中華民國第65屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080407

斜率解碼：正比數列與面積

學校名稱：　雲林縣水林鄉文正國民小學

作者：	指導老師：
小六　張欣茹	許景晴
小六　李明博	許榮華
小六　洪勝彥	

關鍵詞：　正比、斜率、三角形

作品名稱：斜率解碼：正比數列與面積

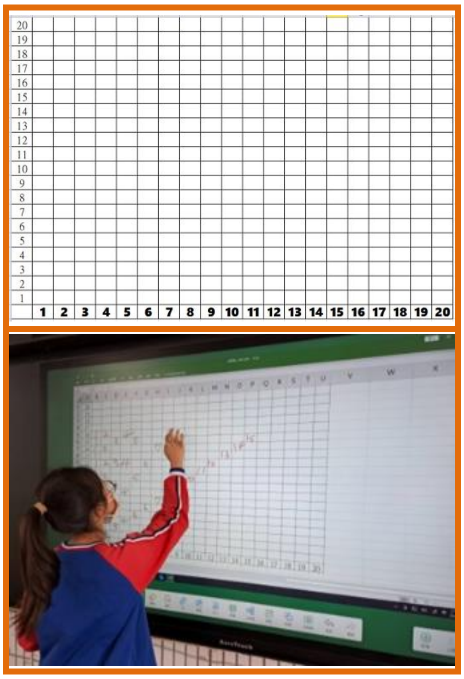
摘 要

進行這個研究，是在正比關係直線圖中探究相異斜線之間的三角形面積。首先，透過因數與倍數來建構橫軸與縱軸的關係，以數字排列來模擬延伸的直線圖，依其行進方位獲取斜率。接著在正比關係直線圖中探討不同斜線的座標位置，以計算斜線末端的間隔距離，確認三角形底邊長度，最後以斜率建立公式—計算相異兩直線所劃分的三角形面積。

壹、前言

一、研究動機

記得在學習因數與倍數的時候，老師曾經提供一個表格，讓大家填寫倍數，也確認因數的個數。表格最下方 1-20 的粗體數字代表班上 20 位同學的座號，而表格最左邊那一行數字(以下簡稱**<u>最左行數字</u>**)則是讓同學判斷是否為座號的倍數。同學們在自己座號的那一行由下往上檢視，如果最左行數字是座號的倍數，就在空格填上座號，如果不是倍數的話，就空著。



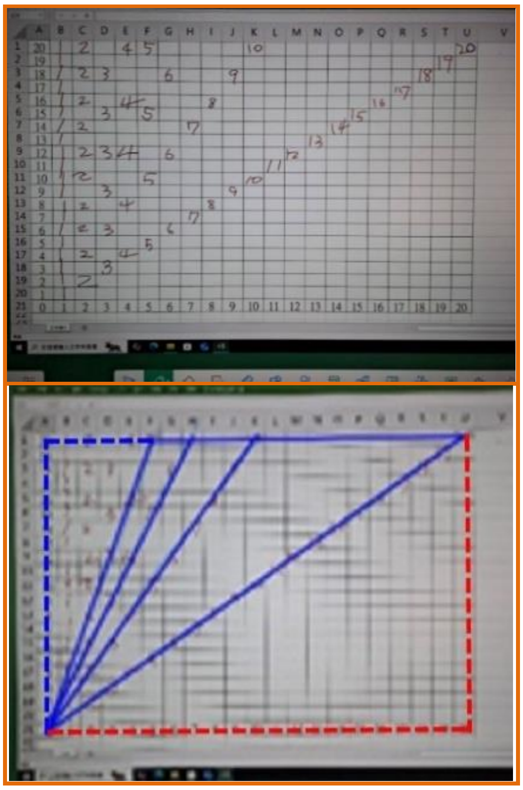
(上圖由作者自行繪製拍攝)

活動進行時，不管是填上座號或空著，都算一次的記錄，同一橫列的格子都完成記錄，才進行下一輪，也就是說，所有座號的同學都完成一次紀錄，1 號同學才可以往上填寫第 2 格，依此類推，直到同一行的 20 格都完成紀錄。

20	1	2		4	5					10										20
19	1																		19	
18	1	2	3			6			9									18		
17	1																17			
16	1	2		4				8								16				
15	1		3		5										15					
14	1	2					7							14						
13	1												13							
12	1	2	3	4		6						12								
11	1										11									
10	1	2			5					10										
9	1		3						9											
8	1	2		4				8												
7	1						7													
6	1	2	3			6														
5	1				5															
4	1	2		4																
3	1		3																	
2	1	2																		
1	1																			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**

(表格由作者自行繪製)

當每位同學都完成填寫，所形成的表格便如同左圖一般，同一橫列的格子所填上的數字就是最左行數字的全部因數。以最左行數字 20 為例，其因數包含 1、2、4、5、10、20 共 6 個數字。



（圖片由作者自行繪製拍攝）

活動完成之後，我們意外發現數字排列是有規律的，填寫的座號形成不同斜度的直線數列，當我們遠看著圖表，好似座標圖上畫著斜線，數列之間的空格也形成大小不一的三角形。

我們腦海裡盤旋著幾個疑問:為什麼數列愈往左邊，彼此的間隔愈小? 表格右半邊未填上數字的空格是否還可以組成其它數列? 數列之間形成的三角形面積是否與數列倍數相關? 雖然我們幾個志同道合的同學曾聚在一起討論，可是並沒有建立明確的主題和探究的方法，後來我們學習了比和比值的知識，發現正比關係直線圖之後，才開始做這個主題的研究。

二、研究目的

(一)觀察數字排列的規律性，探究數列的倍數與位置。

(二)透過非整數的的倍數關係，找尋隱藏的數列。

(三)探究數列斜線在座標圖中的位置。

(四)建立相異數列斜線之間的三角形面積公式。

貳、研究設備及器材

電子白板、excel 處理軟體、網路面積計算器、ChatGPT。

參、研究方法

一、名詞解釋與符號定義

1.最左行數字：在進行因數與倍數的活動時，所使用的空白表格中最左邊那一行 1~20 的數字。

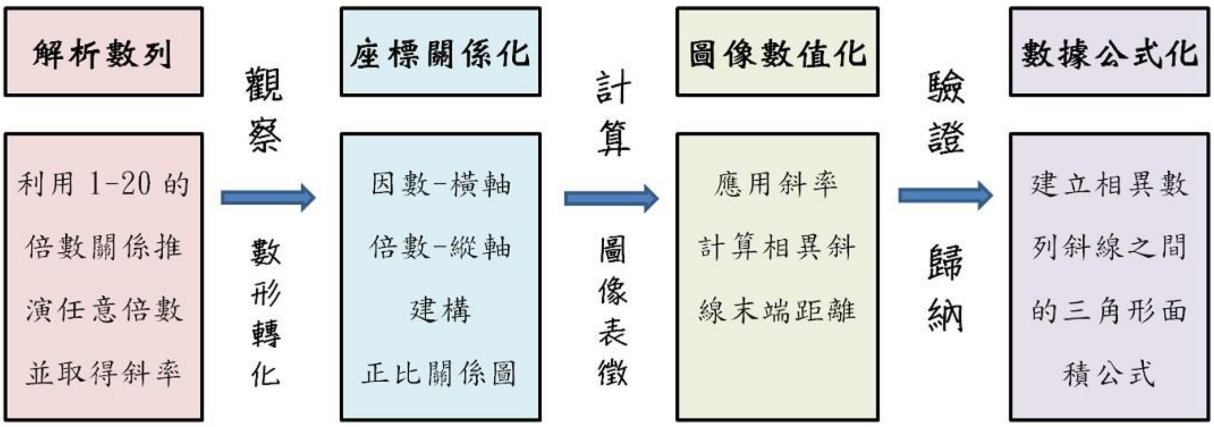
2.數列斜線：在因數與倍數的活動中，表格中所填上的座號形成 1、2、3…依序排列的數字，各數列的前後數字具備相同的移動方向，將數字連接起來可形成不同斜率的直線。

3.斜度：即數列傾斜程度。在研究過程一和研究過程二當中，數列斜度$=\frac{\text{相鄰數字上下距離}}{\text{相鄰數字左右距離}}$。因活動過程中所稱距離是以空格為刻度，所使用表格不是正方形，為了與「斜率」作區分，所以稱作斜度。

4.斜率：直線的斜率（slope）是描述與度量該線「方向」和「陡度」的數字，常用 m 表示。若橫軸為 x 軸，縱軸是 y 軸，斜率 m 可表示為$\frac{\triangle y}{\triangle x}$（△：變數的改變）

5.倒數：又稱乘法反元素，在數學中，是與其原數相乘為 1 的數；即某數 x 的倒數，是一個與 x 相乘的積為 1 的數，記為 $\frac{1}{x}$ 或 x^{-1} 。

二、研究架構



（表格圖畫由作者自行繪製）

三、研究範圍與限制

1.數列斜線僅限於座標圖第一象限的範圍。

2.相異數列斜線之間的三角形是以橫軸或縱軸的平行線段為底邊。因為計算三角形面積須先設定高的長度，本研究的三角形以原點(0,0)為頂點，若取固定的縱軸刻度為高時，三角形底邊與橫軸平行，若取固定的橫軸刻度為高時，三角形底邊與縱軸平行。

肆、研究過程與結果

一、觀察數字排列的規律性，探究數列的倍數與位置。

（一）作法與記錄

1. 根據因數與倍數的活動規則，檢查每位同學所填上的數字是否為自己的座號，確認填寫的位置是否正確。

2. 檢視同學們填寫的數字，將數列較明顯的數字填上顏色，如下圖。

20	1	2		4	5					10										20
19	1																		19	
18	1	2	3			6			9									18		
17	1																17			
16	1	2		4				8								16				
15	1		3		5										15					
14	1	2					7							14						
13	1												13							
12	1	2	3	4		6						12								
11	1										11									
10	1	2			5					10										
9	1		3						9											
8	1	2		4				8												
7	1						7													
6	1	2	3			6														
5	1				5															
4	1	2		4																
3	1		3																	
2	1	2																		
1	1																			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**

（表格由作者自行繪製）

3. 每位同學第一次填上的數字是綠色，第二次填上的數字是橙色，第三次填上的數字是藍色，第四次則是粉紅色。

4. 根據以下兩個計算方式，將數列所呈現的規則整理成表格:

(1)數列倍數 = **最左行數字÷座號**

(2)數列斜度 = 相鄰數字上下距離÷左右距離

綠色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
數列倍數 B÷A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
相鄰數字上下相距格數 C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
相鄰數字左右相距格數 D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
數列斜度 C÷D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

（表格由作者自行繪製）

橙色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20										
數列倍數 B÷A	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2										
相鄰數字上下相距格數 C	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2										
相鄰數字左右相距格數 D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1										
數列斜度 C÷D	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2										

（表格由作者自行繪製）

藍色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B	3	6	9	12	15	18														
數列倍數 B÷A	3	3	3	3	3	3														
相鄰數字上下相距格數 C	3	3	3	3	3	3														
相鄰數字左右相距格數 D	1	1	1	1	1	1														
數列斜度 C÷D	3	3	3	3	3	3														

（表格由作者自行繪製）

粉色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B	4	8	12	16	20															
數列倍數 B÷A	4	4	4	4	4															
相鄰數字上下相距格數 C	4	4	4	4	4															
相鄰數字左右相距格數 D	1	1	1	1	1															
數列斜度 C÷D	4	4	4	4	4															

（表格由作者自行繪製）

（二）觀察與發現

1. 數列倍數=數列斜度，愈左邊的數列斜度愈陡。

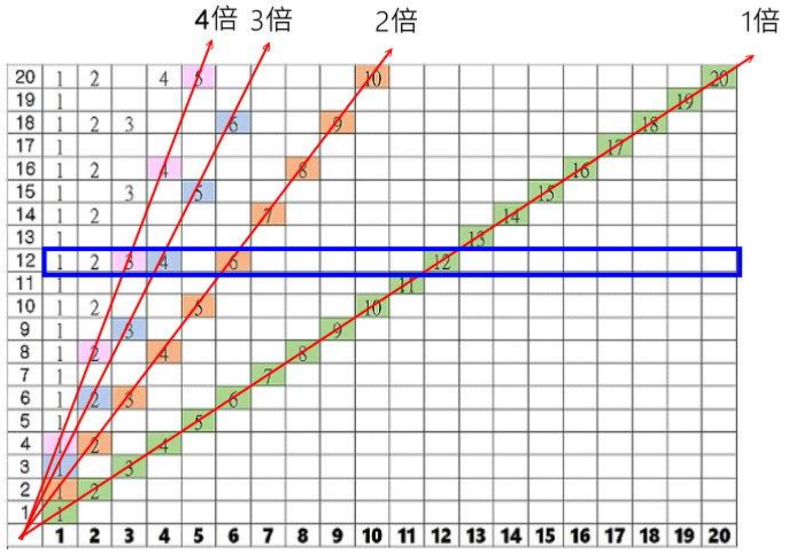
2. 各數列的前後數字具備相同的移動方向，所以將數字連接起來可形成不同斜率的直線，且延長線通過最左下角的空格。

3. 同一數列的數字所對應的**最左行數字**和**座號**都是同樣的倍數關係，綠色數列最長，最

左行數字是座號的 1 倍，再往左的數列依序為 2 倍、3 倍、4 倍…。

4. 數列都從左下角的空格出發，往右上方延伸，所經過的座號即代表數列與最左行數字的距離。

5. 由於 12 的因數較完整，3、4、6、12 剛好分布在 4 倍、3 倍、2 倍 1 倍的數列上，所以我們取最左行數字 12 那一列，探究數列斜線之間的水平距離：

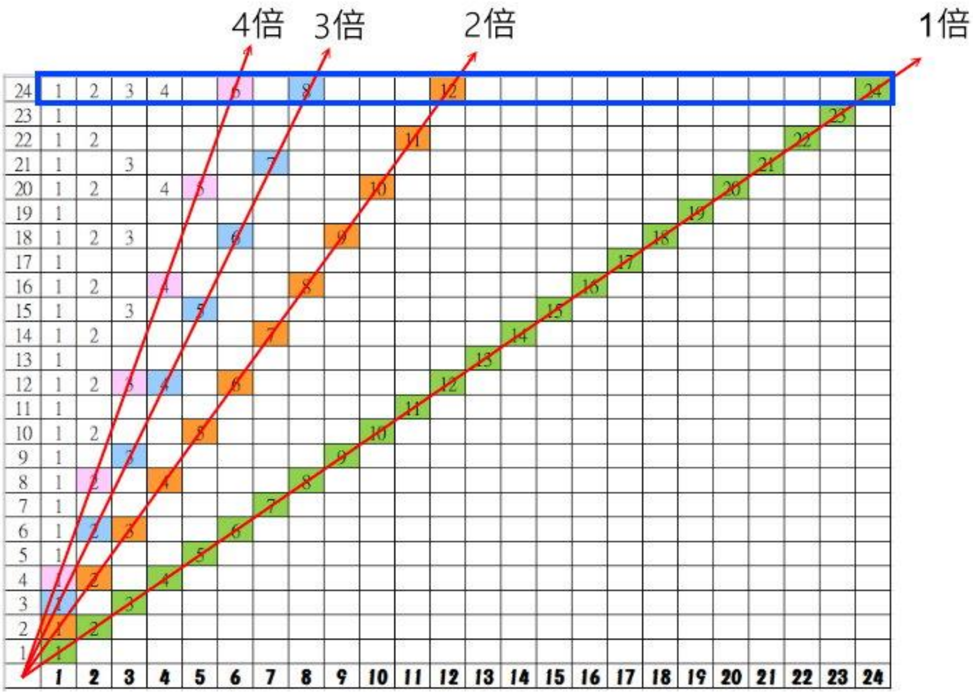


（表格圖畫由作者自行繪製）

最左行數字 (A)	座號 (B)	數列倍數 A ÷ B	數列與最左行數字的相距格數
12	3	4	3
12	4	3	4
12	6	2	6
12	12	1	12

（表格由作者自行繪製）

6. 為了更詳細觀察數列末端的水平距離，我們以 12×2 倍，將表格放大成 24 個最左行數字和座號，取第 24 列再次確認數列之間的水平距離。



（表格圖畫由作者自行繪製）

7.觀察最上面那一列的座號位置，座號=最左行數字÷數列倍數。

(1)綠色 24 ＝ 24÷1，表示 1 倍數列斜線往左移 24 格的位置就是最左行數字 24。

(2)橙色 12 ＝ 24÷2，表示 2 倍數列斜線往左移 12 格的位置就是最左行數字 24。

(3)藍色 8 ＝ 24÷3，表示 3 倍數列斜線往左移 8 格的位置就是最左行數字 24。

(4)粉紅色 6 ＝ 24÷4，表示 4 倍數列斜線往左移 6 格的位置就是最左行數字 24。

8.往左方向隨著數列倍數逐漸變大，數列末端的座號逐漸變小，即數列的間隔變小。

（三）小結

1.座號 ＝ 最左行數字÷數列倍數。

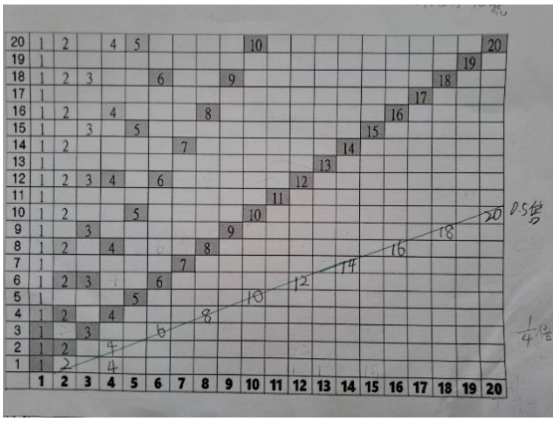
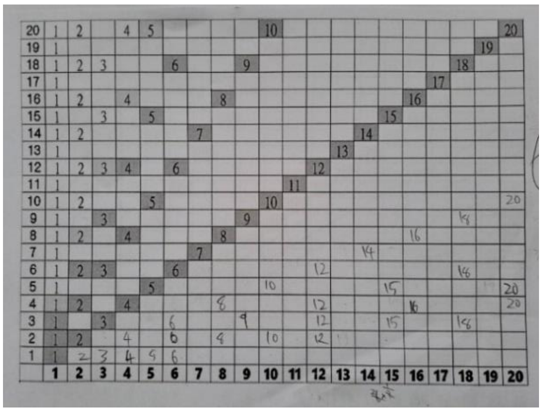
2.數列斜線上的座號即代表數列斜線與最左行數字的距離，數列倍數愈大，數列之間的水平距離愈小。

二、透過非整數的的倍數關係，找尋隱藏的數列。

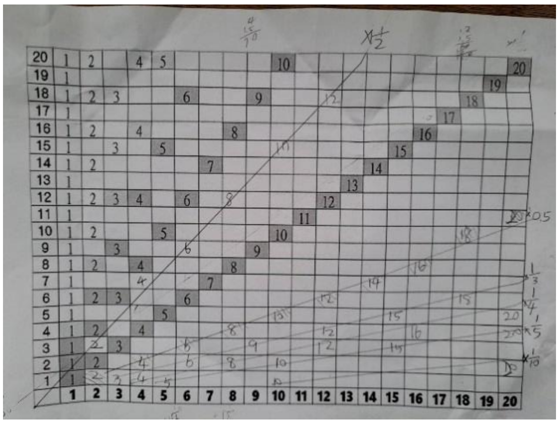
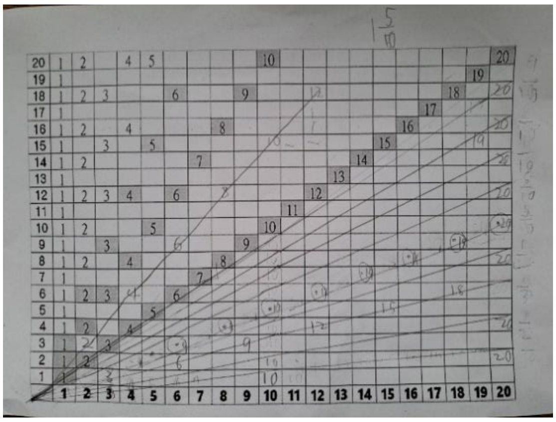
（一）思考與作法

1. 完成圖 1-2 的活動之後，我們發現表格對角線右下方並無任何數字，確認這個範圍裏沒有座號的倍數，但是腦海裡總在思考，表格左上方的粉紅色數列倍數是 4，藍色數列倍數是 3，橙色是 2 倍，綠色是 1 倍，一直往右遞減，為什麼 4、3、2、1 之後，表格右下方留下半邊的空白處，難道就沒有數列了嗎?

2. 後來我們想起比和比值的上課內容，雖然大部分都是整數比整數，可是比值並非都是整數，於是決定修改活動規則，針對表格右下方，我們改成找座號小於 1 的倍數，下表是找數列的手稿。

113 年 12 月中旬開始找倍數小於 1 的數列。(表格圖片由作者自行繪製拍攝)

我們發現整數倍之間也可以找到其它數列。(表格圖片由作者自行繪製拍攝)

3. 由於是找小於 1 的倍數，我們在 1 倍數列的空格塗上綠色，做為區隔。

4. 就像正比關係直線圖通過原點一般，整數倍的數列斜線延長之後也通過表格最左下角

的空格，所以由空格往右上畫直線可以幫助我們找尋座號的倍數。

5. 一開始如同研究過程一，由下往上找，我們便發現 2 的 0.5 倍或 1/2 倍就是 1，所以就從這個倍數找起，結果發現，只要是偶數座號就可以往上對應到最左行數字，找到 1/2 倍的倍數，形成 2、4、6、8…的數列，將數字空格填上黃色，如下面圖 2-1。
6. 因為 3 的 1/3 倍就是 1，接著就找 1/3 倍的倍數，結果發現，只要座號為 3 的倍數即符合條件，可以往上對應到最左行數字，找到 1/3 倍的倍數，形成一個 3、6、9、12…的紫色數列，如圖 2-2。
7. 找到 3 的 1/3 倍時，我們發現分子為 1 的分數倍數比小數倍數容易判斷最左行數字和座號之間的倍數關係。
8. 接著找 1/4 倍，座號為 4 的倍數，便可以找到相對應的最左行數字，活動結果如圖 2-3 的灰色數列。
9. 還有 1/5 倍，1/6 倍…等數列，只是數列當中的數字間隔愈大，數列愈不明顯。

（二）記錄

1. 將找到的數列分別填上不同顏色。

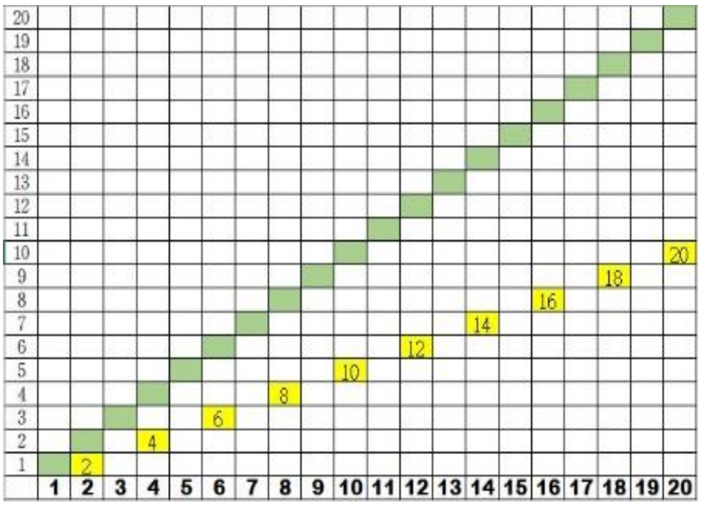


圖 2-1（作者自行繪製）

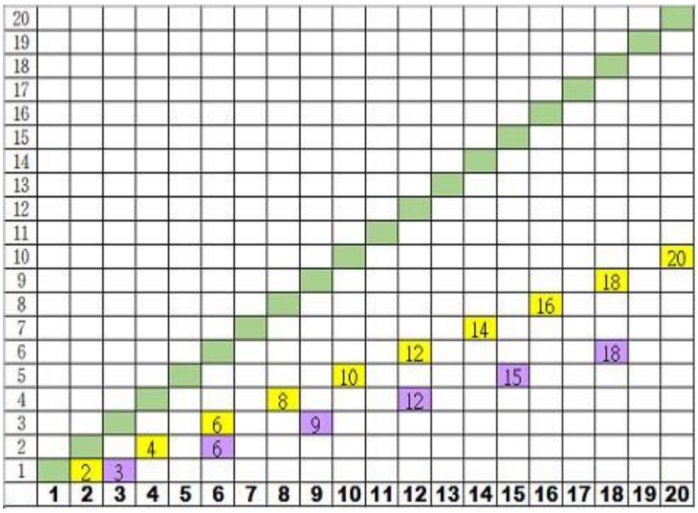


圖 2-2（作者自行繪製）

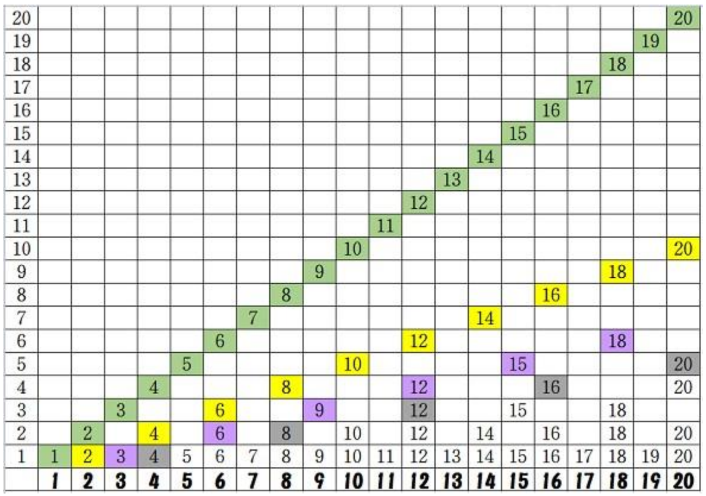


圖 2-3（作者自行繪製）

2. 根據以下兩個計算方式，將數列所呈現的規則整理成表格:

(1)數列倍數 ＝ 最左行數字÷座號

(2)數列斜度 ＝ 相鄰數字上下距離÷左右距離

黃色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10
數列倍數 B÷A		½		½		½		½		½		½		½		½		½		½
相鄰數字上下相距格數 C		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1
相鄰數字左右相距格數 D		2		2		2		2		2		2		2		2		2		2
數列斜度 C÷D		½		½		½		½		½		½		½		½		½		½

（表格由作者自行繪製）

紫色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B			1			2			3			4			5			6		
數列倍數 B÷A			⅓			⅓			⅓			⅓			⅓			⅓		
相鄰數字上下相距格數 C			1			1			1			1			1			1		
相鄰數字左右相距格數 D			3			3			3			3			3			3		
數列斜度 C÷D			⅓			⅓			⅓			⅓			⅓			⅓		

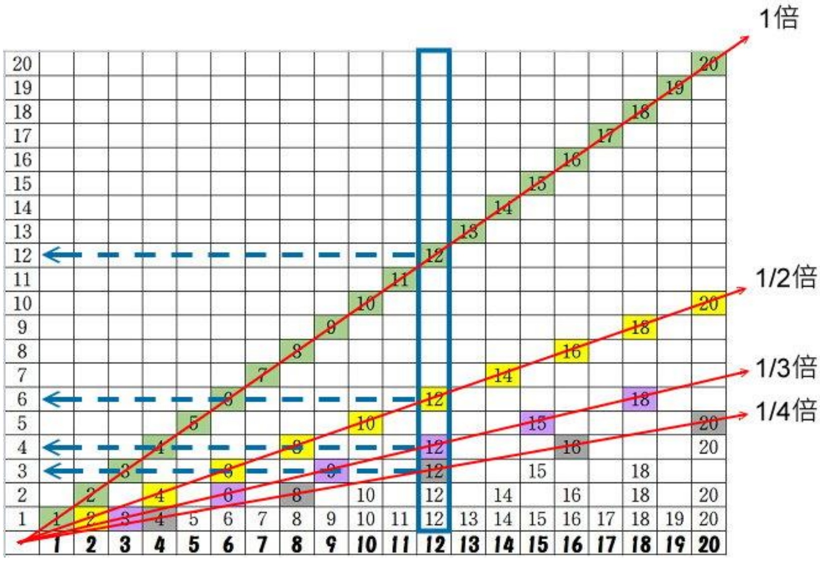
（表格由作者自行繪製）

灰色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B				1				2				3				4				5
數列倍數 B÷A				¼				¼				¼				¼				¼
相鄰數字上下相距格數 C				1				1				1				1				1
相鄰數字左右相距格數 D				4				4				4				4				4
數列斜度 C÷D				¼				¼				¼				¼				¼

（表格由作者自行繪製）

（三）結果與發現

1. 表格對角線右下方的數列中，其數字並非連續排列，而是以 2 的倍數、3 的倍數、4 的倍數…進行排列，最左行數字對座號的倍數小於 1。
2. 本活動產生的數列中，前後數字之間，上下移動的距離對左右移動的距離都是同樣的比例，可以連成直線，並通過表格最左下角的空格。
3. 綠色座號數字✕1=最左行數字，黃色座號數字✕1/2=最左行數字，紫色座號數字✕1/3=最左行數字，灰色座號數字✕1/4=最左行數字。
4. 找尋小於 1 倍的數列時，我們也發現，在整數倍的數列之間，也可以找到非整數倍的數列，由於綠色數列左半邊皆是整數倍的數列，所以就沒有再新增上去。
5. 數列將圖表劃分成不同大小的三角形區塊，愈靠近斜度為 1 的綠色數列，三角形區塊面積愈大。
6. 同上一個研究過程，取座號 12 為例，探究數列斜線之間的距離：

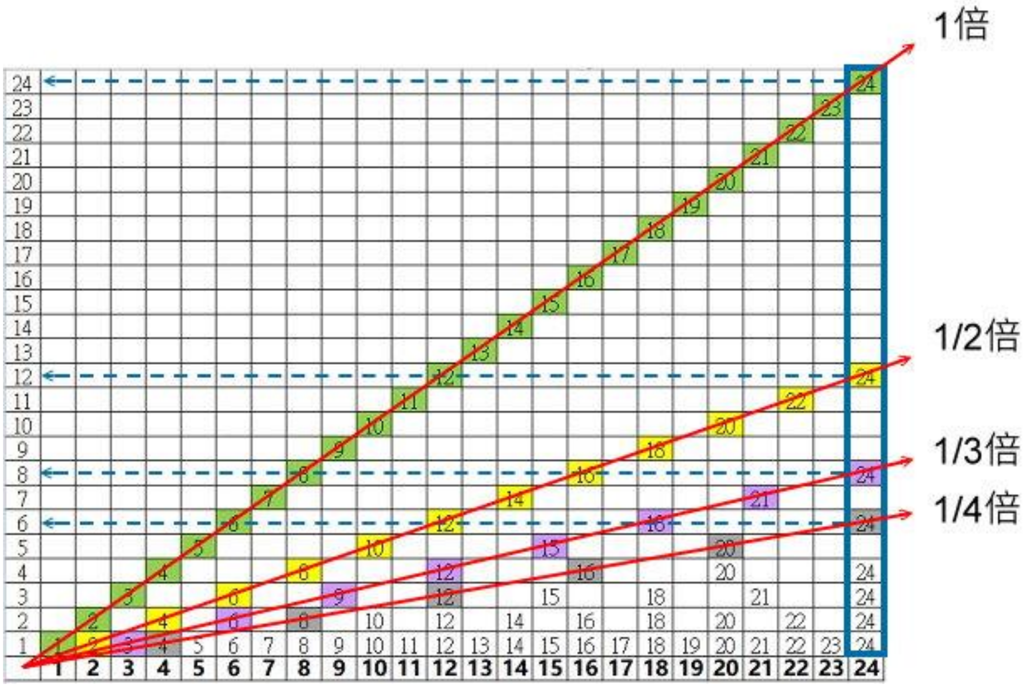


（表格圖畫由作者自行繪製）

最左行數字（A）	座號（B）	數列倍數 A ÷ B	數列與座號列的相距格數
12	12	1	12
6	12	1/2	6
4	12	1/3	4
3	12	1/4	3

（表格由作者自行繪製）

7. 我們將表格放大成 24 個最左行數字和座號，取第 24 行來觀察數列末端之間的距離：



（表格圖畫由作者自行繪製）

8. 觀察最右邊第 24 行的座號位置，往左邊對應的最左行數字=座號✕數列倍數。

(1) 12=黃色 24✕1/2，表示 1/2 倍數列斜線末端往下移 12 格，就到達最底下的座號列。

(2) 8=紫色 24✕1/3，表示 1/3 倍數列斜線末端往下移 8 格，就到達最底下的座號列。

(3) 6=灰色 24✕1/4，表示 1/4 倍數列斜線末端往下移 6 格，就到達最底下的座號列。

9. 往下方向隨著數列倍數逐漸變小，數列的間隔也逐漸變小。

（四）小結

1. 數列倍數 ＝ 最左行數字÷座號

2. 當斜度≦1 時，座號往左對應的最左行數字代表數列末端與底下座號列的距離。

三、探究數列斜線在座標圖中的位置。

（一）作法和記錄

1. 把兩個研究過程產生的圖表合併之後，同一行當中都是和座號相同的數字，不同顏色代表往左邊對應到不同倍數的最左行數字。

20	1	2		4	5					10										20
19	1																		19	
18	1	2	3			6			9									18		
17	1																17			
16	1	2		4				8								16				
15	1		3		5										15					
14	1	2					7							14						
13	1												13							
12	1	2	3	4		6						12								
11	1										11									
10	1	2			5					10										20
9	1		3						9									18		
8	1	2		4				8								16				
7	1						7							14						
6	1	2	3			6						12						18		
5	1				5					10					15					20
4	1	2		4				8				12				16				20
3	1		3			6			9			12			15			18		
2	1	2		4		6		8		10		12		14		16		18		20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**

圖 3-1（作者自行繪製）

2. 我們發現藍色數列和紫色數列的末端好像少了一段，如果依照數列的路徑來看，藍色

數字 7 的位置是在第 21 列，而紫色的第 7 個數字就是 21，這兩個數字的位置都超出表格範圍，只是我們覺得數列末尾應該有個適當的數字，所以透過比和比值的計算方式確認數字：

18：6 ＝ 20：□

□ =20/3

20/3 即靛色數列在第 20 列的數字。

3. 另外，我們依循數字位移的路徑來確認末端數字的位置，藍色數列的 20/3 位置在第 6、7 行之間，比較偏向第 7 行，而紫色 20 位置在第 6、7 列之間，比較偏向第 7 列。

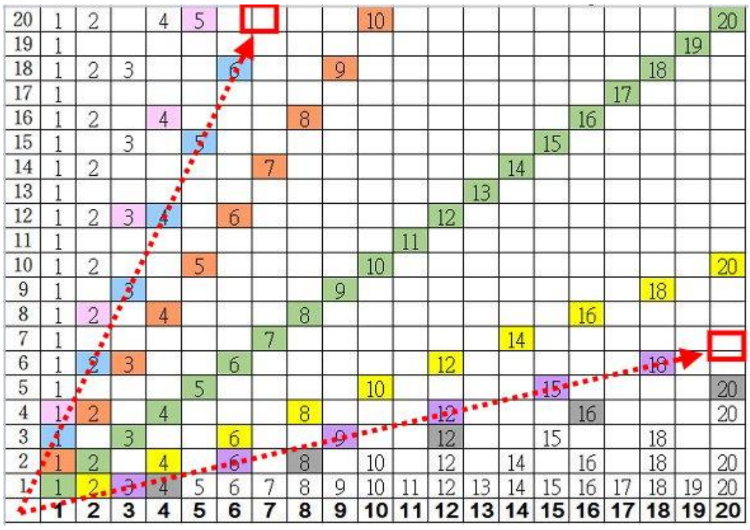


圖 3-2（作者自行繪製）

4. 由圖 3-2 可知粉紅色、藍色、橙色、綠色數列末端數字分別為 5、20/3、10、20，也可以寫成 20/4、20/3、20/2、20/1，即最左行數字÷數列倍數，如下面的表格。

最左行數字 A	20	20	20	20
數列倍數 B	4	3	2	1
A ÷ B	20/4	20/3	20/2	20/1
數列末端數字(座號)	5	6.67	10	20
數列末端與最左行數字的距離(相距格數)	5	6.67	10	20

（表格由作者自行繪製）

5. 我們再看圖 3-2 的最右方，數列末端數字都是 20，可以藉由其對應的最左數字來觀察數列位置，如下表可以協助我們探究數列倍數小於 1 的斜線位置。

座號 A	20	20	20	20
數列倍數 B	1	1/2	1/3	1/4
A✕B	20	10	20/3	5
最左行數字	20	10	6.67	5
數列末端與座號列的距離(相距格數)	20	10	6.67	5

（表格由作者自行繪製）

6. 在推演數列末端空格的過程中，為了獲取更精準的位置和數字，我們將斜度轉換成斜率，此時，倍數斜線就成了正比關係直線圖。圖 3-3 所示，橫軸的數字代表座號，縱軸的數字代表最左行數字，斜率(代號為 m)等於數列倍數，直線 m=1 為座標圖的對角線，代表綠色倍數斜線。往左依序 m=2，m=3，m=4 分別是橙色、藍色、粉色數列，往下 m=1/2，m=1/3，m=1/4 分別是黃色、紫色、灰色數列。

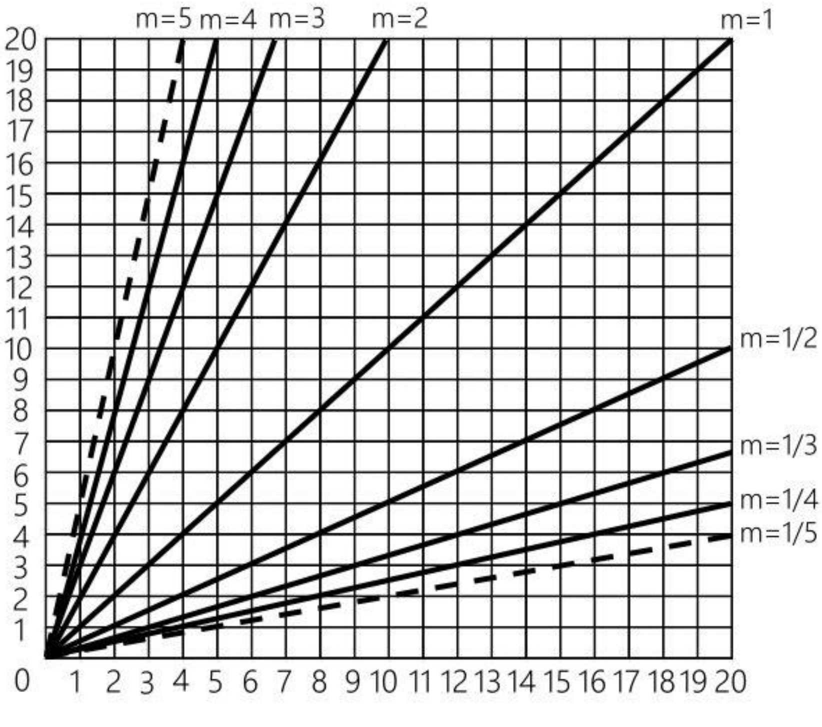
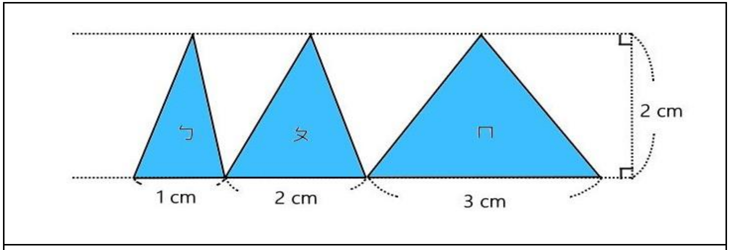


圖 3-3（作者自行繪製）

7. 藉由座標圖和斜率作為推算工具之前，我們認為三角形底邊乃是計算面積的關鍵，如下圖所示，當我們固定高的長度，會發現三角形的面積和底邊長度成正比。



圖形	ㄅ	ㄆ	ㄇ
底(公分)	1	2	3
高(公分)	2	2	2
面積(平方公分)	1	2	3

（表格圖畫由作者自行繪製）

8. 由於數列斜線之間的三角形都是等高圖形，所以斜線末端之間所形成的距離，即是三角形的底邊長，是接下來探究的重點。

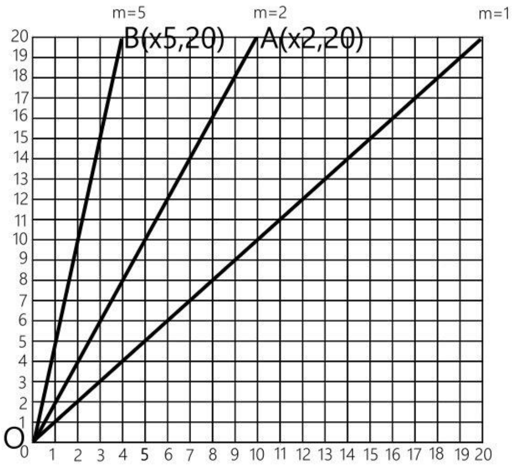
9. 在座標圖中，若橫軸為 x 軸，縱軸是 y 軸，斜率 m 可表示為$\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ，△代表數字的改變，由於數列斜線的起點皆在原點，所以斜率 m 可以協助推算斜線末端位置，讓我們知道不同的數列斜線之間的距離。

10. 以 m=2 為例，O (0,0)為原點，在縱軸=20 的水平線上取 A 點，作為 m=2 斜線的末端位置，假設 A 點座標(x2,20)

因為 m = 2　即 $\frac{20-0}{x2-0}$ = 2

$\frac{20}{x2}$ = 2　所以 x2 = 20 ÷ 2 = 10

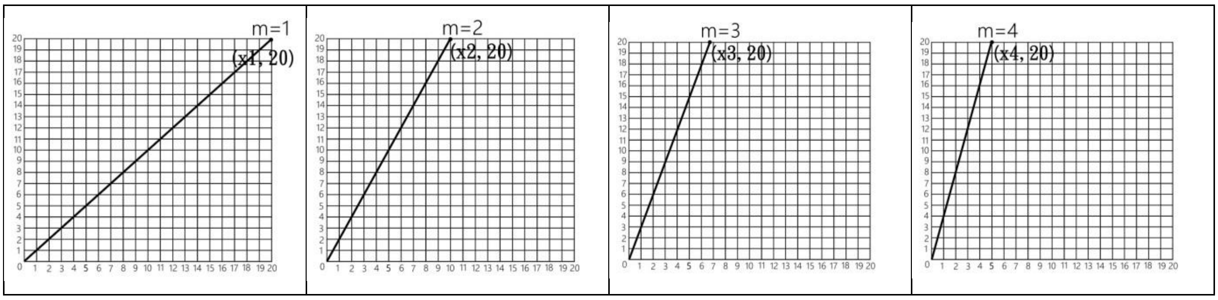
就可以確認 m=2 斜線末端 A 點座標(10,20)



（表格圖畫由作者自行繪製）

同樣的方法，x5 = 20 ÷ 5 = 4　，也可以確認 m=5 斜線末端 B 點座標(4,20)

11. 所以當 m≧1 時，以 x1、x2、x3、x4 分別代表 m=1、m=2、m=3、m=4 等數列斜線末端的橫軸刻度，便以縱軸刻度 ÷ m 計算數列斜線末端的橫軸刻度，確認座標位置。



（表格圖畫由作者自行繪製）

縱軸長度(A)	20	20	20	20	…
橫軸長度	X1	X2	X3	X4	…
m	1	2	3	4	…
A ÷ m	20	10	20/3	5	…
斜線末端座標	(20,20)	(10,20)	(20/3,20)	(5,20)	…

12. 以 m=1/2 為例，O (0,0)為原點，在橫軸=20 的垂直線上取 A 點，作為 m=1/2 斜線的末端位置，假設 A 點座標(20,y2)

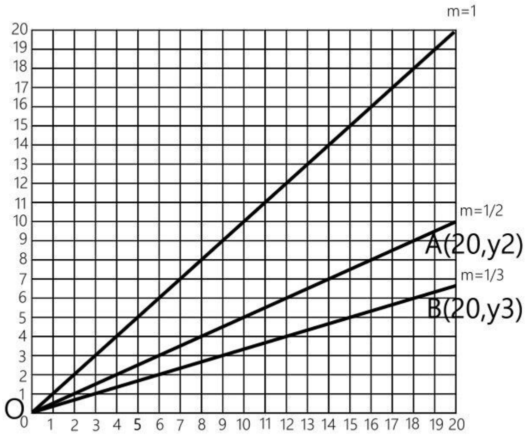
因為 m = 1/2　即 $\frac{y2-0}{20-0}$ = 1/2

$\frac{y2}{20}$ = 1/2　所以 y2 = 20 × 1/2 = 10

可以確認 m=2 斜線末端 A 點座標(20,10)

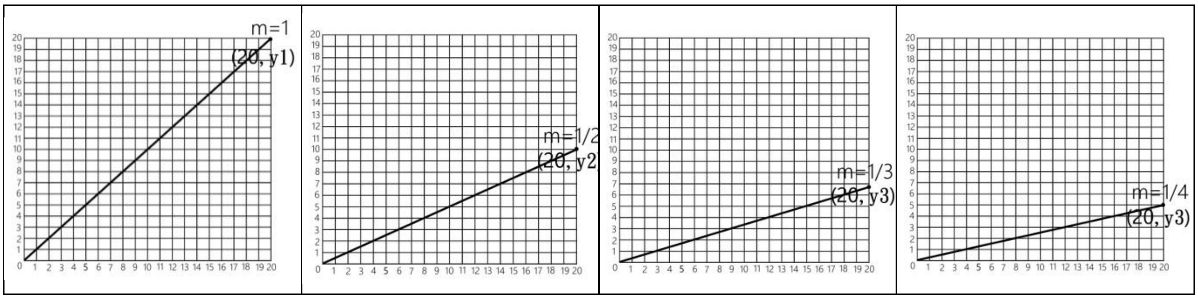
同樣的方法，y3 = 20 × 1/3 = 20/3

可知 m=1/3 斜線末端 B 點座標(20,20/3)



（表格圖畫由作者自行繪製）

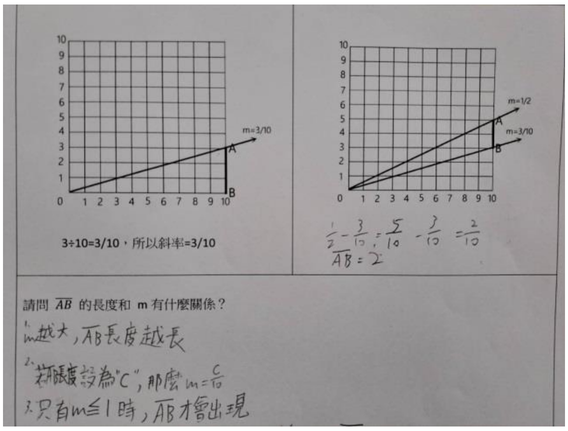
13. 當 m≦1 時，以 y1、y2、y3、y4 分別代表 m=1、m=1/2、m=1/3、m=1/4 等數列斜線末端的縱軸刻度，便以橫軸刻度 × m 計算數列斜線末端的縱軸刻度，確認座標位置。

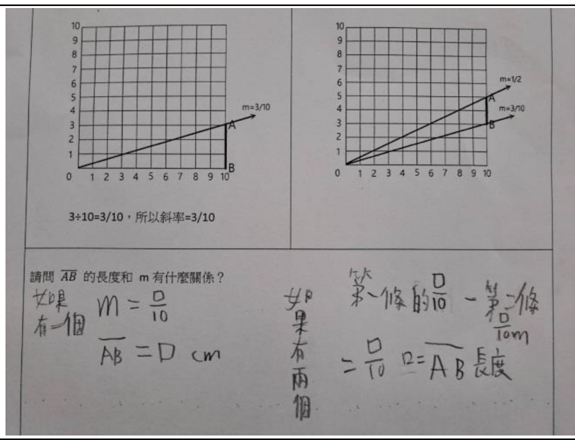


（表格圖畫由作者自行繪製）

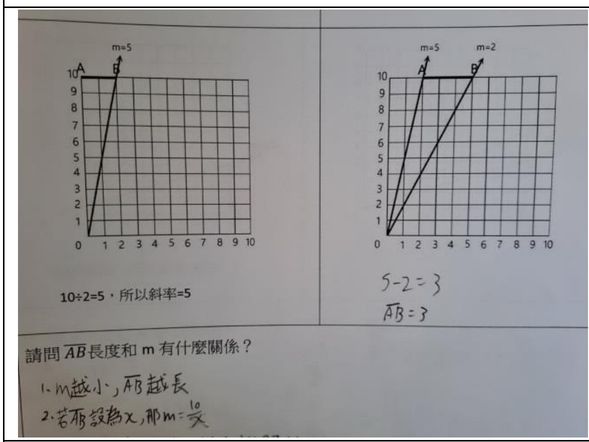
縱軸座標	y1	y2	y3	y4	…
橫軸坐標(B)	20	20	20	20	…
m	1	1/2	1/3	1/4	…
B × m	20	10	20/3	5	…
斜線末端座標	(20,20)	(20,10)	(20,20/3)	(20,5)	…

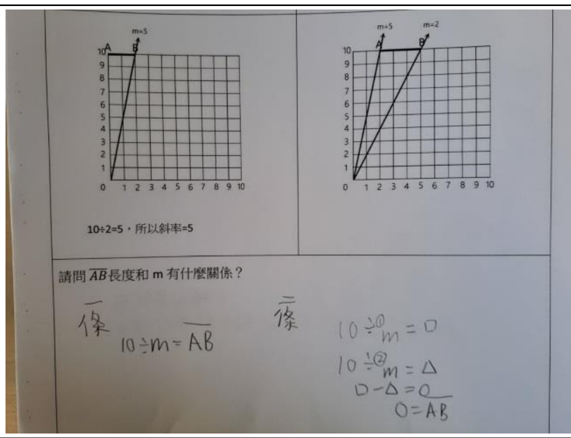
14. 掌握數列斜線的位置之後，我們便著手探究斜線末端之間的線段長度，由於一開始並不熟練斜率的計算方式，在推演數列斜線的位置和距離時，看不出 m 與斜線間距的關係，直到掌握斜線末端水平距離和垂直距離的差異之後，才能夠列出關係算式。





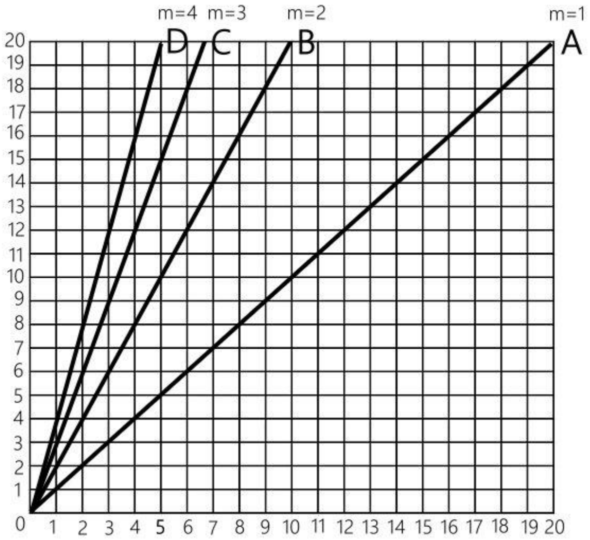
114 年 1 月中旬我們利用斜率來推算數列斜線之間的距離。(圖片由作者自行拍攝)





透過水平距離與 1/m 的關係來推算斜線末端之間的線段長度。(圖片由作者自行拍攝)

15. 下圖 A、B、C、D 分別代表 m=1、m=2、m=3、m=4 等數列斜線末端位置。



（表格圖畫由作者自行繪製）

由於 A 點座標(20,20÷1)=(20,20)

B 點座標(20,20÷2)=(20,10)

C 點座標(20,20÷3)=(20,20/3)

D 點座標(20,20÷4)=(20,5)

所以 $\overline{BA}$ = 20÷1-20÷2 = 縱軸長度/m1 – 縱軸長度/m2

= 縱軸長度 ✕（ 1/m1－1/m2 ）

$\overline{CB}$ = 20÷2-20÷3 = 縱軸長度/m2 – 縱軸長度/m3

= 縱軸長度 ✕（ 1/m2－1/m3 ）

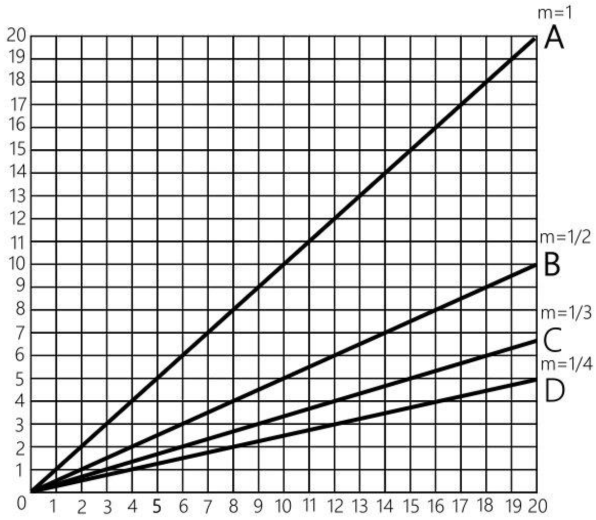
$\overline{DC}$ = 20÷3-20÷4 = 縱軸長度/m3 – 縱軸長度/m4

= 縱軸長度 ✕（ 1/m3－1/m4 ）

小結：當 m ≧ 1 時，

數列斜線<u>末端之間的線段長度</u> = 縱軸長度✕兩數列斜線的<u>斜率倒數差</u>。

16. 下圖 A、B、C、D 分別代表 m=1、m=1/2、m=1/3、m=1/4 等數列斜線末端位置。



（表格圖畫由作者自行繪製）

由於 A 點座標（ 20×1 ， 20 ）=（ 20 ， 20 ）

B 點座標（ 20×1/2 ， 20 ）=（ 10 ， 20 ）

C 點座標（ 20×1/3 ， 20 ）=（ 20/3 ， 20 ）

D 點座標（ 20×1/4 ， 20 ）=（ 5 ， 20 ）

所以 $\overline{AB}$ = 20×1 － 20×1/2 = 橫軸長度 × m 1 － 橫軸長度 × m 1/2

= 橫軸長度 ×（ m 1－m 1/2 ）

$\overline{BC}$ = 20×1/2 － 20×1/3 = 橫軸長度 × m 1/2 － 橫軸長度 × m 1/3

= 橫軸長度 ×（ m 1/2－m 1/3 ）

$\overline{CD}$ = 20×1/3 － 20×1/4 = 橫軸長度 × m 1/3 － 橫軸長度 × m 1/4

= 橫軸長度 ×（ m 1/3－m 1/4 ）

小結：當 m ≦ 1 時，

兩數列斜線<u>末端之間的線段長度</u>=橫軸長度×兩數列斜線的<u>斜率差</u>。

（二）結果與發現

1. 當 m ≧ 1 時，數列斜線末端與縱軸的水平距離 = 縱軸長度 ÷ m 。

2. 當 m ≧ 1 時，兩數列斜線末端之間的線段長度 = 縱軸長度✕兩數列斜線的斜率倒數差。

3. 當 m ≦ 1 時，數列斜線末端與橫軸的垂直距離 = 橫軸長度 ✕ m 。

4. 當 m ≦ 1 時，兩數列斜線末端之間的線段長度 = 橫軸長度✕兩數列斜線的斜率差。

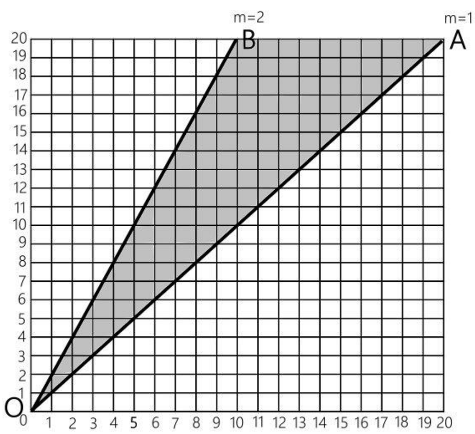
四、建立相異數列斜線之間的三角形面積公式。

（一）作法和記錄

1. 根據研究過程三的發現，可以藉由斜率來推算斜線之間的三角形底邊線段長度，加上數列之間的三角形的高都是固定 20 單位長，現在我們就可以針對 m≧1 和 m≦1 兩種情況來計算面積了。

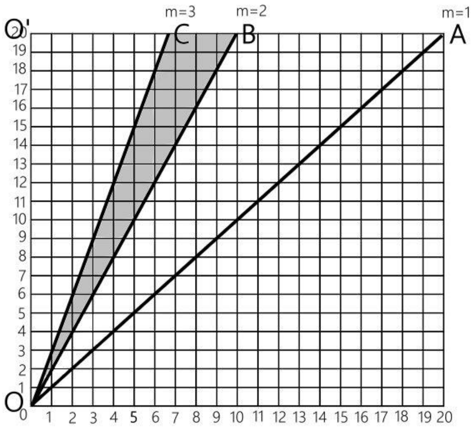
2. 當 m≧1 時，數列斜線之間的三角形面積計算方式如下：

①數列斜線 m=2 和 m=1 之間，計算三角形面積：

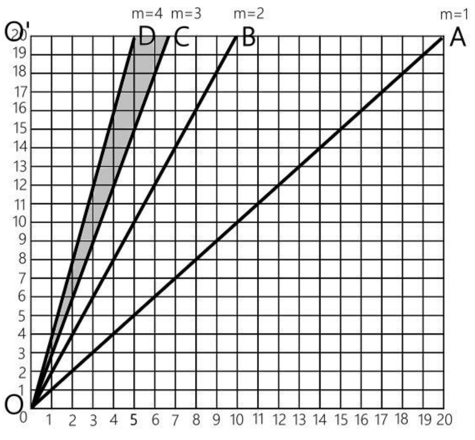
<table>
<tr>
<td>

（表格圖畫由作者自行繪製）</td>
<td>左圖說明：假設 m1 代表 m=1，m2 代表 m=2
$\overline{BA}$ = 縱軸長度✕(1/m1 – 1/m2)
△OBA 面積
= $\overline{BA}$✕縱軸長度÷2
= 縱軸長度✕(1/m1 – 1/m2)✕縱軸長度÷2
= (1/m1 – 1/m2)✕縱軸長度✕縱軸長度÷2
= (1-1/2)✕20✕20÷2 = 100</td>
</tr>
</table>

②數列斜線 m=3 和 m=2 之間，計算三角形面積：

 （表格圖畫由作者自行繪製）	左圖說明：假設 m2 代表 m=2，m3 代表 m=3 $\overline{CB}$ = 縱軸長度✕(1/m2－1/m3) △OCB 面積 = $\overline{CB}$✕縱軸長度÷2 = 縱軸長度✕(1/m2－1/m3)✕縱軸長度÷2 = (1/m2－1/m3)✕縱軸長度✕縱軸長度÷2 = (1/2-1/3)✕20✕20÷2 = 100/3

③數列斜線 m=4 和 m=3 之間，計算三角形面積：

 （表格圖畫由作者自行繪製）	左圖說明：假設 m3 代表 m=3，m4 代表 m=4 $\overline{DC}$ = 縱軸長度✕(1/m3－1/m4) △ODC 面積 = $\overline{DC}$✕縱軸長度÷2 = 縱軸長度✕(1/m3－1/m4)✕縱軸長度÷2 = (1/m3－1/m4)✕縱軸長度✕縱軸長度÷2 = (1/3-1/4)✕20✕20÷2 = 50/3

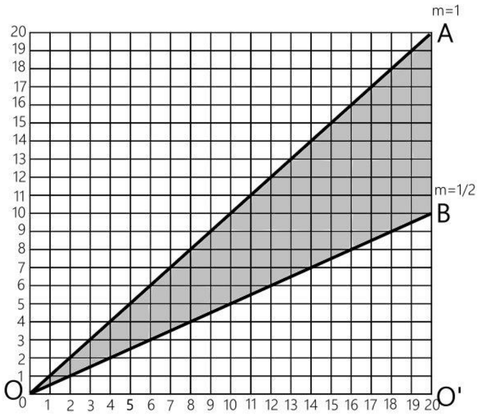
m≧1 探究結果：

1.在座標圖上，當 m≧1 時，相異兩數列斜線末端水平距離等於三角形的底。

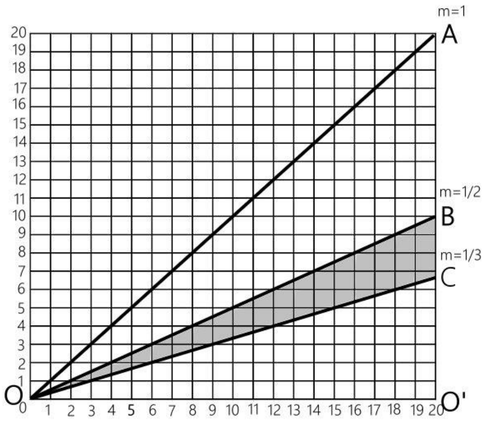
2. m=a 和 m=b 之間的三角形面積=∣1/a-1/b∣✕縱軸長度✕縱軸長度÷2。

3. 當 m≦1 時，數列斜線之間的三角形面積計算方式如下：

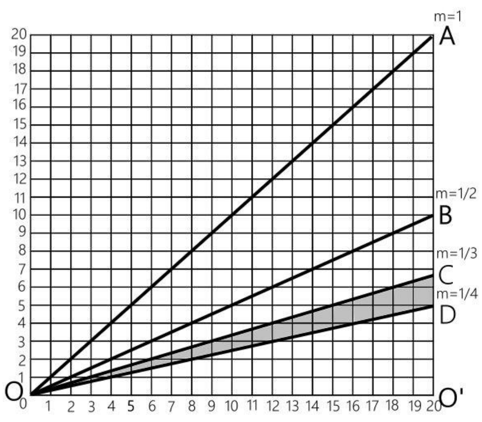
①數列斜線 m=1 和 m=1/2 之間，計算三角形面積：

 （表格圖畫由作者自行繪製）	左圖說明：$\overline{AB}$ = 橫軸長度×(m1 − m$\frac{1}{2}$) △OBA 面積 = $\overline{AB}$×橫軸長度÷2 = 橫軸長度×(m1 − m$\frac{1}{2}$))×橫軸長度÷2 = (m1 − m$\frac{1}{2}$))×橫軸長度×橫軸長度÷2 = (1−1/2)×20×20÷2 = 100

②數列斜線 m=1/2 和 m=1/3 之間，計算三角形面積：

 （表格圖畫由作者自行繪製）	左圖說明：$\overline{BC}$ = 橫軸長度×(m$\frac{1}{2}$ − m$\frac{1}{3}$) △OCB 面積 = $\overline{BC}$×橫軸長度÷2 = 橫軸長度×(m$\frac{1}{2}$ − m$\frac{1}{3}$)×橫軸長度÷2 = (m$\frac{1}{2}$ − m$\frac{1}{3}$)×橫軸長度×橫軸長度÷2 = (1/2 − 1/3)×20×20÷2 = 100/3

③數列斜線 m=1/3 和 m=1/4 之間，計算三角形面積：

 （表格圖畫由作者自行繪製）	左圖說明：$\overline{CD}$ = 橫軸長度×(m$\frac{1}{3}$ − m$\frac{1}{4}$) △ODC 面積 = $\overline{CD}$×橫軸長度÷2 = 橫軸長度×(m$\frac{1}{3}$ − m$\frac{1}{4}$)×橫軸長度÷2 = (m$\frac{1}{3}$ − m$\frac{1}{4}$)×橫軸長度×橫軸長度÷2 = (1/3 − 1/4)×20×20÷2 = 50 /3

m≦1 探究結果：

1.在座標圖上，當 m≦1 時，相異兩數列斜線末端垂直距離等於三角形的底。

2.m=a 和 m=b 之間的三角形面積=｜a-b｜✕橫軸長度✕橫軸長度÷2。

(二)結果與發現

1.當數列斜線的斜率大於或等於對角線斜率(m=1)時，

數列斜線之間的三角形底邊長=縱軸長度✕數列斜線的斜率倒數差。

2.當數列斜線的斜率小於或等於對角線斜率(m=1)時，

數列斜線之間的三角形底邊長=橫軸長度✕數列斜線的斜率差。

3.當 m ≧ 1 時，

m=a 和 m=b 之間的三角形面積=｜1/a-1/b｜✕縱軸長度✕縱軸長度÷2。

4.當 m ≦ 1 時，

m=a 和 m=b 之間的三角形面積=｜a-b｜✕橫軸長度✕橫軸長度÷2。

伍、討論

一、縱軸與橫軸比例問題

在座標圖中，為了更清楚推演斜線之間的相對位置，以上我們所提的數列斜線是以正方形座標圖為基礎，對角線斜率=1，然而，一開始我們進行活動所使用的表格卻是長方形，因此，我們覺得橫軸與縱軸的長度比例問題，應該值得加以討論。

1.配合對角線 m 改變，調整面積公式的適用範圍

當橫軸加長，對角線斜率變小，如圖 5-1 的座標圖，對角線 m=3/4，則計算數列斜線之間的三角形面積時，就分成 m≧3/4 和 m≦3/4 兩部分計算。

(1) m≧3/4 時，m=a 和 m=b 之間的面積公式為｜1/a-1/b｜✕縱軸長度✕縱軸長度÷2

粉色三角形面積=｜2/3 － 4/3｜✕ 3 ✕ 3 ÷ 2 = 3

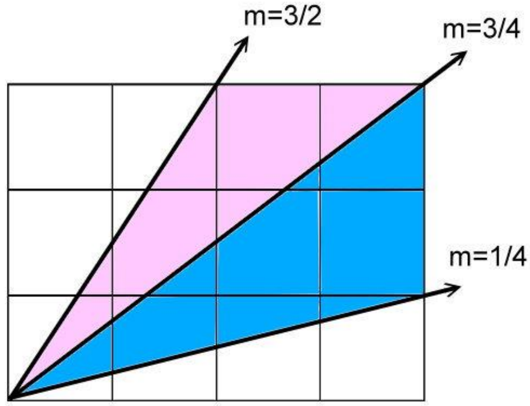


圖 5-1（作者自行繪製）

(2) m≦3/4 時，m=a 和 m=b 之間的面積公式為｜a-b｜✕橫軸長度✕橫軸長度÷2

那麼藍色三角形面積=｜3/4 － 1/4｜✕ 4 ✕ 4 ÷ 2 = 4

2.修正倍數斜線的斜率

在研究過程一，因數與倍數圖表中的格子不是正方形，是大約長與寬 4:3 的格子，所以倍數斜線的斜率=數列的倍數✕3/4。

數列的倍數	4 倍	3 倍	2 倍	1 倍	1/2 倍	1/3 倍	1/4 倍	…
倍數斜線的斜率 (= 倍數✕3/4)	3	9/4	3/2	3/4	3/8	1/4	3/16	…

（表格由作者自行繪製）

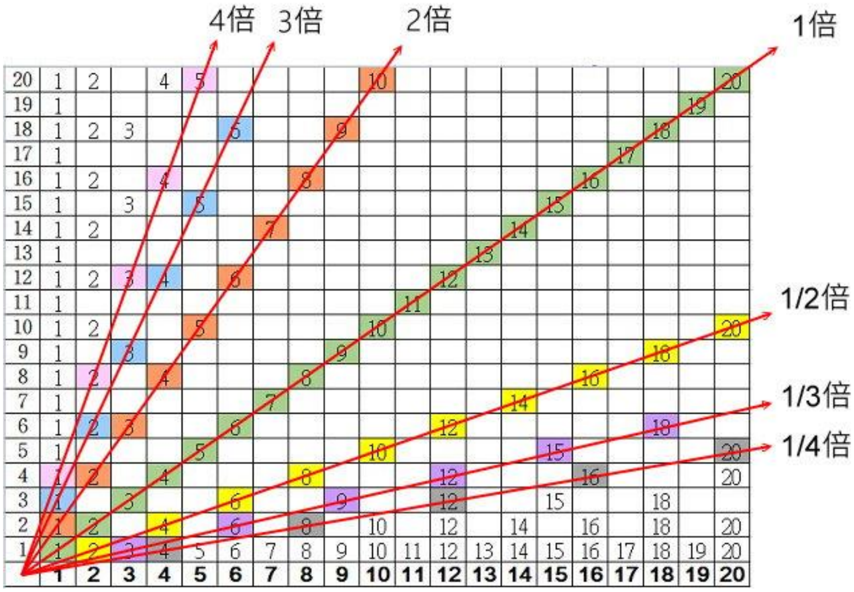


圖 5-2（作者自行繪製）

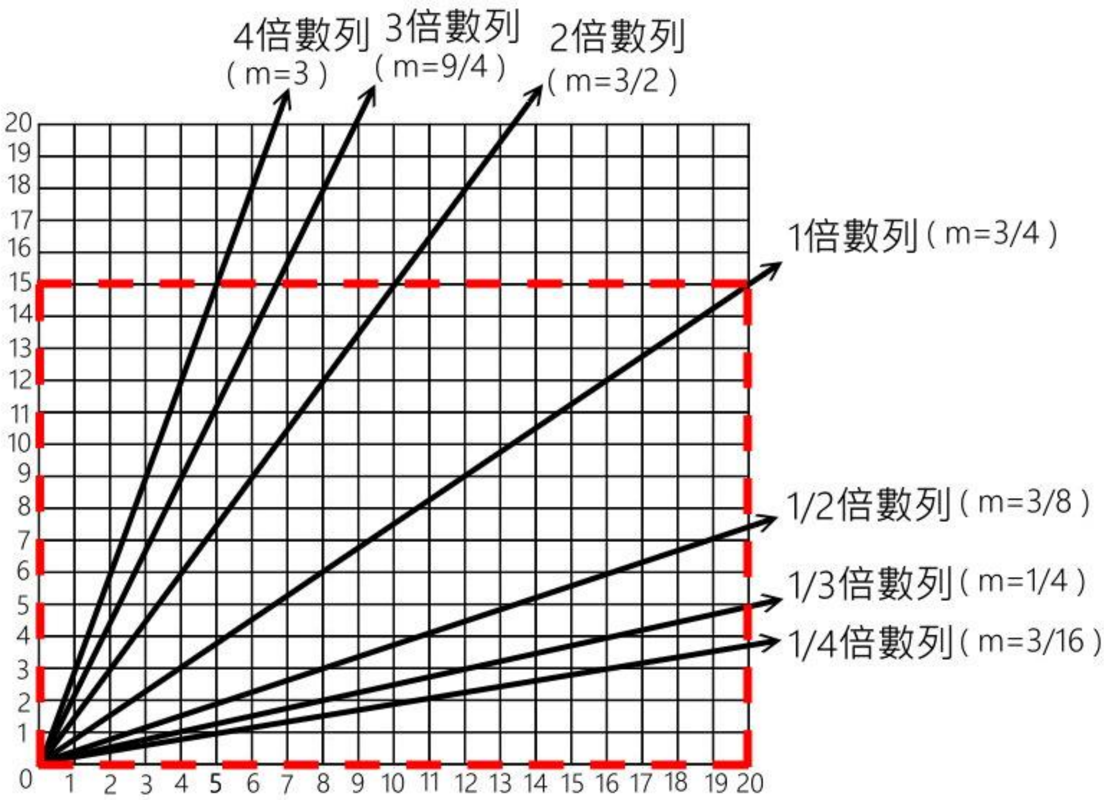
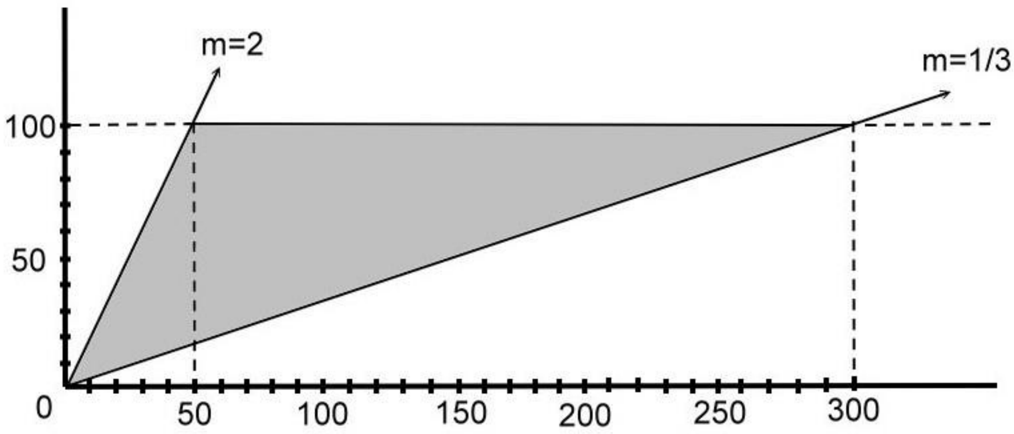


圖 5-3（作者自行繪製）

圖 5-2 是原先因數與倍數活動的數列斜線，要計算三角形面積，應該先將數列的倍數轉換成圖 5-3 的斜率，此時對角線 m=3/4，如果橫軸長度同樣是 20，則縱軸長度=20×3/4=15，透過研究過程四的公式，可以更精準計算數列斜線之間的面積。

二、座標圖對角線斜率延伸問題

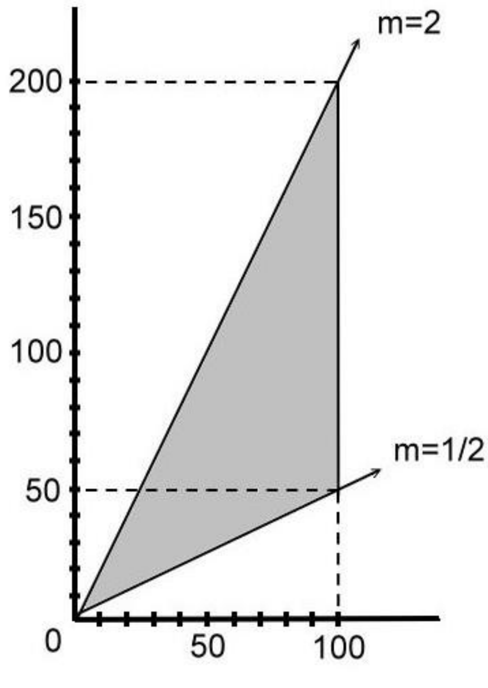
1.固定縱軸刻度，將對角線往右延伸至 m=1/3。(下圖由作者自行繪製)



(1) m=2 和 m=1/3 之間的三角形面積 = ｜1/2 － 3/1｜× 100 × 100 ÷ 2 = 12500

(2) 小結：只要固定縱軸刻度，正比關係直線斜率變小，修正對角線斜率，便適用研究過程四的三角形面積公式。

2.固定橫軸刻度，將對角線往上延伸至 m=2。(下圖由作者自行繪製)



(1) m=2 和 m=1/2 之間的三角形面積 =｜2-1/2｜× 100 × 100 ÷ 2 = 7500

(2) 小結：只要固定橫軸刻度，正比關係直線斜率變大，修正對角線斜率，便適用研究過程四的三角形面積公式。

三、計算答案的驗證方式

1. 利用網路的面積計算器，以頂點座標計算三角形面積。

（上圖是作者自 Kesan 對生活和實踐有用的計算網站截圖）

2. 設定縱軸和橫軸的範圍，以斜率向 ChatGPT 查詢答案

（上圖是作者與 chatGPT 的對話截圖）

陸、結論

一、數列斜線的倍數與位置

1.數列倍數=數列斜度，愈左邊的數列斜度愈陡。

2.愈往左邊的數列倍數愈大，數列之間的水平距離愈小。

二、最左數字與座號之間存在非整數倍數關係，讓座號構成隱藏的數列。

三、正比數列斜線的位置和斜率

1.當 m ≧ 1 時

(1)數列斜線末端與縱軸的水平距離 = 縱軸長度 ÷ m 。

(2)兩數列斜線末端之間的線段長度 = 縱軸長度✕兩數列斜線的<u>斜率倒數差</u>。

2.當 m ≦ 1 時

(1)數列斜線末端與橫軸的垂直距離 = 橫軸長度 ✕ m 。

(2)兩數列斜線末端之間的線段長度 = 橫軸長度✕兩數列斜線的<u>斜率差</u>。

四、相異正比斜線之間的三角形面積公式

在座標圖中，以橫軸 x 單位長、縱軸 y 單位長為範圍，即以(0,0)和(x,y)的線段為對角線。斜率 y1/x1 和斜率 y2/x2 兩直線之間所涵蓋的座標圖面積可依循下列情況計算：

1.當 y1/x1、y2/x2 皆大於或等於 y/x 時

兩條倍數斜線之間涵蓋的三角形面積=｜x1/y1- x2/y2｜✕縱軸長度✕縱軸長度÷2

2.當 y1/x1、y2/x2 皆小於或等於 y/x 時

兩條倍數斜線之間涵蓋的三角形面積=｜y1/x1- y2/x2｜✕橫軸長度✕橫軸長度÷2

3.當 y1/x1＞y/x＞y2/x2 時

兩條倍數斜線之間涵蓋的三角形面積

=｜x/y-x1/y1｜✕縱軸長度✕縱軸長度÷2 ＋｜y/x-y2/x2｜✕橫軸長度✕橫軸長度÷2

柒、參考文獻

1.均一教育平台 https://www.junyiacademy.org/course-compare/math-elem/math-5

2.給初中生的斜率筆記 https://hackmd.io/@cyberlancer/SlopeBasic

3.梅斯普雷爾的數學世界 https://blog.udn.com/Mathplayer/1708488

4.Kesan 對生活和實踐有用的計算網站

https://keisan.casio.jp/exec/system/1173765469

【評語】080407

從一個倍數與因數的紀錄活動,引發一系列關於正比關係直線圖中，相異斜線間的三角形面積之探討。先解析數列、再透過觀察與數形轉化，將座標關係化、然後藉由計算與圖像表徵，將圖像數值化、最後再利用驗證與歸納，將數據公式化；研究過程中,循序漸進地解決問題,未使用太複雜的數學知識,目標明確，簡單易懂；然而，也由於數學內容的深度可再強化，且由於探究的數字之侷限性，致使研究結果的豐富度也較顯薄弱。

作品海報

斜率解碼：
正比數列與面積

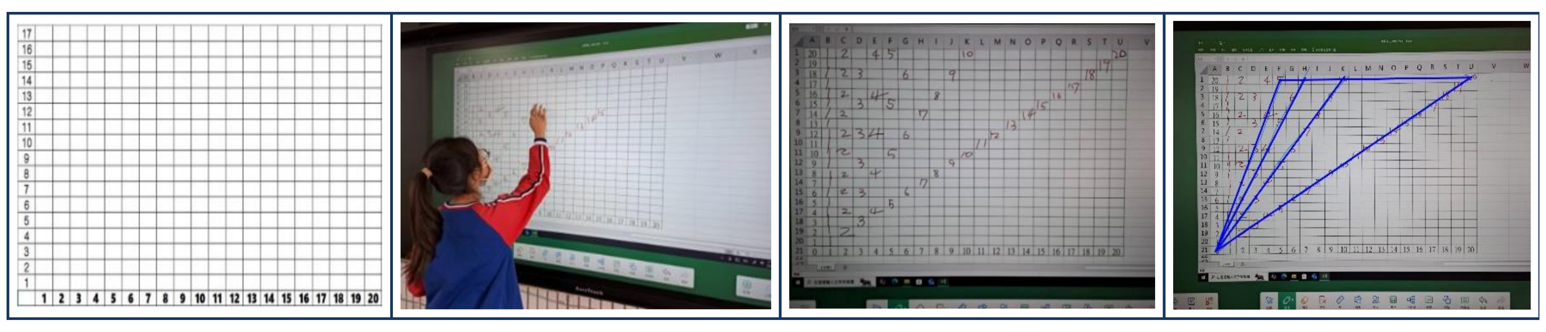
摘　要

本研究是在正比關係直線圖中探究相異斜線之間的三角形面積。首先透過因數與倍數來模擬橫軸與縱軸的關係，藉以獲取斜率，接著計算斜線末端的間隔距離，確認三角形底邊的長度，最後以斜率建立公式—計算相異正比斜線之間的三角形面積。

壹、前言

一、研究動機

進行因數與倍數的活動時，表格最下方的粗體數字代表同學的座號，最左邊那一行數字(簡稱**最左行數字**)，如果是座號的倍數，就在空格填上座號。活動之後，座號數字形成不同斜度的直線數列，數列之間的空格也形成大小不一的三角形。



看著圖表，我們腦海裡盤旋著幾個疑問:為什麼數列愈往左邊，彼此的間隔愈小? 表格右半邊未填上數字的空格是否還可以組成其它數列? 數列之間形成的三角形面積是否與數列倍數相關?

二、研究目的

(一)觀察數字排列的規律性，探究數列的倍數與位置。

(二)透過非整數的的倍數關係，找尋隱藏的數列。

(三)探究數列斜線在座標圖中的位置。

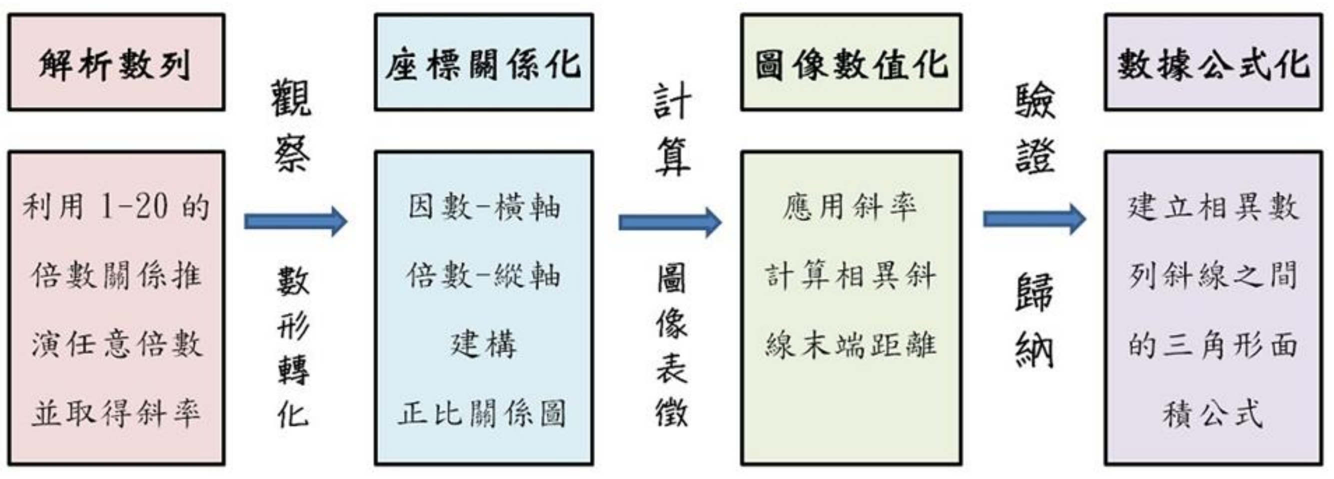
(四)建立相異數列斜線之間的三角形面積公式。

貳、研究設備及器材

電子白板、excel、ChatGPT、網路面積計算器。

參、研究方法

一、研究架構



二、研究範圍與限制

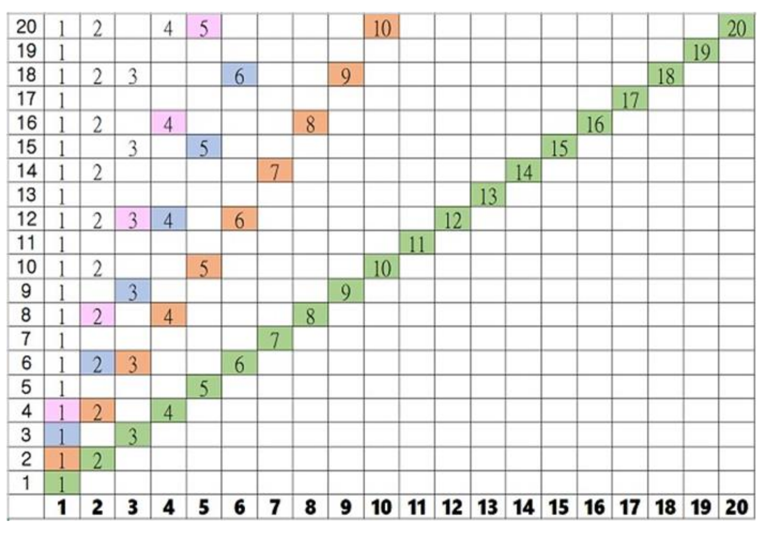
1. 數列斜線僅限於座標圖第一象限的範圍。
2. 數列斜線之間的三角形是以縱軸或橫軸的平行線段為底邊。

肆、研究過程與結果

一、觀察數字排列的規律性，探究數列的倍數與位置。

(一) 作法與記錄

1. 完成因數與倍數活動，將數列填上顏色，如下圖。



2. 根據以下兩個計算方式，將數列的規則呈現在表格中：

(1)數列倍數=最左行數字÷座號

(2)數列斜度=相鄰數字上下距離÷左右距離

綠色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
數列倍數 B÷A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
相鄰數字上下相距格數 C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
相鄰數字左右相距格數 D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
數列斜度 C÷D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

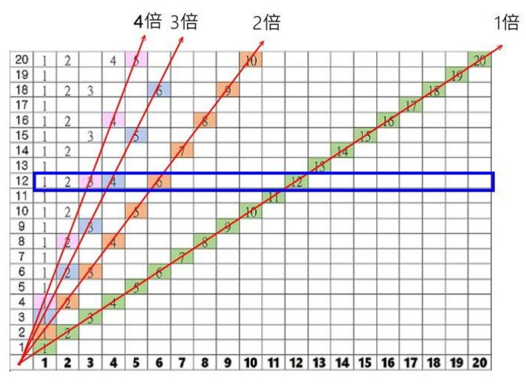
橙色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20										
數列倍數 B÷A	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2										
相鄰數字上下相距格數 C	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2										
相鄰數字左右相距格數 D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1										
數列斜度 C÷D	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2										

藍色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B	3	6	9	12	1 5	1 8														
數列倍數 B÷A	3	3	3	3	3	3														
相鄰數字上下相距格數 C	3	3	3	3	3	3														
相鄰數字左右相距格數 D	1	1	1	1	1	1														
數列斜度 C÷D	3	3	3	3	3	3														

粉色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B	4	8	12	16	20															
數列倍數 B÷A	4	4	4	4	4															
相鄰數字上下相距格數 C	4	4	4	4	4															
相鄰數字左右相距格數 D	1	1	1	1	1															
數列斜度 C÷D	4	4	4	4	4															

(二) 觀察與發現

1. 數列倍數=數列斜度，愈左邊的數列斜度愈陡。
2. 各數列的前後數字連接起來可形成不同斜率的直線，且通過最左下角的空格。
3. 同一數列的數字所對應的**最左行數字**和**座號**都是同樣的倍數關係，綠色數列最長，最左行數字是座號的 1 倍，再往左的數列依序為 2 倍、3 倍、4 倍…。
4. 數列都從左下角的空格出發，往右上方延伸，所經過的座號即代表數列與最左行數字的距離。
5. 由於 12 的因數較完整，3、4、6、12 剛好分布在 4 倍、3 倍、2 倍 1 倍的數列上，所以我們取最左行數字 12 那一列，探究數列斜線之間的水平距離：



最左行數字 (A)	座號 (B)	數列倍數 A ÷ B	數列與最左行數字的相距格數
12	3	4	3
12	4	3	4
12	6	2	6
12	12	1	12

(三) 小結

1. 座號 = 最左行數字÷數列倍數。
2. 數列斜線上的座號即代表數列斜線與最左行數字的距離，數列倍數愈大，數列之間的距離愈小。

二、透過非整數的的倍數關係，找尋隱藏的數列。

(一) 思考與作法

1. 確認表格對角線右下方這個範圍沒有座號的整數倍數，改成找座號小於 1 的倍數，並在 1 倍數列的空格塗上綠色，與整數倍數做為區隔。
2. 發現 2 的 0.5 倍或 1/2 倍就是 1，只要是偶數座號就可以往上對應到最左行數字，找到 1/2 倍的倍數，形成 2、4、6、8…的數列，將數字空格填上黃色，如下面圖 2-1。
3. 接著就找 1/3 倍的倍數，只要座號為 3 的倍數即符合條件，形成一個 3、6、9、12…的紫色數列，如圖 2-2。
4. 繼續找 1/4 倍，座號為 4 的倍數，如圖 2-3 的灰色數列。

(二) 記錄

1. 將找到的數列分別填上不同顏色。

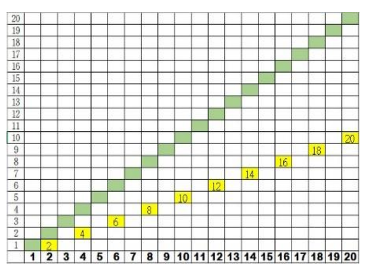


圖 2-1

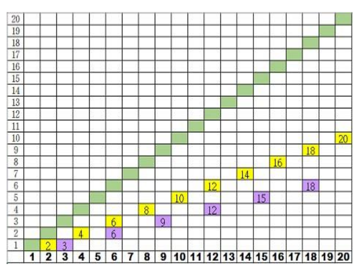


圖 2-2

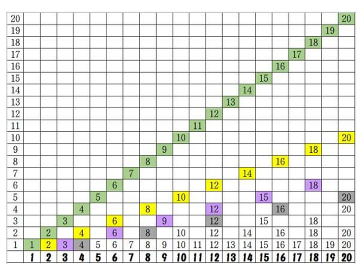


圖 2-3

2. 根據以下計算方式，將數列所呈現的規則整理成表格:

(1)數列倍數 = 最左行數字÷座號

(2)數列斜度 = 相鄰數字上下距離÷左右距離

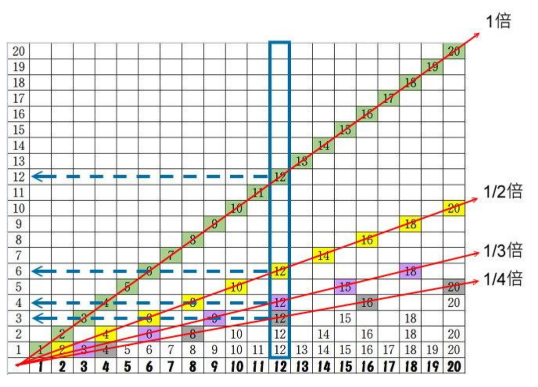
黃色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10
數列倍數 B÷A		½		½		½		½		½		½		½		½		½		½
相鄰數字上下相距格數 C		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1
相鄰數字左右相距格數 D		2		2		2		2		2		2		2		2		2		2
數列斜度 C÷D		½		½		½		½		½		½		½		½		½		½

紫色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B			1			2			3			4			5			6		
數列倍數 B÷A			⅓			⅓			⅓			⅓			⅓			⅓		
相鄰數字上下相距格數 C			1			1			1			1			1			1		
相鄰數字左右相距格數 D			3			3			3			3			3			3		
數列斜度 C÷D			⅓			⅓			⅓			⅓			⅓			⅓		

灰色數列座號 A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最左行數字 B				1				2				3				4				5
數列倍數 B÷A				¼				¼				¼				¼				¼
相鄰數字上下相距格數 C				1				1				1				1				1
相鄰數字左右相距格數 D				4				4				4				4				4
數列斜度 C÷D				¼				¼				¼				¼				¼

(三) 結果與發現

1. 表格對角線右下方的數列中，數字並非連續排列，而是以 2 的倍數、3 的倍數、4 的倍數…進行排列，最左行數字對座號的倍數小於 1。
2. 數列中，前後數字之間，上下移動的距離對左右移動的距離都是同樣的比例，可以連成直線，並通過表格最左下角的空格。
3. 綠色座號數字×1=最左行數字，黃色座號數字×1/2=最左行數字，紫色座號數字×1/3=最左行數字，灰色座號數字×1/4=最左行數字。
4. 數列將圖表劃分成不同大小的三角形區塊，愈靠近斜度為 1 的綠色數列，三角形區塊面積愈大。
5. 取座號 12 為例，探究數列斜線之間的垂直距離：



最左行數字 (A)	座號 (B)	數列倍數 A ÷ B	數列與座號列的相距格數
12	12	1	12
6	12	1/2	6
4	12	1/3	4
3	12	1/4	3

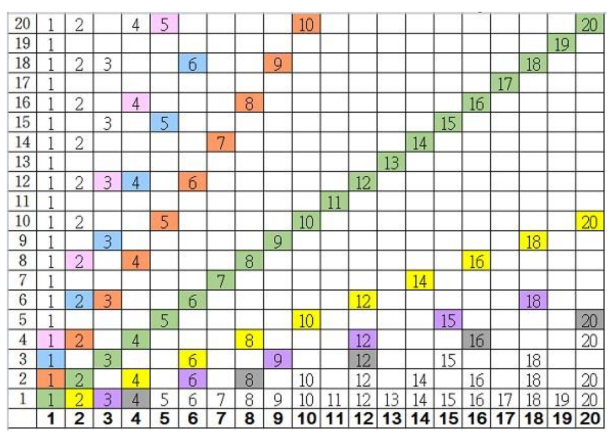
(四) 小結

1. 數列倍數 = 最左行數字÷座號
2. 當斜度≦1 時，座號往左對應的最左行數字代表數列斜線與底下座號列的距離。

三、探究數列斜線在座標圖中的位置。

（一）作法和記錄

1. 將前兩個研究過程產生的數列合併成下面的圖表。



2. 我們發現藍色數列和紫色數列的末端好像少了一段，如果依照數列的路徑來看，藍色數字 7 的位置是在第 21 列，而紫色的第 7 個數字就是 21，這兩個數字的位置都超出表格範圍，只是我們覺得數列末尾應該有個適當的數字，所以透過比和比值的計算方式確認數字。

   18：6 = 20：□

   □ =20/3

   20/3 即藍色數列在第 20 列的數字。

3. 另外，我們依循數字位移的路徑來確認末端數字的位置，藍色數列的 20/3 位置在第 6、7 行之間，比較偏向第 7 行，而紫色 20 位置在第 6、7 列之間，比較偏向第 7 列。

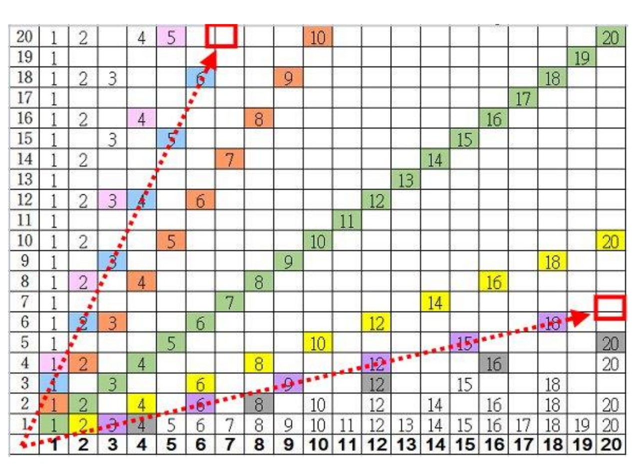


圖 3-2

4. 由圖 3-2 可知粉紅色、藍色、橙色、綠色數列末端數字分別為 5、20/3、10、20，也可以寫成 20/4、20/3、20/2、20/1，即最左行數字÷數列倍數，如下面的表格。

最左行數字 A	20	20	20	20
數列倍數 B	4	3	2	1
A ÷ B	20/4	20/3	20/2	20/1
數列末端數字(座號)	5	6.67	10	20
數列末端與最左行數字的距離(相距格數)	5	6.67	10	20

5. 我們再看圖 3-2 的最右方，數列末端數字都是 20，可以藉由其對應的最左數字來觀察數列位置，如下表可以協助我們探究數列倍數小於 1 的斜線位置。

座號 A	20	20	20	20
數列倍數 B	1	1/2	1/3	1/4
A×B	20	10	20/3	5
最左行數字	20	10	6.67	5
數列末端與座號列的距離(相距格數)	20	10	6.67	5

6. 在推演數列末端空格的過程中，為了獲取更精準的位置和數字，我們將斜度轉換成斜率，此時，倍數斜線就成了正比關係直線圖。圖 3-3 所示，橫軸的數字代表座號，縱軸的數字代表最左行數字，斜率(代號為 m)等於數列倍數，直線 m=1 為座標圖的對角線，代表綠色倍數斜線。往左依序 m=2，m=3，m=4 分別是橙色、藍色、粉紅色數列，往下 m=1/2，m=1/3，m=1/4 分別是黃色、紫色、灰色數列。

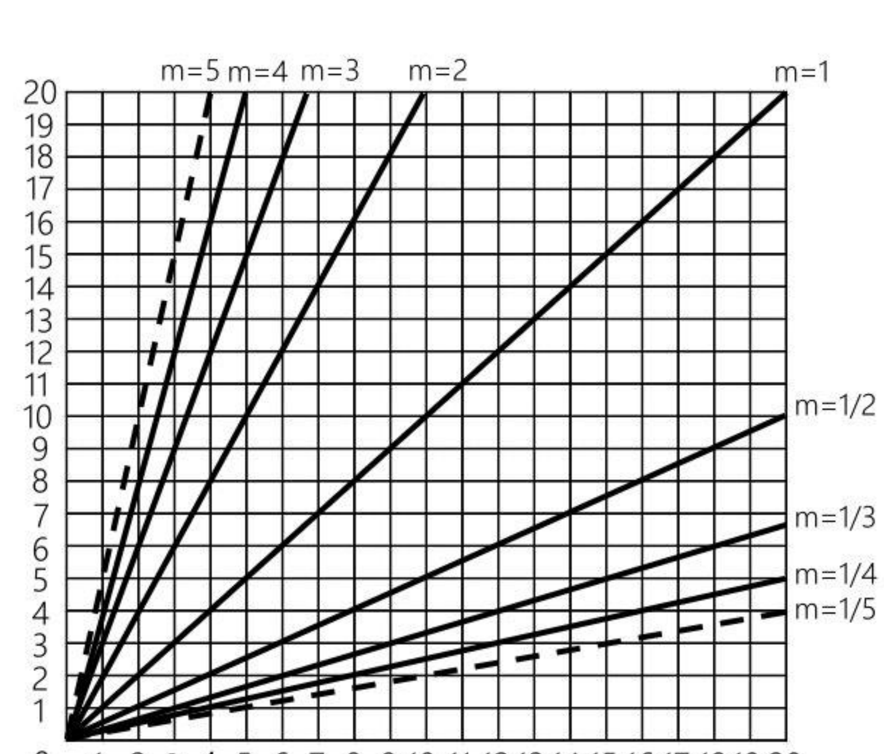
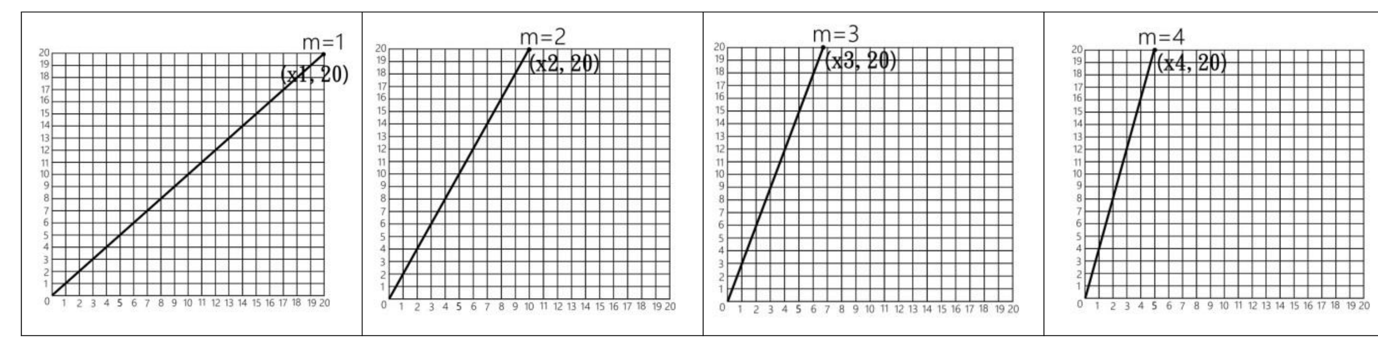


圖 3-3

7. 由於數列斜線之間的三角形都是等高圖形，所以斜線末端之間所形成的距離，即是三角形的底邊長，是接下來探究的重點。

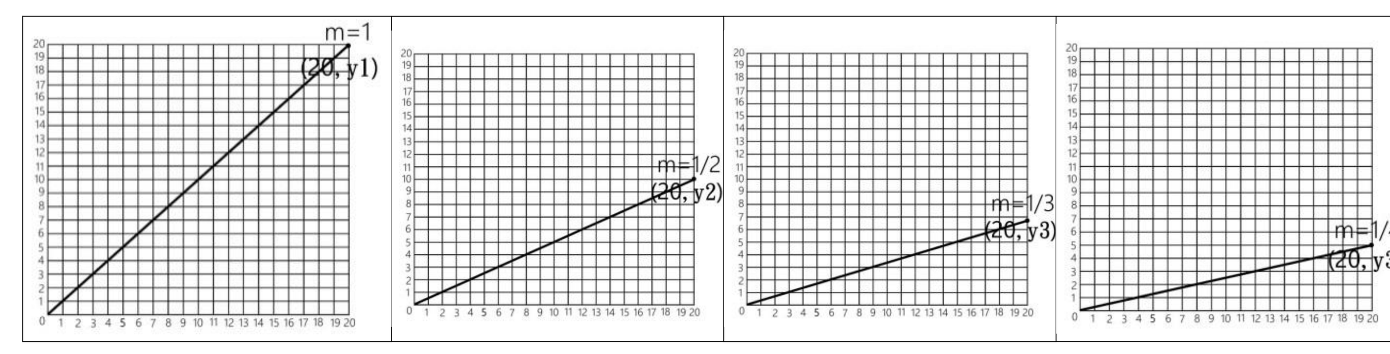
8. 在座標圖中，若橫軸為 x 軸，縱軸是 y 軸，斜率 m = $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ，△代表數字的改變，由於數列斜線的起點皆在原點，所以斜率 m 可以協助推算斜線末端位置，讓我們知道不同的數列斜線之間的距離。

9. 當 m≧1 時，以 x1、x2、x3、x4 分別代表 m=1、m=2、m=3、m=4 等數列斜線末端的橫軸刻度，便以縱軸刻度 ÷ m 計算數列斜線末端的橫軸刻度，確認座標位置。



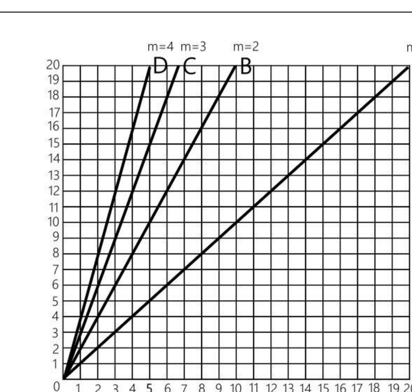
縱軸長度(A)	20	20	20	20	…
橫軸長度	X1	X2	X3	X4	…
m	1	2	3	4	…
A ÷ m	20	10	20/3	5	…
斜線末端座標	(20,20)	(10,20)	(20/3,20)	(5,20)	…

10. 當 m≦1 時，以 y1、y2、y3、y4 分別代表 m=1、m=1/2、m=1/3、m=1/4 等數列斜線末端的縱軸刻度，便以橫軸刻度 × m 計算數列斜線末端的縱軸刻度，確認座標位置。



縱軸座標	y1	y2	y3	y4	…
橫軸坐標(B)	20	20	20	20	…
m	1	1/2	1/3	1/4	…
B × m	20	10	20/3	5	…
斜線末端座標	(20,20)	(20,10)	(20,20/3)	(20,5)	…

11. 下圖 A、B、C、D 分別是 m=1、m=2、m=3、m=4 等數列斜線末端位置。

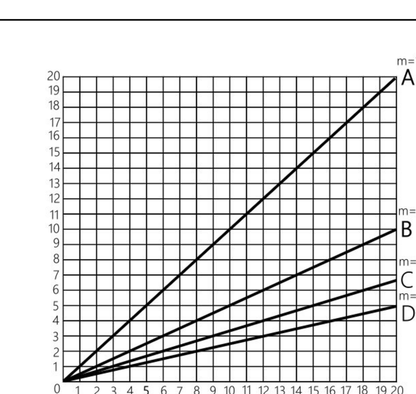


由於 A 點座標(20,20÷1)=(20,20)
B 點座標(20,20÷2)=(20,10)
C 點座標(20,20÷3)=(20,20/3)
D 點座標(20,20÷4)=(20,5)

所以 $\overline{BA}$=20÷1-20÷2 =縱軸長度/m1-縱軸長度/m2 =縱軸長度×(1/m1 - 1/m2)
$\overline{CB}$=20÷2-20÷3 =縱軸長度/m2-縱軸長度/m3 =縱軸長度×(1/m2 - 1/m3)
$\overline{DC}$=20÷3-20÷4 =縱軸長度/m3-縱軸長度/m4 =縱軸長度×(1/m3 - 1/m4)

小結：當 m ≧ 1 時，
數列斜線末端之間的線段長度 = 縱軸長度×兩數列斜線的斜率倒數差。

12. 下圖 A、B、C、D 分別代表 m=1、m=1/2、m=1/3、m=1/4 等數列斜線末端位置。



由於 A 點座標 (20×1 , 20) = (20 , 20)
B 點座標 (20×1/2 , 20) = (10 , 20)
C 點座標 (20×1/3 , 20) = (20/3 , 20)
D 點座標 (20×1/4 , 20) = (5 , 20)

所以 $\overline{AB}$ = 20×1 - 20×1/2 = 橫軸長度 × m 1 - 橫軸長度 × m 1/2
= 橫軸長度 × (m 1 - m 1/2)
$\overline{BC}$ = 20×1/2 - 20×1/3 = 橫軸長度 × m 1/2 - 橫軸長度 × m 1/3
= 橫軸長度 × (m 1/2 - m 1/3)
$\overline{CD}$ = 20×1/3 - 20×1/4 = 橫軸長度 × m 1/3 - 橫軸長度 × m 1/4
= 橫軸長度 × (m 1/3 - m 1/4)

小結：當 m ≦ 1 時，
兩數列斜線末端之間的線段長度=橫軸長度×兩數列斜線的斜率差。

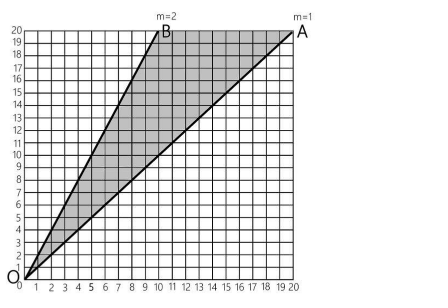
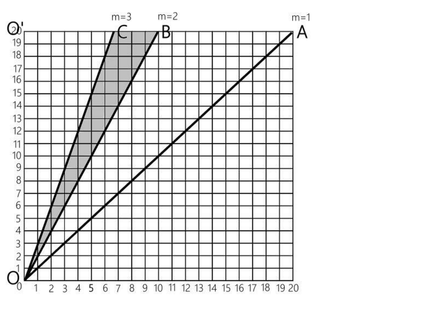
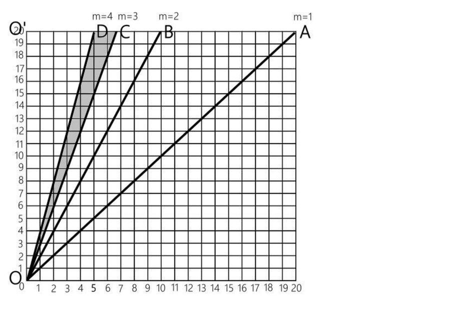
（二）結果與發現

1. 當 m ≧ 1 時，數列斜線末端與縱軸的水平距離=縱軸長度 ÷ m 。
2. 當 m ≧ 1 時，兩數列斜線末端之間的線段長度=縱軸長度×兩數列斜線的斜率倒數差。
3. 當 m ≦ 1 時，數列斜線末端與橫軸的垂直距離=橫軸長度× m 。
4. 當 m ≦ 1 時，兩數列斜線末端之間的線段長度=橫軸長度×兩數列斜線的斜率差。

四、建立相異數列斜線之間的三角形面積公式。

（一）作法和記錄

1. 當 m≧1 時，數列斜線之間的三角形面積計算方式如下：

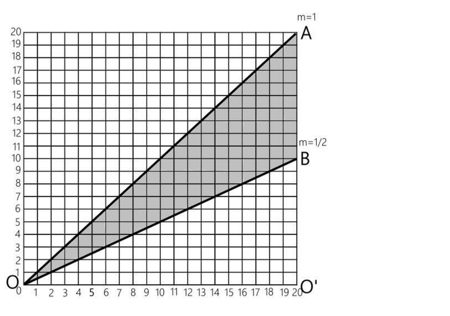
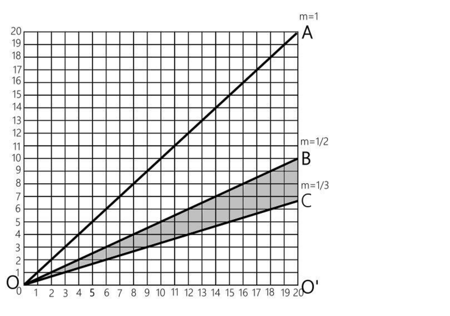
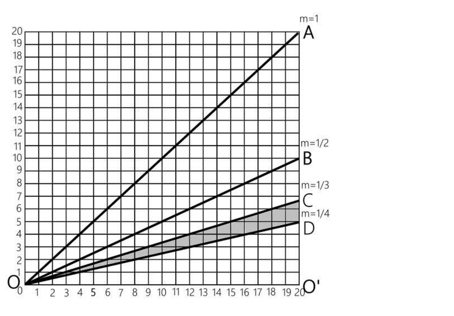
m=2 和 m=1 之間	m=3 和 m=2 之間	m=4 和 m=3 之間
		
上圖說明：假設 m1 代表 m=1，m2 代表 m=2 $\overline{BA}$ = 縱軸長度×(1/m1－1/m2) △OBA 面積 = $\overline{BA}$×縱軸長度÷2 = 縱軸長度×(1/m1－1/m2)×縱軸長度÷2 = (1/m1－1/m2)×縱軸長度×縱軸長度÷2 = (1-1/2)×20×20÷2 = 100	上圖說明：假設 m2 代表 m=2，m3 代表 m=3 $\overline{CB}$ = 縱軸長度×(1/m2－1/m3) △OCB 面積 = $\overline{CB}$×縱軸長度÷2 = 縱軸長度×(1/m2－1/m3)×縱軸長度÷2 = (1/m2－1/m3)×縱軸長度×縱軸長度÷2 = (1/2-1/3)×20×20÷2 = 100/3	上圖說明：假設 m3 代表 m=3，m4 代表 m=4 $\overline{DC}$ = 縱軸長度×(1/m3－1/m4) △ODC 面積 = $\overline{DC}$×縱軸長度÷2 = 縱軸長度×(1/m3－1/m4)×縱軸長度÷2 = (1/m3－1/m4)×縱軸長度×縱軸長度÷2 = (1/3-1/4)×20×20÷2 = 50/3

m≧1 探究結果：

1. 當 m≧1 時，相異兩數列斜線末端水平距離等於三角形的底。

2. m=a 和 m=b 之間的面積 =｜1/a-1/b｜×縱軸長度×縱軸長度÷2

2. 當 m≦1 時，數列斜線之間的三角形面積計算方式如下：

m=1 和 m=1/2 之間	m=1/2 和 m=1/3 之間	m=1/3 和 m=1/4 之間
		
上圖說明：$\overline{AB}$ = 橫軸長度×(m1－m$\frac{1}{2}$) △OBA 面積 = $\overline{AB}$×橫軸長度÷2 = 橫軸長度×(m1－m$\frac{1}{2}$))×橫軸長度÷2 = (m1－m$\frac{1}{2}$))×橫軸長度×橫軸長度÷2 = (1-1/2)×20×20÷2 = 100	上圖說明：$\overline{BC}$ = 橫軸長度×(m$\frac{1}{2}$－m$\frac{1}{3}$) △OCB 面積 = $\overline{BC}$×橫軸長度÷2 = 橫軸長度×(m$\frac{1}{2}$－m$\frac{1}{3}$)×橫軸長度÷2 = (m$\frac{1}{2}$－m$\frac{1}{3}$)×橫軸長度×橫軸長度÷2 = (1/2－1/3)×20×20÷2 = 100/3	上圖說明：$\overline{CD}$ = 橫軸長度×(m$\frac{1}{3}$－m$\frac{1}{4}$) △ODC 面積 = $\overline{CD}$×橫軸長度÷2 = 橫軸長度×(m$\frac{1}{3}$－m$\frac{1}{4}$)×橫軸長度÷2 = (m$\frac{1}{3}$－m$\frac{1}{4}$)×橫軸長度×橫軸長度÷2 = (1/3－1/4)×20×20÷2 = 50 /3

m≦1 探究結果：

1. 當 m≦1 時，相異兩數列斜線末端垂直距離等於三角形的底。

2. m=a 和 m=b 之間的面積=｜a-b｜×橫軸長度×橫軸長度÷2

(二)結果與發現

1. 當數列斜線的斜率大於或等於對角線斜率(m=1)時，數列斜線之間的三角形底邊長=縱軸長度×數列斜線的斜率倒數差。
2. 當數列斜線的斜率小於或等於對角線斜率(m=1)時，數列斜線之間的三角形底邊長=橫軸長度×數列斜線的斜率差。
3. 當 m ≧ 1 時，m=a 和 m=b 之間的三角形面積

=｜1/a-1/b｜×縱軸長度×縱軸長度÷2。

4. 當 m ≦ 1 時，m=a 和 m=b 之間的三角形面積

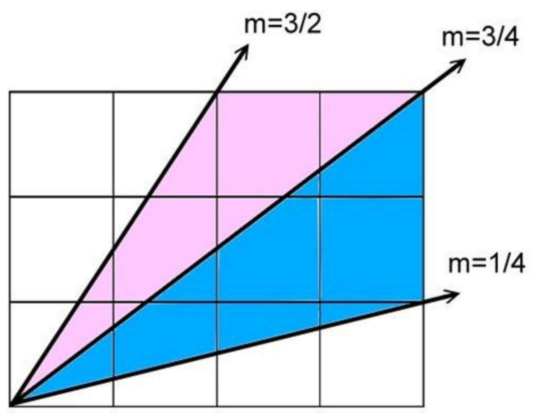
=｜a-b｜×橫軸長度×橫軸長度÷2。

伍、討論

一、縱軸與橫軸比例問題

1. 配合對角線 m 改變，調整面積公式的適用範圍

因數與倍數活動所使用的表格是長方形，對角線 m=3/4，計算三角形面積時，就分成 m≧3/4 和 m≦3/4 兩部分。



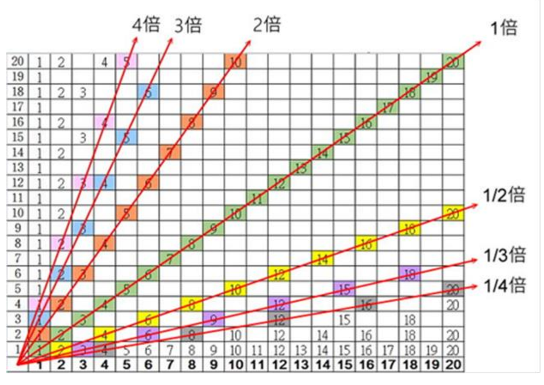
(1)粉紅色三角形面積=｜2/3-4/3｜×3×3÷2=3。

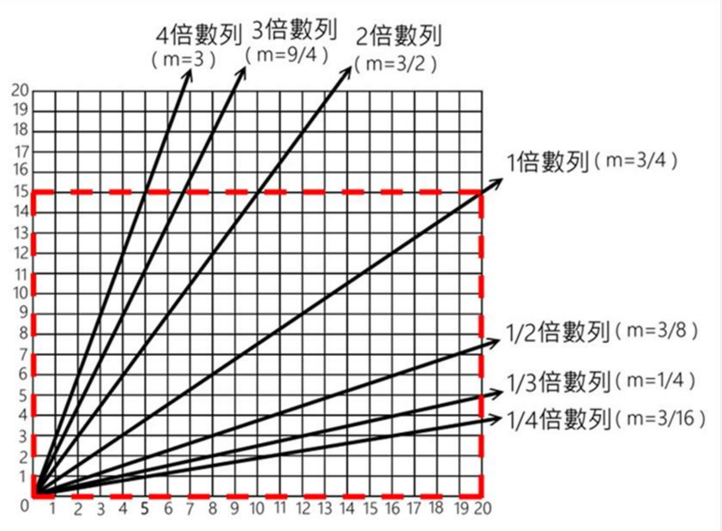
(2)藍色三角形面積=｜3/4-1/4｜×4×4÷2=4。

2. 修正倍數斜線的斜率

在研究過程一和研究過程二當中，圖表中的格子是大約長與寬 4：3 的格子，所以倍數斜線的斜率=數列的倍數×3/4。

數列的倍數	4 倍	3 倍	2 倍	1 倍	1/2 倍	1/3 倍	1/4 倍	…
倍數斜線的斜率 (= 倍數×3/4)	3	9/4	3/2	3/4	3/8	1/4	3/16	…

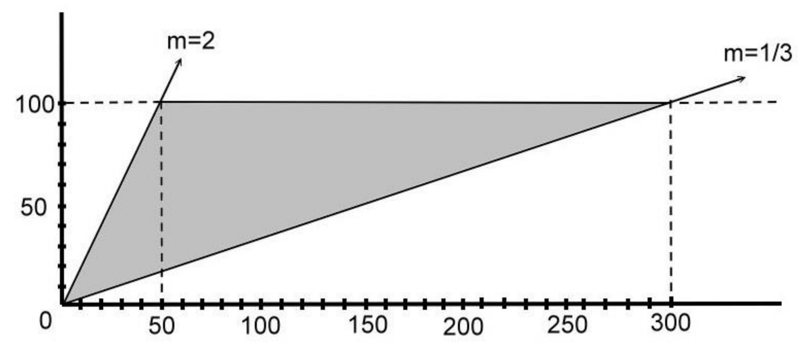




上面左圖是因數與倍數活動的數列斜線，將數列的倍數轉換成右圖的斜率，此時對角線 m=3/4，橫軸長度同樣是 20，縱軸長度=20×3/4=15，再以研究過程四的公式計算面積。

二、座標圖對角線斜率延伸問題

1. 固定縱軸刻度，將對角線往右延伸至 m=1/3。

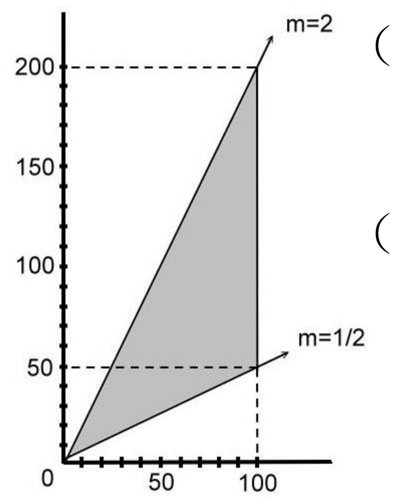


(1) m=2 和 m=1/3 之間的三角形面積

=｜1/2 - 3/1｜× 100 × 100 ÷ 2 = 12500

(2)小結：固定縱軸刻度，正比關係直線斜率變小，修正對角線斜率，便適用研究過程四的三角形面積公式。

2. 固定橫軸刻度，將對角線往上延伸至 m=2。



(1) m=2 和 m=1/2 之間的三角形面積

=｜2-1/2｜× 100 × 100 ÷ 2 = 7500

(2)小結：只要固定橫軸刻度，正比關係直線斜率變大，修正對角線斜率，便適用研究過程四的三角形面積公式。

三、計算答案的驗證方式

1. 透過網路的面積計算器，以頂點座標計算三角形面積。
2. 設定兩軸範圍，以斜率向 ChatGPT 查詢答案

陸、結論

一、數列斜線的倍數與位置

1. 數列倍數=數列斜度，愈左邊的數列斜度愈陡。
2. 愈往左邊的數列倍數愈大，數列之間的水平距離愈小。

二、非整數倍數關係讓座號構成隱藏的數列。

三、正比關係直線圖的位置和斜率

1. 當 m ≧ 1 時

(1)數列斜線末端與縱軸的水平距離 = 縱軸長度 ÷ m 。

(2)兩數列斜線末端之間的線段長度 = 縱軸長度 x 兩數列斜線的斜率倒數差。

2. 當 m ≦ 1 時

(1)數列斜線末端與橫軸的垂直距離 = 橫軸長度 x m 。

(2)兩數列斜線末端之間的線段長度 = 橫軸長度 x 兩數列斜線的斜率差。

四、相異正比斜線之間的三角形面積公式

在座標圖中，以橫軸 x 單位長、縱軸 y 單位長為範圍，即以(0,0)和(x,y)的線段為對角線。斜率 y1/x1 和斜率 y2/x2 兩直線之間所涵蓋的座標圖面積可依循下列情況計算：

1. 當 y1/x1、y2/x2 皆大於或等於 y/x 時：

相異兩條倍數斜線之間涵蓋的三角形面積

=｜x1/y1- x2/y2｜×縱軸長度×縱軸長度÷2

2. 當 y1/x1、y2/x2 皆小於或等於 y/x 時：

相異兩條倍數斜線之間涵蓋的三角形面積

=｜y1/x1- y2/x2｜×橫軸長度×橫軸長度÷2

3. 當 y1/x1＞y/x＞y2/x2 時：

相異兩條倍數斜線之間涵蓋的三角形面積

=｜x/y-x1/y1｜×縱軸長度×縱軸長度÷2

＋｜y/x-y2/x2｜×橫軸長度×橫軸長度÷2

柒、參考文獻

一、均一教育平台 https://www.junyiacademy.org/course-compare/math-elem/math-5

二、給初中生的斜率筆記 https://hackmd.io/@cyberlancer/SlopeBasic

三、梅斯普雷爾的數學世界 https://blog.udn.com/Mathplayer/1708488

四、Kesan 計算網站 https://keisan.casio.jp/exec/system/1173765469