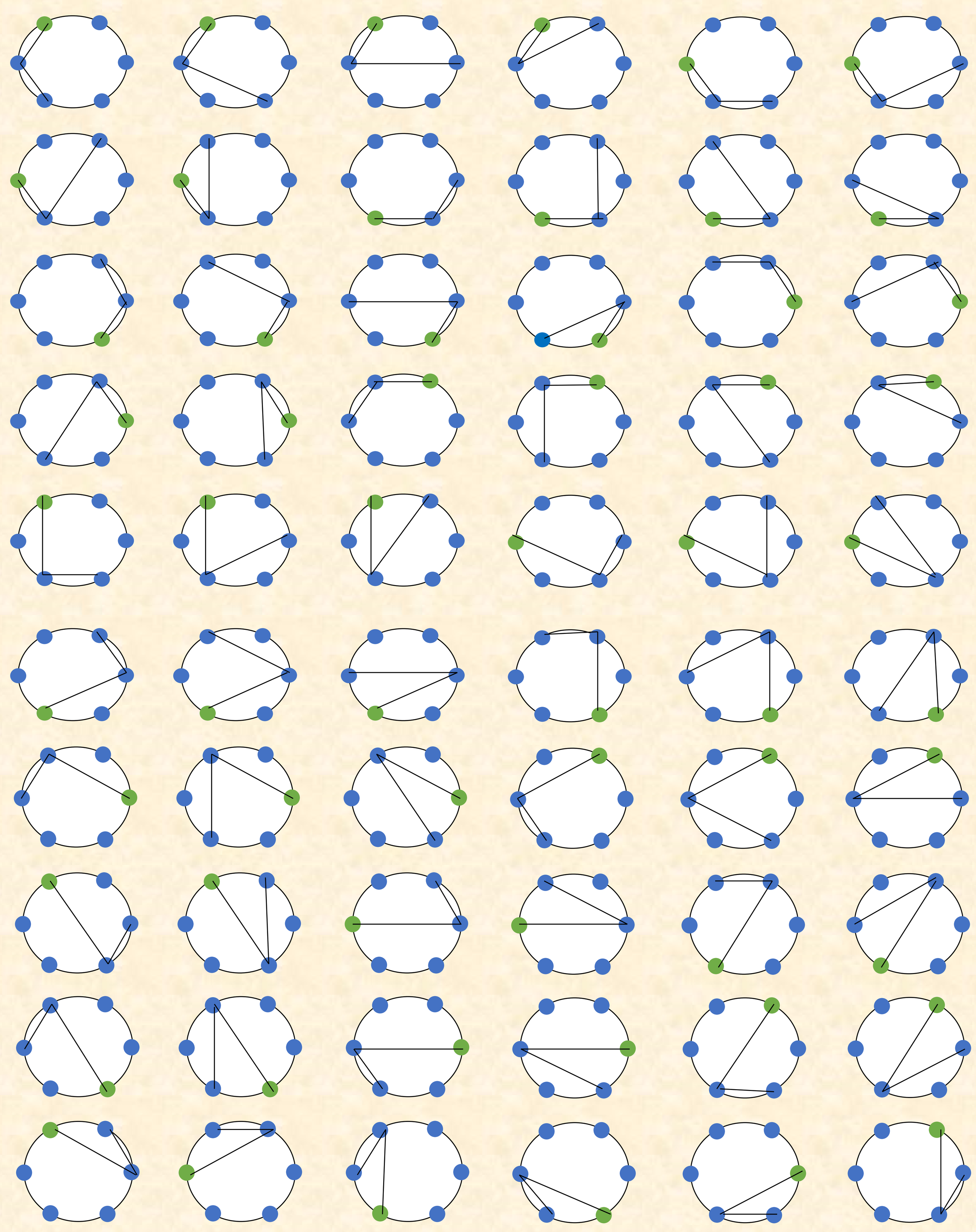
總共有 12 種圖形

(3)圓上標示五點，取三點一筆畫連線不相交之圖形



總共有 30 種圖形

(4)圓上標示六點，取三點一筆畫連線不相交之圖形

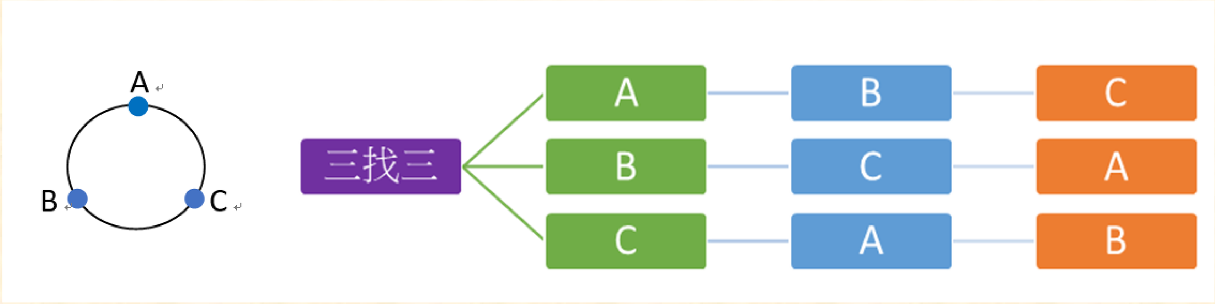


總共有 60 種圖形

二、樹狀圖

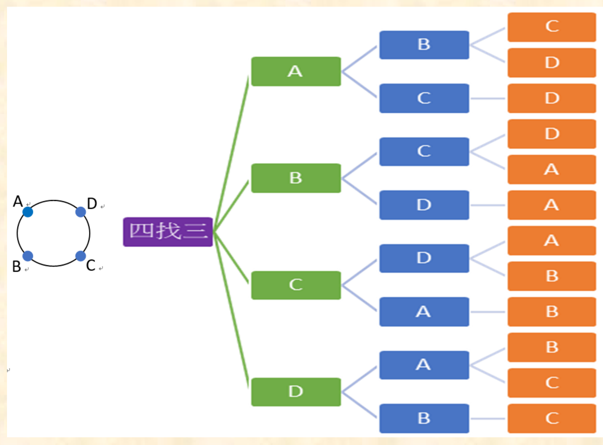
樹狀法是將每個點所能連到的點都詳列出來，但透過分類再去詳列，可以快速的找到解鎖路徑。我們以 A 開頭，找尋方式如下：

(1)圓上標示三點，取三點一筆畫連線不相交之樹狀圖



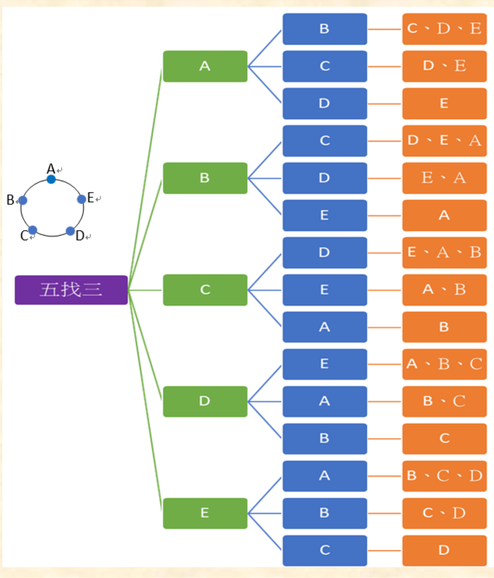
整理：圓上有三點，要找三點連線，所以每一個點都會被連到，連出來的圖形有以上三種。

(2)圖上標示四點，取三點一筆畫連線不相交之樹狀圖



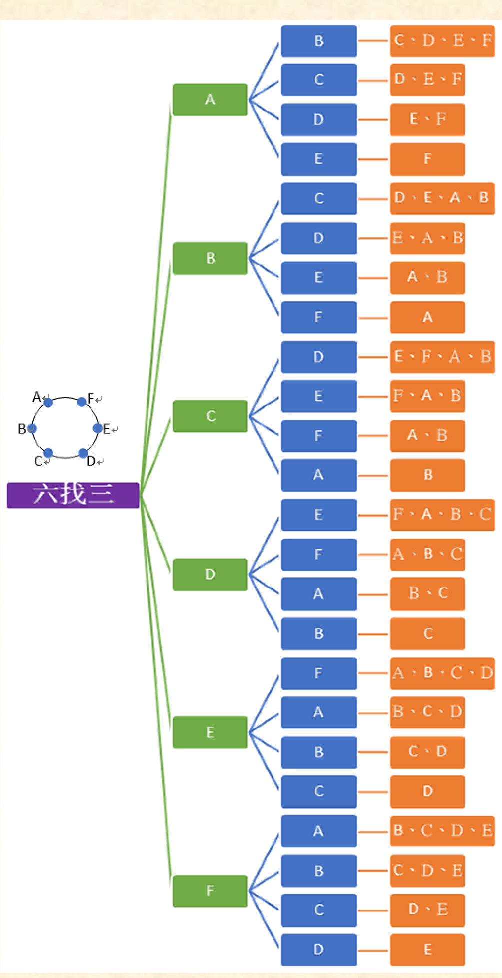
整理：圖上有四點，要找三點連線，所以每一次會有三個點被連到，我們一律從編號較小的出發，逆時針連線，這樣可以避免連重複的圖形，以 A 點為例，我們先從 A 出發可以連線到 B 點，接著再從 B 點往下連至 C 或 D，這樣從 A 出發的三點一筆畫連線就會有 ABC 與 ABD 兩種，接下來再由 A 出發連至 C 點，因要遵循逆時針走向，所以 C 點只能往下連至 D 點不可往回連 B 點以避免重複，這樣會有一種，最後歸納出從 A 出發的三點一筆畫連線會有三種，同理從 B、C、D 點出發的也都各有三種，總共就會有 12 種。

(3)圖上標示五點，取三點一筆畫連線不相交之樹狀圖



整理：
由 A 點出發的 3+2+1=6
亦可以從 B、C、D、E 點出發，所以總共有
6 X 5 = 30 種

(4)圖上標示六點，取三點一筆畫連線不相交之樹狀圖



整理：
由 A 點出發的有 4+2+3+1=10
亦可以從 B、C、D、E、F 點 出發，所以總共有
6 X 10= 60 種

三、列舉法

(1) 圓上標示三點，取三點一筆畫不相交圖形(3 種)

ABC	BCA	CAB

(2) 圓上標示四點，取三點一筆畫不相交圖形(12 種)

ABC	ABD	ACD	BCD	BCA	BDA	CDA	CDB	CAB	DAB
DAC	DBC								

(3) 圓上標示五點，取三點(30 種)

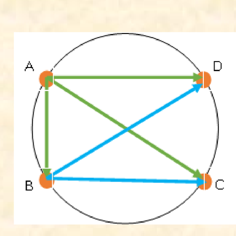
ABC	ABD	ABE	ACD	ACE	ADE	BCD	BCE	BCA	BDE
BDA	BEA	CDE	CDA	CDB	CEA	CEB	CAB	DEA	DEB
DEC	DAB	DAC	DBC	EAB	EAC	EAD	EBC	EBD	ECD

(4) 圓上標示六點，取三點一筆畫不相交圖形(60 種)

ABC	ABD	ABE	ABF	ACD	ACE	ACF	ADE	ADF	AEF
BCD	BCE	BCF	BCA	BDE	BDF	BDA	BEF	BEA	BFA
CDE	CDF	CDA	CDB	CEF	CEA	CEB	CFA	CFB	CAB
DEF	DEA	DEB	DEC	DFA	DFB	DFC	DAB	DAC	DBC
EFA	EFB	EFC	EFD	EAB	EAC	EAD	EBC	EBD	ECD
FAB	FAC	FAD	FAE	FBC	FBD	FBE	FCD	FCE	FDE

四、發現

不論是用圖示法或是樹狀圖，當圖上的 N 點數量變多，我們可能就要花費許多的時間去尋找它的種類和總數，因此我們在動手操作的同時也發現了他有一定的規則，以 N=4 為例，一開始，我們可以在 A、B、C、D 中任意取一點，所以會有四種選擇，假設我們選擇 A 為出發點時，第二步驟會有三個選擇(B、C、D)，第三步驟會有兩個選擇，總共會有 24 種走法，但是如果只有計算圖形的總額，其中有一半的圖形會重複(左右對稱)，所以共有 12 種圖形，24 種走法。



五、歸納

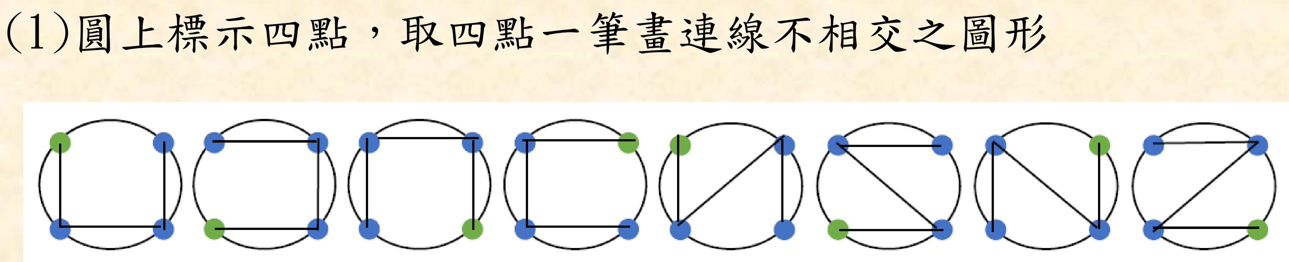
	N=3	N=4	N=5	N=6
圖形總數	$\frac{P_3^3}{2}$	$\frac{P_3^4}{2}$	$\frac{P_3^5}{2}$	$\frac{P_3^6}{2}$
路徑	P_3^3	P_3^4	P_3^5	P_3^6
總數量	3	12	30	60

圓上 N 點任取三點一筆畫連線的圖形數公式：$\frac{P_3^N}{2}$

問題二:探討在圓中 N 點任取四點一筆畫不相交之圖形數及表示法

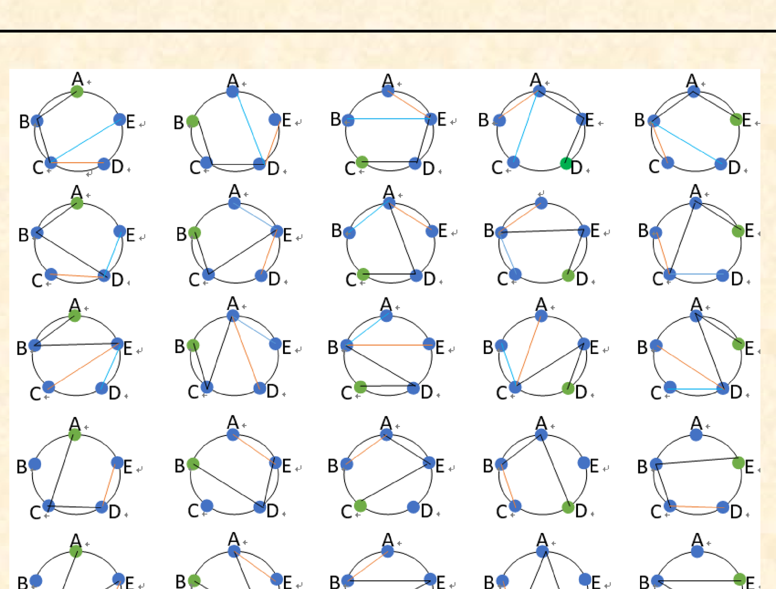
一、圖示法

(1)圖上標示四點，取四點一筆畫連線不相交之圖形



總共有 8 種圖形

(2)圖上標示五點，取四點一筆畫連線不相交之圖形

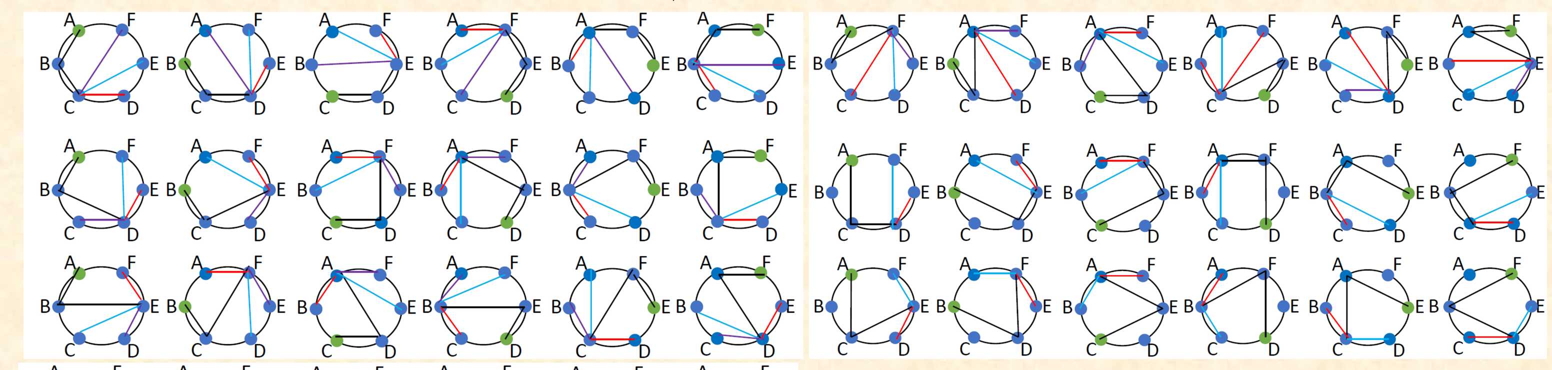


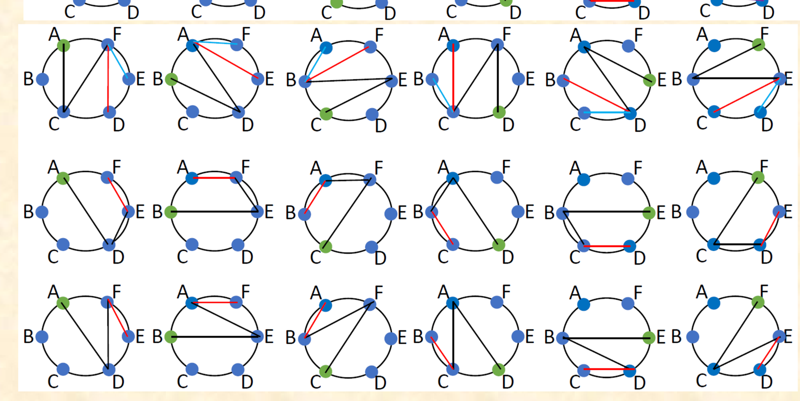
整理：為了方便討論，我們將前兩步相同路徑的結合在一起(如上圖黑線)，後面不同顏色的彩線則是分屬不同的圖形解鎖圖形，所以圖形總數如下：

(2 X 15) + 10 = 40

總共有 40 種

(3)圖上標示六點，取四點一筆畫連線不相交之圖形

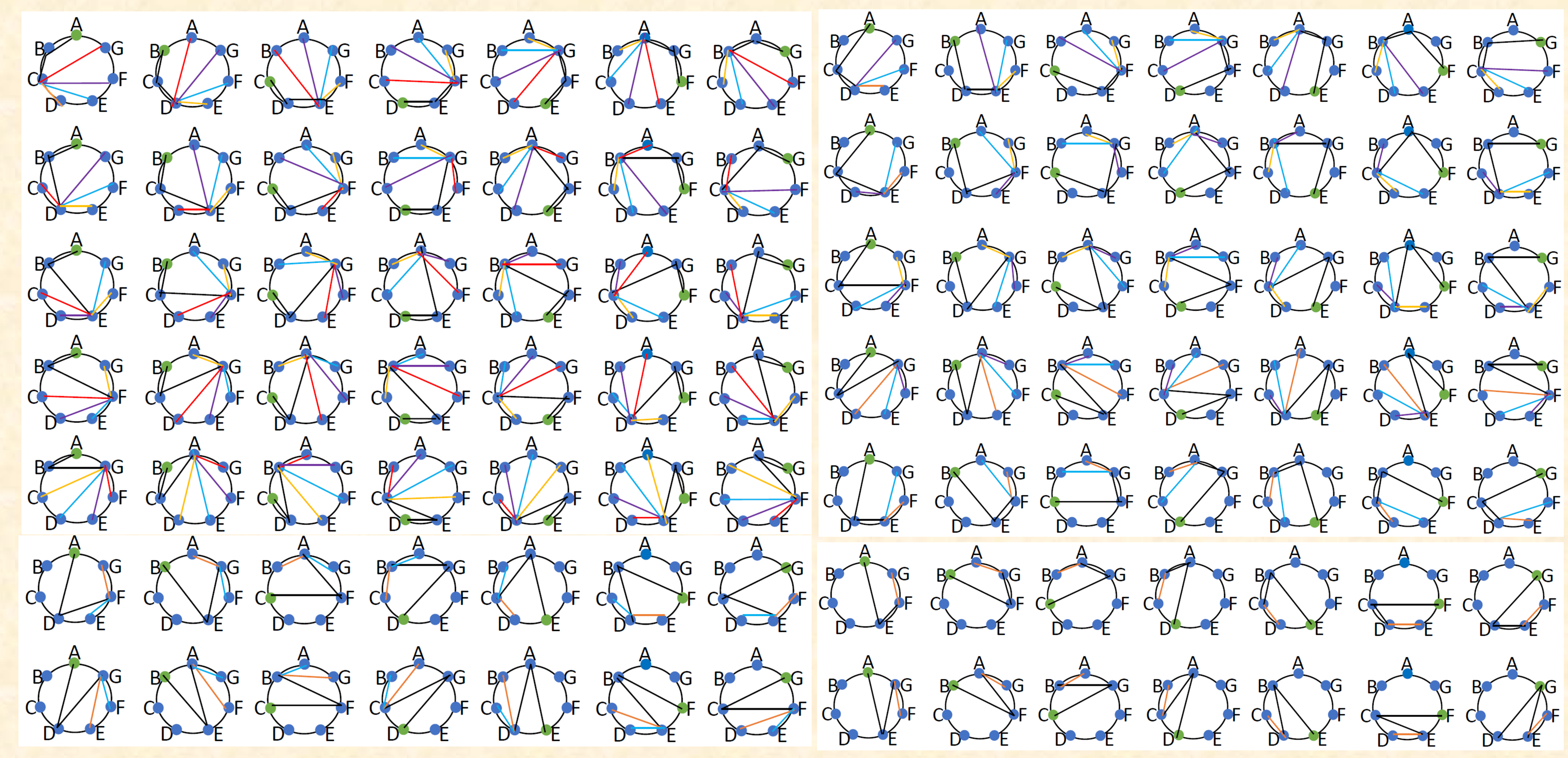




整理： 為了探討方便，我們將前兩不相同路徑的結合在一起(如上圖黑線)，後面不同顏色的彩線則是分屬不同的圖形解鎖圖形，所以圖形總數如下：

3 X 24 + 2X18 + 1X12= 120 種

(4)圖上標示七點，取四點一筆畫連線不相交之圖形



整理： 為了探討方便，我們將前兩不相同路徑的結合在一起(如上圖黑線)，後面不同顏色的彩線則是分屬不同的圖形解鎖圖形，所以圖形總數如下：

4 X 35 + 3X 28 + 2X21 + 1X14= 280 種

二、列舉法

(1) 圓上標示四點，取四點一筆畫不相交圖形(8 種)

ABCD	BCDA	CDAB	DABC	ABDC	BCAD	CBDA	DCAB		

(2) 圓上標示五點，取四點一筆畫不相交圖形(40 種)

ABCD	BCDA	CDEA	DEAB	EABC	ABCE	BCDE	CDEB	DEAC	EABD
ABDC	BCEA	CDAB	DEBA	EACB	ABDE	BCED	CDAE	DEBC	EACD
ABEC	BCAD	CDBA	DECA	EADB	ABED	BCAE	CDBE	DECB	EADC
ACDE	BDEA	CEAB	DABC	EBCD	ACED	BDAE	CEBA	DACB	EBDC

(3) 圓上標示六點，取四點一筆畫不相交圖形(120 種)

ABCD	ABCE	ABCF	BCDE	BCDF	BCDA	CDEF	CDEA	CDEB	DEFA
DEFB	DEFC	EFAB	EFAC	EFAD	FABC	FABD	FABE	ABDC	ABDE
ABDF	BCED	BCEF	BCEA	CDFE	CDFA	CDFB	DEAF	DEAB	DEAC
EFBA	EFBC	EFBD	FACB	FACD	FACE	ABEF	ABEC	ABED	BCFA
BCFD	BCFE	FADB	FADE	FADF	DEBF	DEBC	DEBD	EFCA	EFCD
EFCE	FADB	FADC	FADE	ABFC	ABFD	ABFE	BCAD	BCAE	BCAF
CDAB	CDAE	CDAF	DECF	DECA	DECB	EFDA	EFDB	EFDC	FAEB
FAEC	FAED	ACDE	ACDF	BDEF	BDEA	CEFA	CEFB	DFAB	DFAC
EABC	EABD	FBCD	FBCE	ACED	ACEF	BDFE	BDFA	CEAF	CEAB
DFBA	DFBC	EACB	EACD	FBDC	FBDE	ACFD	ACFE	BDAE	BDAF
CEBF	CEBA	DFCA	DFCB	EADB	EADC	FBEC	FBED	ADEF	BEFA
CFAB	DABC	EBCD	FCDE	ADFE	BEAF	CFBA	DACB	EBDC	FCED

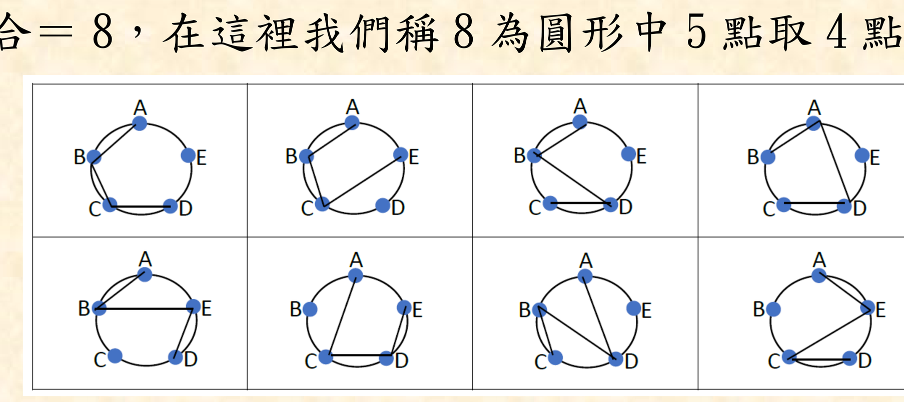
(4) 圓上標示七點，取四點一筆畫連線不相交圖形(280 種)

ABCD	ABCE	ABCF	ABCG	ABDC	ABDE	ABDF	ABDG	ABFC	ABFD
ABFE	ABFG	ACDE	ACDF	ACDG	ACFD	ACFE	ACFG	ACGD	ACGE
ACGF	ADEF	ADEG	ADFE	ADFG	ADGE	ADGF	ABEC	ABED	ABEF
ABEG	ABGC	ABGD	ABGE	ABGF	ACED	ACEF	ACEG	AEFG	AEGF
BCDA	BCDE	BCDF	BCDG	BCEA	BCED	BCEF	BCEG	BCFD	BCFE
BCFG	BCFA	BCGA	BCGD	BCGE	BCGF	BCAD	BCAE	BCAF	BCAG
BDEA	BDEF	BDEG	BDGA	BDGE	BDGF	BDAE	BDAF	BDAG	BDFE
BDFA	BDFG	BEFA	BEFG	BEGA	BEGF	BEAF	BEAG	BFGA	BFAG
CDEA	CDEB	CDEF	CDEG	CDFA	CDFB	CDFE	CDFG	CDGA	CDGB
CDGE	CDGF	CDAB	CDAE	CDAG	CDAF	CDBA	CDBE	CDBF	CDBG
CEFA	CEFB	CEFG	CEGA	CEGB	CEGF	CEAB	CEAF	CEAG	CEBA
CEBF	CEBG	CFGA	CFGB	CFAB	CFAG	CFBA	CFBG	CGAB	CGBA
DEFA	DEFB	DEFC	DEFG	DEGA	DEGB	DEGC	DEGF	DEAB	DEAC
DEAF	DEAG	DEBA	DEBC	DEBF	DEBG	DECA	DECB	DECG	DECF
DFGA	DFGB	DFGC	DFAB	DFAC	DFAG	DFBA	DFBC	DFBG	DFCA
DFCB	DFCG	DGAB	DGAC	DGBA	DGBC	DGCA	DGCB	DABC	DACB
EFGA	EFGB	EFGC	EFGD	EFAB	EFAC	EFAD	EFAG	EFBA	EFBC
EFBD	EFBG	EFCA	EFCB	EFCD	EFCG	EFDA	EFDB	EFDC	EFDG
EGAB	EGAC	EGAD	EGBA	EGBC	EGBD	EGCA	EGCB	EGCD	EGDB
EGDC	EGDE	EABC	EABD	EACB	EACD	EADB	EADC	EBCD	EBDC
FGAB	FGAC	FGAD	FGAE	FGBA	FGBC	FGBD	FGBE	FGCA	FGCB
FGCD	FGCE	FGDA	FGDB	FGDC	FGDE	FGEA	FGEB	FGEC	FGED
FABC	FABD	FABE	FACB	FACD	FACE	FADB	FADC	FADE	FAEB
FAEC	FAED	FBCD	FBCE	FBDC	FBDE	FBEC	FBED	FCDE	FCDE
GABC	GABD	GABE	GABF	GACB	GACF	GACE	GACD	GADB	GADC
GADF	GADE	GAEB	GAEC	GAED	GAEF	GAFB	GAFC	GAFD	GAFE
GBCD	GBCE	GBCF	GBDC	GBDE	GBDF	GBEC	GBED	GBEF	GBFC
GBFD	GBFE	GCDE	GCDF	GCED	GCEF	GCFD	GCFE	GDEF	GDFE

三、發現

歸納圖形時，我們利用三種方法所找出來的圖形皆是 40 種，和我們原先設想的答案 $\frac{P_4^5}{2}$ =60 種並不相同，後來仔細研究圖形後發現圓中 5 點取 4 點一筆畫圖形不但有左右對稱還有旋轉對稱、鏡射對稱、平移相同、大小相同但方向不同這些特性，所以會有更多的重複，但是他們的答案皆同時除以 3，這真是一個有趣的發現。

我們仔細觀察這些圖形，發現圖形中若 A→B→C→D 是有效圖形，依序改變排列方式，則 B→C→D→A、C→D→A→B、D→A→B→C 也都會是有效圖形。我們先以圖形中 5 點取 4 點一筆畫為例，其全部有效圖形有 40 種，把改變順序後的圖形視為同一組，總共會有 5 種組合，於是我們將全部有效圖形有 40 種÷ 5 種組合＝8，在這裡我們稱 8 為圖形中 5 點取 4 點一筆畫圖形之基本圖形。(如下)



為了驗證這個想法是否正確，我們將相同的概念套用在圓形中 6 點取 4 點一筆畫圖形與圓形中 7 點取 4 點一筆畫圖形中，也都發現了相同的結果。

歸納：我們將全部有效圖形÷組合數＝A (常數)，表示全部有效圖形由 A 種基本圖形構成。 $\frac{P_4^5}{3} \div C_4^5$、$\frac{P_4^6}{3} \div C_4^6$、$\frac{P_4^7}{3} \div C_4^7$、$\frac{P_4^8}{3} \div C_4^8$ ，得到相同的常數 8，表示圓上有 n 個點任取 4 點用一筆畫連成圖形，且線段不交叉的情況下，都是由 8 個基本圖形產出。

四、歸納

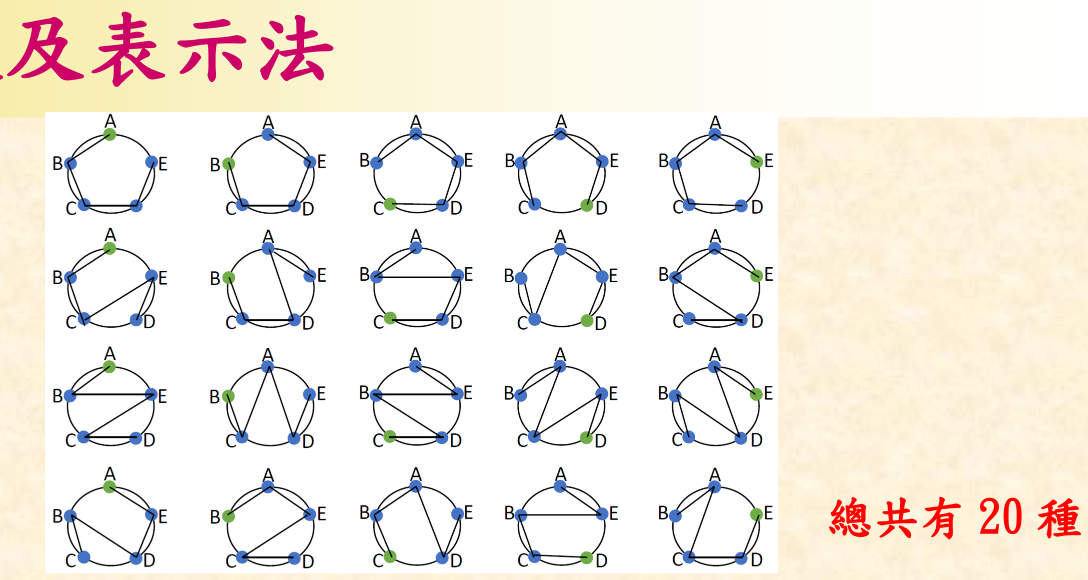
	N=4	N=5	N=6	N=7
圖形總數	$\frac{P_4^4}{3}$	$\frac{P_4^5}{3}$	$\frac{P_4^6}{3}$	$\frac{P_4^7}{3}$
路徑	$\frac{P_4^4}{3}X\ 2$	$\frac{P_4^5}{3}X\ 2$	$\frac{P_4^6}{3}X\ 2$	$\frac{P_4^7}{3}X\ 2$
總數量	8	40	120	280

圓上 N 點任取四點一筆畫連線的圖形數公式：$\frac{P_4^N}{3}$

問題三:探討在圓中 N 點任取五點一筆畫不相交之圖形數及表示法

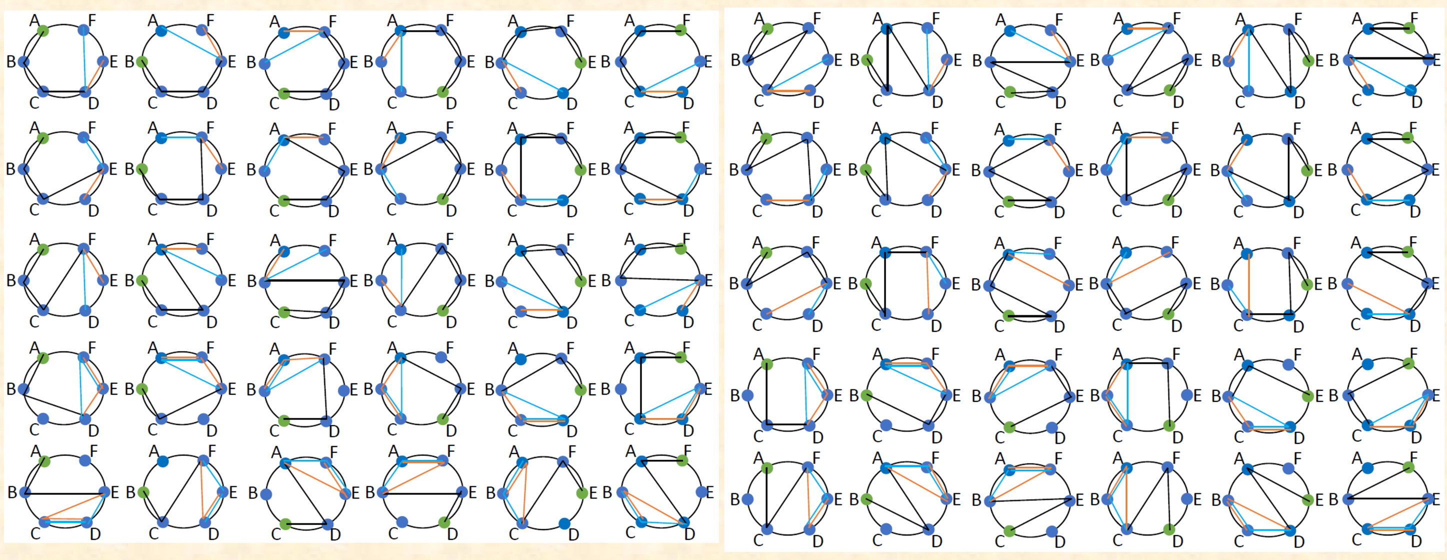
一、圖示法

(1)圖上標示五點，取五點一筆畫連線不相交之圖形



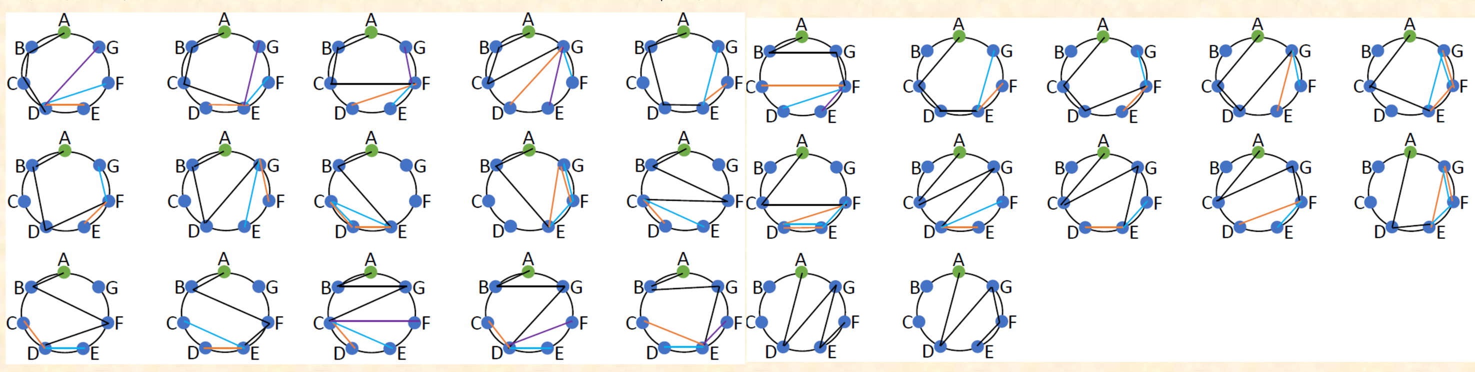
總共有 20 種

(2)圓上標示六點，取五點一筆畫連線不相交之圖形



總共有 6 X 20= 120 種

(3)圓上標示七點，取五點一筆畫連線不相交之圖形



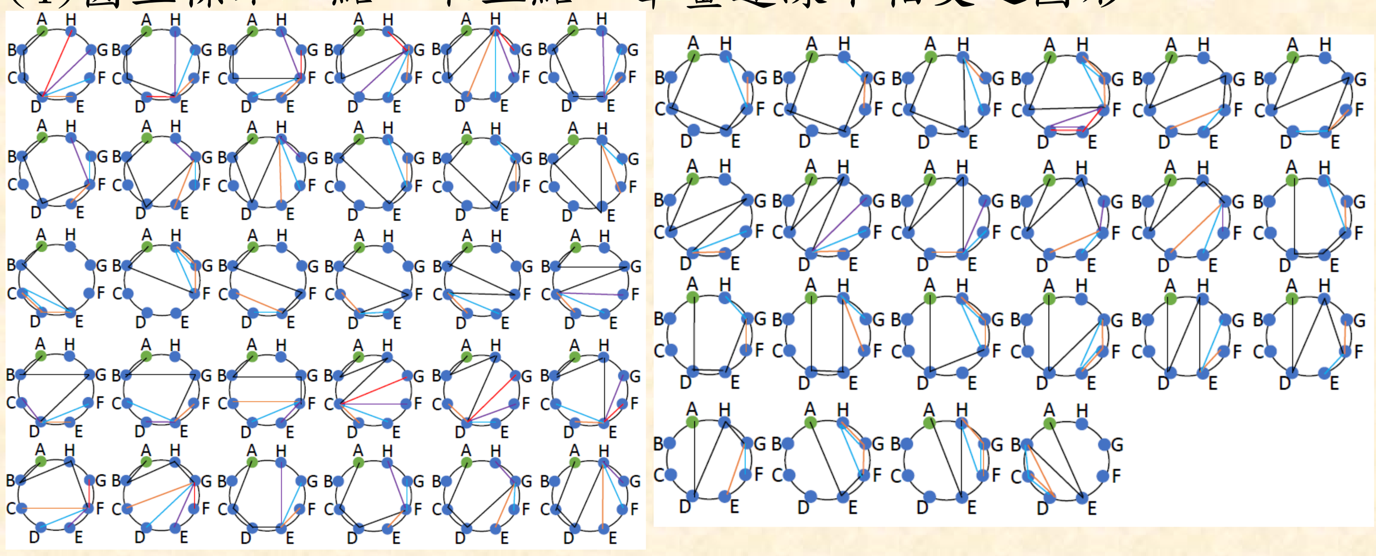
整理：為了方便討論，我們將從 A 點出發前兩步相同路徑的結合在一起(如上圖黑線)，後面不同顏色的彩線則是分屬不同的圖形解鎖圖形，所以圖形總數如下：

3 X 8 ＋2X 17＋1X2 = 60 種

上列圖形接設定從 A 點出發，但若將圖形轉向可以從 B~G 點出發，圖形也會不一樣，所以轉向圖形總數如下：

60 X 7 = 420 種

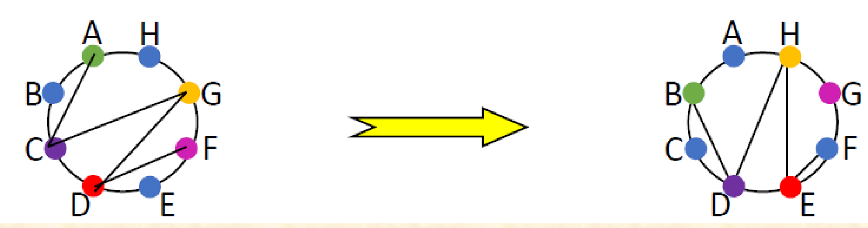
(4)圓上標示八點，取五點一筆畫連線不相交之圖形



整理：為了方便討論，我們將從 A 點出發前兩步相同路徑的結合在一起(如上圖黑線)，後面不同顏色的彩線則是分屬不同的圖形解鎖圖形，所以圖形總數如下：

4 X 11 ＋3 X 16 ＋24X2 = 140 種

上列圖形接設定從 A 點出發，但若將圖形轉向可以從 B~G 點出發，圖形也會不一樣，如下：



所以加上其它轉向圖形總數如下：**140 X 8 = 1120 種**

二、列舉法

（1） 圓上標示五點，取五點一筆畫連線不相交圖形(20 種)

ABCDE	BCDEA	CDEAB	DEABC	EABCD	ABCED	BCDAE	CDEBA	DEACB	EABDC
ABECD	BCADE	CDBEA	DECAB	EADBC	AEDBC	BAECD	CBADE	DCBEA	EDCAB

（2） 圓上標示六點，取五點一筆畫連線不相交圖形(120 種)

ABCDE	ABCDF	BCDEF	BCDEA	CDEFA	CDEFB	DEFAB	DEFAC	EFABC	EFABD
FABCD	FABCE	ABCEF	ABCED	BCDFA	BCDFE	CDEAB	CDEAF	DEFBA	DEFBC
EFACB	EFACD	FABDC	FABDE	ABCFD	ABCFE	BCDAE	BCDAF	CDEBA	CDEBF
DEFCA	DEFCB	EFADC	EFADB	FABEC	FABED	ABDEF	ABDFE	BCEFA	BCEAF
CDFAB	CDFBA	DEABC	DEACB	EFBCD	EFBDC	FACDE	FACED	ABECD	ABEDC
BCFDE	BCFED	CDAEF	CDAFE	DEBFA	DEBAF	EFCAB	EFCBA	FADBC	FADCB
ABFCD	ABFCE	BCADE	BCADF	CDBEF	CDBEA	DECFA	DECFB	EFDAB	EFDAC
FADBC	FADCB	ABFDC	ABFDE	BCAED	BCAEF	CDBFE	CDBFA	DECAF	DECAB
EFDBA	EFDBC	FAECB	FAECD	ABFEC	ABFED	BCAFD	BCAFE	CDBAF	CDBAE
DECBA	DECBF	EFDCB	EFDCA	FAEDB	FAEDC	ACDFE	ACDEF	BDEAF	BDEFA
CEFAB	CEFBA	DFABC	DFACB	EABDC	EABCD	FBCED	FBCDE	ACFDE	ACFED
BDAEF	BDAFE	CEBFA	CEBAF	DFCBA	DFCAB	EADBC	EADCB	FBECD	FBEDC

（3） 圓上標示七點，取五點一筆畫連線不相交圖形(280 種)

ABCD(E、F、G)	BCDE(F、G、A)	CDEF(G、A、B)	DEFG(A、B、C)	EFGA(B、C、D)
FGAB(C、D、E)	GABC(D、E、F)	ABCE(D、F、G)	BCDF(E、G、A)	CDEG(F、A、B)
DEFA(G、B、A)	EFGB(A、C、D)	FGAC(B、D、E)	GABD(C、E、F)	ABCF(D、E、G)
BCDG(E、F、A)	CDEA(F、G、B)	DEFB(C、G、A)	EFGC(A、B、D)	FGAD(B、C、E)
GABE(C、D、F)	ABCG(D、E、F)	BCDA(E、F、G)	CDEB(A、F、G)	DEFC(A、B、G)
EFGD(A、B、C)	FGAE(B、C、D)	GABF(C、D、E)	ABDE(F、G)	BCEF(A、D、G)
CDFG(A、B、E)	DEGA(B、C、F)	EFAB(C、D、G)	FGBC(A、D、E)	GACD(B、E、F)
ABDF(E、G)	BCEG(F、A)	CDFA(G、B)	DEGB(A、C)	EFAC(B、D)
FGBD(C、E)	GACE(D、F)	ABDG(E、F)	BCEA(F、G)	CDFB(G、A)
DEGC(A、B)	EFAD(B、C)	FGBE(C、D)	GACF(D、E)	ABEDC
BCFED	CDGFE	DEAGF	EFBAG	FGCBA
GADCB	ABECD	BCFDE	CDGEF	DEAFG
EFBGA	FGCAB	GADBC	ABEGF	BCFAG
CDGBA	DEACB	EFBDC	FGCED	GADFE
ABEFG	BCFGA	CDGAB	DEABC	EFBCD
FGCDE	GADEF	ABFC(D、E)	BCGD(E、F)	CDAE(F、G)
DEBF(G、A)	EFCG(A、B)	FGDA(B、C)	GAEB(C、D)	ABFD(C、E)
BCGE(D、F)	CDAF(E、G)	DEBG(F、A)	EFCA(G、B)	FGDB(A、C)
GAEC(B、D)	ABFE(C、D)	BCGF(D、E)	CDAG(E、F)	DEBA(F、G)
EFCB(G、A)	FGDC(A、B)	GAED(B、C)	ABGC(D、E、F)	BCAD(E、F、G)
CDBE(F、G、A)	DECF(G、A、B)	EFDG(A、B、C)	FGEA(B、C、D)	GAFB(C、D、E)
ABGD(C、E、F)	BCAE(D、F、G)	CDBF(E、G、A)	DECG(F、A、B)	EFDA(G、B、C)
FGEB(A、C、D)	GAFC(B、D、E)	ABGE(C、D、F)	BCAF(D、E、G)	CDBG(E、F、A)

DECA(F、G、B)	EFDB(G、A、C)	FGEC(A、B、D)	GAFD(B、C、E)	ABGF(C、D、E)
BCAG(D、E、F)	CDBA(E、F、G)	DECB(F、G、A)	EFDC(G、A、B)	FGED(A、B、C)
GAFE(B、C、D)	ACDE(F、G)	BDE(G、A)	CEF(A、B)	DFG(B、C)
EGA(C、D)	FAB(D、E)	GBC(E、F)	ACDF(E、G)	BDE(F、A)
CEF(G、B)	DFG(A、C)	EGA(B、D)	FAB(C、E)	GBC(D、F)
ACDG(E、F)	BDE(F、G)	CEF(G、A)	DFG(A、B)	EGA(B、C)
FAB(C、D)	GBC(D、E)	ACEFG	BDFGA	CEGAB
DFABC	EGBCD	FACDE	GBDEF	ACEGF
BDFAG	CEGBA	DFACB	EGBDC	FACED
GBDFE	ACFDE	BDGEF	CEAFG	DFBGA
EGCAB	FADBC	GBECD	ACFED	BDGFE
CEAGF	DFBAG	EGCBA	FADCB	GBEDC
ACGD(E、F)	BDAE(F、G)	CEBF(G、A)	DFCG(A、B)	EGDA(B、C)
FAEB(C、D)	GBFC(D、E)	ACGE(D、F)	BDAF(E、G)	CEBG(F、A)
DFCA(G、B)	EGDB(A、C)	FAEC(B、D)	GBFD(C、E)	ACGF(D、E)
BDAG(E、F)	CEBA(F、G)	DFCB(G、A)	EGDC(A、B)	FAED(B、C)
GBFE(C、D)	ADEFG	BEFGA	CFGAB	DGABC
EABCD	FBCDE	GCDEF	ADEGF	BEFAG
CFGBA	DGACB	EABDC	FBCED	GCDFE
ADGEF	BEAFG	CFBGA	DGCAB	EADBC
FBECD	GCFDE	ADGFE	BEAGF	CFBAG
DGCBA	EADCB	FBEDC	GCFED	

註：( )裡的分別表示不同路線，也就是前面路

（4） 圓上標示八點，取五點一筆畫連線不相交圖形(1120 種)

ABCDE	ABCDF	ABCDG	ABCDH	ABCED	ABCEF	ABCEG	ABCEH	ABCFD	ABCFE
ABCFG	ABCFH	ABCGD	ABCGE	ABCGF	ABCGH	ABCHD	ABCHE	ABCHF	ABCHG
ABDEG	ABDEG	ABDEH	ABDFE	ABDFG	ABDFH	ABDGE	ABDGF	ABDGH	ABDHE
ABDHF	ABDHG	ABEFG	ABEFH	ABEGF	ABEGH	ABECD	ABEDC	ABFGH	ABFHG
ABFEC	ABFED	ABFDC	ABFDE	ABFCD	ABFCE	ABGCD	ABGCE	ABGCF	ABGDC
ABGDE	ABGDF	ABGEC	ABGED	ABGEF	ABGFC	ABGFD	ABGFE	ABHCD	ABHCE
ABHCF	ABHCG	ABHDC	ABHDE	ABHDF	ABHDG	ABHEC	ABHED	ABHEF	ABHEG
ABHFC	ABHFD	ABHFE	ABHFG	ABHGC	ABHGD	ABHGE	ABHGF	ACDEF	ACDEG
ACDEH	ACDFE	ACDFG	ACDFH	ACDGE	ACDGF	ACDGH	ACDHE	ACDHF	ACDHG
ACEFG	ACEFH	ACEGF	ACEGH	ACEHF	ACEHG	ACFDE	ACFED	ACFGH	ACFHG
ACGFD	ACGFE	ACGED	ACGEF	ACGDE	ACGDF	ACHDE	ACHDF	ACHDG	ACHED
ACHEF	ACHEG	ACHFD	ACHFE	ACHFG	ACHGD	ACHGE	ACHGF	ADEFG	ADEFH
ADEGF	ADEGH	ADEHF	ADEHG	ADFGH	ADFHG	ADGEF	ADGFE	ADHEF	ADHEG
ADHFE	ADHFG	ADHGE	ADHGF	AEFGH	AEFHG	AEHGF	AEHFG	AEBCD	AEBDC

註：因為圓上八點找五點一筆畫連線不相交圖形多達一千多種，在此僅列由 A 出發的所有圖形，當起始點由 A 點轉 B 點出發時，其他連線的點也會往逆時針方向移動一格，ABCDE

BCDEF ➡ CDEFG ➡ DEFGH ➡

EFGHA ➡ FGHAB ➡ GHABC ➡ HABCD，

因此每個圖形都還會再衍生出七種圖形，所以圖形種數總共會有 140X8=1120 種。

三、發現

相同的方式運用在 n 個點任取 5 點 $\frac{P_5^6}{6} \div C_5^6$、$\frac{P_5^7}{6} \div C_5^7$ 中， 得到相同的常數 20（基本圖形）。表示任取 5 點所形成的有效圖形皆由

四、歸納

	N=5	N=6	N=7	N=8
圖形總數	$\frac{P_5^5}{6}$	$\frac{P_5^6}{6}$	$\frac{P_5^7}{6}$	$\frac{P_5^8}{6}$
路徑	$\frac{P_5^5}{6}X\ 2$	$\frac{P_5^6}{6}X\ 2$	$\frac{P_5^7}{6}X\ 2$	$\frac{P_5^8}{6}X\ 2$
總數量	20	120	420	1120

圓上 N 點任取五點一筆畫連線的圖形數公式：$\frac{P_5^N}{6}$

問題四：探討圓中 N 點任取 M 點(M=3~5)一筆畫不相交圖形的相關性

一、 困難

想找圓形上一筆畫不相交圖形，我們需要透過圖示法、樹狀法及列舉法來相互驗證，這個過程相當費時費力，也容易因為人為上的疏漏，而無法歸納出正確的通式。

二、 突破

在探討圓上 N 點任取(3~5)點中歸納出的公式，發現排列數÷實數（如$\frac{P_4^N}{3}$）就可算出正確圖形數，於是我們想運用先前歸納出的公式，找出實數（即$\frac{P_6^6}{x}$中的除數 X）的規律。我們想起之前老師和我們玩找規律的遊戲，其中有一題是費氏數列，於是我們從費氏數列中得到靈感，運用前一組已知分母找出後一組未知的分母（除數），快速計算出在圓上 N 點任取 M 點不交叉的有效圖形數。

三、 發現

(一) 不論圓上有幾點，只要任取三點不相交圖形數皆要÷2，任取 4 點皆÷3，任取五點皆÷6，所以只要任取的點數相同，所除的數也會相同。

(二) 逆時針連線，每往下一個點移動時，連線數會少一。

因上述兩點我們發現分母是可以透過推導而產出，所以我們從$\frac{P_3^N}{2}$、$\frac{P_4^N}{3}$、$\frac{P_5^N}{6}$規律中找出$\frac{P_6^6}{x}$ 的除數（X）。圓上 N 點任取 M 點一筆畫不相交之圖形數公式推導如：

$$\frac{P_3^N}{2}、\frac{P_4^N}{x_1}、\frac{P_5^N}{x_2}、\frac{P_6^N}{x_3}、\frac{P_7^N}{x_4}、\frac{P_8^N}{x_5}、\frac{P_9^N}{x_6}、\frac{P_{10}^N}{x_7}\cdots\cdots$$

其中：$x_1=2\times P_4^N$（4－1）÷2=2×3÷2=3，所以圓上 N 點任取 4 點有效圖形公式為$\frac{P_4^N}{3}$

$x_2=x_1\times P_5^N$（5－1）÷2=3×4÷2=6，所以圓上 N 點任取 5 點有效圖形公式為$\frac{P_5^N}{6}$

$x_3=x_2\times P_6^N$（6－1）÷2=6×5÷2=15，所以圓上 N 點任取 6 點有效圖形公式為$\frac{P_6^N}{15}$

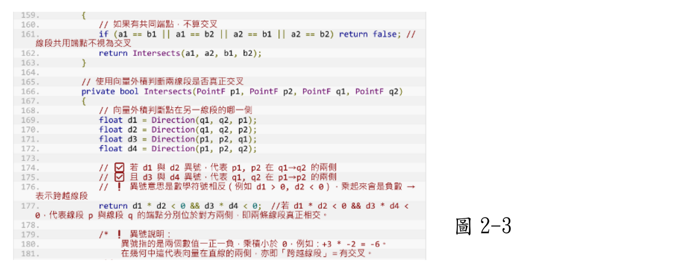
(三) 用相同的方式驗算在先前已得知的公式上皆得到與公式相同的答案。故我們推論出圓上 N 點任取 M 點一筆畫不相交之圖形數公式為：

$$P_m^N(x_k)=\ x_{k-1}\times P_m^N(m-1)\div 2$$

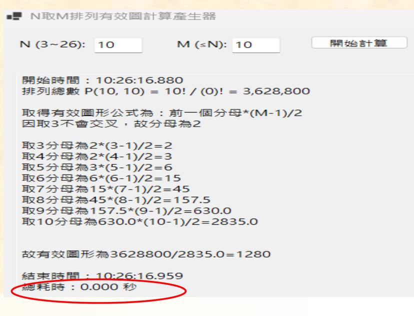
四、 驗證

為了使推導出的公式具可靠性及驗證性，我們思考要運用什麼方式來驗證我們的推論，因為當圓上 8 點任取 8 點時總圖形數高達 40320 張，雖然可透過只找出 A 點不交叉圖形數再乘以要取的點數，但光是 A 點的全部圖形數也達到了 2520 張，所以窮舉法已經無法解決問題，於是我們想到了運用電腦程式來計算排列並使用向量外積計算有交叉線段的圖形數，協助我們快速檢驗所推論的公式是否正確。

重要程式碼運作邏輯

 圖 1-1 圖 1-2	先讓程式以 P_M^N 計算出所有的排列，用 DFS 遞迴方式(如圖 1-1 及 1-2)，計算出所有的排列出來，並儲存。我們先以 P_2^4 為檢驗，確認程式的正確性。
 圖 2-1 圖 2-2	使用 for 迴圈逐個處理計算每個 N 點對應到圓周上的角度（以弧度表示），以便用 cos/sin 計算每個 N 點在圓上的 X、Y 座標(如圖 2-1 及 2-2)，接下來用步驟 1 產生的所有排列，使用向量外積(叉積) 的邏輯判斷線段是否交叉（如圖 2-3)，並產生圖形。
 圖 2-3	在向量外積(叉積)判斷線段是否交叉時，有共同端點是不能計算為交叉(如圖 2-3)。例如線段 A－B，B－C，B 是共同端點，以向量而言，這會被歸類在交叉圖形中，但以我們的圖形而言是不能被計算在交叉圖形數量中。

設計完成的程式執行結果與我們導論出的公式 $\frac{P_6^6}{15}$=48 一致。原本設計的程式是會產生圖片，因為有圖片產出所以速度慢，測試只能跑到 10 取 10，超過 11 會耗費許多時間也容易造成電腦當機。於是我們思考如何優化程式的部分，最後決定將畫出圖形改以文字呈現，以提升速度。並將推導出的公式也寫成另一個程式，測試公式的正確及在電腦上運算速度的差異。用推導公式所寫成的程式花費時間不到 1 秒即可算出一筆畫不相交圖形數。如右圖



結論：1.透過電腦程式相互檢驗皆能計算出相同答案，在圓上 N 點取 M 點一筆畫不相交圖形數公式為 ：$P_m^N(x_k)=\ x_{k-1}\times P_m^N(m-1)\div 2$

2.運用程式可減省人工畫圖時間，但用推導出的公式在計算上更有效率。

問題五：生活中的應用

一、智慧型手機與平板解鎖

二、智慧門鎖與安防系統

三、車輛無鑰匙啟動系統

四、智慧手錶與穿戴裝置

五、智慧家居控制

六、醫療與復健應用

陸、研究結果

一、 圓中 N 點任取三點一筆畫連線的圖形數及表示法

	N=3	N=4	N=5	N=6
圖形總數	$\frac{P_3^3}{2}$	$\frac{P_3^4}{2}$	$\frac{P_3^5}{2}$	$\frac{P_3^6}{2}$
路徑	P_3^3	P_3^4	P_3^5	P_3^6
總數量	3	12	30	60

圓上 N 點任取三點一筆畫連線的圖形數公式：$\frac{P_3^N}{2}$

二、 圓中 N 點任取四點一筆畫連線的圖形數及表示法

	N=4	N=5	N=6	N=7
圖形總數	$\frac{P_4^4}{3}$	$\frac{P_4^5}{3}$	$\frac{P_4^6}{3}$	$\frac{P_4^7}{3}$
路徑	$\frac{P_4^4}{3}X\ 2$	$\frac{P_4^5}{3}X\ 2$	$\frac{P_4^6}{3}X\ 2$	$\frac{P_4^7}{3}X\ 2$
總數量	8	40	120	280

圓上 N 點任取四點一筆畫連線的圖形數公式：$\frac{P_4^N}{3}$

三、 圓中 N 點任取五點一筆畫連線的圖形數及表示法

	N=5	N=6	N=7	N=8
圖形總數	$\frac{P_5^5}{6}$	$\frac{P_5^6}{6}$	$\frac{P_5^7}{6}$	$\frac{P_5^8}{6}$
路徑	$\frac{P_5^5}{6}X\ 2$	$\frac{P_5^6}{6}X\ 2$	$\frac{P_5^7}{6}X\ 2$	$\frac{P_5^8}{6}X\ 2$
總數量	20	120	420	1120

圓上 N 點任取五點一筆畫連線的圖形數公式：$\frac{P_5^N}{6}$

四、 探討圓中 N 點任取 M 點一筆畫的通式

$$P_m^N(x_k)=\ x_{k-1}\times P_m^N(m-1)\div 2$$

«本研究所有照片、圖片皆為作者自行拍攝、繪製、編製»