中華民國第 65 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080406

書謀話策——論乘法賓果的玄機與妙算

學校名稱： 新竹市東區關東國民小學

作者：	指導老師：
小六 劉品樂	傅秀蘭
小六 廖劭衡	林郁彤
小六 郭靖騰	
小六 符可璋	

關鍵詞： 因數與倍數、平方數、公平棋盤

書謀話策——論乘法賓果的玄機與妙算

摘要

本研究探討乘法賓果雙人對戰遊戲的設計原理與對戰策略。

探討問題與獲致結果如下：

一、正整數 1～c 兩兩相乘所得乘積總個數，找出計算公式。≤500 只有 7 個 c 恰可組成正方形棋盤。重複的乘積，其最大質因數≤ $\frac{c}{2}$。

二、由棋盤邊長 n 和 m 數連線，可計算出棋盤各位置的賓果組合數量、及可與之賓果的位置數量，且可判斷合適的 m 值。

三、按照數字大小排列邊長≤6 的完美棋盤，都是先手較占優勢的不公平棋盤。對戰策略包括：取得棋盤中央位置、選擇平方數、賓果係數較高，考慮可連跳乘積數的相關性質、倍數位置分布等。

四、設計公平棋盤並用不同方法驗證。

五、編寫程式，找出可排成較大正方形棋盤的數，且模擬隨機對戰，找出雙方勝率，以驗證棋盤的公平性。

壹、前言

一、研究動機

我們在學校的數學活動中，學到一個用九九乘法來玩賓果的遊戲。遊戲的玩法是：兩人輪流在棋盤（如圖 1-1-1）下方 1～9 選兩個數（兩數可相同），將兩數相乘所得到的數，在棋盤上方放上自己顏色的棋，但是挑選下面兩數時，每次都要保留 1 數、只能變換 1 數。最快能得到 4 個數字連成一直線的一方就「賓果」獲勝了。

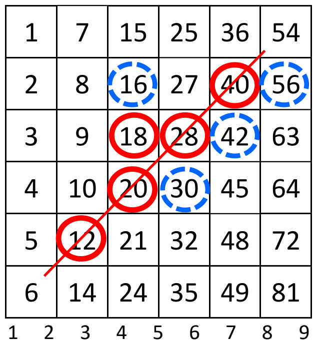


圖 1-1-1 乘法賓果棋盤(自行繪製)

此遊戲和一般能自由選位的連線遊戲(如：井字棋、五子棋、賓果遊戲）並不相同。因為除了第 1 步的先手可隨意取數，後續取數總有 1 個乘數或被乘數會受到對手的限制，無法確保能順利取得想要的位置或數字。以圖 1-1-2 為例，先手第 1 步取得 8(1×8)，後手把 1 換成 8，取得 64(8×8)，直到最後先手取得 15(3×5)時，因為 3 的倍數和 5 的倍數都已經被占了，後手及先手都無法再取數，且無任何一方有 4 數連線，結果為「和局」。

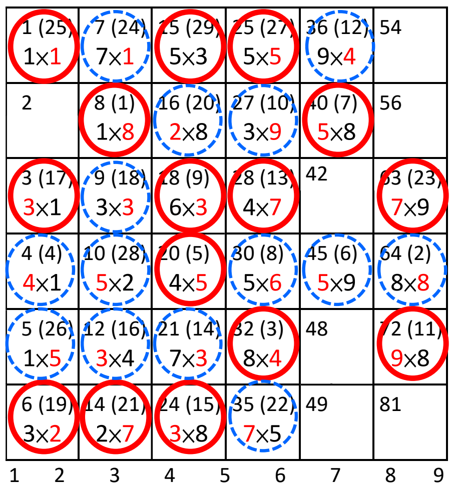


圖 1-1-2 和局示例(自行繪製)

查詢歷屆科展作品和網路資料，發現有研究井字棋對戰策略（探討多人玩的井字棋_Otrio 是否有必勝方法、棋盤上的奇蹟-奇「雞」連連）、賓果連線機率（機率無所不在-探討麻將賓果遊戲中獎機率）等與連線遊戲相關的研究，但是並沒有針對乘法賓果這個遊戲主題的研究。網路上搜尋「乘法賓果」，找到許多學習單或遊戲，棋盤都有重複的數字，數字位置多有變化，但是並沒有探討雙方要如何取數的研究。

所以我們決定研究這個新穎的問題。我們探索的問題如下：

1. 為什麼 1～9 兩兩相乘所得到的乘積，剛好可以排成 6×6 的棋盤？棋盤上的數字排列有什麼玄機嗎？
2. 為什麼是 4 數連線就賓果？不同大小棋盤，遊戲規則訂為幾數連線賓果較合適？
3. 這個遊戲是哪一方較占優勢？先手可自由選擇的第 1 步要取哪一數，才能搶得連線先機？後續的對戰策略，是著重於阻擋對方連線，或是搶數來創造連線獲勝機會？
4. 如果變化棋盤上的數字排列時，要如何調整對戰策略？
5. 如何調整棋盤上的數字排列或遊戲規則，讓乘法賓果更公平？如果雙方實力相當，最少幾步可和局？

二、名詞解釋

1.候選數：在棋盤下方的數字 1～c，雙方可輪流選取兩數 A 和 B（其中 A 和 B 都是正整數，A、B 兩數可相同或相異），來作為乘數和被乘數。除了先手一開始可以自由選擇 2 個候選數，之後的玩家，每次輪到時都要保留對手前一步選擇的 1 個候選數、只能換掉 1 個候選數。

1	7	15	25	36	54
2	8	16	27	40	56
3	9	18	28	42	63
4	10	20	30	45	64
5	12	21	32	48	72
6	14	24	35	49	81

1 2 3 4 5 6 7 8 9

圖 1-2-1 取數示例(自行繪製)

2.乘積數：將兩個候選數相乘所得到的積，對應到棋盤上方格子中的數字，即是選擇這兩個候選數的玩家可取得的數字和位置。例如在圖 1-2-1，玩家在下方的候選數選擇了 1 和 8，兩數相乘的乘積數是 8，就能取得上方棋盤中數字 8 的位置。

3.完美棋盤：候選數 1～c 的乘積數個數，恰可排成正方形棋盤，稱之為完美棋盤。

4.候選數組合：是指由兩個相同或不同的候選數 a、b，所構成的組合，記作 a×b，其中 a、b 都是正整數，且$a \le b$。每 1 個候選數組合只會對應到 1 個乘積數 p，但一個乘積數 p 有可能會有 1 種以上的候選數組合（即 $p=a\times b=c\times d$，其中 a、b、c、d 都是正整數，且 $a\neq b$）。例如：乘積數 8 有 1×8 和 2×4 這兩種候選數組合。若玩家是由候選數組合 1×8 取得乘積數 8，記作 8(1×8)。

5.可連跳乘積數：從乘積數 p 下一步可以選到的乘積數。例如圖 1-2-2 中：一方取得乘積數 8(2×4)，另一方的下一步可換掉候選數 2 而得到 4 的其他倍數：4、12、16、20、24、28、32 或 36 其中之一；或是將候選數 4 換掉，得到 2 的其他倍數 2、4、6、10、12、14、16、18 其中之一。這些乘積數就是 8(2×4)的可連跳乘積數。所以可連跳乘積數彼此會有相同的候選數（也就是公因數），而對手下一步只能從中選擇 1 數。若乘積數有不同的候選數組合，可連跳乘積數也會有所不同。

1	7	15	25	36	54
2	8	16	27	40	56
3	9	18	28	42	63
4	10	20	30	45	64
5	12	21	32	48	72
6	14	24	35	49	81

1 2 3 4 5 6 7 8 9

圖 1-2-2 可連跳乘積數示例
(自行繪製)

6.賓果（獲勝條件）：任一方占領的格子，在同一直線、橫線或斜線可排成連續的 4 格時，即為賓果／獲勝。

7. m 連賓果：指獲勝條件為連續 m 格連成直線。本研究中若沒有特別註明的話，都是探討 4 連賓果。

8.賓果組合：指棋盤上可形成賓果條件的數字組合，如圖 1-2-3 所示，乘積數 25 一共有 5 種賓果組合：(1)(1、7、15、25)；(2)(7、15、25、36)；(3)(15、25、36、54)；(4)(25、27、28、30)；(5)(4、9、16、25)。

1	7	15	25	36	54
2	8	16	27	40	56
3	9	18	28	42	63
4	10	20	30	45	64
5	12	21	32	48	72
6	14	24	35	49	81

1 2 3 4 5 6 7 8 9

圖 1-2-3 賓果組合示例
(自行繪製)

9.可連跳且可賓果的乘積數／可賓果且可連跳的乘積數：在乘積數 p 的可連跳乘積數中，可以和乘積數 p 連成賓果的乘積數。例如圖 1-2-3 中，15 和 30 既是 25 的賓果組合，也是 25 的可連跳乘積數，15 和 30 就是 25 的可連跳且可賓果的乘積數。

10.可賓果但不可連跳的乘積數：在乘積數 p 的可賓果組合數字中，從乘積數 p 下一步無法選到的乘積數；也就是和乘積數 p 沒有公因數（共同候選數）、但可和乘積數 p 連成賓果的乘積數。例如在圖 1-2-3 中，25(5×5)的可賓果但不可連跳乘積數有：1、4、7、9、16、27、28、36 和 54。

11.可連跳但不可賓果的乘積數：在乘積數 p 的可連跳乘積數中，無法和乘積數 p 連成賓果的乘積數。例如圖 1-2-4 中 5、10、20……等，都是 25(5×5)的可連跳乘積數，但是它們都不在 25 的賓果組合中，所以這些數就是 25 的可連跳但不可賓果的乘積數。

1	7	15	25	36	54
2	8	16	27	40	56
3	9	18	28	42	63
4	10	20	30	45	64
5	12	21	32	48	72
6	14	24	35	49	81

1 2 3 4 5 6 7 8 9

圖 1-2-4 阻擋示例(自行繪製)

12.可以阻擋／無法阻擋：己方取得的乘積數 p 的位置，在乘積數 r 的賓果連線上，則可使取得乘積數 r 的對手無法取得此一賓果連線，因此乘積數 p 可以阻擋對手乘積數 r 的一條賓果機會。反之，若己方的乘積數 p 不在對手所取得乘積數 r 的賓果連線上，則乘積數 p 無法阻擋乘積數 r 的賓果連線機會。

例如上頁圖 1-2-4 中，取得 15 的一方，就可以阻擋已取得 25 的對手 3 條含有 25 和 15 的賓果連線機會。而 20 和 40 都不在 25 的賓果直線上，對 25 的賓果連線不影響，所以 20 和 40 無法阻擋 25 的賓果連線機會。

13.賓果係數：每個乘積數下一步可變化的乘積數（亦即「C.可連跳乘積數」）中，「A.可連跳但不可賓果的乘積數（代表對己方有利）的個數」減去「B. 可連跳且可賓果的乘積數（代表可能被對方阻擋）的個數」占「C.所有可連跳乘積數」的比例。以公式表示為：$\frac{A-B}{C}$。乘積數的賓果係數愈高，代表對方下一步能阻擋己方賓果連線的機會越少、對己方愈有利。

14.「聽」：當一方只要再下一個乘積數，就可以得到 4 數連線而賓果獲勝的狀態。

15.和局：當上方棋盤上沒有剩餘格子，或移動兩個候選數中的任一個候選數，都沒有可放置的格子，但尚未有任一方獲勝，此時為和局結束遊戲。例如圖 1-1-2 的示例，雙方都無法繼續取得棋盤上剩下的格子，且沒有一方連線成功，所以和局。

16.某數策略：指的是可以自由選數的先手，第一步先搶占某數的對戰策略。

三、研究目的

1. 探究設計乘法賓果遊戲的數學理論架構及其應用。
2. 探討邊長小於 6 的完美棋盤對戰策略。
3. 解析 6×6（含）以上棋盤適用的對戰策略。
4. 探究如何改良遊戲設計，及相應的對戰策略調整。

貳、研究設備

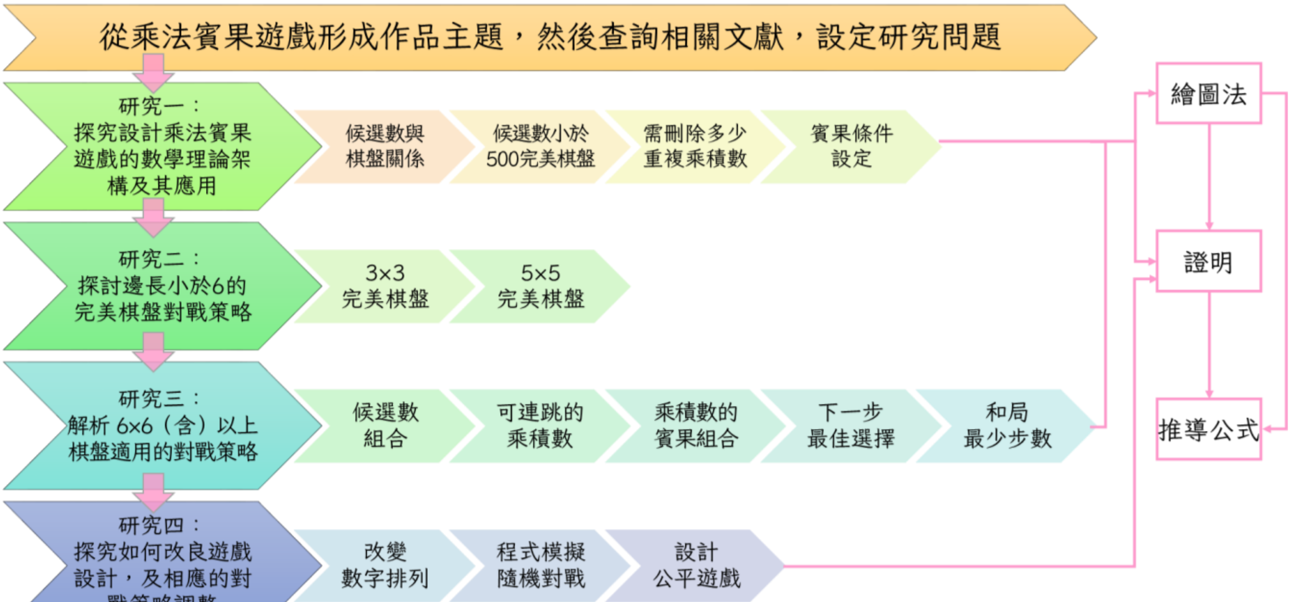
一、 紙製棋盤、密集板雷切棋具、透明片、紙筆。

二、 電腦與軟體：Scratch（編寫遊戲程式）、Word（整理研究成果）、Excel（各項性質分析）、PowerPoint（繪製分析圖）、ChatGPT（協助依數字大小排列生成棋盤）。

參、研究過程與方法

除了利用累積實戰、觀察歸納、紙筆計算、EXCEL 統計分析等研究方法，開展一系列的研究，我們還有自行編寫電腦程式來模擬對戰，驗證我們的研究結果。某些我們找出來的數學理論表示方式，則是請老師指導我們轉換成適當的數學符號。

本研究過程如下：



(本圖由第二指導老師繪製)

肆、研究結果與討論

研究一-1：探討候選數與形成棋盤之關係

1. 候選數 1～c，在不排除相同乘積數的情形下，如何計算總乘積數個數？

   1-1. 試以 c=9 為例，列出所有候選數組合（見圖 4-1-1）。排除候選數組合的對稱性，扣除前後交換的候選數組合，發現所有候選數組合的個數，為 9、8、7…1 的等差數列。首項為 9(=c)、末項為 1，共 9 項（=c）。

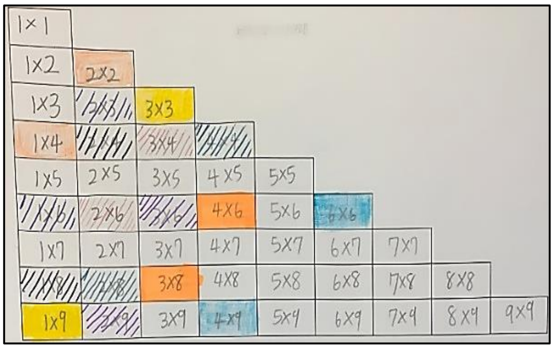


圖 4-1-1 候選數 1～c 的乘積數(自行繪製)

   1-2. 可以用梯形公式計算此等差數列的總合：（首項+末項）×高÷2

   最大候選數 c 的候選數組合總數為：$\frac{(c+1)\times c}{2}$

2. 要扣除多少個相同的乘積數？

   2-1. 任一乘積數 z_i，都是 2 個候選數的乘積：

$$z_i = a_1 \times b_1 = a_2 \times b_2 = \cdots = a_{m_i} \times b_{m_i}，其中\ z_i、a_{m_i}、b_{m_i} \in \mathrm{N}，$$
$$且 a_1 \le b_1、a_2 \le b_2、\cdots、a_{m_i} \le b_{m_i}，a_1 < a_2 < \cdots < a_{m_i}，b_{m_i} \le \sqrt{z_i} \le c$$

   2-2. 任一乘積數 z_i，若有m_i組候選數組合，則會有（$m_i - 1$）個乘積數被重複計算。

   2-3. 不重複計算的乘積數總數$\mathrm{K} = \frac{(c+1)\times c}{2} - \sum_1^K (m_i - 1)$

   2-4. 若 K 為平方數，則恰可排成正方形棋盤。

3. 以 c＝7 為例，計算會有幾個乘積數（見表 4-1-1）。

表 4-1-1 候選數 1～7 的全部乘積數

乘積數	候選數組合	組合數 m	$m-1$	乘積數	候選數組合	組合數 m	$m-1$	乘積數	候選數組合	組合數 m	$m-1$
1	1×1	1	0	10	2×5	1	0	25	5×5	1	0
2	1×2	1	0	12	2×6 3×4	2	1	28	4×7	1	0
3	1×3	1	0	14	2×7	1	0	30	5×6	1	0
4	1×4 2×2	2	1	15	3×5	1	0	35	5×7	1	0
5	1×5	1	0	16	4×4	1	0	36	6×6	1	0
6	1×6 2×3	2	1	18	3×6	1	0	42	6×7	1	0
7	1×7	1	0	20	4×5	1	0	49	7×7	1	0
8	2×4	1	0	21	3×7	1	0	$\sum(m-1) = 3$			
9	3×3	1	0	24	4×6	1	0				

4. 利用圖 4-1-1 可算出候選數 1～7 的總乘積數個數：K＝(7＋1)×7÷2－3＝25＝5×5，因此以 1～7 作為候選數，可以完美組成 5×5 棋盤。

研究一-2：找出 500 以內的完美棋盤

1. 候選數個數≤9 的乘積數個數較少，容易用紙筆計算檢核，來找出恰可組成邊長 3、5 或 6 的正方形棋盤的候選數與乘積數。但是當候選數增加時，我們便自行編寫程式，利用電腦來協助尋找恰可組成較大邊長正方形棋盤的候選數與乘積數。
2. 編寫程式，找出最大候選數在 500 以內、總乘積數個數為平方數的最大候選數 c。流程圖見圖 4-1-2。

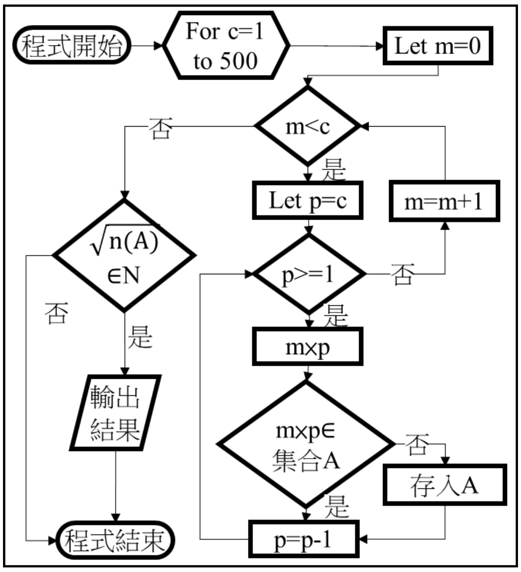


圖 4-1-2 找完美棋盤程式流程圖(自行繪製)

3. 執行結果見表 4-1-2：

表 4-1-2 恰可組成正方形棋盤的候選數

最大候選數(c)	1	4	7	9	25	129	499
乘積數總個數	1	9	25	36	225	4761	64516
棋盤邊長	1	3	5	6	15	69	254

4. 將程式執行最大候選數為 25 時自動生成所有乘積數，到 ChatGPT 網站輸入，請它依照數字大小形成表格，我們便可利用此表格製作成圖 4-1-3 的棋盤。

1	16	33	52	76	100	128	156	189	224	260	300	345	400	480
2	17	34	54	77	102	130	160	190	225	264	304	350	408	483
3	18	35	55	78	104	132	161	192	228	266	306	352	414	484
4	19	36	56	80	105	133	162	195	230	270	308	357	418	500
5	20	38	57	81	108	135	165	196	231	272	312	360	420	504
6	21	39	60	84	110	136	168	198	234	273	315	361	425	506
7	22	40	63	85	112	138	169	200	238	275	320	368	432	525
8	23	42	64	88	114	140	170	204	240	276	322	374	437	528
9	24	44	65	90	115	143	171	207	242	280	323	375	440	529
10	25	45	66	91	117	144	175	208	247	285	324	378	441	550
11	26	46	68	92	119	147	176	209	250	286	325	380	450	552
12	27	48	69	95	120	150	180	210	252	288	330	384	456	575
13	28	49	70	96	121	152	182	216	253	289	336	391	460	576
14	30	50	72	98	125	153	184	220	255	294	340	396	462	600
15	32	51	75	99	126	154	187	221	256	299	342	399	475	625

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

圖 4-1-3 候選數 1～25 的棋盤(自行繪製)

研究一-3：最大候選數 c 共要刪除多少個相同的乘積數？

在研究一-1 的 2-3.已得出不重複計算的乘積數總數$K=\frac{(c+1)\times c}{2}-\sum_1^K(m_i-1)$。我們想要研究看看，當變化最大候選數 c 時，能否預測要扣除的 $\sum_1^K(m_i-1)$ 是多少？

1. 列出最大候選數 c 與對應的 $\sum_1^K(m_i-1)$（見表 4-1-3），觀察兩者的關係。
2. 從表 4-1-3 可以發現：

2-1. 若 c 是質數，則 $\sum_1^K(m_i-1)-\sum_1^{K-1}(m_i-1)=0$

【解釋】最大候選數 c 是質數時，比最大候選數 $c-1$ 新增的乘積數，都是質數 c 的倍數，都只有 1 組候選數組合，所以不會新增重複、需要扣除的乘積數。

表 4-1-3 計算乘積數總數時要扣除的候選數組合個數對照表

最大候選數 c	$\sum_1^K(m_i-1)$	與$c-1$的變化值	解釋變化值	最大候選數 c	$\sum_1^K(m_i-1)$	與$c-1$的變化值	解釋變化值
1	0	0	初始不扣	14	25	+6	
2	0	0	2 是質數	15	31	+6	
3	0	0	3 是質數	16	39	+8	
4	1	+1	4＝2×2	17	39	0	17 是質數
5	1	0	5 是質數	18	48	+9	
6	3	+2		19	48	0	19 是質數
7	3	0	7 是質數	20	58	+10	
8	6	+3		21	67	+9	
9	9	+3		22	77	+10	
10	13	+4		23	77	0	23 是質數
11	13	0	11 是質數	24	91	+14	
12	19	+6		25	100	+9	
13	19	0	13 是質數				

2-2. 有兩組以上候選數組合的乘積數，都是合數。

【猜想】$\le c$ 的合數，一定有兩組以上的候選數組合。

【證明】乘積數 z 若是$\le c$ 合數，用質因數分解，可以表示成：

$z=x\times y\times\ldots$，其中 x、y 皆為質數，且$x\le y\le\cdots$。

$\because x$、y、$\frac{z}{x}$、$\frac{z}{y}$均會$<c$，$\therefore$ K 的候選數組合定有：$(1\times z)$、$\left(x\times\frac{z}{x}\right)$、$\left(y\times\frac{z}{y}\right)$

若 $xy\neq z$，則 z 的候選數組合還會有：$\left(xy\times\frac{z}{xy}\right)$、…

2-3. 新增有重複候選數組合的乘積數，都是合數 c 的倍數。所以只要檢查 c 的倍數中，有哪些乘積數會有幾組重複的候選數組合，即可得知新增幾個要扣除的乘積數了。

2-4.由上述 2-3 可以延伸：因為新增合數 c 的倍數最多有 c 個，但 $c\times c$ 只有 1 組候選數組合，所以新增要扣除的乘積數個數 $\left[\sum_1^K (m_i - 1) - \sum_1^{K-1}(m_i - 1)\right] \le (c-1)$

3.我們試著列出 $c \le 9$時，要扣除的乘積數並作質因數分解，觀察不同候選數組合和質因數分解之間的關係。例如：$4 = 2 \times 2 = 1 \times (2 \times 2)$；$6 = 2 \times 3 = 1 \times (2 \times 3)$。

3-1.從質因數分解，發現 $c \le 9$時，有不同候選數組合的乘積數，最大質因數≤ 3。

【解釋】當$c \le 9$時，如果乘積數的最大質因數$p \ge 5$，無法將其候選數組合之一的 $(1 \times 5) \times \frac{c}{5}$ 換成 $(2 \times 5) \times \frac{c}{2\times5}$ 或 $(3 \times 5) \times \frac{c}{3\times5}$，因為$2 \times 5$ 或 3×5都會超過最大候選數 9。

3-2.由上述 3-1.可延伸【猜想】：有重複候選數組合的乘積數，其最大質因數定$\le \frac{c}{2}$。

【驗證】質因數分解 $c = p_1 \times p_2 \times \dots p_i$，$p_1$、$p_2$均為質數，且$p_1 \le p_2 \dots \le p_i$。

c 的候選數組合有：$1\times c$、$p_1 \times (p_2 \times \dots p_i)$、…。

$\because$ 在候選數組合 $p_1 \times (p_2 \times \dots p_i)$ 中，乘積數的最小質因數 $p_1 \ge 2$，

$\therefore (p_2 \times \dots p_i) \le \frac{c}{2}$ ，有重複候選數組合的乘積數，其最大質因數 $p_i \le \frac{c}{2}$。

4.觀察 c＝10 時，新增有不同候選數組合的乘積數，為$10 \times$(所有 $< \frac{10}{2}$的正整數)。

【猜想】任一最大候選數 c，比最大候選數 $c-1$ 新增有不同候選數組合的乘積數，皆為 $c \times$(所有 $< \frac{c}{2}$的正整數)。

【推論】我們建立了一個算法：

(1)若 c 是質數，與前一個候選數的重複候選數的乘積數數量相差 0。在表 4-1-3 中已經確認此算法無誤。

(2)若 c 是合數，$\left[\sum_1^K (m_i - 1) - \sum_1^{K-1}(m_i - 1)\right]$＝無條件進位到整數 $(\frac{c}{2} - 1)$

利用此算法，計算$c \le 25$時要扣除的重複乘積數數量，再將計算結果與實際要扣除數量（表 4-1-3）有差異的最大候選數 c，列於下頁的表 4-1-4。針對有誤差的計算結果，有些我們有找出造成誤差原因，有些則還無法解釋。

5.觀察下頁表 4-1-4 中，有找出來造成誤差的候選數組合，都是有 2 個以上相同質因數的情形。可能是因為 c 的乘積數（或候選數）質因數分解，較 $c-1$ 增加同一個質因數的次方時，與此新增質因數次方搭配的候選數組合，未曾於最大候選數 $c-1$ 時出現，故不會被列入要扣除的個數，使得實際要扣除的乘積數個數≤計算公式，目前只可由計算公式求得要扣除乘積數個數的近似值。

表 4-1-4 扣除重複乘積數個數的計算公式誤差彙整表

最大候選數 c	無條件進位到整數$(\frac{c}{2}-1)$算出的重複乘積數數量(d)	實際的重複乘積數數量(p)	計算公式誤差$(d-p)$，與造成誤差的原因
9	10	9	1，多扣的 27(3x9)在$c \le 8$時還未出現
12	18	19	-1，少扣的 72(12x6)在 8x9 已出現
15	32	31	1，多扣的 75(5x15)在$c \le 14$時還未出現
16	38	39	-1
18	47	48	-1
20	56	58	-2
21	66	67	-1
24	87	91	-4
25	99	100	-1

6.結論：對於「任一最大候選數 c，共要扣除多少組重複的乘積數」，雖然我們尚未找出可以得出正確數值的計算公式，但是可以確定：

(1)當 c 為質數時，比最大候選數$c-1$新增加的乘積數個數有 c 個，且都是 c 的倍數，沒有重複的乘積數，新增要扣除的重複乘積數個數＝0。

(2)當 c 為合數時：

①具有不同候選數組合的乘積數，皆 $\in \left\{c \times (\text{所有} < \frac{c}{2} \text{的正整數})\right\}$。

②新增要扣除的重複乘積數個數 $\doteqdot$ 無條件進位到整數$(\frac{c}{2}-1)$

研究一-4：賓果條件設定對遊戲設計的影響

(一)棋盤大小及連線個數和賓果組合數量的關係

1.棋盤不同位置的賓果組合與總數量

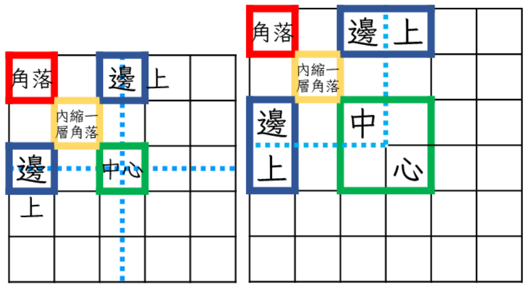


圖 4-1-4 棋盤位置名稱對照圖(自行繪製)

【命題】從 nxn 棋盤找 m 數連成賓果$(m \le n)$，各位置的賓果組合加總為 k，棋盤的賓果組合總數為 s。

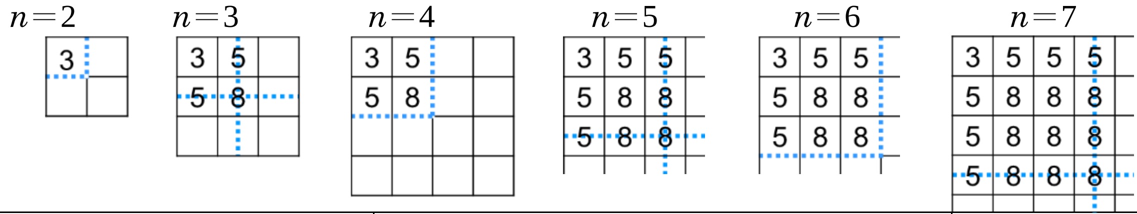
則 k、s 和 m、n 有何關係？

【解題過程】

1.計算不同位置的賓果組合數量時，我們發現可將棋盤位置分成上下左右 4 個區塊，每個區塊的賓果組合數量，呈現**對稱分布**。因此我們僅只要分析左上角各位置（位置名稱如圖 4-1-4 所示）的賓果組合數量，就可以推算出所有位置的賓果組合數量 k。

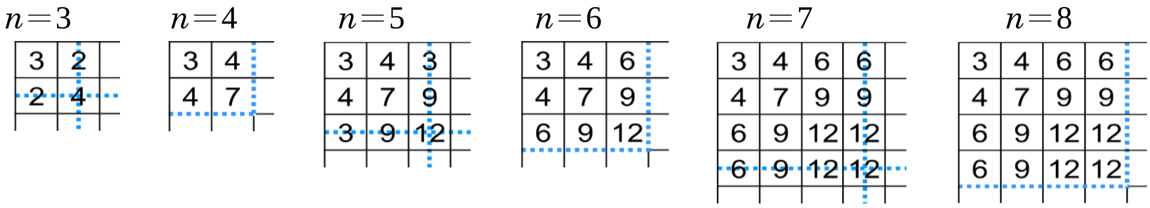
2.改變連線數字 m，對應不同棋盤大小（邊長 n），列出左上角各位置的賓果組合數量。

$m=2$（2 連）



中心：$n>2$時，皆為 8。	邊上：皆為 5。	角落：皆為 3。

$m=3$（3 連）



中心：$n>4$時，皆為 12。	邊上：$n\geq 6$（$n-m>2$）時，皆 6。	角落：皆為 3。

3.依照n的奇偶性，觀察不同位置的賓果組合數量變化規律性。

$n\equiv 1 \pmod 2$	3		5				7						9							
m	2	3	2	3	4	5	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	8	9
中心	8	4	8	12	8	4	8	12	16	12	8	4	8	12	16	20	16	12	8	4
邊上	5	2	5	3	3	2	5	6	7	4	3	2	5	6	7	8	5	4	3	2
內縮一層角落	8	4	8	7	6	3	8	7	6	6	6	3	8	7	6	6	6	6	6	3

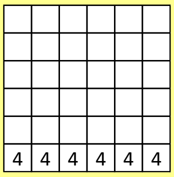
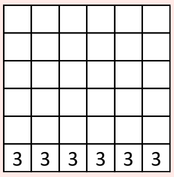
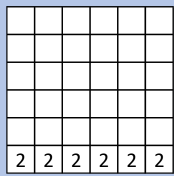
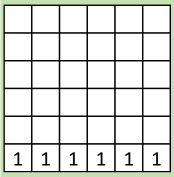
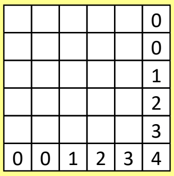
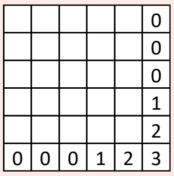
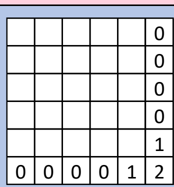
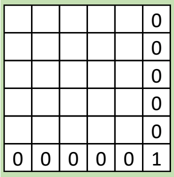
	中心	邊上	角落
不同位置的賓果組合數量k的規律性	(1)$m=\frac{n+1}{2}$ 時，⇒ $m\times 4$ (2)$m=n-1$ 時，⇒皆為 8 $=2\times 4=(m-n+1)\times 4$ (3)$m=n$ 時，⇒皆為 4 $=(m-n+1)\times 4$	(1)$m=\frac{n+1}{2}$ 時，⇒ $m+3$ (2)$m=n-1$⇒當 $n>3$ 時，皆為 $3=2+1=2+(m-n)$ (3)$m=n$ 時，⇒皆為 2 $=2+(m-n)$	皆為 3。 內縮一層角落： $m=2$，皆為 8； $m=3$，皆 7($n=3$ 為 4) $m>3$ 且 $m\neq n$，皆 6 $m=n$，皆為 3。
不同位置的賓果組合數量總和k的計算公式	(1) $m<\frac{n}{2}$ ⇒ $m\times 4$ (2) $m>\frac{n}{2}$ ⇒ $(m-n+1)\times 4$	(1) $m<\frac{n}{2}$ ⇒ $m+3$ (2) $m>\frac{n}{2}$ ⇒ $2+(m-n)$	

$n\equiv 0 \pmod 2$	2	4			6					8						
m	2	2	3	4	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	7	8
中心	3	8	7	3	8	12	11	7	3	8	12	16	15	11	7	3
邊上	3	5	4	2	5	6	5	3	2	5	6	7	6	4	3	2
內縮一層角落	3	8	7	3	8	7	6	6	3	8	7	6	6	6	6	3

	中心	邊上	角落
不同位置的賓果組合數量總和k規律性	(1)$m=\frac{n}{2}$ 時，⇒ $m\times 4$ (2)$m=n-1$ 時，⇒皆為 7 $=2\times 4-1=(m-n+1)\times 4-1$ (3)$m=n$ 時，⇒皆為 3 $=4-1=(m-n+1)\times 4-1$	(1)$m=\frac{n}{2}$ 時，⇒ $m+3$ (2)$m=n-1$⇒當 $n>3$ 時，皆為 $3=2+1=2+(m-n)$ (3)$m=n$ 時，⇒皆為 2 $=2+(m-n)$	皆為 3。 內縮一層角落： $m=2$，皆為 8； $m=3$，皆為 7； $m>3$ 且 $m\neq n$，皆 6 $m=n$，皆為 3。
不同位置的賓果組合數量總和k的計算公式	(1) $m\leq\frac{n}{2}$ ⇒ $m\times 4$ (2) $m>\frac{n}{2}$ ⇒ $(m-n+1)\times 4-1$	(1) $m\leq\frac{n}{2}$ ⇒ $m+3$ (2) $m>\frac{n}{2}$ ⇒ $2+(m-n)$	

4. 探究改變連線格數 m，對應不同邊長 n 的賓果組合總數。

以 $n=6$ 棋盤為例，列出不同方向的賓果組合數量，因賓果組合具對稱性，賓果組合數量：橫向＝直向；左斜＝右斜。所以只要分別列出直向、左斜兩個方向的賓果組合數量，相加×2，便可推算出棋盤上所有位置的賓果組合數量總和 k。因為每一個賓果組合都有 m 個數，所以賓果組合總數$s=\frac{k}{m}$。

m	3	4	5	6
橫／直的賓果組合數量				
數量小計	$4\times6\times2=48$	$3\times6\times2=36$	$2\times6\times2=24$	$1\times6\times2=12$
規律性	$(n-m+1)\times n\times2$……………………公式 A			
斜的賓果組合數量				
數量小記	$(\frac{(1+4)\times4}{2}\times2-4)\times2=32$	$(\frac{(1+3)\times3}{2}\times2-3)\times2=18$	$(\frac{(1+2)\times2}{2}\times2-2)\times2=8$	$1\times2=2$
規律性	$[(1+(n-m+1)\times(n-m+1))-(n-m+1)]\times2$ $=(n-m+1)\times(n-m+1)\times2$………………公式 B			
賓果組合總數 s	80	54	32	14

5.整理賓果組合總數 s 的計算公式：公式 A＋公式 B

$$=(n-m+1)\times n\times2+(n-m+1)\times(n-m+1)\times2$$

$$=(2n-m+1)\times(n-m+1)\times2$$

6.套用上面我們找到的所有位置賓果組合數量總和 k、賓果組合總數 s 的計算公式，計算 $n=1\sim9$ 的所有m連賓果條件，所對應到的 k 和 s，見表 4-1-5。

表 4-1-5 棋盤的邊長 n 與 m 連賓果條件的賓果組合數量對照表

(k：所有位置的賓果組合數量總和；s 棋盤的賓果組合總數；紅字是 s 較適合對戰的組合)

n	2	3		4			5				6				
m	2	2	3	2	3	4	2	3	4	5	2	3	4	5	6
k	12	40	24	84	72	40	144	144	112	60	220	240	516	160	84
s	6	20	8	42	24	10	72	48	28	12	110	80	54	32	14

n	7						8							9							
m	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	8	2	3	4	5	6	7	8	9
k	312	360	352	300	216	112	420	504	520	480	396	280	144	544	672	720	700	624	504	352	180
s	156	120	88	60	36	16	210	168	130	96	66	40	18	272	224	180	140	104	72	44	20

(二)遊戲規則訂為幾連賓果較為合適？

從我們在≤6 不同大小棋盤對戰的經驗累積，發現若是 $m \leq \frac{n}{2}$，後手很難阻擋先手的連線，先手很容易搶先連線成功、明顯較占優勢。如果是 $m=n-1$ 或 $m=n$，又很容易互相阻擋、不易分出勝負。所以適合遊戲的賓果 m 連條件，m 要 $> \frac{n}{2}$ 且不可過於接近 n。

參考我們實戰測試過的 $n=5$ 和 6，合適的連線數 m 值，賓果組合總數都接近 50。我們認為：賓果組合總數如果太多，可能要玩很久才能確定排除是否雙方都無法賓果獲勝，很難分出勝負；或是太容易取得其中一組賓果，而讓先手較有機會搶先獲勝。賓果組合數過少，很容易就互相阻擋，不易有勝方出現。所以，我們建議合適的 m 連賓果條件，就如表 4-1-5 的紅字所示。

(三)棋盤各位置的可賓果乘積數個數

棋盤上不同位置上的乘積數，可賓果的乘積數，是位於特定位置的乘積數。且各位置的賓果組合，因為是正方形棋盤，其分布具有下列的對稱性：上下、左右、斜對角、及旋轉 90°、180°、270°。所以我們只要找出左上角$\frac{1}{4}$區塊位置的可賓果乘積數個數，就可以推算得出棋盤各位置的乘積數個數了。結果如圖 4-1-5 所示。

A1 9	B1 10	C1 11	D1 11	E1 10	F1 9
A2 10	B2 12	C2 16	D2 16	E2 12	F2 10
A3 11	B3 16	C3 19	D3 19	E3 16	F3 11
A4 11	B4 16	C4 19	D4 19	E4 16	F4 11
A5 10	B5 12	C5 16	D5 16	E5 12	F5 10
A6 9	B6 10	C6 11	D6 11	E6 10	F6 9

圖 4-1-5 各位置的可賓果乘積數個數(自行繪製)

研究二-1、探究 3×3 的棋盤組合與優勢方

1. 在表 4-1-2 中，候選數 1～4、乘積數有 9 個，恰可組成 3×3 棋盤。由小到大排列，可得到圖 4-2-1 的棋盤。
2. 以此棋盤對戰，得到如表 4-2-1 幾種可能結果。
3. 發現：

1	4	9
2	6	12
3	8	16

1 2 3 4

圖 4-2-1 3x3 棋盤(自行繪製)

表 4-2-1 3×3 棋盤對戰過程紀錄彙整表

局數	先	後	先	後	先	後	先	後	先	結果
1	6	2	1	3	9	12	16			先勝
2	6	3	1	4	16					先勝
3	6	3	1	2	4	8	16			先勝
4	6	4	8	2	1	3	9	12	16	先勝
5	6	4	8	12	16					和局
6	6	4	8	16	12	9	3	1		後勝
7	6	8	16	4	1					先勝
8	6	8	16	12	9	3	1			先勝
9	6	9	12	16	8	2	4			先勝
10	6	9	12	16	8	4	2			先勝
11	6	12	9	3	1	2	4	8	16	先勝

3-1. 3×3 棋盤對戰，先手搶占棋盤中心賓果組合數最多的 6 會較占優勢。所以 3×3 棋盤是先手較占優勢的不公平遊戲。

3-2.在表 4-2-1 中後手獲勝或和局的情形，只發生在後手第 1 步下 4 時，先手只能取候選數有 4 的乘積數，後手繼續選擇候選數有 4 的乘積數，便能提高獲勝機會。由此可見：取得由相同候選數組成的平方數，可以限制對手下一步的行動。

3-3.雖然 9 也是平方數，但棋盤上候選數 3 的乘積數不多，後手無法重複取候選數有 3 的乘積數而失敗。

研究二-2、探究 5×5 的棋盤組合與優勢方

1. 候選數 1～7、乘積數有 25 個，恰可組成 5×5 棋盤。

   由小到大排列，可得圖 4-2-2 的棋盤。

2. 經我們多次對戰發現：5×5 棋盤仍是先手較占優勢。

3. 我們還發現 4 的倍數分布多有在棋盤中間位置，是賓果組合較多的位置（如圖 4-2-3 所示）。若能選擇候選數有 4 的乘積數，會提高連線機會。

1	6 (8) 6x6	12 (9) 6x2	20	30 (12) 5x6
2	7 (4) 7x1	14 (3) 2x7	21	35 (11) 5x7
3	8 (2) 4x2	15 (13) 5x3	24 (6) 6x4	36 (7) 6x6
4	9	16 (1) 4x4	25	42 (5) 7x6
5	10 (10) 2x5	18	28	49

1 2 3 4 5 6 7

圖 4-2-2 5×5 棋盤棋局示例 (自行繪製)

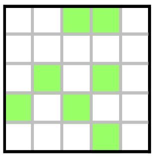


圖 4-2-3 5×5 棋盤上 4 的倍數分布 (自行繪製)

研究三-1、從候選數組合探討對戰策略

從我們多次在 6×6 棋盤上對戰累積的實戰經驗中，發現先手第 1 步先取得乘積數 25（我們稱為 25 策略），會大幅提高勝率。但是為何會如此？以及後手要如何應戰？我們便嘗試從不同面向進行分析，以便挖掘出雙方均可使用的對戰策略，並解釋為何此策略可行。

(一) 從候選數組合來探討對戰策略

1-1.平方數的分類

候選數 1～9 的乘積數中，有 9 個平方數，可分為「單候選數」和「複候選數」：

(1)「單候選數」的平方數：只有 1 個候選數，有 1、25、49、64、81 等 5 個乘積數。

(2)「複候選數」的平方數：具有 2 個以上候選數，有 4、9、16、36 等 4 個乘積數。

1-2.平方數在對戰策略上的應用

(1)選擇「單候選數」的平方數：

① 如果選擇下「單候選數」的平方數，不利於阻擋對手連線。因為只能封鎖住一個候選數的倍數，大大縮減了能選擇的乘積數數量，對阻擋對方的連線效益不大。

② 若「單候選數」的平方數，其在棋盤上的位置，周圍有許多與此平方數有公因數的乘積數，則有利於突破對方的封鎖。例如：16 周圍有 8、28（公因數 4），則對手無法破壞己方其中一條路線，就有機會突破對方的封鎖，而成功延伸出賓果連線。

(2)可選擇以平方數作為對戰策略的起始點：由於平方數可限制對手下一輪只能下某數的倍數，更好預測對手下一步的走法及應對，使該策略容易進攻且容易防守。如： 25 策略易使己方獲勝，究其原因，就是在其周圍有 2 個平方數（16、36）和 1 個立方數（27）與之相鄰、且形成賓果的連線，很適合己方發展連線，而不易被對方阻擋。

2-1.候選數的分類

將最大候選數 9 的所有乘積數，依據候選數個數分類成表 4-3-1 中的幾種類型：

表 4-3-1　最大候選數 9 的所有乘積數分類表

類型	候選數個數(個)	乘積數	乘積數個數(個)
少候選數	1	1、25、49、64、81（都是單候選數的平方數）	5
	2	2、3、5、7、10、14、15、20、21、27、28、30、32、35、40、42、45、48、54、56、63、72	22
多候選數	3	4、9、16、36（都是複候選數的平方數）	4
	4	6(1×6、2×3)、8(1×8、2×4)、12(2×6、3×4)、18(2×9、3×6)、24(3×8、4×6)	5

2-2.候選數分類在對戰策略上的應用

(1) 在對戰時，取得「多候選數」的乘積數，易提高獲勝機會。因為「多候選數」的乘積數，後續可變化的乘積數有較多樣的選擇性，但對方只能擇一阻擋，故在想取得可連線的乘積數進攻時，較不易被對方封鎖。

(2) 選擇了「多候選數」的乘積數，對手進攻方式會變得單一，因為要避免己方連線，會有許多乘積數不能下，故有利於己方的防守。

以圖 4-3-1 為例：若玩家 A「聽」時只缺上面列出的「多候選數」的乘積數中的 4，且對手玩家 B 下一步不可能取得 4 時，為了不讓玩家 A 取得 4，便要避開「使用到」1、2、4 這 3 個候選數的乘積數（圖 4-3-1 中的藍色數字）。對手只能選擇下剩餘**黑色**的候選數，便大幅縮小了能下的乘積數範圍。

1	7	15	25	36	54
2	8	16	27	40	56
3	9	18	28	42	63
4	10	20	30	45	64
5	12	21	32	48	72
6	14	24	35	49	81

1 2 3 4 5 6 7 8 9

圖 4-3-1 避開多因數乘積數 4 的可選數(**黑色**)(自行繪製)

研究三-2、從可連跳的乘積數探討對戰策略

1.可連跳乘積數的相關性質分析

我們將各乘積數的可連跳乘積數相關性質，包含：候選數組合、可連跳乘積數、可連跳乘積數個數、可連跳「且可賓果／或不可賓果」的乘積數及個數等資料，利用 EXCEL 來進行分析。因篇幅有限，僅列舉部分乘積數的資料於表 4-3-2，示例分析內容。完整分析內容詳見附錄 1。

表 4-3-2 可連跳乘積數的相關性質分析表示例

乘積數	候選數組合	A.候選數個數	B.可連跳的乘積數(有公因數) 紅色是可連跳且可賓果	C.可連跳的乘積數個數	D.可連跳且可賓果的乘積數個數	E.可連跳但無法賓果的乘積數個數
1	1×1	1	**2** **3** **4** 5 6 **7** **8** 9	8	5	3
2	1×2	2	**1** **3** **4** **5** 6 7 **8** **9** ~~4~~ ~~6~~ ~~8~~ 10 12 14 **16** 18	13	7	6
81	9×9	1	9 **18** 27 36 45 54 **63** **72**	8	3	5

將分析資料中「可連跳且可賓果的乘積數個數」(參見上頁表 4-3-2 中的 D 欄，對己方有害、對手下一步有阻擋的可能性)，以及表 4-3-2 中的「可連跳但不可賓果的乘積數個數」(參見表 4-3-2 中的 E 欄，對己方無害、對手下一步不會妨礙己方在此數賓果的可能性)，整理到棋盤上（見圖 4-3-2），以便觀察各乘積數可連跳變化的特性，和棋盤位置間的關係。

1 5：3	7 4：12	15 4：12	25 2：6	36 4：12 $_{4\times9}$ 3：5 $_{6\times6}$	54 2：12
2 7：6	8 7：9 $_{1\times8}$ 5：8 $_{2\times4}$	16 7：8 $_{2\times8}$ 4：4 $_{4\times4}$	27 3：11	40 6：10	56 7：9
3 8：6	9 6：10 $_{1\times9}$ 3：5 $_{3\times3}$	18 8：8 $_{2\times9}$ 10：3 $_{3\times6}$	28 8：8	42 10：6	63 8：8
4 8：7 $_{1\times4}$ 4：4 $_{2\times2}$	10 10：6	20 11：5	30 8：8	45 7：9	64 2：6
5 5：11	12 5：9 $_{2\times6}$ 7：8 $_{3\times4}$	21 8：8	32 6：7	48 8：7	72 8：8
6 5：11 $_{1\times6}$ 5：9 $_{2\times3}$	14 7：9	24 4：12 $_{3\times8}$ 4：10 $_{4\times6}$	35 6：10	49 3：5	81 3：5

圖 4-3-2 各乘積數可連跳的相關性質對照圖(自行繪製)
（可連跳且賓果的乘積數個數：可連跳但不可賓果的乘積數個數）

在圖 4-3-2 中，灰色區塊標示的 25、54 和 64，是「D.可連跳且可賓果的乘積數個數－對己方有害」最少的 3 個乘積數。其中這 3 個乘積數周圍可與之賓果的乘積數（賓果組合成員）的 D 值，25 明顯比 54 和 64 兩數的賓果組合成員的 D 值較低。此項發現，可解釋我們發現 25 策略較占優勢的理由之一。

所以在對戰時，可優先選擇「可連跳且可賓果的乘積數個數」較少的乘積數。

2.可連跳乘積數個數的計算公式

當最大候選數為 c，乘積數 $z = a \times b$ 的可連跳乘積數，是：

a 的 1～c 倍少了 b 倍、b 的 1～c 倍少了 a 倍，所以可連跳乘積數的個數$\leq 2c-2$。

在這$2c-2$個乘積數裡，可能會有一些相同的乘積數。

【問題】乘積數 $z = a \times b$ 的$2c-2$個可連跳乘積數中，哪些會重複？共要刪去多少個？

【求解】

任一乘積數$z = a \times b$，且$a \leq b$

若$[a,b] = c$，

從圖 4-3-3 可以發現：

重複的乘積數會出現

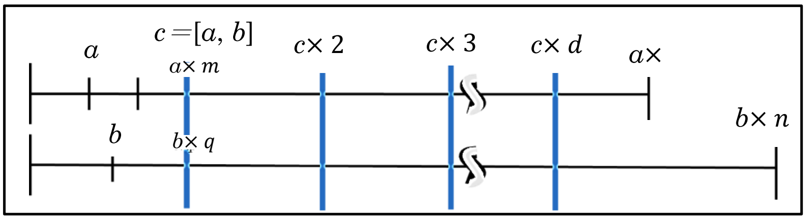


圖 4-3-3 可連跳乘積數重複個數數線圖(自行製圖)

在 $a\times c$ 之間，且個數＝無條件捨去到整數$\left(\frac{a\times c}{c}\right)$。

∴ 要刪去的重複乘積數個數＝無條件捨去到整數$\left(\frac{a\times c}{c}\right)-1$

得出：任一乘積數 $z = a \times b$的可連跳乘積數為：無條件捨去到整數$\left(\frac{a\times c}{[a,b]}\right)-1$

【驗算】

令 $c=25$，$a=12$，$b=16$，[12,16]=48，48÷12=4，25÷4=6…1，6－1=5。有 5 個重複。

將 $a\times b=192$ 的所有可連跳乘積數，列於表 4-3-3，確實有 5 個重複，公式成立！

表 4-3-3 乘積數 192 的可連跳乘積數（最大候選數是 25）

192	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	204	216	228	240	252	264	276	288	300
12×16	16	32	~~48~~	64	80	~~96~~	112	128	~~144~~	160	176	208	224	~~240~~	256	272	~~288~~	304	320	336	352	368	384	400

【特例】

(1) 若 $a=b$，公式仍適用，可連跳乘積數個數＝要刪去的乘積數的個數＝$c-1$

(2) 若$[a,b]=a\times b$（a、b 互質），且$b>\frac{c}{2}$，則可連跳乘積數有 $2c-2$ 個，無重複。

3.可連跳乘積數的個數在對戰策略的應用

3-1.當候選數組合是互質的兩數時，可連跳乘積數最多，有 $2n-2$ 個。選擇此種乘積數的優勢是：有許多可以向外發展的可能性，但是對手下一步只能從眾多可選擇的可能性中擇 1，故不易被對手猜到自己的計謀，或掌控、阻礙到自己想要發展連線的動向。

3-2.單候選數的平方數、立方數…等，可連跳乘積數最少。例如：由單候選數 p 的次方所組成的乘積數，不管對手下一步如何選擇，都會保留 1 個 p（候選數組合裡都有 p），容易限制對手下一步的動態。所以若想取得某個候選數的倍數來連線（進攻），可利用此類的單候選數乘積數，不管對手如何下，己方都可移回此候選數。

研究三-3、從乘積數的賓果組合來探討對戰策略

1.探討全部的賓果組合

將棋盤上可連成賓果的 4 個乘積數組合，彙整成表 4-3-4，共有 54 種組合。

2.賓果組合相關性質分析

我們將各乘積數可能會影響獲勝機會的性質，包含：棋盤位置、有幾組賓果組合、可賓果的乘積數、可賓果且可連跳乘積數、可賓果但不可連跳乘積數……資料，利用 EXCEL 來進行分析，以便做為後續分析對戰策略的研究資料。因篇幅有限，僅列舉部分乘積數的資料於下頁表 4-3-5，示例分析內容，完整分析內容詳見附錄 2。

表 4-3-4 乘積數的賓果組合彙整表

1、2、3、4	8、9、10、12	18、20、21、24
1、7、15、25	8、16、27、40	18、28、42、63
1、8、18、30	8、18、30、48	18、30、48、81
2、3、4、5	9、10、12、14	20、30、45、64
2、8、16、27	9、18、28、42	20、28、40、54
2、9、20、32	9、20、32、49	21、32、48、72
3、4、5、6	10、20、30、45	21、30、42、56
3、9、18、28	10、18、27、36	24、32、45、63
3、10、21、35	12、21、32、48	24、35、49、81
4、9、16、25	12、20、28、40	25、27、28、30
4、10、20、30	14、24、35、49	27、28、30、32
5、12、21、32	14、21、30、42	28、30、32、35
5、10、18、27	15、16、18、20	36、40、42、45
6、14、24、35	15、25、36、54	40、42、45、48
6、12、20、28	15、27、42、64	42、45、48、49
7、8、9、10	16、18、20、21	54、56、63、64
7、15、25、36	16、27、40、56	56、63、64、72
7、16、28、45	16、28、45、72	63、64、72、81

因為可賓果的乘積數個數（表 4-3-5 的 G 欄）中，若可連跳（表 4-3-5 中的 H 欄），就有機會被對手阻擋，而可賓果但不可連跳的乘積數（表 4-3-5 的 I 欄），對手無法在下一步直接阻擋。所以我們將「可賓果但不可連跳的乘積數個數 I」減去「可賓果且可連跳的乘積數個數 H（可被阻擋）」，再除以全部的「可賓果的乘積數個數 G」，當成此乘積數的「賓果係數」。**「賓果係數」愈高，代表愈不容易被對手阻擋、可得到賓果的機會愈大。**

表 4-3-5 棋盤各位置的乘積數賓果組合相關性質分析表示例

位置	賓果組合(橫+直+斜)	F.賓果組合個數	G.可賓果的乘積數個數	乘積數	候選數組合	H.可賓果且可連跳的乘積數個數	I.可賓果但不可連跳的乘積數個數	賓果係數 $\frac{I-H}{G}$
A1	1+1+1	3	9	1	1×1	5	4	-0.11
A2	1+2+1	4	10	2	1×2	7	3	-0.40
A3	1+3+1	5	11	3	1×3	8	3	-0.45
A4	1+3+1	5	11	4	1×4	8	3	-0.45
					2×2	4	7	0.27
A5	1+2+1	4	10	5	1×5	5	5	0.00
F5	1+2+1	4	10	72	8×9	8	2	-0.60
F6	1+1+1	3	9	81	9×9	3	6	0.33

將分析計算出來的賓果係數，整理到棋盤上（見圖 4-3-4），可以發現：

(1)賓果係數最高為 0.64，乘積數是 25 和 64 兩數，恰巧都是平方數。這和我們在研究二-2、(一)、1-2 中的發現一致：**平方數適合作為一個對戰策略的起始點**。

(2)從研究一-4 已知賓果組合個數，在棋盤上位置有對稱性。愈靠近棋盤中央位置的乘積數，賓果組合個數愈多，理論上獲勝機會愈大。但是還要考慮被對手在下一步阻礙取得賓果獲勝的機會。所以**賓果係數的分布並非中央位置最高**。

1 -0.11	7 0.20	15 0.27	25 0.64	36 0.20 4×9 0.40 6×6	54 0.56
2 -0.40	8 -0.17 1×8 0.17 2×4	16 0.13 2×8 0.50 4×4	27 0.63	40 0.00	56 -0.40
3 -0.45	9 0.25 1×9 0.63 3×3	18 0.16 2×9 -0.05 3×6	28 0.16	42 -0.25	63 -0.45
4 -0.45 1×4 0.27 2×2	10 -0.25	20 -0.16	30 0.16	45 0.13	64 0.64
5 0.00	12 0.17 2×6 -0.17 3×4	21 0.00	32 0.25	48 -0.33	72 -0.60
6 -0.11 1×6 -0.33 2×3	14 -0.40	24 0.27 3×8 0.27 4×6	35 -0.09	49 0.40	81 0.33

圖 4-3-4 各乘積數賓果係數與位置對照圖(自行繪製)

(2)賓果係數最高的乘積數 25，可與其賓果連線的乘積數，賓果係數明顯比其他乘積數更多為非負數的情形。而另一個賓果係數最高的乘積數 64，其可賓果的乘積數就比較 25 有較多的負數。所以，**25 策略為何是較容易獲勝的策略，可從賓果係數較高來作解釋**。

研究三-4、探究各乘積數下一步對戰最佳選擇

(一)貼子策略

從後手防守的觀點，要制止對手的進攻，我們覺得最有效的阻擋，應該是下在對手的棋子附近，緊挨著對手的棋，所以稱之為「貼子策略」。

在不考慮數字排列及能否取到目標數，只考慮棋盤位置的話，經我們的分析（如圖 4-3-5），發現幾乎都是先手會贏；只有後手第 1 步下在先手位置斜角上，才可能和局。所以貼子策略並無法有效阻擋先手的進攻。如果再加上乘法賓果取數的限制，更是不一定能取得目標位置的乘積數。所以我們後續就針對每個乘積數，探討圍繞其周圍可優先選擇哪些數，較占阻擋優勢。

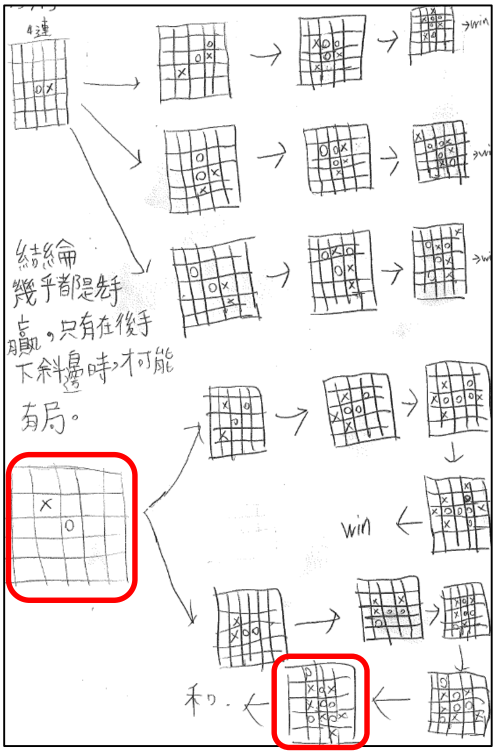


圖 4-3-5 貼子策略分析圖(自行繪製)

(二)九宮格最佳化應對分析

由於以每個乘積數為中心的九宮格區域中的數，對於連線及阻擋的影響最直接，所以我們將每個乘積數都進行九宮格最佳化應對分析。

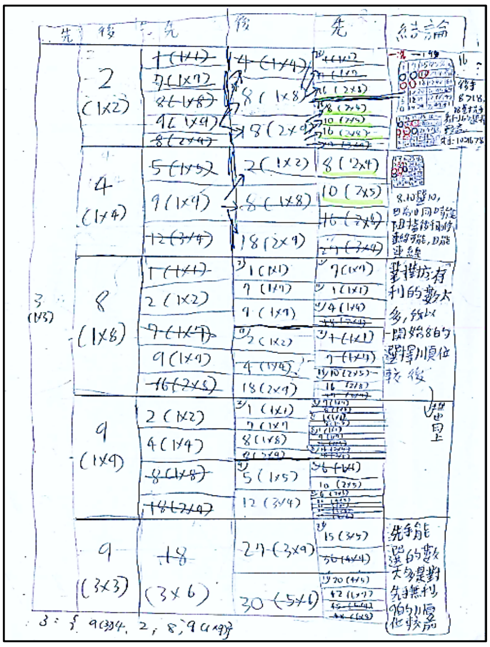


圖 4-3-6　3 的九宮格分析圖(自行繪製)

1. 分析步驟：如圖 4-3-6 所示例，每個乘積數都以它為九宮格中心，列出另外 8 個乘積數有哪些是下一步可以連跳的乘積數。從後手應對的觀點來一一分析，若是下一步選擇其中一數，後續會有哪些可能性。往下分析 4 步，評估後手選擇哪個數較占優勢。
2. 整理各乘積數的應對選數優先順序，列出所有乘積數的應對優先順序對照表（如表 4-3-6 所示）。
3. 實際對戰：應用此最佳選數對照表來選擇要下的數。當無法從對照表中選數時，才從經驗判斷要如何調整、選擇合適的乘積數，並記錄下為何無法應用此對照表選數，或是其它發現。下頁表 4-3-7 是一局對戰過程示例，紅字是依據九宮格選數優先順序表選數但九宮格已經無數可選，或選了顯然是不合理的數。

表 4-3-6 最佳應對優先順序對照表示例

乘積數	下一步應對的優先排序
1(1×1)	8(1×8)、2(1×2)、7(1×7)
2(1×2)	8(2×4)、8(1×8)、9(1×9)、7(1×7)、3(1×3)、1(1×1)
3(1×3)	9(3×3)、9(1×9)、8(1×8)、2(1×2)、4(1×4)
4(1×4)	12(3×4)、9(1×9)、5(1×5)、3(1×3)
5(1×5)	4(1×4)、10(2×5)、6(1×6)
6(1×6)	5(1×5)、12(2×6)

4.從實戰測試發現：使用此法來應對時，棋面上常出現散落的兩棋連線，而不去阻擋對方連線的狀況。九宮格裡的數，在下過幾顆棋之後，就會剩下一些下了對自己並沒幫助的數，或是不存在可連跳的數，只好選擇超出九宮格範圍的可連跳乘積數。此時我們便會去考慮：在可連跳乘積數中，選擇哪些候選數組合的乘積數，會較有利。也就是考慮候選數的倍數分布。

表 4-3-7 以最佳應對選數的對戰過程示例

先手	28	30	27	35	7	9	1	5	45	10/40/12/24
後手	20	18	21	49	2	3	6	25	15	獲勝

5.結論：九宮格裡選擇最佳應對數字的策略，並不實用！反而是考慮候選數的倍數分布，是較有利的應對策略。

(三)倍數位置分布與疊加

將候選數 1～9 的倍數在棋盤上的分布位置，分別標示出來（見圖 4-3-7）。棋盤中央藍色方框部分是賓果組合數量最多的乘積數。

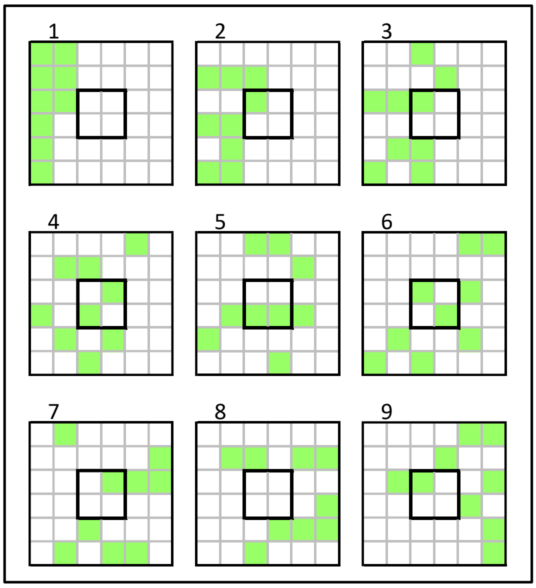


圖 4-3-7 各候選數倍數分布圖(自行繪製)

因為在同一橫、直或斜排的 6 個格子內，所有的賓果組合都一定會包含位於中間的兩數。所以位於棋盤中央區域的 4 個乘積數，對取得賓果連線具有重要的影響力。只要能掌握位於棋盤中央區域的乘積數，不僅能大幅提升連線的機率，也能阻擋掉對手多條連線機會。

觀察圖 4-3-7 可以發現：

1. 候選數 4、5、6 都有兩個倍數是位於中心方框區域，其中候選數 5 剛好是單候選數平方數 25 的候選數，這也是 25 策略的另一個優勢。
2. 單獨看候選數 5 的倍數分布圖，可以看到在第 4 橫列的中間段，連續排列成賓果的情形。這些位置也是棋盤上賓果組合數較多的位置。若是使用 25 策略，可確保必能取得在這一個賓果組合中的乘積數，而阻擋對方在此 4 個位置上賓果連線機會，達到防守的效果。而且自己若能盡量多取得位於此橫列上的乘積數，也能提高賓果連線機會。所以從 5 的倍數分布圖，可以解釋為何 25 策略是優勢策略。
3. 將候選數 6 和 7 的倍數分布圖重疊，結果見圖 4-3-8。發現有 3 數均位於中心方框，由此可以看出若是取得乘積數 42 策略，向外發展時容易取得中央區域、對賓果連線有重要影響力的關鍵位置。從我們的實戰經驗，也發現 42 策略容易向外發展連線，是對戰時可以考慮使用的優勢策略之一。

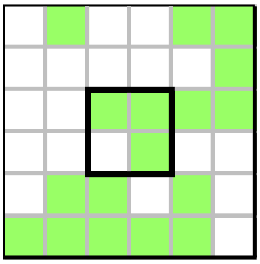


圖 4-3-8 6、7 倍數重疊圖(自行繪製)

研究三-5、探究獲致和局的最少步數與策略

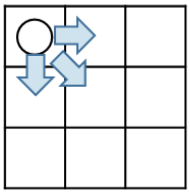
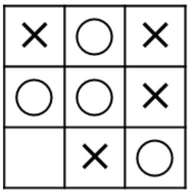
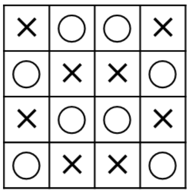
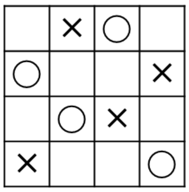
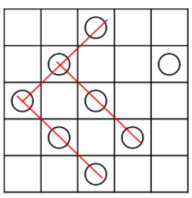
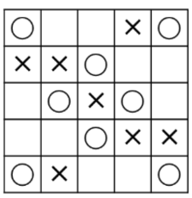
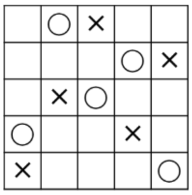
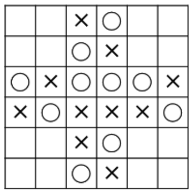
我們假設雙方實力相當、且棋盤的數字排列是公平的，最可能出現的對戰結果便是和局。所以我們有了一個提問：在不考慮數字排列的情形下，雙方搶占哪些位置，就能成功阻擋對方的連線？也就是「在一棋盤中，最少步和局的形成方式？」

我們發現在『棋盤上的奇蹟-奇「雞」連連』這篇科展報告，有探討在不同大小棋盤上井字遊戲，獲致和局的最少步數。但是他們探討的連線是在邊長 n 的棋盤上 n 連直線、且阻擋的同時也想讓己方連線的情形，而我們想要探討的問題是找出邊長 n 棋盤 m 連的最少和局步數，以及 $m-1$ 連和 $m-2$ 連的最少和局步數。

1.目的：找出利於後手防守的位置，以破解先手優勢，至少和局。

2.解題過程：先模擬先手選擇位置下棋，為求占最少位置、且能確保橫、直、斜的組合皆有占到，所以分布錯開所占位置。在透過以固定的方式仿製先手的占位，例如：將先手下的棋旋轉 90 度、鏡像等方式，來找出後手可下位置。

3.探究 $n×n$ 棋盤和 m 數連線賓果：改變 n、m，觀察規律性。(○：先手、╳：後手)

$n=3$，$m=2$ 	先手不管下任一位置，至少都有 3 個選擇，後手一次只能擋 1 條，先手必勝。	$n=3$，$m=3$ 	最快 8 步和局，因為若先手下的棋錯開，且橫、直、斜皆有防到，會形成連線。所以一定會有一排重複放棋。
$n=4$，$m=3$ 	最少 16 步和局，因為下棋時若盡量錯開，會有連線，且中間排只能放 4 組先手的棋，否則也有連線，加上四周也要放 4 顆棋。後手同理。	$n=4$，$m=4$ 	最少 8 步和局，因為就算棋子錯開，不會有連線，所以先手 4 步，後手也 4 步。
$n=5$，$m=3$ 	先手必勝，因為要阻擋對手連線的話，至少要有 2 行放 2 棋以上，且若占了那些格子，會連線。	$n=5$，$m=4$ 	最少 15 步和局，後手下中間那 3 格可以阻斷後先手中間橫、直的所有連線，而外圍 4 顆棋可以同時阻擋兩條對角線旁邊的斜線共 4 條，以及外圍的連線。
$n=5$，$m=5$ 	最少 10 步和局，後手把 5 步棋均勻分散包含對角線，使先手沒有賓果機會。	$n=6$，$m=4$ 	最快 20 步和局，且先後手下棋分布皆在中間的橫、直排，阻擋斜邊的方法皆相同。

$n=6$，$m=5$

		×	○		
		○	×		
○	×	○	○	○	×
×	○	×	×	×	○
		×	○		
		○	×		

最少 16 步和局，由於後手需要至少 8 步來阻斷先手賓果，先手也要 8 步，共 16 步。

$n=6$，$m=6$

	×		○		
		×		○	
		○	×		
	○				×
○				×	
×					○

最少 12 步和局，因為把先、後手的棋不重疊的分布，先手 6 步，後手也 6 步共 12 步。

4.發現：

(1)在 $n>3$ 的棋盤，若 $m=n$，則和局最小步數為 $2n$。

(2)$n=6$ 時，$m=4\sim6$ 時，隨著 m 遞增 1，和局最少步數減少 4。

(3)我們後續研究了 $n=8$、$n=10$ 的棋盤，當 $m=n-1$ 時，最少和局數步數分別是 22、28。

5.將 $m=n-1$ 時的和局最小步數，延伸更大棋盤：

(1)觀察 $n=6$、8、10 時，$m=n-1$ 的和局最小步數，數值變化具有規律性。

(2)如表 4-3-8 所示，我們猜測：

在 $n>4$，$n\equiv0 \pmod 2$時，$m=n-1$ 連的和局最小步數$=16+(n-6)\times3$

表 4-3-8　$m=n-1$ 連和局最小步數比較表

n	和局最少步數	較 $n-2$時增加的步數
6	16	初始為 0
8	22	6
10	28	6
n	$16+(n-6)\times3$	6

6.和局最小步數的應用：雖然受到選數規則的限制，不一定能以最小步數取得和局，但是採用防守策略時，還是可以考慮搶占哪些位置，就能有效阻擋對手的進攻，讓對手沒有連線機會。

研究四-1、改變乘積數的排列方式

(一) 探討會受數字排列變動而影響的性質

我們想瞭解：當改變棋盤上的數字排列順序時，有哪些性質會受到影響而變動？哪些性質不會變動？解決了這個問題，我們便能進一步去探討對戰策略可能要跟著做哪些調整。

將棋盤上與對戰策略有關的性質，會受到影響而變化的情形，分析整理成表 4-4-1。

表 4-4-1 改變棋盤的數字排列順序對相關性質的影響分析表

性質	是否變動	理由
A.各位置的賓果組合數量	否	由位置決定賓果組合數量
B.各位置的可賓果乘積數個數	否	由位置決定可賓果乘積數
C.各乘積數的候選數組合	否	由候選數組合決定乘積數
D.可連跳乘積數及個數	否	由候選數決定可連跳乘積數
E.各乘積數的可賓果乘積數	是	由位置決定賓果組合，當乘積數的位置改變，由位置對應到的乘積數，都會跟著變動
F.可連跳且可賓果的乘積數	是	
G.可連跳但不可賓果乘積數	是	
H.可賓果但不可連跳乘積數	是	

(二) 變化數字排列後的賓果係數計算公式

我們試著找出變化棋盤上的數字排列之後，如何快速計算出各乘積數的賓果係數。

1.賓果係數的計算公式為：$\dfrac{\text{「可賓果但不可連跳的乘積數個數」}-\text{「可賓果且可連跳的乘積數個數」}}{\text{「可賓果的乘積數個數」}}$

2.其中「可賓果的乘積數個數 y」是由棋盤位置來決定、和排列的數字無關。

3.每個乘積數的「可連跳乘積數」是固定的（如表 4-3-2 中的 B 欄和 C 欄），我們只要對照棋盤位置，就可以找出「可連跳且可賓果的乘積數」並計算個數 j。

4.「可賓果但不可連跳乘積數」＝「可賓果乘積數個數 y」－「可連跳且可賓果乘積數個數 j」。代入賓果係數計算公式：

$$\text{賓果係數}=\frac{\text{「可賓果但不可連跳的乘積數個數」}-\text{「可賓果且可連跳的乘積數個數}j\text{」}}{\text{「可賓果的乘積數個數}y\text{」}}=\frac{(y-j)-j}{y}=\frac{y-2j}{y}$$

所以==變換位置的賓果係數$=\dfrac{\text{「可賓果乘積數個數}y\text{」}-2\times\text{「可賓果且可連跳的乘積數個數}j\text{」}}{\text{棋盤位置對應的「可賓果的乘積數個數}y\text{」}}=\dfrac{y-2j}{y}$==

5.變化棋盤數字排列之後，可以很容易就計算出新棋盤上各乘積數的賓果係數。所以我們可以利用賓果係數，來幫助我們快速評估新棋盤中的數字排列是否讓各乘積數的優勢平均、較為公平。

研究四-2、編寫程式模擬隨機對戰

(一) 用 Scratch 編寫程式模擬 6×6 棋盤隨機對戰

1.程式流程圖見圖 4-4-1。

2.程式碼及執行過程截圖參見圖 4-4-2。

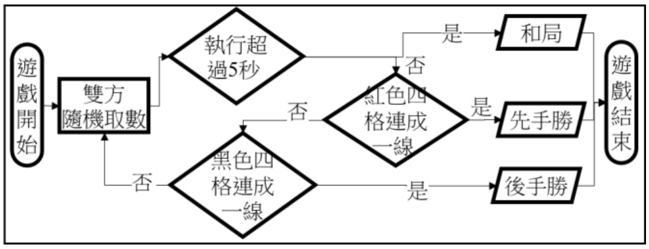


圖 4-4-1 電腦對戰程式設計流程圖(自行繪製)

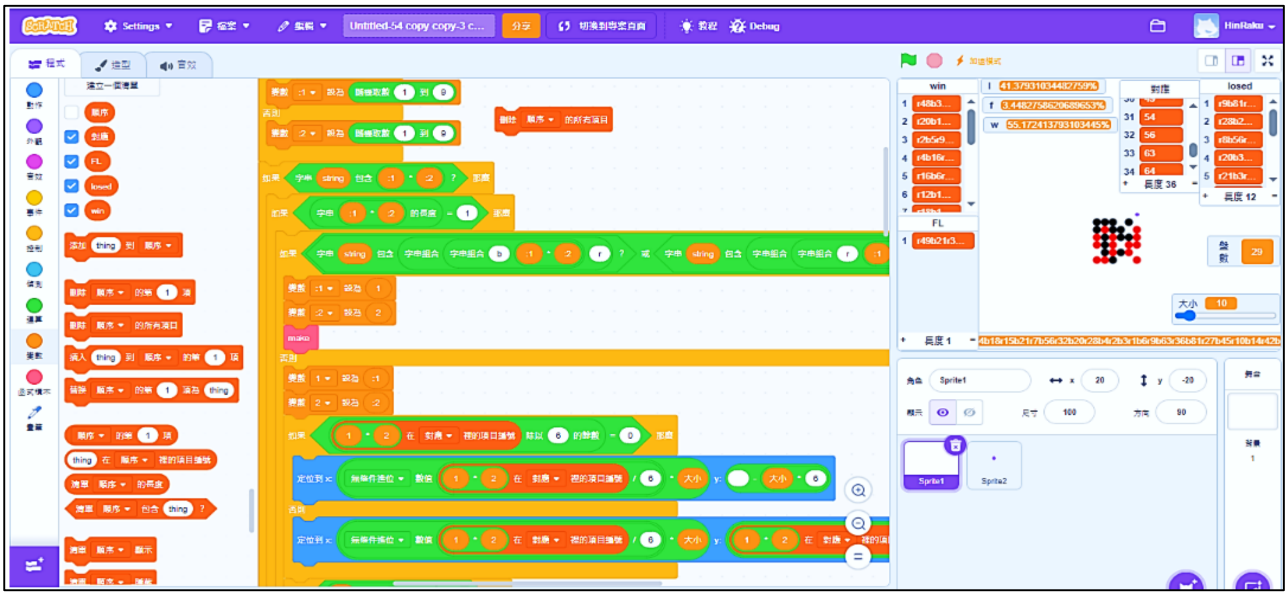


圖 4-4-2 電腦隨機對戰程式碼及執行過程螢幕截圖(自行繪製)

3. 對戰結果：電腦自行隨機下棋 1000 盤，結果後手 340 勝，先手 494 勝，和局為 166 次，先手的勝率較高，勝率大約接近 5 成。
4. 討論：電腦模擬隨機對戰的結果，顯示數字由小到大排列的棋盤，是先手較占優勢的不公平棋盤。這和我們實際對戰的經驗相符。

(二) 用 Scratch 寫程式模擬在 5×5 棋盤上隨機下棋

1. 將執行 6×6 棋盤隨機對戰的程式，略做修改：調整棋盤對應數字變成 5×5 棋盤，分別測試 4 連賓果及 3 連賓果兩種不同賓果條件。

2.結果：

(1)若賓果規則為 4 格連成一線，則和局較多。

(2)若賓果規則為 3 格連成一線，則勝率與 6×6 棋盤差不多，也是先手勝率較高。

3.討論：

(1)5×5 棋盤棋盤若賓果連線數字規定只比邊長小 1，則很容易互相被對方阻擋，形成和局，不易有勝方。此與我們前面討論幾數連線較合適的結論一致：邊長 n 的棋盤，賓果連線數 m 訂為略大於 n 的一半、但不要接近 n 較為合適。

(2)電腦模擬 5×5 棋盤隨機對戰的結果，顯示數字由小到大排列的棋盤，是先手較占優勢的不公平棋盤。這也和我們實際對戰的經驗相符。

【結論】

1. 電腦隨機下棋，改變賓果條件的設定，會影響遊戲是否容易分出勝負。在 5×5 棋盤賓果條件訂為 3 數連線、6×6 棋盤的賓果條件訂 4 數連線，才容易分出勝負；小於此數則和局機率較高。此一結果，驗證了我們在研究一-2 的結論。
2. 隨機下棋時，不管是 5×5 棋盤或 6×6 棋盤，都是先手勝率較高，是不公平的遊戲。所以如果要有公平的棋盤，應適當調整數字排列順序。

研究四-3、探究公平的遊戲設計

(一) 改變棋盤數字排列

1.設計方式：

(1)角落放多候選數：賓果組合少、搭配發展性高的乘積數。

(2)中心放單候選數平方數：賓果組合多、搭配可連跳乘積數少。

(3)其他有公因數的乘積數盡量不排同一直線：倍數分布不要製造連線或阻斷連線。

24 0.33 3×8 0.56 4×6	**45** 0.80	**48** 0.27	**20** 0.45	**56** 0.40	**18** 0.78 2×9 0.33 3×6
63 -0.20	**2** 0.17	**21** 0.50	**9** 0.38 1×9 0.63 3×3	**7** 0.00	**32** 0.60
40 0.27	**28** 0.50	**25** 0.79	**64** 0.79	**30** 0.38	**42** 0.27
72 0.09	**6** 0.25 1×6 0.50 2×3	**81** 0.58	**49** 0.89	**16** 0.38 2×8 0.88 4×4	**15** 0.45
54 0.00	**5** -0.17	**4** 0.25 1×4 0.63 2×2	**10** 0.50	**3** 0.00	**36** 0.20 4×9 0.80 6×6
12 0.56 2×6 **1.00** 3×4	**35** 0.00	**14** -0.27	**1** 0.45	**27** 0.60	**8** 0.56 1×8 0.56 2×4

圖 4-4-3 公平棋盤及賓果係數對照圖(自行繪製)

2.設計出來兩種不同的棋盤數字排列方式，見上頁圖 4-4-3 和圖 4-4-4。

3.驗證棋盤的公平性：

【方法一：賓果係數的分布】

(1)用研究四-1 找出的計算公式，算出棋盤上各乘積數的賓果係數。

(2)以圖 4-4-3 的 27 為例，計算賓果係數：對照圖 4-1-5 的 E6，可賓果乘積數有 10 個，其中可連跳且可賓果 2 個，所以賓果係數是$\frac{10-2\times2}{10}=0.6$。

12 0.78 2×6 0.56 3×4	**35** 0.40	**32** 0.45	**45** 0.45	**28** 0.4	**18** 0.78 2×9 0.33 3×6
63 0.20	**54** 0.17	**36** 0.38 4×9 0.63 6×6	**6** 0.25 1×6 0.50 2×3	**1** 0.50	**56** 0.4
15 0.27	**2** 0.38	**25** 0.79	**64** 0.79	**9** 0.38 1×9 0.75 3×3	**14** 0.27
7 0.27	**16** 0.38 2×8 0.75 4×4	**81** 0.58	**49** 0.68	**40** 0.25	**30** 0.09
10 -0.20	**3** 0.17	**48** 0.50	**4** 0.38 1×4 0.50 2×2	**27** 0.17	**5** 0.4
8 0.33 1×8 0.56 2×4	**42** 0.40	**21** 0.45	**20** 0.09	**72** 0.00	**24** 0.56 4×6 0.33 3×8

圖 4-4-4 另一種公平棋盤數字與賓果係數(自行繪製)

(3)計算圖 4-4-4 的 27 賓果係數：對照圖 4-1-5 的 E5，可賓果乘積數有 12 個，可連跳且可賓果有 5 個，所以賓果係數是$\frac{12-2\times5}{12}=0.17$。

(4)結果：公平棋盤的賓果係數最高為 1，極少負值。中央位置賓果組合較多的乘積數，賓果係數大致相近。與原本棋盤的賓果係數相比，公平棋盤個乘積數的賓果係數差異較小、較為平均。

【方法二：電腦模擬隨機對戰的勝率】

(1)把電腦對應方式改成圖 4-4-3 的棋盤，進行 1000 次隨機下棋，結果：先手勝 388 局，後手勝 272 局，和局 340 局。

(2)此棋盤雖然無法達到雙方勝率相近、完全公平，不過比起原本的棋盤，先手勝率已經從原本接近五成的勝率，降至低於 4 成。且和局近似於 $\frac{1}{3}$，符合平均標準。

(3)結果：從電腦隨機對戰的和局和雙方勝率來看，此棋盤已接近公平棋盤！

【方法三：實際對戰】

(1)和隊友多次實戰，發現厲害的後手幾乎都能獲勝！

(2)致勝策略分析：先手就算挑選賓果係數高的乘積數，例如；圖 4-4-3 的 12（賓果係數 1），後手選擇離 12 較遠的數去自行發展連線機會——後手反守為攻，有時反而有比先手更有優勢，在先手沒有注意到要防備、阻擋後手的位置，成功爭取到連線機會。

(3)勝方大多是取得較多的單候選數乘積數一方，也就是選擇居於棋盤中央位置的單候選數乘積數，會較占優勢。但是單候選數彼此不能連跳，所以還是要小心應對謀畫，巧妙佈署如何去順利取得單候選數乘積數。

(4)對戰策略應用心得：

① 雖然賓果係數越高越不容易防守，但是後手若是不採防守策略反而自己創造另一條進攻路線時，先手第一步選擇賓果係數高的乘積數，就容易被後手掌握選數的主動性，一不小心沒有注意到，就變成被動防守而導致後手獲勝了。

② 改變數字排列方式的棋盤，賓果係數只能做為參考，但是單候選數的平方數、取得棋盤中央區域、以及考慮倍數分布，依舊是較占優勢的策略。

③ 設計棋盤時，單候選數平方數的周圍，如果是完全由互質的乘積數（沒有公因數），則搶此平方數變是優勢策略。以 25 為例，我們設計的兩種公平棋盤，其九宮格內除了 5 的倍數以外，其他候選數都有倍數出現 25 的周圍。這樣不管對手下一步將 1 個候選數 5 改換成哪 1 個候選數，己方必能利用對手所選的候選數，跳回此平方數周圍的乘積數，而可連續來回取得與此平方數相鄰（可賓果）的其他數！所以如果有發現到這類的平方數，就要優先搶占。雖然這樣看起來似乎較不公平，但是如果棋盤上也有其他平方數做類似的排列，讓雙方都有機會搶得連線機會，就能考驗彼此的攻防能力了！就像我們的棋盤，雖然先手可以先搶 25，後手不易阻擋先手連線，但是相對的，先手的棋也擋不到後手的進攻，小心佈局，後手也能在先手不留意防守時連線成功。

4.結論：我們設計的棋局，先手和後手都可憑實力獲勝！所以是公平的棋盤！

(二) 變化遊戲規則

我們有發現和局時，也有可能是棋盤上還有剩餘的數，但是雙方都無法取數的情形。如果將有剩餘格子的和局，改成獲勝條件之一：「棋盤仍有剩餘格子，但無法取數者輸。」這樣居於連線劣勢的後手，就可以採取此策略逼死先手，讓雙方都有不同的攻擊策略，而不是單方面被動防守而已。

從我們的實戰經驗，發現無法繼續取完剩餘乘積數的情形，都是最後一次選取的 2 個候選數，其倍數都被取完了。例如在圖 1-1-2 的和局示例，最後取的數 15(3×5)，但是 3 和 5 的倍數都已經被取完、無法再取剩餘的乘積數了。雖然此例是先手取走 15 讓後手無法再取數，未來可以繼續探究：有什麼取數策略，可以讓對手無法繼續選取棋盤中剩餘的乘積數，而逼死對手讓自己獲勝？找到方法，後手或許也可以用此策略來逼死對手求勝。

伍、結論

一、遊戲設計的數學結構與原理：

(一)候選數 1～c 與形成棋盤之間的關係：

1.任一乘積數 z_i，都是 2 個候選數組合的乘積，$z_i = a_1 \times b_1 = \cdots = a_{m_i} \times b_{m_i}$。

2.排除候選數組合的對稱性，候選數組合總數為：$\frac{(c+1)\times c}{2}$。

3.不重複計算的乘積數總數K＝$\frac{(c+1)\times c}{2} - \sum_1^K$（$m_i - 1$）。若 K 為平方數，則恰可排成正方形的完美棋盤。

4.編寫程式，找出$c \le 500$，K 為平方數的 c 值有 7 個：1、4、7、9、25、129、499。

(二) 探究最大候選數 c 的乘積數中，具有至少兩組候選數組合的乘積數：

1.若乘積數 z 是≤ c 的合數，一定有兩組以上的候選數組合，即$z = a_{m_i} \times b_{m_i}$,$m_i \ge 2$。

2.有重複候選數組合的乘積數，其最大質因數 $p_i \le \frac{c}{2}$。

3.若 c 是質數，則 $\sum_1^K (m_i - 1) - \sum_1^{K-1} (m_i - 1) = 0$

4.若 c 是合數： $\sum_1^K (m_i - 1) - \sum_1^{K-1} (m_i - 1) \div$ 無條件進位到整數$(\frac{c}{2} - 1)$

(三) 棋盤邊長n、m連賓果的賓果條件設定對遊戲設計的影響：

1.棋盤不同位置的賓果組合數量具有對稱性：當 $m \neq n$ 時，中心＞邊上≥角落＝3。

2.從 n、m 可計算出所有賓果組合總數，以及各位置的可賓果乘積數個數。

3.合適的賓果條件，m 要略大於$\frac{n}{2}$，但不可接近邊長；且賓果組合總數以接近 50 為佳。

二、邊長 3 和 5 棋盤的優勢方與對戰策略：

(一)都是先手占優勢。

(二)優勢策略有：搶占賓果組合數最多的中位置、選擇相同候選數組成的平方數、選擇倍數分布較占優勢的候選數。

三、邊長 6 棋盤的數字組成特性與對戰策略應用推廣：

(一)由小到大的數字排列，先手較占優勢。

(二)優勢策略有：

1.以平方數作為對戰策略的起始點，更好預測對手下一步的走法及應對，容易進攻且容易防守；但不易阻擋對方連線。

2.取得「多候選數」的乘積數，進攻時較不易被對方封鎖，易提高獲勝機會；對手進攻方式會變得單一，故有利於己方的防守。

3.可優先選擇「可連跳且可賓果的乘積數個數」較少的乘積數。

而任一乘積數 $z=a\times b$ 的可連跳乘積數為：無條件捨去到整數$\left(\frac{a\times n}{[a,b]}\right)-1$

4.候選數組合是互質的兩數時，可連跳乘積數最多。選擇此種乘積數的優勢是：有許多可以向外發展的可能性，不易被對手猜到自己的計謀。

5.單候選數的平方數、立方數…等，可連跳乘積數最少。容易限制對手下一步的動態。可利用單候選數乘積數來取得某個候選數的倍數進攻連線，因為不管對手如何下，己方都可移回此候選數。

6.「賓果係數」愈高的乘積數，代表愈不容易被對手阻擋、可得到賓果的機會愈大。

「賓果係數」的計算公式為：$\frac{\text{「可賓果但不可連跳的乘積數個數」}-\text{「可賓果且可連跳的乘積數個數」}}{\text{「可賓果的乘積數個數」}}$

7.選擇倍數位置分布或疊加後，可涵蓋棋盤賓果組合數較高位置的候選數組合。

四、改良遊戲設計：

(一)改變數字排列，可預測棋盤結構的變化情形。

(二)變換位置的賓果係數$=\frac{\text{「可賓果乘積數個數 }y\text{」}-2\times\text{「可賓果且可連跳的乘積數個數}j\text{」}}{\text{棋盤位置對應的「可賓果的乘積數個數}y\text{」}}=\frac{y-2j}{y}$

(三)利用 Scratch 編寫程式模擬隨機對戰，驗證了原本棋盤為先手優勢的不公平棋盤，及合適的賓果條件。

(四)改變棋盤數字排列，設計出 2 種 6×6 的公平棋盤，利用賓果係數、電腦模擬隨機對戰與實際對戰等三種方法檢驗，證實了：

1.數字排列位置的設計，要同時考慮賓果組合數量、平方數、多候選數等位置分布，可設計出更為公平的棋盤。

2.巧妙的運用不同策略，雙方都有機會獲勝。

(五)未來可繼續探究調整遊戲規則，增加逼死對手的獲勝條件：仍有剩餘數字但無法取數者輸。

陸、參考資料

1. 黃鼎祐、陳彥程。探討多人玩的井字棋_Otrio 是否有必勝方法。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會作品說明書，國小組數學科。

2. 楊皓程、吳承瀚、王元峻、李秉謙、曾元庠、楊健志。棋盤上的奇蹟-奇「雞」連連。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會作品說明書，國小組數學科。

3. 徐婕恩、徐于涵、李佩蓁、廖孟涵。機率無所不在-探討麻將賓果遊戲中獎機率。中華民國第 63 屆中小學科學展覽會作品說明書，國小組數學科。

附錄

附錄 1

乘積數	候選數組合	A.候選數個數	B.可連跳的乘積數(有公因數) 紅色是可連跳且賓果	C.可連跳的乘積數個數	D.可連跳且可賓果的乘積數個數	E.可連跳但無法賓果的乘積數個數
1	1×1	1	**2** **3** **4** 5 6 **7** **8** 9	8	5	3
2	1×2	2	**1** **3** **4** **5** 6 7 **8** **9**	13	7	6
			~~4~~ ~~6~~ ~~8~~ 10 12 14 **16** 18			
3	1×3	2	**1** **2** **4** **5** **6** 7 8 **9**	14	8	6
			~~6~~ ~~9~~ 12 15 **18** **21** 24 27			
4	1×4	3	**1** **2** **3** **5** **6** 7 8 **9**	15	8	7
			~~8~~ 12 **16** **20** 24 28 32 36			
	2×2		**2** **6** 8 **10** 12 14 **16** 18	8	4	4
5	1×5	2	1 **2** **3** **4** **6** 7 8 9	16	5	11
			10 15 20 25 30 35 40 45			
6	1×6	4	1 2 **3** **4** **5** 7 8 9	16	5	11
			12 18 **24** 30 36 42 48 54			
	2×3		2 **4** 8 10 **12** **14** 16 18	14	5	9
			3 9 ~~12~~ 15 ~~18~~ 21 **24** 27			
7	1×7	2	**1** 2 3 4 5 6 **8** **9**	16	4	12
			14 21 **28** 35 42 49 56 63			
8	1×8	4	**1** **2** 3 4 5 6 **7** **9**	16	7	9
			16 24 32 **40** **48** 56 64 72			
	2×4		**2** 4 6 **10** **12** 14 **16** **18**	13	5	8
			~~4~~ ~~12~~ ~~16~~ 20 24 28 32 36			
9	1×9	3	1 **2** **3** **4** 5 6 **7** **8**	16	6	10
			18 27 36 45 54 63 72 81			
	3×3		**3** 6 **12** 15 **18** 21 24 27	8	3	5
10	2×5	2	2 **4** 6 **8** **12** **14** 16 **18**	16	10	6
			5 15 **20** 25 **30** **35** 40 **45**			
12	2×6	4	2 4 **6** **8** **10** **14** 16 18	14	5	9
			~~6~~ ~~18~~ 24 30 36 42 **48** 54			
	3×4		3 **6** **9** 15 18 **21** 24 27	15	7	8
			4 **8** 16 **20** ~~24~~ **28** **32** 36			
14	2×7	2	2 4 **6** 8 **10** **12** 16 18	16	7	9
			7 **21** 28 **35** **42** **49** 56 63			
15	3×5	2	3 6 9 12 **18** 21 24 **27**	16	4	12
			5 10 **20** **25** 30 35 40 45			
16	2×8	3	**2** **4** 6 **8** 10 12 14 **18**	15	7	8
			~~8~~ 24 32 **40** 48 **56** 64 **72**			
	4×4		**4** **8** 12 **20** 24 **28** 32 36	8	4	4
18	2×9	4	2 4 6 **8** **10** 12 14 **16**	16	8	8
			9 **27** **36** 45 54 **63** 72 **81**			
	3×6		**3** 6 **9** 12 **15** **21** **24** **27**	13	10	3
			~~6~~ ~~12~~ ~~24~~ **30** **36** **42** **48** 54			
20	4×5	2	**4** 8 **12** **16** **24** **28** **32** 36	16	11	5
			5 **10** **15** 25 **30** 35 **40** **45**			
21	3×7	2	**3** 6 9 **12** 15 **18** **24** 27	16	8	8
			7 **14** 28 **35** **42** 49 **56** 63			

（下頁續）

乘積數	候選數組合	A.候選數個數	B.可連跳的乘積數(有公因數) 紅色是可連跳且賓果	C.可連跳的乘積數個數	D.可連跳且可賓果的乘積數個數	E.可連跳但無法賓果的乘積數個數
24	3×8	4	3 **6** 9 12 15 **18** **21** 27	16	4	12
			8 16 **32** 40 48 56 64 72			
	4×6		4 8 12 16 **20** 28 **32** 36	14	4	10
			6 ~~12~~ **18** 30 ~~36~~ 42 48 54			
25	5×5	1	5 10 **15** 20 **30** 35 40 45	8	2	6
27	3×9	2	3 6 9 12 **15** **18** 21 24	14	3	11
			~~9~~ ~~18~~ **36** 45 54 63 72 81			
28	4×7	2	4 8 **12** **16** **20** 24 **32** 36	16	8	8
			7 14 21 **35** **42** 49 56 **63**			
30	5×6	2	5 **10** 15 **20** **25** **35** 40 **45**	16	8	8
			6 12 **18** 24 36 **42** **48** 54			
32	4×8	2	4 8 **12** 16 **20** **24** **28** 36	13	6	7
			~~8~~ ~~16~~ ~~24~~ 40 **48** 56 64 **72**			
35	5×7	2	5 **10** 15 20 25 **30** 40 45	16	6	10
			7 **14** **21** **28** 42 **49** 56 63			
36	4×9	3	4 8 12 16 20 24 28 32	16	4	12
			9 **18** **27** **45** **54** 63 72 81			
	6×6		6 12 **18** 24 30 **42** 48 **54**	8	3	5
40	5×8	2	5 10 15 **20** 25 30 35 **45**	16	6	10
			8 **16** 24 32 **48** **56** 64 72			
42	6×7	2	6 12 **18** 24 **30** **36** **48** 54	16	10	6
			7 **14** **21** **28** 35 **49** **56** **63**			
45	5×9	2	5 **10** 15 **20** 25 **30** 35 **40**	16	7	9
			9 18 27 **36** 54 **63** **72** 81			
48	6×8	2	6 **12** **18** 24 **30** 36 **42** 54	15	8	7
			8 16 ~~24~~ **32** **40** 56 64 **72**			
49	7×7	1	7 **14** 21 28 **35** **42** 56 63	8	3	5
54	6×9	2	6 12 18 24 30 **36** 42 48	14	2	12
			9 ~~18~~ 27 ~~36~~ 45 **63** 72 81			
56	7×8	2	7 14 **21** 28 35 **42** 49 **63**	16	7	9
			8 **16** 24 32 **40** 48 **64** **72**			
63	7×9	2	7 14 21 **28** 35 **42** 49 **56**	16	8	8
			9 **18** 27 36 **45** **54** **72** **81**			
64	8×8	1	8 16 24 32 40 48 **56** **72**	8	2	6
72	8×9	2	8 **16** 24 **32** 40 **48** **56** **64**	16	8	8
			9 18 27 36 **45** 54 **63** **81**			
81	9×9	1	9 **18** 27 36 45 54 **63** **72**	8	3	5

附錄 2

位置	賓果組合(橫+直+斜)	F.賓果組合個數	G.可賓果的乘積數個數	乘積數	候選數組合	H.可賓果且可連跳的乘積數個數	I.可賓果但不可連跳的乘積數個數	賓果係數 $\frac{I-H}{G}$
A1	1+1+1	3	9	1	1×1	5	4	-0.11
A2	1+2+1	4	10	2	1×2	7	3	-0.40
A3	1+3+1	5	11	3	1×3	8	3	-0.45
A4	1+3+1	5	11	4	1×4	8	3	-0.45
					2×2	4	7	0.27

（下頁續）

位置	賓果組合(橫+直+斜)	F.賓果組合個數	G.可賓果的乘積數個數	乘積數	候選數組合	H.可賓果且可連跳的乘積數個數	I.可賓果但不可連跳的乘積數個數	賓果係數 $\frac{I-H}{G}$
A5	1+2+1	4	10	5	1×5	5	5	0.00
A6	1+1+1	3	9	6	1×6	5	4	-0.11
					2×3	6	3	-0.33
B1	2+1+1	4	10	7	1×7	4	6	0.20
B2	2+2+2	6	12	8	1×8	7	5	-0.17
					2×4	5	7	0.17
B3	2+3+3	8	16	9	1×9	6	10	0.25
					3×3	3	13	0.63
B4	2+3+3	8	16	10	2×5	10	6	-0.25
B5	2+2+2	6	12	12	2×6	5	7	0.17
					3×4	7	5	-0.17
B6	2+1+1	4	10	14	2×7	7	3	-0.40
C1	3+1+1	5	11	15	3×5	4	7	0.27
C2	3+2+3	8	16	16	2×8	7	9	0.13
					4×4	4	12	0.50
C3	3+3+5	11	19	18	2×9	8	11	0.16
					3×6	10	9	-0.05
C4	3+3+5	11	19	20	4×5	11	8	-0.16
C5	3+2+3	8	16	21	3×7	8	8	0.00
C6	3+1+1	5	11	24	3×8	4	7	0.27
					4×6	4	7	0.27
D1	3+1+1	5	11	25	5×5	2	9	0.64
D2	3+2+3	8	16	27	3×9	3	13	0.63
D3	3+3+5	11	19	28	4×7	8	11	0.16
D4	3+3+5	11	19	30	5×6	8	11	0.16
D5	3+2+3	8	16	32	4×8	6	10	0.25
D6	3+1+1	5	11	35	5×7	6	5	-0.09
E1	2+1+1	4	10	36	4×9	4	6	0.20
					6×6	3	7	0.40
E2	2+2+2	6	12	40	5×8	6	6	0.00
E3	2+3+3	8	16	42	6×7	10	6	-0.25
E4	2+3+3	8	16	45	5×9	7	9	0.13
E5	2+2+2	6	12	48	6×8	8	4	-0.33
E6	2+1+1	4	10	49	7×7	3	7	0.40
F1	1+1+1	3	9	54	6×9	2	7	0.56
F2	1+2+1	4	10	56	7×8	7	3	-0.40
F3	1+3+1	5	11	63	7×9	8	3	-0.45
F4	1+3+1	5	11	64	8×8	2	9	0.64
F5	1+2+1	4	10	72	8×9	8	2	-0.60
F6	1+1+1	3	9	81	9×9	3	6	0.33

【評語】080406

本研究以「乘法賓果雙人對戰遊戲」為起點，主要在探討此遊戲的設計原理、蘊含其中的數學理論架構、同時亦探討對戰策略、以及相關的遊戲改良。作品的第一個部分探討遊戲的數學理論與設計原理，其中包含重複乘積數的估計、完美棋盤的建構、賓果組合數量與各位置可賓果乘積數個數的計算;第二個部分探討棋盤的優勢方與對戰策略,特別是深入解析 6 乘 6 棋盤的對戰應用策略以及引入賓果係數的計算公式;第三個部分探討改變棋盤數字排列對遊戲公平性的影響以及利用電腦程式模擬雙方對戰的勝率。本研究包含數個探究問題、每個問題又包含許多子題，該如何處理，才可以不在研究的過程中迷失，是作者們的一大挑戰；所幸透過研究流程圖，可以清楚地呈現各個主要的探究問題、以及每個問題擬聚焦的要點，為整體的研究脈絡勾勒出一個較為完整的圖像與全貌。具體而言，本研究運用組合數修正數字的選擇與規則的建立，並探究最佳策略與編寫程式模擬，設計創新的賓果，研究結果豐富，值得嘉許。

作品海報

BiNGO

書謀話策——

論乘法賓果的玄機與妙算

1	7	15	25	36	54
2	8	16	27	40	56
3	9	18	28	42	63
4	10	20	30	45	64
5	12	21	32	48	72
6	14	24	35	49	81

1 2 3 4 5 6 7 8 9

摘要

本研究探討乘法賓果雙人對戰遊戲的設計原理與對戰策略。探討問題與獲致結果如下：

一、正整數 1 ～ c 兩兩相乘所得乘積總個數，找出計算公式。≤ 500 只有 7 個 c 恰可組成正方形棋盤。重複的乘積，其最大質因數 $\le \frac{c}{2}$。

二、由棋盤邊長 n 和 m 數連線，可計算出棋盤各位置的賓果組合數量、及可與之賓果的位置數量，且可判斷合適的 m 值。

三、按照數字大小排列邊長 ≤ 6 的完美棋盤，都是先手較占優勢的不公平棋盤。對戰策略包括：取得棋盤中央位置、選擇平方數、賓果係數較高，考慮可連跳乘積數的相關性質、倍數位置分布等。

四、設計公平棋盤並用不同方法驗證。

五、編寫程式，協助找出可排成較大正方形棋盤的數，且可模擬隨機對戰，找出雙方勝率，以驗證棋盤的公平性。

壹、前言

一 研究動機

在學校的數學活動中，我們學到用九九乘法來玩賓果的遊戲。遊戲的玩法是：兩人輪流在棋盤下方 1 ～ 9 選兩個數（兩數可相同），在棋盤上方兩數相乘所得到的數，放上自己顏色的棋。但是挑選下面兩數時，每次都要保留 1 數、只能變換 1 數。最快能得到 4 數連成一直線的一方就「賓果」獲勝了。若後手及先手都無法再取得，且無任何一方有 4 數連線，則為「和局」。

查詢歷屆科展作品和網路資料，發現並沒有針對乘法賓果這個遊戲主題的科展研究。所以我們決定研究這個新穎的問題。

二 名詞解釋

1	7	15	25	36	54
2	8	16	27	40	56
3	9	18	28	42	63
4	10	20	30	45	64
5	12	21	32	48	72
6	14	24	35	49	81

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. 候選數◯：棋盤下方數字，作為乘數與被乘數
2. 候選數組合：兩個候選數的組合
3. 乘積數◯：兩個候選數相乘的乘積
4. 可連跳乘積數◯：此乘積數下一步可以選到的乘積數
5. 完美棋盤：候選數組成的所有乘積數，恰可排成正方形棋盤
6. 賓果（獲勝條件）：任一方的格子，在同一直線、橫線或斜線可排成連續的 4 格
7. m 連賓果：獲勝條件為連續 m 格連成直線。本研究中若沒特別註明，皆為探討 4 連賓果。
8. 賓果組合：棋盤上可形成賓果條件的數字組合
9. 可連跳且可賓果的乘積數／可賓果且可連跳的乘積數：在乘積數 p 的可連跳乘積數中，可與其連成賓果的乘積數

1	7	15	25	36	54
2	8	16	27	40	56
3	9	18	28	42	63
4	10	20	30	45	64
5	12	21	32	48	72
6	14	24	35	49	81

1 2 3 4 5 6 7 8 9

10. 可賓果但不可連跳的乘積數：在乘積數 p 的可賓果組合數字中，下一步無法選到的所有乘積數
11. 可連跳但不可賓果的乘積數：在乘積數 p 的可連跳乘積數中，無法與之賓果的所有乘積數
12. 可以阻擋／無法阻擋：取得的乘積數 p 在乘積數 r 的賓果連線上，則此乘積數 p 可以阻擋對手賓果。反之，無法阻擋。
13. 賓果係數：每個乘積數下一步可變化的乘積數──「C.可連跳乘積數」中，「A.可連跳但不可賓果的乘積數的個數」減去「B.可連跳且可賓果的乘積數的個數」占「C.所有可連跳乘積數」的比例。以公式表示為：$\frac{A-B}{C}$。
14. 「聽」：當一方只要再下一個乘積數，就可得到 4 數連線而賓果獲勝。
15. 和局：當棋盤上沒有剩餘格子，或移動兩個候選數中的任一個候選數，都沒有可放置的格子，但尚未有任一方獲勝。
16. 某數策略：第一步可自由選數的先手，搶占某數的對戰策略。

1(25) 1×1	7(24) 7×1	15(29) 5×3	25(27) 5×5	36(12) 9×4	54
2	8(1) 1×8	16(20) 2×8	27(10) 3×9	40(7) 5×8	56
3(17) 3×1	9(18) 3×3	18(9) 6×3	28(13) 4×7	42	63(23) 7×9
4(4) 4×1	10(28) 5×2	20(5) 4×5	30(8) 5×6	45(6) 5×9	64(2) 8×8
5(26) 1×5	12(16) 3×4	21(14) 7×3	32(3) 8×4	48	72(11) 9×8
6(19) 3×2	14(21) 2×7	24(15) 3×8	35(22) 7×5	49	81

和局示例 乘號前是保留上一步的候選數 紅色是下一步保留的候選數

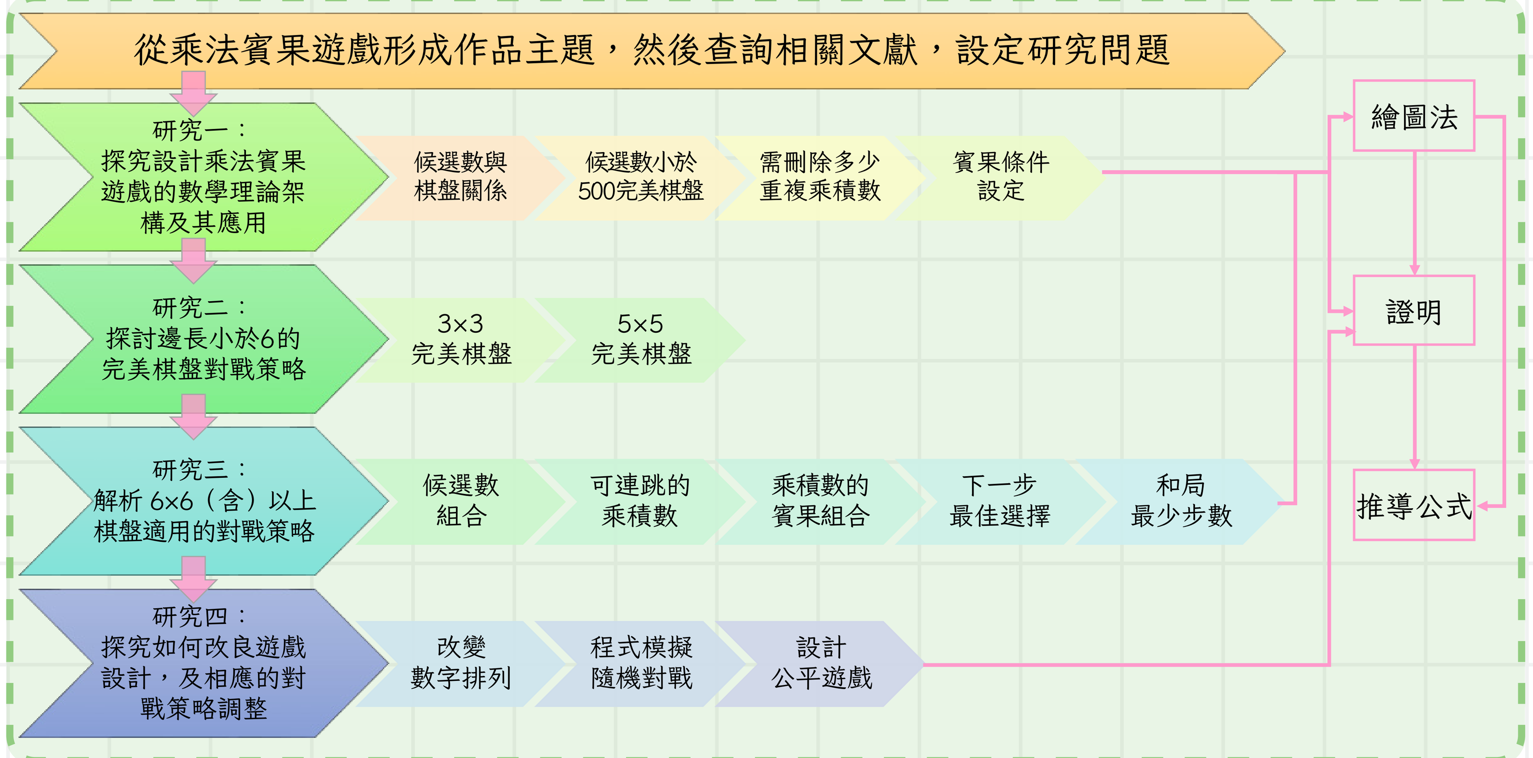
三 研究目的

（一）探究設計乘法賓果遊戲的數學理論架構及其應用。
（二）探討邊長小於 6 的完美棋盤對戰策略。
（三）解析 6x6（含）以上棋盤適用的對戰策略。
（四）探究如何改良遊戲設計，及相應的對戰策略調整。

貳、研究設備

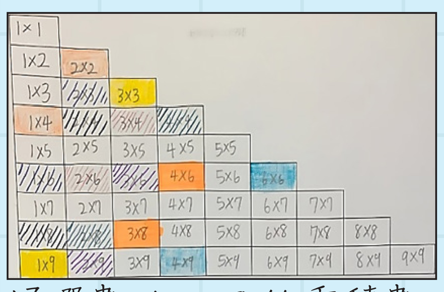
一、紙製棋盤、密集板雷切棋具、透明片、紙筆。
二、電腦與軟體：Scratch（編寫遊戲程式）、Word（整理研究成果）、Excel（各項性質分析）、PowerPoint（繪製分析圖）、ChatGPT（協助依數字大小排列成正方形表格）。

參、研究過程與方法



肆、研究結果與討論

研究一 -1 探討候選數與形成棋盤之關係



候選數 1 ～ 9 的乘積數

1. 候選數 1 ～ c，在不排除相同乘積數情形下，最大候選數 c 的候選數組合總數為：$\frac{c(c+1)}{2}$
2. 要扣除多少個相同的乘積數？
   2-1. 任一乘積數 z_i，都是 2 個候選數的乘積：
   $$z_i = a_1 \times b_1 = a_2 \times b_2 = \cdots = a_{m_i} \times b_{m_i}\text{，其中 } z_i、a_{m_i}、b_{m_i} \in \mathrm{N}\text{，}$$
   $$\text{且 } a_1 \le b_1、a_2 \le b_2、\cdots、a_{m_i} \le b_{m_i}\text{，}a_1 < a_2 < \cdots < a_{m_i}\text{，}b_{m_i} \le \sqrt{z_i} \le c$$
   2-2. 乘積數 z_i 若有 m_i 組候選數組合 $\Rightarrow$ $m_i - 1$ 個乘積數重複計算
   2-3. 不重複計算的乘積數總數 $\mathrm{K} = \frac{c(c+1)}{2} - \sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\left(m_i - 1\right)$
   2-4. 若 K 為平方數，則恰可排成正方形棋盤
3. 以 $c = 7$ 為例，$\mathrm{K} = \frac{7(7+1)}{2} - 3 = 25 = 5 \times 5$，恰可組成 5x5 完美棋盤

候選數 1 ～ 7 的全部乘積數

乘積數	候選數組合	組合數 m	$m-1$	乘積數	候選數組合	組合數 m	$m-1$	乘積數	候選數組合	組合數 m	$m-1$
1	1×1	1	0	10	2×5	1	0	25	5×5	1	0
2	1×2	1	0	12	2×6 3×4	2	1	28	4×7	1	0
3	1×3	1	0	14	2×7	1	0	30	5×6	1	0
4	1×4 2×2	2	1	15	3×5	1	0	35	5×7	1	0
5	1×5	1	0	16	4×4	1	0	36	6×6	1	0
6	1×6 2×3	2	1	18	3×6	1	0	42	6×7	1	0
7	1×7	1	0	20	4×5	1	0	49	7×7	1	0
8	2×4	1	0	21	3×7	1	0	$\sum\left(m-1\right)=3$			
9	3×3	1	0	24	4×6	1	0				

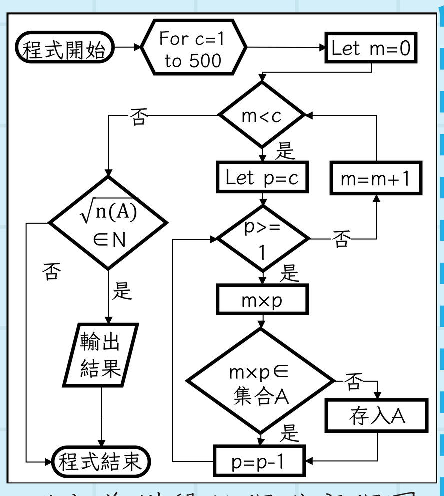
研究一 -2 找出 500 以內的完美棋盤

1. 編寫程式，找出最大候選數在 500 以內、總乘積數個數恰為平方數的最大候選數 c。
2. 利用 ChatGPT 協助將程式找的最大候選數 25，將其所有乘積數排成表格，再利用此表格製作成棋盤。

1	16	33	52	76	100	128	156	189	224	260	300	345	400	480
2	17	34	54	77	102	130	160	190	225	264	304	350	408	483
3	18	35	55	78	104	132	161	192	228	266	306	352	414	484
4	19	36	56	80	105	133	162	195	230	270	308	357	418	500
5	20	38	57	81	108	135	165	196	231	272	312	360	420	504
6	21	39	60	84	110	136	168	198	234	273	315	361	425	506
7	22	40	63	85	112	138	169	200	238	275	320	368	432	525
8	23	42	64	88	114	140	170	204	240	276	322	374	437	528
9	24	44	65	90	115	143	171	207	242	280	323	375	440	529
10	25	45	66	91	117	144	175	208	247	285	324	378	441	550
11	26	46	68	92	119	147	176	209	250	286	325	380	450	552
12	27	48	69	95	120	150	180	210	252	288	330	384	456	575
13	28	49	70	96	121	152	182	216	253	289	336	391	460	576
14	30	50	72	98	125	153	184	220	255	294	340	396	462	600
15	32	51	75	99	126	154	187	221	256	299	342	399	475	625

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

候選數 1 ～ 25 的棋盤



找完美棋盤的程式流程圖

恰可組成正方形棋盤的候選數

最大候選數（c）	1	4	7	9	25	129	499
乘積數總個數	1	9	25	36	225	4761	64516
棋盤邊長	1	3	5	6	15	69	254

研究一 -3 最大候選數 c 共要刪除幾個相同的乘積數

不重複計算的乘積數總數 $\mathrm{K}= \frac{c(c+1)}{2} - \sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\left(m_i - 1\right)$

【問題】如何求最大候選數 c 的 $\sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\left(m_i - 1\right)$？

1. 觀察最大候選數 c 與 $\sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\left(m_i - 1\right)$ 間關係。
2. 發現：
   2-1. 若 c 是質數，則 $\sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\left(m_i - 1\right) - \sum_{i=1}^{\mathrm{K-1}}\left(m_i - 1\right) = 0$
   【解釋】最大候選數 c 是質數時，比 $c-1$ 新增的乘積數都是 c 的倍數、只有 1 組候選數組合，不需要扣除。
   2-2. 有兩組以上候選數組合的乘積數，都是合數
   【猜想】$\le c$ 的合數，一定有兩組以上的候選數組合。
   【證明】若乘積數 z 是 $\le c$ 的合數，z 質因數分解：$z = x \times y \times \cdots$，且 $x \le y \le \cdots$。
   $\because x、y、\frac{z}{x}、\frac{z}{y}$ 均會 $< c$，
   $\therefore$ K 候選數組合必有 $(1 \times z)$、$\left(x \times \frac{z}{x}\right)$、$\left(y \times \frac{z}{y}\right)$
   若 $x \times y \ne z$，則 z 候選數組合還有：$\left(xy \times \frac{z}{xy}\right)$、……
   2-3. 新增有重複候選數組合的乘積數，都是合數 c 的倍數。只要檢查 c 有幾個重複的倍數。
   2-4. 由上述 2-3. 可以延伸：因為新增合數 c 的倍數最多有 c 個，但 $c \times c$ 僅 1 組候選數組合，所以新增要扣除的乘積數個數 $\left[\sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\left(m_i - 1\right) - \sum_{i=1}^{\mathrm{K-1}}\left(m_i - 1\right)\right] \le \left(c - 1\right)$

計算乘積數總數時要扣除的候選數組合個數對照表

最大候選數 c	$\sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\left(m_i - 1\right)$	與 $c-1$ 的變化值	解釋變化值
1	0	0	初始不扣
2	0	0	2 是質數
3	0	0	3 是質數
4	1	+1	4 = 2x2
5	1	0	5 是質數
6	3	+2	
7	3	0	7 是質數
8	6	+3	
9	9	+3	
10	13	+4	
11	13	0	11 是質數
12	19	+6	
13	19	0	13 是質數
14	25	+6	
15	31	+6	
16	39	+8	
17	39	0	17 是質數
18	48	+9	
19	48	0	19 是質數
20	58	+10	
21	67	+9	
22	77	+10	
23	77	0	23 是質數
24	91	+14	
25	100	+9	

3. 列出 $c \le 9$ 要扣的乘積數並做質因數分解，觀察和候選數組合間關係。
   3-1. 從質因數分解發現 $c \le 9$ 時，有不同候選數組合的乘積數，其最大質因數 ≤ 3。
   【解釋】當 $c \le 9$ 時，如果乘積數的最大質因數 $p \ge 5$，無法將其候選數組合之一的 $\left(1 \times 5\right) \times \frac{c}{5}$ 換成 $\left(2 \times 5\right) \times \frac{c}{2 \times 5}$ 或 $\left(3 \times 5\right) \times \frac{c}{3 \times 5}$，因為 2×5 或 3×5 皆超過最大候選數 9。
   3-2. 由上述 3-1. 可延伸：
   【猜想】有重複候選數組合的乘積數，其最大質因數必 $\le \frac{c}{2}$。
   【驗證】質因數分解 $c = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_i$，且 $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_i$，則 c 候選數組合有：$1 \times c$、$p_1 \times (p_2 \times \cdots \times p_i)$、……。
   $\because$ 在候選數組合 $p_1 \times (p_2 \times \cdots \times p_i)$，乘積數的最小質因數 $p_1 \ge 2$
   $\therefore \left(p_2 \times \cdots \times p_i\right) \le \frac{c}{2}$，有重複候選數組合的乘積數，其最大質因數 $p_i \le \frac{c}{2}$
4. 觀察 $c = 10$ 時，新增具有不同候選數組合的乘積數，為：$10\times$（所有 $< \frac{10}{2}$ 的正整數）。
   【猜想】任一最大候選數 c，比 $c-1$ 時新增具有不同候選數組合的乘積數，皆為 $c\times$（所有 $< \frac{c}{2}$ 的正整數）。
   【推論】c 比 $c-1$ 新增具有不同候選數組合的乘積數個數：
   (1) 若 c 是質數，不會增加。
   (2) 若 c 是合數，$\left[\sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\left(m_i - 1\right) - \sum_{i=1}^{\mathrm{K-1}}\left(m_i - 1\right)\right]$ = 無條件進位到整數 $\frac{c}{2} - 1$

計算 $c \le 25$ 要扣的重複乘積數數量，列出與實際扣除有差異的結果，試著找出造成誤差原因。

扣除重複乘積數個數的計算公式誤差彙整表

最大候選數 c	無條件進位到整數 $\left(\frac{c}{2}-1\right)$ 算出的重複乘積數數量 d	實際重複的乘積數數量 p	計算公式誤差 $(d-p)$ 與造成誤差的原因
9	10	9	1，多扣的 $27(3 \times 9)$ 在 $c \le 8$ 時還未出現
12	18	19	-1，少扣的 $72(6 \times 12)$ 在 8×9 已出現
15	32	31	1，多扣的 $75(5 \times 15)$ 在 $c \le 14$ 時還未出現
16	38	39	-1
18	47	48	-1
20	56	58	-2
21	66	67	-1
24	87	91	-4
25	99	100	-1

5. 觀察造成誤差的候選數組合，皆有 2 個以上相同因數。可能是候選數 c 所組成的乘積數做質因數分解時，較 $c-1$ 增加同個質因數的次方有關。
6. 結論：
   (1) 當 c 為質數時，比最大候選數 $c-1$ 新增的乘積數個數有 c 個，且都是 c 的倍數，無重複的乘積數，新增要扣除重複乘積數個數 $= 0$。
   (2) 當 c 為合數時：
   ①具不同候選數組合的乘積數，大多 $\in \{c\times$（所有 $< \frac{c}{2}$ 的正整數）$\}$。
   ②新增要扣除的重複乘積數個數 ≒ 無條件進位到整數 $\frac{c}{2} - 1$。

研究一-4
賓果條件設定對遊戲設計的影響

(一) 棋盤大小及連線個數和賓果組合數量的關係

棋盤位置名稱對照圖

1. 棋盤不同位置的賓果組合與總和

$m=2$（2連）	$m=3$（3連）
$n=2$：3 $n=3$：3 5 / 5 8 $n=4$：3 5 / 5 8 $n=5$：3 5 5 / 5 8 8 / 5 8 8 $n=6$：3 5 5 / 5 8 8 / 5 8 8 $n=7$：3 5 5 5 / 5 8 8 8 / 5 8 8 8 / 5 8 8 8	$n=3$：3 2 / 2 4 $n=4$：3 4 / 4 7 $n=5$：3 4 3 / 4 7 9 / 3 9 12 $n=6$：3 4 6 / 4 7 9 / 6 9 12 $n=7$：3 4 6 6 / 4 7 9 9 / 6 9 12 12 / 6 9 12 12 $n=8$：3 4 6 6 / 4 7 9 9 / 6 9 12 12 / 6 9 12 12
中心：$n>2$時，皆為 8。	中心：$n>4$時，皆為 12。
邊上：皆為 5。	邊上：$n\geq 6(n-m>2)$時，皆為 6。
角落：皆為 3。	角落：皆為 3。

2. 探究不同位置的賓果組合數量變化及總和的規律性。

$n\equiv 1(\mathrm{mod}2)$	3		5				7						9							
m	2	3	2	3	4	5	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	8	9
中心	8	4	8	12	8	4	8	12	16	12	8	4	8	12	16	20	16	12	8	4
邊上	5	2	5	3	3	2	5	6	7	4	3	2	5	6	7	8	5	4	3	2
內縮一層角落	8	4	8	7	6	3	8	7	6	6	6	3	8	7	6	6	6	6	6	3

	中心	邊上	角落
不同位置的賓果組合數量總和 k 的規律性	(1) $m=\frac{n+1}{2}$時，$\Rightarrow m\times 4$ (2) $m=n-1$時，⇒皆為 $8=2\times 4=(n-m+1)\times 4$ (3) $m=n$時，⇒皆為 $4=(n-m+1)\times 4$	(1) $m=\frac{n+1}{2}$時，$\Rightarrow m+3$ (2) $m=n-1\Rightarrow$當$n>3$時，皆為 $3=2+1=2+(n-m)$ (3) $m=n$時，⇒皆為 $2=2+(n-m)$	皆為 3。 內縮一層角落： $m=2$，皆為 8 $m=3$，皆為 7 （$n=3$為 4） $m>3$且$m\neq n$，皆 6 $m=n$，皆為 3
不同位置賓果組合計算公式	(1) $m<\frac{n}{2}\Rightarrow m\times 4$ (2) $m>\frac{n}{2}\Rightarrow(n-m+1)\times 4$	(1) $m<\frac{n}{2}\Rightarrow m+3$ (2) $m>\frac{n}{2}\Rightarrow=2+(n-m)$	

$n\equiv 0(\mathrm{mod}2)$	2	4			6					8						
m	2	2	3	4	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	7	8
中心	3	8	7	3	8	12	11	7	3	8	12	16	15	11	7	3
邊上	3	5	4	2	5	6	5	3	2	5	6	7	6	4	3	2
內縮一層角落	3	8	7	3	8	7	6	6	3	8	7	6	6	6	6	3

	中心	邊上	角落
不同位置的賓果組合數量總和 k 的規律性	(1) $m=\frac{n}{2}$時，$\Rightarrow m\times 4$ (2) $m=n-1$時，⇒皆為 $7=2\times 4-1=(n-m+1)\times 4-1$ (3) $m=n$時，⇒皆為 $3=4-1=(n-m+1)\times 4-1$	(1) $m=\frac{n}{2}$時，$\Rightarrow m+3$ (2) $m=n-1\Rightarrow$當$n>3$時，皆為 $3=2+1=2+(n-m)$ (3) $m=n$時，⇒皆為 $2=2+(n-m)$	皆為 3。 內縮一層角落： $m=2$，皆為 8 $m=3$，皆為 7 $m>3$且$m\neq n$，皆 6 $m=n$，皆為 3
不同位置賓果組合計算公式	(1) $m\leq\frac{n}{2}\Rightarrow m\times 4$ (2) $m>\frac{n}{2}\Rightarrow(n-m+1)\times 4-1$	(1) $m\leq\frac{n}{2}\Rightarrow m+3$ (2) $m>\frac{n}{2}\Rightarrow=2+(n-m)$	

3. 尋找賓果組合總數$s=\frac{k}{m}$的規律性

$m(n=6)$	3	4	5	6
橫／直的賓果組合總和				
數量小計	$4\times 6\times 2=48$	$3\times 6\times 2=36$	$2\times 6\times 2=24$	$1\times 6\times 2=12$
規律性	$(n-m+1)\times n\times 2$……公式 A			
斜的賓果組合總和				
數量小計	$\left(\frac{4(1+4)}{2}\times 2-4\right)\times 2=32$	$\left(\frac{3(1+3)}{2}\times 2-3\right)\times 2=18$	$\left(\frac{2(1+2)}{2}\times 2-2\right)\times 2=8$	$1\times 2=2$
規律性	$\{(n-m+1)[(1+(n-m+1)]-(n-m+1)\}\times 2=(n-m+1)^2\times 2$……公式 B			
賓果組合總數$s=\frac{k}{m}$	80	54	32	14

4. 賓果組合總數s的計算公式：公式 A ＋公式 B $=(n-m+1)\times n\times 2+(n-m+1)^2\times 2$
$=2(2n-m+1)(n-m+1)$

5. 計算$n=1\sim 9$的所有m連賓果條件，及所對應到的k和s。

k：所有位置的賓果組合數量總和；s棋盤的賓果組合總數；紅字是s較適合對戰的組合

n	2	3		4			5				6				
m	2	2	3	2	3	4	2	3	4	5	2	3	4	5	6
k	12	40	24	84	72	40	144	144	112	60	220	240	516	160	84
s	6	20	8	42	24	10	72	48	28	12	110	80	54	32	14

n	7						8							9							
m	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	8	2	3	4	5	6	7	8	9
k	312	360	352	300	216	112	420	504	520	480	396	280	144	544	672	720	700	624	504	352	180
s	156	120	88	60	36	16	210	168	130	96	66	40	18	272	224	180	140	104	72	44	20

(二) 遊戲規則訂為幾連賓果較為合適？

從我們在≤ 6不同大小棋盤對戰的經驗累積，發現若是 $m\leq\frac{n}{2}$，後手很難阻擋先手連線，先手容易搶先連線、明顯較占優勢。如果是 $m=n-1$ 或 $m=n$，又很容易互相阻擋、不易分出勝負。所以適合遊戲的賓果 m 連條件，m 要$>\frac{n}{2}$ 且不可過於接近 n。實戰測試 $n=5$ 和 6，合適連線數 m 值，賓果組合總數都接近 50。

(三) 棋盤各位置的可賓果乘積數個數

具對稱性，求左上角即可得全部。

A1 9	B1 10	C1 11	D1 11	E1 10	F1 9
A2 10	B2 12	C2 16	D2 16	E2 12	F2 10
A3 11	B3 16	C3 19	D3 19	E3 16	F3 11
A4 11	B4 16	C4 19	D4 19	E4 16	F4 11
A5 10	B5 12	C5 16	D5 16	E5 12	F5 10
A6 9	B6 10	C6 11	D6 11	E6 10	F6 9

研究二-1
探究 3X3 的棋盤組合與優勢方

1. 3x3 棋盤是先手較占優勢的不公平遊戲。先手搶占棋盤中心賓果組合數最多的 6，會較占優勢。
2. 後手獲勝或和局情形，發生在後手第 1 步下 4 時，先手只能取候選數有 4 的乘積數，後手繼續選擇候選數有 4 的乘積數，便能提高獲勝機會。由此可見：取得由相同候選數組成的平方數，可以限制對手下一步的行動。

1	4	9
2	6	12
3	8	16

1 2 3 4

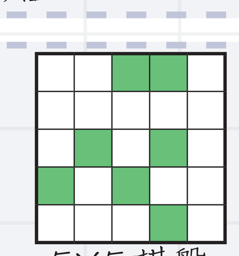
3X3 棋盤

3X3 棋盤對戰過程紀錄彙整表

局數	先	後	先	後	先	後	先	後	先	結果
1	6	2	1	3	9	12	16			先勝
2	6	3	1	4	16					先勝
3	6	3	1	2	4	8	16			先勝
4	6	4	8	2	1	3	9	12	16	先勝
5	6	4	8	12	16					和局
6	6	4	8	16	12	9	3	1		後勝
7	6	8	16	4	1					先勝
8	6	8	16	12	9	3	1			先勝
9	6	9	12	16	8	2	4			先勝
10	6	9	12	16	8	4	2			先勝
11	6	12	9	3	1	2	4	8	16	先勝

研究二-2
探究 5X5 的棋盤組合與優勢方

1. 經多次對戰發現：5x5 棋盤仍是先手較優勢。
2. 我們還發現 4 的倍數分布多有在棋盤中間位置，是賓果組合較多的位置。若能選擇候選數有 4 的乘積數，會提高連線機會。



5X5 棋盤
4 的倍數分布

1	6 (8) 6×1	12 (9) 6×2	20	30 (12) 5×6
2	7 (4) 7×1	14 (3) 2×7	21	35 (11) 5×7
3	8 (2) 4×2	15 (13) 5×3	24 (6) 6×4	36 (7) 6×6
4	9	16 (1) 4×4	25	42 (5) 7×6
5	10 (10) 2×7	18	28	49

1 2 3 4 5 6 7

乘號前是保留上一步的候選數
紅色是下一步保留的候選數

研究三-1
從候選數組合探討對戰策略

1-1. 平方數的分類
(1)「單候選數」的平方數：只有 1 個候選數，有 1、25、49、64、81。
(2)「複候選數」的平方數：具 2 個以上候選數，有 4、9、16、36。

1-2. 平方數在對戰策略上的應用
(1) 選擇「單候選數」的平方數，不利於阻擋對手連線。
(2) 「單候選數」的平方數周圍有許多可連跳乘積數，有利於突破對方封鎖。
(3) 因平方數可限制對手下一輪只能下某數的倍數，以平方數作為對戰策略起始點，可更好預測對手的走法及應對，使該策略易攻且易守。

2-1. 乘積數依候選數個數分類

2-2. 候選數個數分類在對戰策略上的應用
(1) 取得「多候選數」的乘積數，進攻較不易被封鎖。
(2) 選擇「多候選數」的乘積數，對手進攻方式會變得單一，有利於己方防守。

類型	候選數個數(個)	乘積數（最大候選數 9）	乘積數個數(個)
少候選數	1	1、25、49、64、81（都是單候選數的平方數）	5
	2	2、3、5、7、10、14、15、20、21、27、28、30、32、35、40、42、45、48、54、56、63、72	22
多候選數	3	4、9、16、36（都是複候選數的平方數）	4
	4	6(1×6、2×3)、8(1×8、2×4)、12(2×6、3×4)、18(2×9、3×6)、24(3×8、4×6)	5

例如：若玩家 A「聽」時只缺「多候選數」的乘積數 4，且對手玩家 B下一步不可能取得4時，為了不讓玩家A取得4，便要避開「使用到」1、2、4 這 3 個候選數的乘積數來大幅縮小對手能下的乘積數範圍。

1	7	15	25	36	54
2	8	16	27	40	56
3	9	18	28	42	63
4	10	20	30	45	64
5	12	21	32	48	72
6	14	24	35	49	81

1 2 3 4 5 6 7 8 9

研究三-2
從可連跳的乘積數探討對戰策略

1. 可連跳乘積數的相關性質分析
發現：25、54 和 64，是「D. 可連跳且可賓果的乘積數個數」最少的 3 個乘積數。其中 25 可賓果乘積數的 D 值，明顯比 54 和 64 可賓果乘積數的 D 值較低。此為 25 策略較占優勢的理由之一。所以對戰時可優先選擇「可連跳且可賓果乘積數個數」較少的乘積數。

可連跳乘積數的相關性質分析表示例

乘積數	候選數組合	A. 候選數個數	B. 可連跳的乘積數（有公因數）紅色是可連跳且可賓果	C. 可連跳的乘積數個數	D. 可連跳且可賓果的乘積數個數	E. 可連跳但無法賓果的乘積數個數
1	1×1	1	2 3 4 5 6 7 8 9	8	5	3
2	1×2	2	1 3 4 5 6 7 8 9 ~~4~~ ~~6~~ ~~8~~ 10 12 14 16 18	13	7	6
81	9×9	1	9 18 27 36 45 54 63 72	8	3	5

1 5：3	7 4：12	15 4：12	25 2：6	36 4：12 4×9 3：5 6×6	54 2：12
2 7：6	8 7：9 1×8 5：8 2×4	16 7：8 2×8 4：4 4×4	27 3：11	40 6：10	56 7：9
3 8：6	9 6：10 1×9 3：5 3×3	18 8：8 2×9 10：3 3×6	28 8：8	42 10：6	63 8：8
4 8：7 1×4 4：4 2×2	10 10：6	20 11：5	30 8：8	45 7：9	64 2：6
5 5：11	12 5：9 2×6 7：8 3×4	21 8：8	32 6：7	48 8：7	72 8：8
6 5：11 1×6 5：9 2×3	14 7：9	24 4：12 3×8 4：10 4×6	35 6：10	49 3：5	81 3：5

各乘積數可連跳的相關性質對照圖
可連跳且賓果的乘積數個數：可連跳但不可賓果的乘積數個數

2. 可連跳乘積數個數的計算公式
當最大候選數為 c，乘積數$z=a\times b$的可連跳乘積數是：a 的 1～c 倍少了 b 倍、b 的 1～c 倍少了a 倍，故 z 的可連跳乘積數個數≤ $2c-2$。

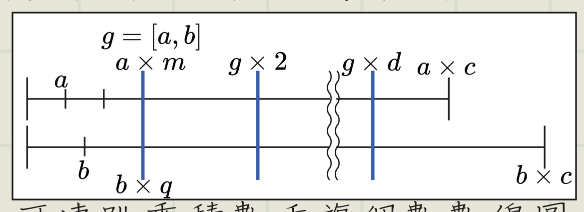
【問題】乘積數$z=a\times b$的可連跳乘積數中，有多少個重複的乘積數？

【求解】任一乘積數$z=a\times b$，且$a\leq b$

若$[a,b]=g$，重複的乘積數會出現在$a\times c$間，且個數＝無條件捨去到整數$\left(\frac{a\times c}{g}\right)$。

∴刪去的重複個數＝無條件捨去到整數$\left(\frac{a\times c}{g}\right)-1$

得出任一乘積數$z=a\times b$的可連跳乘積數：無條件捨去到整數$\left(\frac{a\times c}{[a,b]}\right)-1$



可連跳乘積數重複個數數線圖

【驗算】令$c=25$，$a=12$，$b=16$，則$a\times b=192$ ，$[12,16]=48$，

$\left(\frac{12\times 25}{48}\right)-1\approx$ 6-1 $=5$，確實有 5 個重複！

乘積數 192 的可連跳乘積數（最大候選數是 25）

192 12×16	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	204	216	228	240	252	264	276	288	300
	16	32	~~48~~	64	80	~~96~~	112	128	~~144~~	160	176	208	224	~~240~~	256	272	~~288~~	304	320	336	352	368	384	400

【特例】若$a=b$，而可連跳乘積數個數＝要刪去的乘積數的個數＝$c-1$

若$[a,b]=a\times b$，且$b>\frac{c}{2}$，則可連跳乘積數有$2c-2$個，無重複。

3. 可連跳乘積數的個數在對戰策略的應用
3-1. 當候選數組合是互質的兩數時，可連跳乘積數最多，有 $2c-2$ 個。選擇此種乘積數的優勢是：有許多可以向外發展的可能性，但是對手下一步只能從眾多可選擇的可能性中擇一，故不易被對手猜到自己的計謀，或掌控、阻礙到自己想要發展連線的動向。
3-2. 單候選數的平方數、立方數……可連跳乘積數最少，容易限制對手下一步的動態。不管對手如何下，己方都可移回此候選數。所以可利用此類的單候選數的倍數來連線（進攻）。

研究三-3
從乘積數的賓果組合來探討對戰策略

1. 探討全部的賓果組合：共有 54 種組合。
2. 賓果組合相關性質分析：
「賓果係數」愈高，代表愈不容易被對手阻擋、可得到賓果的機會愈大。

乘積數的賓果組合彙整表

1、2、3、4	8、9、10、12	18、20、21、24
1、7、15、25	8、16、27、40	18、28、42、63
1、8、18、30	8、18、30、48	18、30、48、81
2、3、4、5	9、10、12、14	20、30、45、64
2、8、16、27	9、18、28、42	20、28、40、54
2、9、20、32	9、20、32、49	21、32、48、72
3、4、5、6	10、20、30、45	21、30、42、56
3、9、18、28	10、18、27、36	24、32、45、63
3、10、21、35	12、21、32、48	24、35、49、81
4、9、16、25	12、20、28、40	25、27、28、30
4、10、20、30	14、24、35、49	27、28、30、32
5、12、21、32	14、21、30、42	28、30、32、35
5、10、18、27	15、16、18、20	36、40、42、45
6、14、24、35	15、25、36、54	40、42、45、48
6、12、20、28	15、27、42、64	42、45、48、49
7、8、9、10	16、18、20、21	54、56、63、64
7、15、25、36	16、27、40、56	56、63、64、72
7、16、28、45	16、28、45、72	63、64、72、81

棋盤各位置的乘積數賓果組合相關性質分析表示例

位置	賓果組合（橫+直+斜）	F. 賓果組合個數	G. 可賓果的乘積數個數	乘積數	候選數組合	H. 可賓果且可連跳的乘積數個數	I. 可賓果但不可連跳的乘積數個數	賓果係數 $\frac{I-H}{G}$
A1	1+1+1	3	9	1	1×1	5	4	-0.11
A2	1+2+1	4	10	2	1×2	7	3	-0.40
A3	1+3+1	5	11	3	1×3	8	3	-0.45
A4	1+3+1	5	11	4	1×4	8	3	-0.45
					2×2	4	7	0.27
A5	1+2+1	4	10	5	1×5	5	5	0.00
F5	1+2+1	4	10	72	8×9	8	2	-0.60
F6	1+1+1	3	9	81	9×9	3	6	0.33

1 -0.11	7 0.20	15 0.27	25 0.64	36 0.20 4×9 0.40 6×6	54 0.56
2 -0.40	8 -0.17 1×8 0.17 2×4	16 0.13 2×8 0.50 4×4	27 0.63	40 0.00	56 -0.40
3 -0.45	9 0.25 1×9 0.63 3×3	18 0.16 2×9 -0.05 3×6	28 0.16	42 -0.25	63 -0.45
4 -0.45 1×4 0.27 2×2	10 -0.25	20 -0.16	30 0.16	45 0.13	64 0.64
5 0.00	12 0.17 2×6 -0.17 3×4	21 0.00	32 0.25	48 -0.33	72 -0.60
6 -0.11 1×6 -0.33 2×3	14 -0.40	24 0.27 3×8 0.27 4×6	35 -0.09	49 0.40	81 0.33

各乘積數賓果係數與位置對照圖

發現：
(1) 賓果係數最高為 0.64，乘積數是 25 和 64 兩數，恰巧都是平方數。這和我們在研究二-2、(一)、1-2 中的發現一致：平方數適合作為一個對戰策略的起始點。
(2) 從研究一-4 已知賓果組合個數，在棋盤上位置有對稱性。愈靠近棋盤中央位置的乘積數，賓果組合個數愈多，理論上獲勝機會愈大。但是還要考慮被對手在下一步阻礙取得賓果獲勝的機會。所以賓果係數的分布並非中央位置最高。
(3) 賓果係數最高的乘積數 25，可與其賓果連線的乘積數，賓果係數明顯比其他乘積數更多為非負數的情形。而另一個賓果係數最高的乘積數 64，其可賓果的乘積數就比較 25 有較多的負數。所以，25 策略為何是較容易獲勝的策略，可從賓果係數較高來作解釋。

研究三-4
探究各乘積數下一步對戰最佳選擇

(一) 貼子策略

1. 從後手防守的觀點，有效的阻擋，應是下在對手棋子附近，緊挨著對手的棋，稱為「貼子策略」。
2. 經我們的分析，只考慮棋盤位置幾乎都是先手會贏；只有後手第 1 步下在先手位置斜角上，才可能和局。所以貼子策略並無法有效阻擋先手的進攻。

最佳應對優先順序對照表示例

乘積數	下一步應對的優先排序
1(1×1)	8(1×8)、2(1×2)、7(1×7)
2(1×2)	8(2×4)、8(1×8)、9(1×9)、7(1×7)、3(1×3)、1(1×1)
3(1×3)	9(3×3)、9(1×9)、8(1×8)、2(1×2)、4(1×4)
4(1×4)	12(3×4)、9(1×9)、5(1×5)、3(1×3)
5(1×5)	4(1×4)、10(2×5)、6(1×6)
6(1×6)	5(1×5)、12(2×6)

(二) 九宮格最佳化應對分析

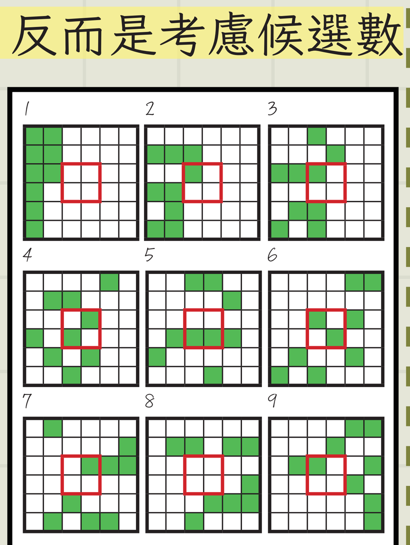
以最佳應對選數的對戰過程示例

先手	28	30	27	35	7	9	1	5	45	10/40/12/24
後手	20	18	21	49	2	3	6	25	15	獲勝

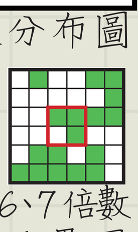
1. 研究方法：從後手應對的觀點，以每個乘積數為九宮格中心，列出另外 8 個乘積數下一步可連跳的乘積數。往下分析 4 步，評估後手選擇何數較占優勢，以此來選擇要下的數。
2. 結果：使用此法實際對戰，九宮格裡的數，在下過幾顆棋後，就剩下一些下了自己並沒幫助的數，或不存在可連跳的數，只好選擇超出九宮格範圍的可連跳乘積數。此時考慮：在可連跳乘積數中，選擇哪些候選數組合的乘積數，會較有利。
3. 結論：九宮格裡選擇最佳應對數字的策略，並不實用！反而是考慮候選數的倍數分布，是較有利的應對策略。

(三) 倍數位置分布與疊加

1. 位於棋盤中央區域的 4 個乘積數，對取得賓果連線具重要影響力。不僅能大幅提升連線機率，也能阻擋掉對手多條連線機會。
2. 候選數 5 的倍數分布圖，有兩個倍數是位於中心方框區域，且在第 4 橫列的中間段，連續排列成賓果的情形。這些位置也是棋盤上賓果組合數較多的位置。若是使用 25 策略，可阻擋對方在此 4 個位置上賓果連線機會，並能提高賓果機會。
3. 重疊候選數 6 和 7 的倍數，發現有 3 數均位於中心方框。故採用 42 策略，易向外發展並取得對賓果連線有重要影響力的中央。實戰經驗中發現 42 策略也是優勢策略之一。



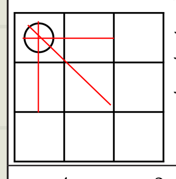
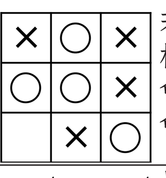
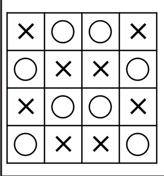
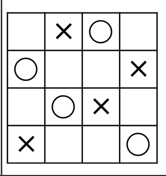
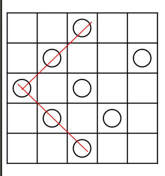
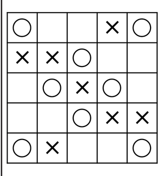
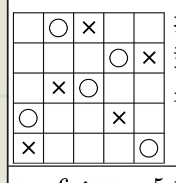
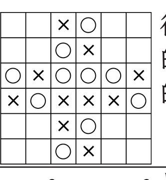
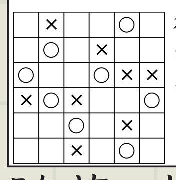
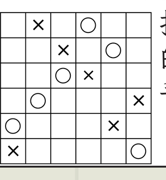
各候選數倍數分布圖



6、7倍數重疊圖

研究三-5
探究獲致和局的最少步數與策略

1. 目的：找出利於後手防守位置來破解先手優勢，至少和局。
2. 解題過程：先棋擬先手選擇位置下棋，為求占最少位置、且能確保橫、直、斜的組合皆有占到。仿製先手的占位找出後手可下位置。
3. 探究 $n \times n$ 棋盤和 m 數連線賓果的和局最小步數規律性。（○：先手、×：後手）
4. 發現和局最小步數：
   (1) 在 $n > 3$ 的棋盤，若 $m = n$，為 $2n$。
   (2) $n = 6$ 時，$m \geq 4$ 時，隨著 m 加 1 而減 4。
5. 延伸更大棋盤：在 $n > 4$，$n \equiv 0(\text{mod}2)$ 時，$m = n - 1$ 連的和局最小步數 $= 16 + (n-6) \times 3$
6. 和局最小步數的應用：雖然受到選數規則的限制，不一定能以最小步數取得和局，但是採用防守策略時，還是可以考慮搶占哪些位置，就能有效阻擋對手的進攻。

$n = 3$，$m = 2$ 先手不管下任一位置，至少都有 3 個選擇，後手一次只能擋 1 條，先手必勝。	$n = 3$，$m = 3$ 最快 8 步和局，因為若先手下的棋錯開，且橫、直、斜皆有防到，會形成連線。所以一定會有一排重複放棋。
$n = 4$，$m = 3$ 最少 16 步和局，因為下棋時若盡量錯開，會有連線，且中間排只能放 4 組先手的棋，否則也有連線，加上四周也要放 4 顆棋。後手同理。	$n = 4$，$m = 4$ 最少 8 步和局，因為就算棋子錯開，不會有連線，所以先手 4 步，後手也 4 步。
$n = 5$，$m = 3$ 先手必勝，因為要阻擋對手連線的話，至少要有 2 行放 2 棋以上，且若占了那些格子，會連線。	$n = 5$，$m = 4$ 最少 15 步和局，後手下中間那 3 格可以阻斷後先手中間橫、直的所有連線，而外圍 4 顆棋可同時阻擋兩條對角線旁邊共 4 條斜線，以及外圍的連線。
$n = 5$，$m = 5$ 最少 10 步和局，後手把 5 步棋均勻分散包含對角線，使先手沒有賓果機會。	$n = 6$，$m = 4$ 最快 20 步和局，且先後手下棋分布皆在中間的橫、直排，阻擋斜邊的方法皆相同。
$n = 6$，$m = 5$ 最快 20 步和局，且先後手下棋分布皆在中間的橫、直排，阻擋斜邊的方法皆相同。	$n = 6$，$m = 6$ 最少 12 步和局，因為把先、後手的棋不重疊的分布，先手 6 步，後手也 6 步共 12 步。

n	$m = n - 1$ 連和局最少步數	較 $n - 2$ 時增加的步數
6	16	初始為 0
8	22	6
10	28	6
n	$16 + (n-6) \times 3$	6

研究四-1
改變乘積數的排列方式

(一) 探討會受數字排列變動而影響的性質

改變棋盤的數字排列順序對相關性質的影響分析表

性質	是否變動	理由
A. 各位置的賓果組合數量	否	由位置決定賓果組合數量
B. 各位置的可賓果乘積數個數	否	由位置決定可賓果乘積數
C. 各乘積數的候選數組合	否	由候選數組合決定乘積數
D. 可連跳乘積數及個數	否	由候選數決定可連跳乘積數
E. 各乘積數的可賓果乘積數	是	由位置決定賓果組合，當乘積數的位置改變，由位置對應到的乘積數，都會跟著變動
F. 可連跳且可賓果的乘積數	是	
G. 可連跳但不可賓果乘積數	是	
H. 可賓果但不可連跳乘積數	是	

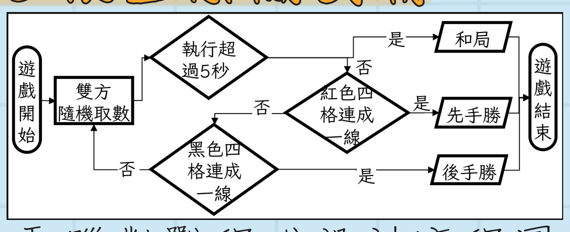
(二) 變化數字排列後的賓果係數計算公式

1. 「可賓果但不可連跳乘積數」＝「可賓果乘積數個數 y」－「可連跳且可賓果乘積數個數 j」代入賓果係數計算公式：
   賓果係數＝$\dfrac{\text{「可賓果但不可連跳乘積數」}-\text{「可連跳且可賓果乘積數個數}j\text{」}}{\text{「可賓果乘積數個數}y\text{」}} = \dfrac{(y-j)-j}{y} = \dfrac{y-2j}{y}$
2. 變化棋盤數字排列之後，很容易就可計算出新棋盤上各乘積數的賓果係數。可利用賓果係數，來快速評估新棋盤的數字排列是否讓各乘積數的優勢平均、較為公平。

研究四-2
編寫程式模擬隨機對戰

(一) 用 Scratch 編寫程式模擬 6×6 棋盤隨機對戰

1. 結果：隨機下棋 1000 盤，後手 340 勝，先手 494 勝，和局為 166 次，先手的勝率較高，勝率大約接近 5 成。
2. 討論：模擬隨機對戰的結果，數字由小到大排列的棋盤，是先手較占優勢的不公平棋盤。這和我們實際對戰的經驗相符。



電腦對戰程式設計流程圖

(二) 用 Scratch 編寫程式模擬 5×5 棋盤隨機下棋

1. 調整棋盤對應數字變成 5x5 棋盤，分別測試 4 連賓果及 3 連賓果兩種不同賓果條件。
2. 結果：(1) 若賓果規則為 4 格連成一線，則和局較多。
   (2) 若賓果規則為 3 格連成一線，則勝率與 6x6 棋盤差不多，也是先手勝率較高。
3. 討論：
   (1) 5x5 棋盤棋盤若賓果連線數字只比邊長小 1，則易互相被對方阻擋，形成和局，不易有勝方。此與我們前面討論幾數連線較合適的結論一致：邊長 n 的棋盤，賓果連線數 m 訂為略大於 n 的一半、但不要接近 n 較為合適。
   (2) 電腦模擬 5x5 棋盤隨機對戰的結果，顯示數字由小到大排列的棋盤，是先手較占優勢的不公平棋盤。這也和我們實際對戰的經驗相符。
4. 結論：
   (1) 隨機下棋，改變賓果條件設定會影響遊戲是否容易分出勝負。
   (2) 隨機下棋時，不管是 5x5 棋盤或 6x6 棋盤，都是先手勝率較高，是不公平的遊戲。

研究四-3
探究公平的遊戲設計

(一) 改變棋盤數字排列

1. 設計方式：
   (1) 角落放多候選數：賓果組合少、搭配發展性高的乘積數。
   (2) 中心放單候選數平方數：賓果組合多、搭配可連跳乘積數少。
   (3) 其他有公因數的乘積數盡量不排同一直線：倍數分布不要製造連線或阻斷連線。
2. 設計兩種不同數字排列的棋盤。
3. 驗證棋盤的公平性：

【方法一：賓果係數的分布】

計算棋盤上各乘積數的賓果係數，中央位置賓果的賓果係數大致相近。

24 0.33 3×8 0.56 4×6	45 0.80	48 0.27	20 0.45	56 0.40	18 0.78 2×9 0.33 3×6
63 -0.20	2 0.17	21 0.50	9 0.38 1×9 0.63 3×3	7 0.00	32 0.60
40 0.27	28 0.50	25 0.79	64 0.79	30 0.38	42 0.27
72 0.09	6 0.25 1×6 0.50 2×3	81 0.58	49 0.89	16 0.38 2×8 0.88 4×4	15 0.45
54 0.00	5 -0.17	4 0.25 1×4 0.63 2×2	10 0.50	3 0.00	36 0.20 4×9 0.80 6×6
12 0.56 2×6 1.00 3×4	35 0.00	14 -0.27	1 0.45	27 0.60	8 0.56 1×8 0.56 2×4

公平棋盤-1及賓果係數對照圖

12 0.78 2×6 0.56 3×4	35 0.40	32 0.45	45 0.45	28 0.40	18 0.78 2×9 0.33 3×6
63 0.20	54 0.17	36 0.38 4×9 0.63 6×6	6 0.25 1×6 0.50 2×3	1 0.50	56 0.4
15 0.27	2 0.38	25 0.79	64 0.79	9 0.38 1×9 0.75 3×3	14 0.27
7 0.27	16 0.38 2×8 0.75 4×4	81 0.58	49 0.68	40 0.25	30 0.09
10 -0.20	3 0.17	48 0.50	4 0.38 1×4 0.50 2×2	27 0.17	5 0.40
8 0.33 1×8 0.56 2×4	42 0.40	21 0.45	20 0.09	72 0.00	24 0.56 4×6 0.33 3×8

公平棋盤-2及賓果係數對照圖

【方法二：電腦模擬隨機對戰的勝率】

把電腦對應方式改成公平棋盤 1，隨機下棋 1000 次，先手勝 388 局，後手勝 272 局，和局 340 局，顯示已接近公平棋盤！

研究四-3
探究公平的遊戲設計

(一) 改變棋盤數字排列

【方法三：實際對戰】

(1) 和隊友多次實戰，發現厲害的後手幾乎都能獲勝！

(2) 對戰策略應用心得：

① 雖然賓果係數越高越不容易防守，但是後手若是不採防守策略，反而去創造另一條進攻路線時，先手第一步選擇賓果係數高的乘積數，就容易被後手掌握選數的主動性，一不小心沒有注意到，就變成被動防守而導致後手獲勝了。

② 改變數字排列方式的棋盤，賓果係數只能做為參考。但是單候選數的平方數、取得棋盤中央區域、以及考慮倍數分布，依舊是較占優勢的策略。

③ 設計棋盤時，單候選數平方數的周圍，如果是完全由互質的乘積數（沒有公因數），則搶占此平方數變是優勢策略。雖然這樣看起來似乎較不公平，但是如果棋盤上也有其他平方數做類似的排列，讓雙方都有機會搶得連線機會，就能考驗彼此的攻防能力了！

4. 結論：我們設計的棋局，先手和後手都可憑實力獲勝！所以是公平的棋盤！

(二) 變化遊戲規則

我們發現和局時，也有可能是棋盤上還有剩餘的數，但是雙方都無法取數的情形。如果將有剩餘格子的和局，改成獲勝條件之一：「棋盤仍有剩餘格子，但無法取數者輸。」這樣居於連線劣勢的後手，就可以採取此策略逼死先手，讓雙方都有不同的攻擊策略，而不是單方面被動防守而已。

從我們的實戰經驗，發現無法繼續取完剩餘乘積數的情形，都是最後一次選取的 2 個候選數，其倍數都被取完了。未來可以繼續探究：有什麼取數策略，可以讓對手無法繼續選取棋盤中剩餘的乘積數，而逼死對手讓自己獲勝？

肆、結論

一、遊戲設計的數學結構與原理

（一）候選數 1 ～c 與形成棋盤之間的關係：
1. 任一乘積數 z_i，都是 2 個候選數組合的乘積，
   $z_i = a_1 \times b_1 = a_2 \times b_2 = \cdots = a_{m_i} \times b_{m_i}$。
2. 排除候選數組合的對稱性，候選數組合總數為：$\frac{c(c+1)}{2}$。
3. 不重複計算的乘積數總數 $\mathrm{K} = \frac{c(c+1)}{2} - \sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\left(m_i - 1\right)$。若 K 為平方數，則恰可排成正方形的完美棋盤。
4. 編寫程式，找出 $c \leq 500$，K 為平方數的 c 值有 7 個：1、4、7、9、25、129、499。

（二）最大候選數 c 的乘積數中，具有至少兩組候選數組合的乘積數：
1. 若乘積數 z 是 $\leq c$ 的合數，一定有兩組以上的候選數組合，即 $z = a_{m_i} \times b_{m_i}$，$m_i \geq 2$。
2. 有重複候選數組合的乘積數，其最大質因數 $p_i \leq \frac{c}{2}$。
3. 若 c 是質數，則 $\sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\left(m_i - 1\right) - \sum_{i=1}^{\mathrm{K-1}}\left(m_i - 1\right) = 0$
4. 若 c 是合數：$\sum_{i=1}^{\mathrm{K}}\left(m_i - 1\right) - \sum_{i=1}^{\mathrm{K-1}}\left(m_i - 1\right) \doteqdot$ 無條件進位到整數 $\frac{c}{2} - 1$。

（三）棋盤邊長 n、m 連賓果的賓果條件設定對遊戲設計的影響：
1. 棋盤不同位置的賓果組合數量具有對稱性：當 $m \neq n$ 時，中心>邊上≥角落＝3。
2. 從 n、m 可計算所有賓果組合總數，及各位置的可賓果乘積數個數。
3. 合適的賓果條件，m 要略 $> \frac{n}{2}$，但不可接近邊長；且賓果組合總數以接近 50 為佳。

二、邊長 3 和 5 棋盤的優勢方與對戰策略

（一）都是先手占優勢。
（二）優勢策略有：搶占賓果組合數最多的中位置、選擇相同候選數組成的平方數、選擇倍數分布較占優勢的候選數。

三、邊長 6 棋盤的數字組成特性與對戰策略應用推廣

（一）由小到大的數字排列，先手較占優勢。
（二）優勢策略有：
1. 以平方數作為對戰策略的起始點，更好預測對手下一步的走法及應對，容易進攻且容易防守；但不易阻擋對方連線。
2. 取得「多候選數」的乘積數，進攻時較不易被對方封鎖，易提高獲勝機會；對手進攻方式會變得單一，故有利於己方防守。
3. 優先選擇「可連跳且可賓果的乘積數個數」較少的乘積數。而任一乘積數 $z = a \times b$ 的可連跳乘積數為：無條件捨去到整數 $\left(\frac{a \times c}{[a,b]}\right) - 1$。
4. 候選數組合是互質的兩數時，可連跳乘積數最多。選擇此乘積數優勢是:有許多可向外發展的可能性，不易被對手猜到自己的計謀。
5. 單候選數的平方數、立方數……可連跳乘積數最少。容易限制對手下一步的動態。可利用單候選數乘積數來取得某個候選數的倍數進攻連線，因為不管對手如何下，己方都可移回此候選數。
6. 「賓果係數」公式：$\dfrac{\text{「可賓果但不可連跳乘積數」}-\text{「可連跳且可賓果乘積數個數」}}{\text{「可賓果乘積數個數」}}$
   「賓果係數」愈高的乘積數，代表愈不容易被對手阻擋、可得到賓果的機會愈大。
7. 選擇倍數位置分布或疊加後，可涵蓋棋盤賓果組合數較高位置的候選數組合。

四、改良遊戲設計

（一）改變數字排列，可預測棋盤結構的變化情形。
（二）變換位置的賓果係數＝$\dfrac{\text{「可賓果乘積數個數}y\text{」}-2\times\text{「可連跳且可賓果乘積數個數}j\text{」}}{\text{「可賓果乘積數個數}y\text{」}} = \dfrac{y-2j}{y}$
（三）利用 Scratch 編寫程式模擬隨機對戰，驗證了原本棋盤為先手優勢的不公平棋盤，及合適的賓果條件。
（四）改變棋盤數字排列，設計 2 種 6x6 的公平棋盤，利用賓果係數、電腦模擬隨機對戰與實際對戰等三種方法檢驗，證實：
1. 設計公平棋盤，數字排列要同時考慮賓果組合數量、平方數、多候選數等位置分布。
2. 巧妙的運用不同策略，雙方都有機會獲勝。
（五）未來可繼續探究調整遊戲規則，增加逼死對手的獲勝條件：仍有剩餘數字但無法取數者輸。

陸、參考資料

1. 黃鼎祐、陳彥程。探討多人玩的井字棋 _Otrio 是否有必勝方法。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會作品說明書，國小組數學科。
2. 楊皓程、吳承瀚、王元竣、李秉謙、曾元庠、楊健志。棋盤上的奇蹟－奇「雞」連連。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會作品說明書，國小組數學科。
3. 徐婕恩、徐子涵、李佩蓁、廖孟涵。機率無所不在－探討麻將賓果遊戲中獎機率。中華民國第 63 屆中小學科學展覽會作品說明書，國小組數學科。