中華民國第65屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第一名

080405

尋找迷失的立體羊－解構六角星拼圖之研究

學校名稱：　高雄市左營區勝利國民小學

作者：	指導老師：
小六　蔡侑倫	侯淑芬
小六　鍾明其	謝蕙春
小六　黃詠諒	
小六　顏嘉萱	

關鍵詞：　正四面體、展開圖

得獎感言

「第一名-080405！」一聽到司儀的宣布，想起經歷過的辛苦，我激動得差點哭了出來!。一開始因為對六角星拼圖感到好奇，所以進行了這次的研究。研究過程並非一帆風順，面對遭遇的種種瓶頸，在老師的引導，夥伴們的合作下，我們一一突破，最終成功完成整個研究。然而，完成作品後，還要能夠將作品做最好的展現與發表，這對於不擅長發表且遇到壓力又很容易緊張的我而言，實在是一大挑戰。最終，我克服了難關，學會克服緊張的方法，而我也體會到參加比賽最重要的不是最後的名次，而是過程中自己的學習和成長。(侑倫)

在決定要參加科展的時候，我就知道接下來的日子不輕鬆了，但即便如此，我仍然選擇「要參加!」，因為我有預感：參與科展將會有很多收穫。比賽前，淑芬老師請了很多老師聽我們發表，訓練我們的發表與答詢，其中，榮山老師教我們把手背後面克服緊張的方法，我覺得最實用!而淑芬老師常唸我們的「金句」—「把你想的講出來，錯了也沒關係啊!」、「不說話是最不好的，有講總比沒講好!」也讓我們膽子變大，面對評審的提問，我們都能對答如流。上國中後，我想繼續做科展，也希望國中的我，能再次站上這榮耀的舞台。(嘉萱)

想當初獲得老師青睞加入數學科展團隊，研究過程有甘有苦，雖然遭遇不少困難，但是我和夥伴們一起解決了這些困難，且在高雄市科展比賽中得了第一名。一知道要代表高雄市參加全國科展，即便老師告訴我們，這代表研究還要繼續，我們仍雀躍不已。果然，精彩豐富的全國科展讓我們收穫滿滿!其中，解說作品是我印象最深刻的。當民眾依照我們解說的步驟摺出正四面體羊的瞬間，超有成就感的!參加科展，除了讓我學到一個研究從無到有需要有系統的思考架構外，還讓我知道如何透過團隊合作完美呈現研究成果。這些寶貴的經驗將是我日後學習成長的養分，也是我最美好的回憶。(明其)

科展研究雖然很累、很燒腦，但我覺得相當值得。研究與參賽的過程，令我印

象深刻的點相當的多，例如：畢業典禮預演時，老師在前台講話走流程，我們窩在座位上努力衝刺完成最後的研究成果等。日後如果還有機會，我想繼續參與科展，因為科展能學到新知識，更能精進自己。我學到：努力不一定會得到好的結果，但肯定會有收穫；發現錯了可以改正，遇到困難就要面對且想辦法解決，不要因為一個小小的挫折就輕易的放棄。如果遇到問題就灰心放棄，我們就享受不到獲獎這麼甜美的果實了！（詠諒）

思考、思考、再思考，我們就是這樣一步一步踏上全國科展之路

來自勝利，挑戰勝利!全國科展，我們來了!

感謝老師與家人們的支持與陪伴!贏得勝利，迎回勝利!

尋找迷失的立體羊–解構六角星拼圖之研究

摘要

「六角星拼圖摺紙遊戲」是一個將平面的六角星拼圖摺成一個正四面體，且使其中的三面連接起來是一隻完整羊的摺紙遊戲。本研究以能摺出正四面體的 23 個圖格組合模組為基底，以展開圖作為平面圖形到立體形體的媒介，成功解構六角星拼圖圖格的選取與摺法。除了得出解謎密技外，也證明了謎底圖格與摺法的唯一性。此外，應用解構六角星拼圖所得之定理，將研究擴展至設計多隻羊拼圖以及摺出正八面體的多角星拼圖探討，並將之應用在創意園遊會闖關活動上。

（本作品之所有照片或圖片均由作者拍攝或繪製）

壹、　前言

一、研究動機

數學遊戲時間，老師下了一個挑戰給我們：將六角星羊拼圖上的圖案摺成「一隻」羊。聽起來很簡單，一拿到「六角星羊拼圖」，我們都傻眼了。六角星羊拼圖是由 12 個正三角形的面所組成，其中 3 個面上有羊頭圖案、5 個面上有羊身體圖案、3 個面上有羊尾巴圖案，以及 1 個空白面。我們得避開假圖的干擾，找到正確的三個部位圖案所在的面摺成羊。雖然拼圖上有一道缺口，方便拼摺，但很難將羊的三個部位連接拼在一起。突然，有同學成功了！原來，是要摺成正四面體，且使正四面體側面上的圖案連成一隻羊，如圖 1。

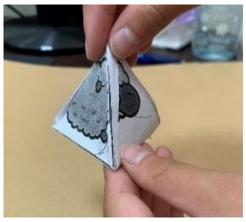
圖 1

六角星羊拼圖摺紙謎題

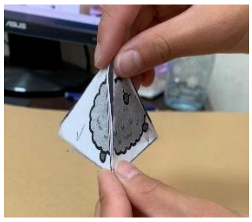
六角星拼圖

➔

俯視圖



羊頭接羊身體



羊身體接羊尾巴

但接下來我們請同學重新再摺時，他卻怎麼摺都摺不出來。老師常說：解題要能掌握數學的原型，知其所以然才能記得住、用得對。我們想知道有沒有什麼有系統的方法，只要掌握後，不管重複幾次都能摺成功？也好奇：謎底的三個面是如何選擇的？其他的面也能摺出羊圖嗎？摺法又是否唯一？還可以摺成其他的正多面體嗎？

二、研究目的

研究目的一：探討將六角星拼圖摺成正四面體羊的摺法
研究目的二：探討六角星羊拼圖謎底圖格與摺法的唯一性
研究目的三：探討能摺出多隻正四面體羊的六角星拼圖設計
研究目的四：探討能摺出正八面體的多角星拼圖設計

貳、研究設備及器材

一、六角星拼圖、空白六角星拼圖、空白十二角星拼圖、剪刀、智慧片 。

二、協助計算程式：Excel。

三、協助繪圖程式：Word、Powerpoint、draw.io。

參、研究方法

一、名詞解釋

（1）六角星拼圖的每一個正三角形稱為格子。

（2）有圖案的格子稱為圖格，空白的格子稱為空白格。

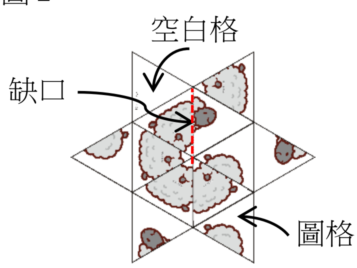
（3）將六角星拼圖摺成正四面體的羊圖案，稱為正四面體羊。

（4）缺口是指剪開處。研究討論與記錄時，我們擺放六角星拼圖，都讓缺口朝上方。

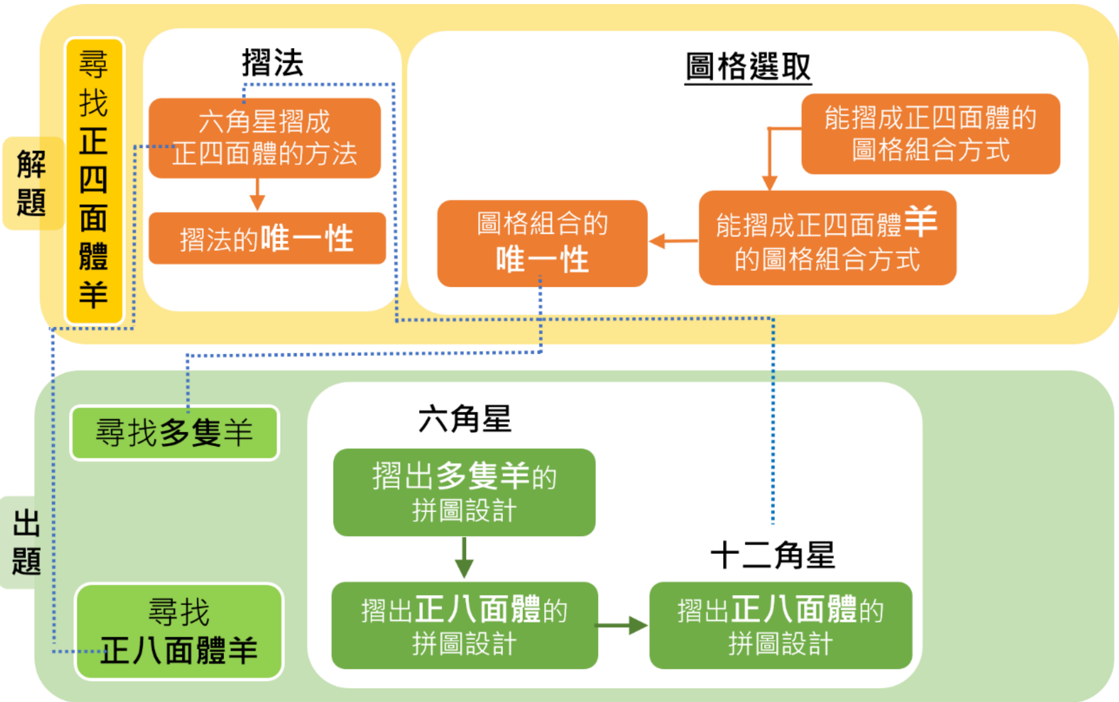
（5）單純摺：不透過缺口摺，僅以摺線為對稱軸，將格子摺到目標位置的對摺方法。

（6）缺口摺：透過缺口將格子摺到目標位置的對摺方法。

圖 2



二、研究架構



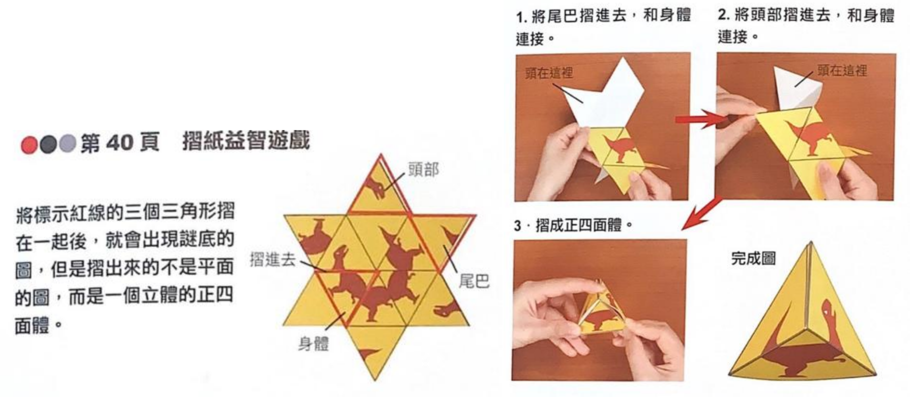
三、文獻探討

（一）六角星羊拼圖

六角星羊拼圖取材自 IQ 遊戲大百科一書第 1 冊（秋山仁，2013）一書。書上雖然有解答，但僅指出將哪幾個三角形摺在一起以及摺紙步驟，並未敘明為何要這樣摺以及是否有其他的摺法。如圖 3。

圖 3

IQ 遊戲大百科一書針對六角星拼圖之說明(作者翻攝)



註：取自《IQ 遊戲大百科第一冊》（頁 55），秋山仁，2013。天下雜誌。

（二）正多面體與其展開圖

柏拉圖正多面體總共有 5 種：正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體以及正二十面體（高允坤，2009)。其中，每個面是正三角形的有正四面體、正八面體與正二十面體。六角星拼圖是由 12 個正三角形組成的拼圖，我們如要探究可摺成的正多面體，可以正八面體與正二十面體為目標。

中華民國第 46 屆中小學科學展覽會作品說明書「柏拉圖的天空－正多面體展開圖之研究」（2006）中指出：正四面體展開圖有 2 種，正八面體展開圖有 11 種。文中利用作者找出的基本拆解模式產生正六面體與正八面體的所有展開圖。雖然文中已經指出正四面體與正八面體展開圖的所有類型，但為求能熟悉各類型展開圖的組成方式與差異，我們利用智慧片有規律的排出所有的展開圖，並根據我們自己的排法進行編碼，見說明書第 4 頁圖 4 與第 21 頁圖 26。

（三）與將平面圖形摺成立體形體有關之科展研究

本研究探討的六角星羊拼圖是平面圖形，摺成的謎底正四面體是立體圖形，我們查找到平面到立體以及與摺紙相關的研究，這些研究的摘要與對本研究的啟發整理如表 1。

表 1

文獻摘要及對研究的啟發

文獻名稱	與本研究相關內容摘要	對本研究的啟發
莫利之交－莫利定理在平面與立體的延伸探討（2013）	正多邊形具有很強的「對稱性」與「自我相似性」，正多面體則有很強的「對稱性」與「對偶性」。	六角星拼圖與正多邊形類似，也有很強的對稱性與自我相似性，研究摺法與圖格組合時可從此性質切入探索。
從摺紙中談規律之美（2005）	將紙條的摺痕定義出「內」與「外」之後，研究摺痕所形成數列的規律性及紙條立起來後最後所指的方向。	對摺六角星中的三角形時內摺或外摺對圖格造成的影響。

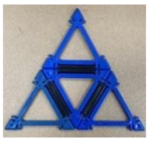
肆、研究過程與結果

研究一：探討將六角星拼圖摺成正四面體羊的摺法

六角星拼圖是平面圖形，而正四面體是立體形體，我們想到五年級下學期立體形體單元曾學過將立體圖形的展開圖做成立體圖形，便試著先將六角星拼圖摺成正四面體展開圖，再摺成正四面體。正四面體展開圖有 2 種，如圖 4。

圖 4

2 種正四面體展開圖



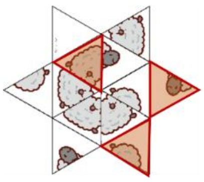
大三角形狀的展開圖

平行四邊形狀的展開圖

我們發現，透過先將六角星羊拼圖謎底的三個圖格(見圖 5 中標記的紅色格子)摺成平行四邊形狀的展開圖，便能將它摺成正四面體，如圖 5。

圖 5

將六角星拼圖摺成正四面體羊



六角星拼圖

對摺，使三個身體圖格朝上

頂端圖格向下摺

將左邊圖格向右摺，

摺成平行四邊形狀的**正四面體展開圖**

摺成正四面體羊

研究二：探討六角星羊拼圖謎底圖格與摺法的唯一性

謎底圖格是否為唯一解？有沒有其他圖格也能摺成正四面體羊？我們先探討哪些圖格組合能摺成正四面體；再探討如要摺成羊圖案，圖格上，羊頭、身體與羊尾巴擺放方向是否有影響？接著探討原六角星羊拼圖謎底圖格是否唯一，最後再討論摺法是否也是唯一。

研究二(一)：能摺成正四面體的圖格組合為何？

正四面體雖然有 4 個面，但只有 3 個面有羊的圖案，第 4 個面可以是其他圖格或空白格，也就是說我們只要探討 3 個圖格的組合方式即可。

步驟 1：分類

（1）將六角星分成外圈 6 格(粉紅色)和內圈 6 格(綠色)，如圖 6。依 3 個圖格佔內圈與外圈的格子數量，可分成：3 圖格在外圈（簡稱 3 外）；2 圖格在外圈，1 圖格在內圈（簡稱 2 外 1 內）；2 圖格在內圈，1 圖格在外圈（簡稱 1 外 2 內）；3 圖格在內圈（簡稱 3 內）四大類。如下頁表 2。

圖 6

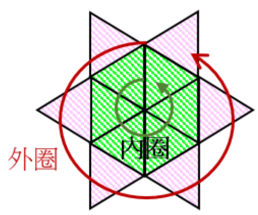


表 2

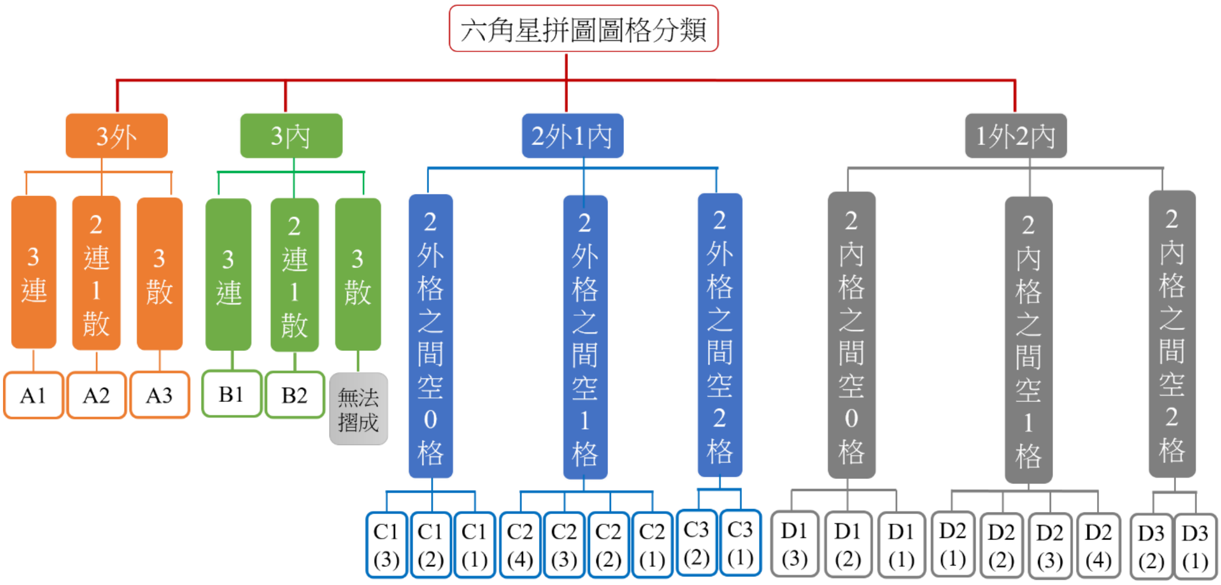
第一次分類各類型與外圈內圈圖格數

第一次分類名稱	3 外	2 外 1 內	1 外 2 內	3 內
外圈圖格數	3	2	1	0
內圈圖格數	0	1	2	3

（2）依照圖格間空白格數量進行二次分類。「3 外」及「3 內」又可分為「3 連」、「2 連 1 散」與「3 散」。「3 連」是指 3 個圖格間沒有空白格；「2 連 1 散」指兩圖格相連，且與第 3 個圖格間有空白格；「3 散」指圖格間均有空白格。「2 外 1 內」又可分成 2 外格之間空 0 格、空 1 格、空 2 格；「1 外 2 內」又可分成 2 內格之間空 0 格、空 1 格、空 2 格。「外格」指外圈的格子，「內格」指內圈的格子，如圖 7。

圖 7

六角星拼圖圖格分類



步驟 2：刪除無法摺成正四面體的圖格組合。

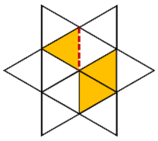
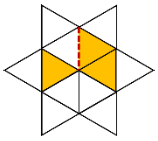
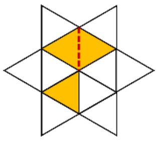
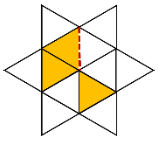
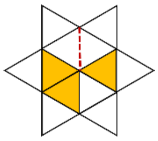
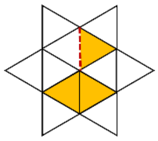
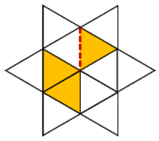
將各圖格組合一一畫出，共有 24 種圖格組合，但三內的三散類別無法摺成正四面體，故**共得出 23 種可摺成正四面體的圖格組合**，我們將這 23 種圖格組合稱為「模組」，並進行編碼，如圖 7。

發現：將模組旋轉或翻轉後，不一定都能摺成正四面體。

將六角星拼圖缺口位置固定不變，圖格經翻轉，或以六角星拼圖中心點為旋轉中心將模組旋轉 60°、120°、180°、240°、300°，由於缺口與圖格相對位置改變了，所以圖格組合不一定都能摺成正四面體，以 B2 模組為例，變形的模組中只有逆時針旋轉 60°與翻轉時才能摺成正四面體，如下頁圖 8。

圖 8

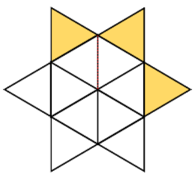
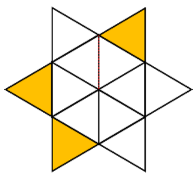
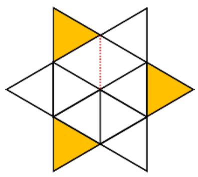
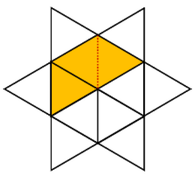
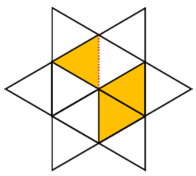
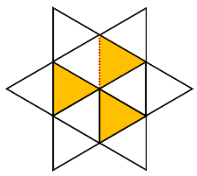
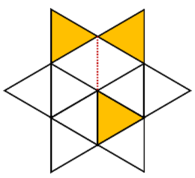
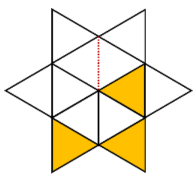
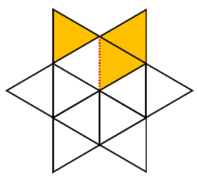
B2 模組各種變形

B2 模組	各種變形					
	 逆時針旋轉 60° 可摺成正四面體	 逆時針旋轉 120° 無法摺成正四面體	 逆時針旋轉 180° 無法摺成正四面體	 逆時針旋轉 240° 無法摺成正四面體	 逆時針旋轉 300° 無法摺成正四面體	 翻轉後的模組 可摺成正四面體

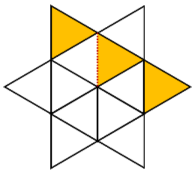
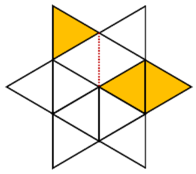
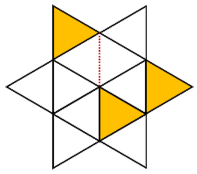
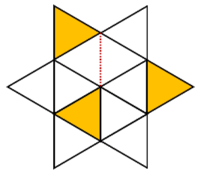
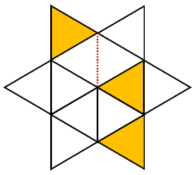
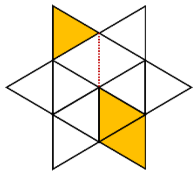
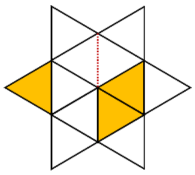
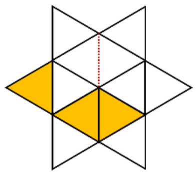
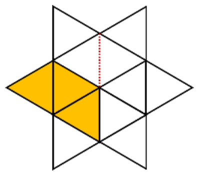
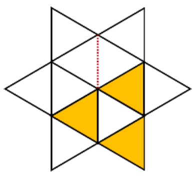
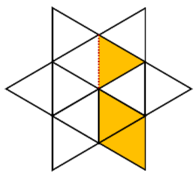
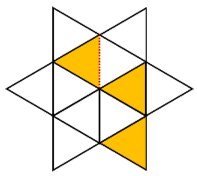
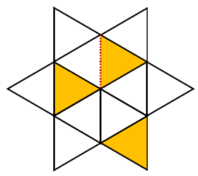
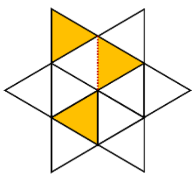
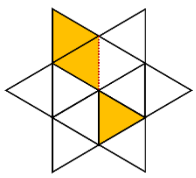
為後續研究方便，我們將各模組圖格逆時針旋轉後仍可摺成正四面體的角度標註為 R*X*°，*X*=60、120、180、240 或 300。另以 Ra 表示逆時針旋轉 60°、120°、180°、240°、300°後皆可摺成正四面體、F 表示翻轉後亦可摺成正四面體。各模組、代碼與其變形方式整理如表 3。

表 3

可摺成正四面體的 23 個模組

A（3外）	再分類	三連	二連一散	三散	
	圖				
	編碼	A1	A2	A3	
	變形	Ra、F	Ra、F	Ra、F	
B（3內）	再分類	三連	二連一散	三散	
	圖				
	編碼	B1	B2	**無法摺成正四面體**	
	變形	Ra、F	R60°、F		
C（2外1內）	再分類	2 外格之間空 0 格			
	圖				
	編碼	C1（1）	C1（2）	C1（3）	
	變形	Ra、F	Ra、F	F	

(續)

C（2外1內）	再分類	2 外格之間空 1 格			
	圖				
	編碼	C2（1）	C2（2）	C2（3）	C2（4）
	變形	R60°、F	Ra、F	Ra、F	Ra、F
	再分類	2 外格之間空 2 格			
	圖				
	編碼	C3（1）	C3（2）		
	變形	Ra、F	Ra、F		
D（1外2內）	再分類	2 內格之間空 0 格			
	圖				
	編碼	D1（1）	D1（2）	D1（3）	
	變形	Ra、F	Ra、F	Ra、F	
	再分類	2 內格之間空 1 格			
	圖				
	編碼	D2（1）	D2（2）	D2（3）	D2（4）
	變形	Ra、F	Ra、F	R60°、F	Ra、F
	再分類	2 內格之間空 2 格			
	圖				
	編碼	D3（1）	D3（2）		
	變形	Ra、F	Ra、F		

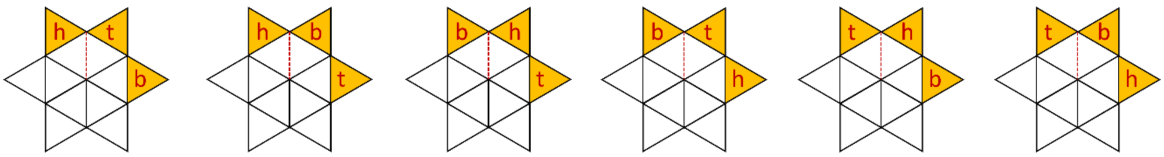
註：①RX°表示逆時針旋轉後 X°可摺成正四面體；②Ra 表示逆時針旋轉 60°、120°、180°、240°、300°後皆可摺成正四面體；③F 表示翻轉後可摺成正四面體

研究二(二)：能摺成羊圖案的圖格設計（羊頭、身體與羊尾巴的擺放方向）為何？

討論 1：羊頭、羊身體與羊尾巴圖案可否任意擺放在模組的圖格中？

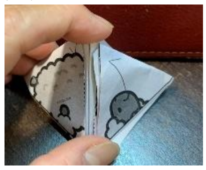
同一模組中，每一個圖格可以放羊頭（h）、羊身體（b）或羊尾巴（t）圖案，3×2×1=6，所以會有 6 種圖案擺放方式。以 A1 模組為例，會延伸出 6 種擺放方式，如圖 9。我們稱「次模組 A1-1」、「次模組 A1-2」「次模組 A1-3」，依此類推。

圖 9
A1 的次模組



A1-1　A1-2　A1-3　A1-4　A1-5　A1-6

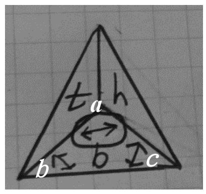
會不會有哪些次模組摺成正四面體的結果是羊頭接羊尾巴呢？摺成正四面體後，因為圖格彼此都是相鄰的面，所以每一個次模組都可能摺成正四面體羊，不會有羊頭接羊尾巴的情況。
然而，由於羊頭、羊身體與羊尾巴位於三角圖格的一條邊上，如果連接方向不對，是有可能羊頭接不到羊身體的，如圖 10。

圖 10


討論 2：影響羊頭、羊身體與羊尾巴圖案連接方向的因素？

發現 1：每一種次模組都只有一種連接方向能摺成羊圖

考量羊頭、身體與尾巴所在的圖格位置以及連接方向，一個圖格有 3 種連接方向，一共有 3 個圖格，所以每一種次模組會有 3×3×3=27 種不同方向的組合，但只有一種能摺成正四面體羊，說明如下。

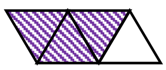
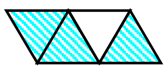
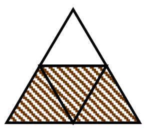
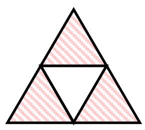
圖 11


說明：
因①身體要能連接頭和尾巴，所以頭、尾巴的方向要配合身體的方向。
②身體有 *a*、*b*、*c*，3 種方向選擇，如圖 11，但要能接到頭，同時也要能接到尾，所以只剩下 1 種方向。只有方向 *a* 能接到頭，同時也能接到尾巴。

發現 2：同一個模組，不同的摺法會產生相同或不同的方向組合。

正四面體展開圖有 2 種，將六角星拼圖摺成不同的正四面體展開圖，再摺成正四面體時，羊頭、羊身體與羊尾巴的連接是否也需要不同的方向呢？從正四面體展開圖切入思考，正四面體展開圖有 2 種，填入 3 個圖格和 1 個空白格後，會有 4 種組合，分別命名為 P1、P2、T1 和 T2，如圖 12。

圖 12
正四面體展開圖的 4 種組合

展開圖 圖格組合				
代碼	P1	P2	T1	T2

為便於溝通，我們以 Xd（Y）表示 X 模組摺成 Y 類展開圖後各圖格圖案的方向，例如 A1d（T1）表示 A1 模組摺成 T1 類展開圖後各圖格圖案的方向組合。

<u>說明</u>：

（一）不同摺法，連接方向相同

以 A1 模組為例，用 P1、T1 摺法所得到的方向是相同的，說明如圖 13。

圖 13

A1 模組內使用 P1、T1 摺法

A1　　A1（P1）　　A1（P1）方向

A1　　A1（T1）　　A1（T1）方向

（二）不同摺法，連接方向不同

以 A2 模組為例，A2 可以摺成 P1、P2、T1 三種展開圖，而 P1、P2、T1 摺法所得到的方向均不相同的，如圖 14。

圖 14

A2 模組摺成 P1、P2、T1 三種展開圖

A2　　A2（P1）　　A2（P1）方向

A2　　A2（P2）　　A2（P2）方向

A2　　A2（T1）　　A2（T1）方向

以 Nd（X）表示 X 模組會有幾種方向組合，並將之定義為 X 模組的方向數。各模組摺法與方向數整理如表 4。

表 4

各模組摺法與方向數

模組	摺法	方向	方向數 Nd（X-n）	設計圖數=Nd（X-n）×6
A1	P1，T1	d（P1）=d（T1）	1	6
A2	P1， P2，T1	d（P1） d（P2） d（T1）	3	18
A3	T2	d（T2）	1	6
B1	P1，T1	d（P1）=d（T1）	1	6
B2	P1， T1	d（P1）=d（T1）	1	6
C1（1）	P1，P2	d（P1） d（P2）	2	12
C1（2）	P1， T1	d（P1）=d（T1）	1	6
C1（3）	P2	d（P2）	1	6
C2（1）	T2	d（T2）	1	6
C2（2）	P1， T1	d（P1）=d（T1）	1	6
C2（3）	T2	d（T2）	1	6
C2（4）	P1，T1	d（P1）=d（T1）	1	6
C3（1）	P1	d（P1）	1	6
C3（2）	P2	d（P2）	1	6
D1（1）	P1，T1	d（P1）=d（T1）	1	6
D1（2）	P2	d（P2）	1	6
D1（3）	P1，T1	d（P1）=d（T1）	1	6
D2（1）	T2	d（T2）	1	6
D2（2）	P2	d（P1）	1	6
D2（3）	T2	d（T2）	1	6
D2（4）	P1， P2，T1	d（P1） d（P2） d（T1）	3	18
D3（1）	P1，T1	d（P1）=d（T1）	1	6
D3（2）	P1	d（P1）	1	6
				合計 168

發現 3：方向數×6＝模組設計圖數，進而可算出所有六角星拼圖可摺成正四面體羊的設計組合總共有 168 種。

找出各模組的方向數後，因各個模組會有 6 種次模組，模組設計圖數＝方向數×6。23 個模組的方向數，以及設計圖數整理如表 4。加總 23 個模組的設計圖數，可求得六角星拼圖圖格設計會有 168 種。

討論 3：如何判斷指定圖格能否摺至目標位置？

定理一：選定拼圖上任意一個格子作為目標位置，均存在 5 個相異的格子，可透過單純摺或缺口摺的方式將這些格子摺至目標位置上。

證明：

(1)①六角星拼圖為對稱圖形，只要考慮對稱軸一側的 6 個格子就可以了，如圖 15，以 L_1 為對稱軸，考慮 L_1 左側的 6 個塗色格子。

圖 15

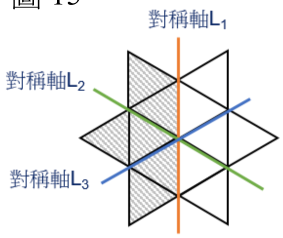
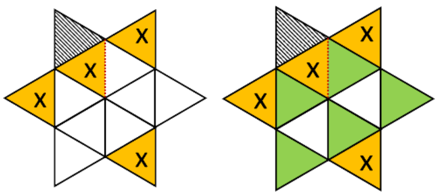


圖 16



②每一個目標位置都有 4 個以摺線為對稱軸的對稱面，如圖 16 的橘色格子。只要將格子摺到這些面的背面，就可以對摺回目標位置上。

③可摺至橘色格子背面的格子必是橘色格子的對稱面。

④4 個橘色格子，每一個橘色格子會有 3 個對稱面，對稱面會重複，除以 2 後，扣除目標格子：

$$\frac{4\times 3}{2}-1=6-1=5$$

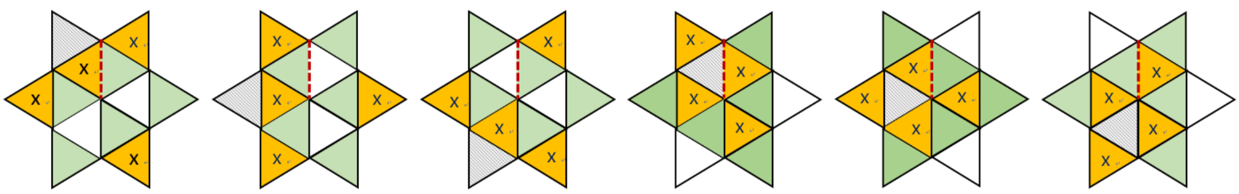
故總共會有 5 個對稱面，如圖 16 的綠色格子，這些格子必可透過對摺的方式摺至目標位置上。

(2)使用缺口摺也是沿著摺線對摺，所以結果會與單純摺相同。

應用：利用定理一，可整理出摺至拼圖任意位置的所有格子圖，如圖 17。利用圖 17 可以幫助我們快速掌握可摺至某目標位置的所有格子。

圖 17

以不同格子為目標位置，可摺至該目標位置的所有格子圖



註：橘色格子和白色格子為不可摺至目標位置的格子
綠色格子為可摺至目標位置的格子

討論 4：單純摺與缺口摺的差異為何？

單純摺較缺口摺容易操作，且使用缺口摺與單純摺，都可摺至目標位置的結果一樣，既然如此，六角星拼圖中缺口的作用為何？

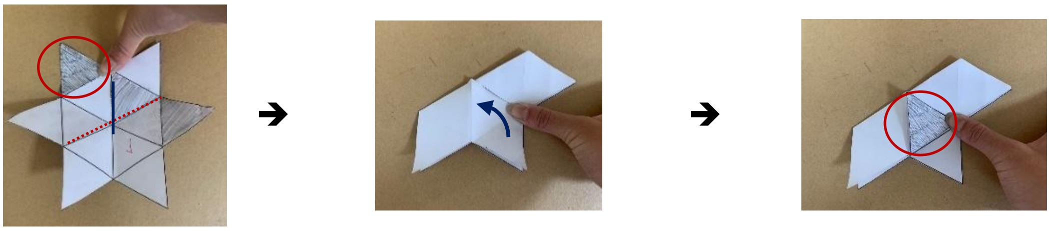
發現 4：採單純摺較缺口摺會蓋住較多的格子，透過缺口摺可避免蓋住其他完成正四面體展開圖所需的格子。但如沒有避免圖格被蓋住的需求，以單純摺來操作較為容易。

以模組 C2（1）為例，如圖 18，單純摺雖可以將指定格子（圈選處）移到目標位置（打✓）上，但會蓋住其他圖格。缺口摺也可將指定格子移到目標位置，但不會蓋住其他圖格。

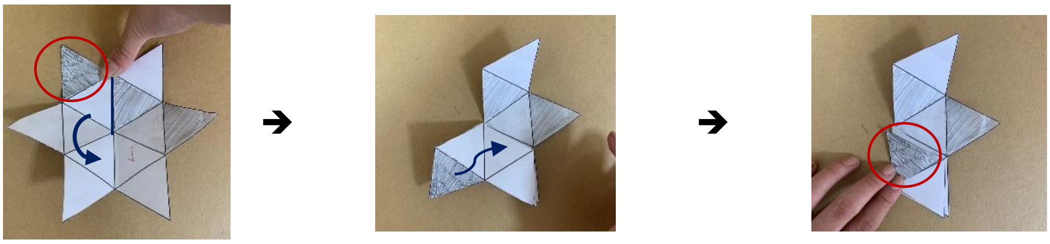
圖 18

單純摺及缺口摺

單純摺



缺口摺



我們將各模組摺成正四面體展開圖時使用的對摺方式與對摺次數整理如表 5。表中，我們將對摺的操作以（x，y，z）記錄，記錄方式說明如下：

①將三個格子由左到右，由上到下排序，分別以 x、y、z 表示將第 1 格、第 2 格、第 3 格移動到展開圖目標位置的對摺方式。

②對摺方式代碼：H 表示單純摺，即不透過缺口摺，僅以摺線為對稱軸，將格子摺到目標為置；G 表示缺口摺，即透過缺口將格子摺到目標位置；S 表示不動。如果該格子透過多次對摺才摺至目標位置，則以箭頭呈現對摺順序。

表 5

各模組摺成正四面體展開圖時的對摺方式與對摺次數

	A1	A2	A3	B1	B2
操作	（H，H，H）	（H，H，H）	（H→H，S，H→H）	（S，S，S）	（H→G，S，S）
對摺次數	3	3	4	0	2
	C1（1）	C1（2）	C1（3）	C2（1）	C2（2）
操作	（H→H，S，H）	（H→H，S，S）	（G→H，S，S）	（G→H，S，S）	（G→H，S，S）
對摺次數	3	2	2	2	2
	C2（3）	C2（4）	C3（1）	C3（2）	D1（1）
操作	（H→H，S，S）	（S，S，H→H）	（H→H，S，S）	（H→H，S，S）	（H→H，S，S）
對摺次數	2	2	2	2	2
	D1（2）	D1（3）	D2（1）	D2（2）	D2（3）
操作	（S，S，S）	（S，S，S）	（S，S，S）	（S，S，S）	（G→H，S，S）
對摺次數	0	0	0	0	2
	D2（4）	D3（1）	D3（2）		
操作	（S，H→H，S）	（H→H，S，H→H）	（S，S，H→H）		
對摺次數	2	4	2		

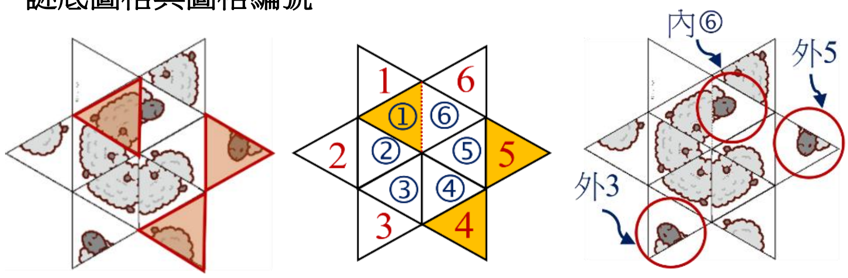
研究二(三)：六角星羊拼圖的謎底圖格是否為唯一解？

討論 1：六角星羊拼圖是否存在多組能摺成正四面體的圖格組合？

原六角星羊拼圖上有 3 個羊頭，5 個羊身體，3 個羊尾巴，除了已知的謎底圖格外，是否存在其他能摺成正四面體羊的圖格組合？利用研究結果二得出的 23 個模組能解決這個問題。

圖 19

謎底圖格與圖格編號



為便於研究討論，我們將六角星羊拼圖依內圈外圈依序編碼，如圖 19。接著，以三個羊頭圖格來思考它們和其他的身體和尾巴圖格是否能摺成正四面體羊。三個羊頭圖格位置分別為內⑥、外 5、外 3 表示。結果整理如表 6：

表 6

含有羊頭圖格位置的模組能否摺成正四面體羊

羊頭圖格位置	含有羊頭圖格位置的模組	能否摺成正四面體羊	原因
內⑥	C1（3）、C3（1）、D2（1）、D3（1）	否	三格中有空格，圖案沒有重複
	C2（1）	否	三格中有空格，且圖案重複
	B1、C1（1）、C1（2）、C2（3）、C2（4）、C3（2）、D1（1）、D1（3）、D2（3）、D3（2）	否	三格有圖案，但圖案重複
	B2、C2（2）、D1（2）、D2（2）、D2（4）	否	三格有圖案，圖案沒有重複，但方向錯誤
外 5	A1、A2、A3、C2（1）、C2（2）、C2（3）、C2（4）	否	三格中有空格，缺身體或尾巴
	C1（2）、C1（3）、C3（1）、D1（1）、D1（2）、D2（1）、D2（3）、D2（4）、D3（1）	否	三格中有圖案，但圖案重複
	D1（3）、D2（2）、D3（2）	否	三格有圖案，圖案沒有重複，但方向錯誤
	C1（1）	**是**	**三格有圖案，圖案沒有重複，且方向正確**
外 3	A3	否	三格中有空格，且圖案重複
	C1（3）	否	三格有空格，圖案沒有重複
	A1、A2、A3、C1（1）、C1（2）、C2（1）、C2（2）、C2（3）、C2（4）、C3（1）、C3（2）、D1（1）、D1（3）、D2（1）、D2（2）、D2（3）、D3（1）、D3（2）	否	三格有圖案，但圖案重複
	D1（2）、D2（4）	否	三格有圖案，圖案沒有重複，但方向錯誤

從表 6 可得知，原六角星羊拼圖只能使用 C1（1）模組拼成正四面體羊，也就是它的解是唯一的解。

研究二(四)：摺法是否唯一？

討論：六角星羊拼圖的三個謎底圖格只可摺成展開圖 P1、P2，不能摺成 T1、T2

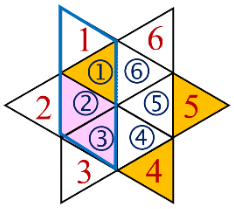
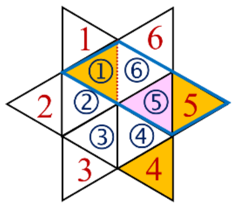
應用定理一所得結果，見圖 17，可以說明謎底圖格能摺成哪些展開圖。

說明：

1. 圖 20 為將三個謎底圖格摺成展開圖 P1、P2 的方法。

圖 20

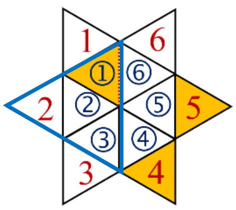
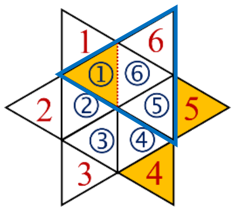
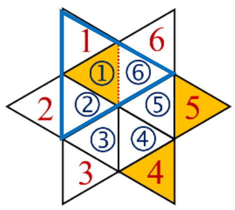
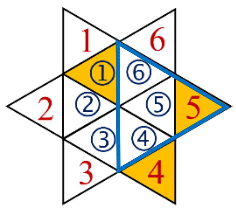
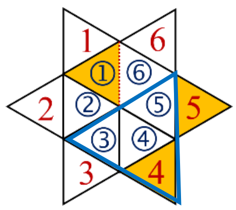
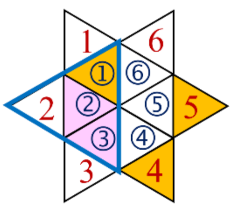
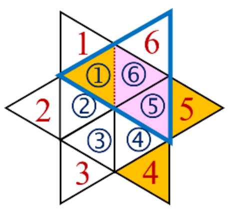
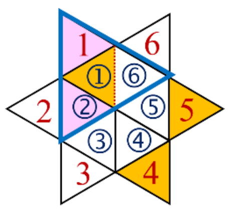
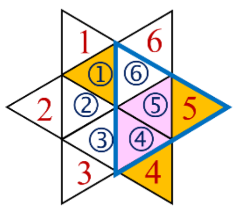
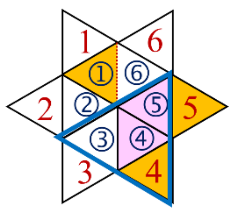
六角星羊拼圖的三個謎底圖格可摺成展開圖 P1、P2。

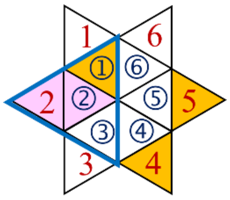
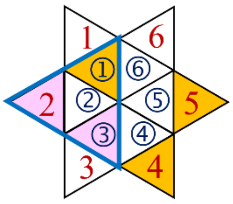
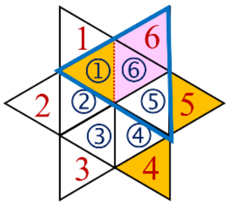
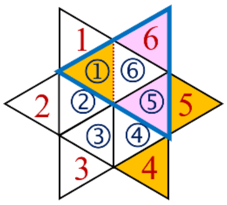
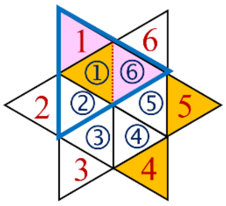
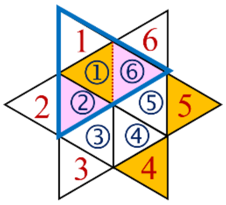
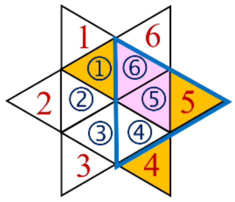
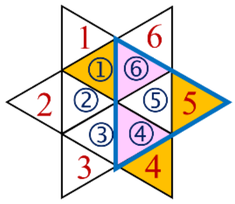
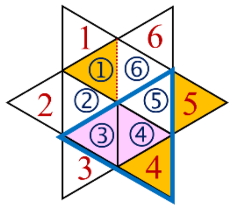
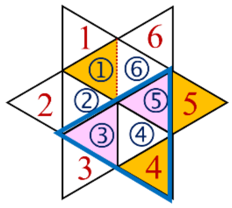
P1  【說明】: ∵外格 4 能摺到內格③、外格 5 能摺到內格② ∴可將三個解圖格摺成平行四邊形狀展開圖。	P2  【說明】: ∵外格 4 能摺到內格⑤，並將內格①先摺到內格②的背面，再摺回內格①的正面，以免外格 4 摺到內格⑤時覆蓋住內格①。 ∴可將三個解圖格摺成平行四邊形狀展開圖。

2. 圖 21 為包含三圖格某一格的所有可能大三角形展開圖位置，共有五類。各類依據展開圖 T1 或 T2 會有不同的目標位置(粉紅色格子)，總共會有 12 種情形。根據定理一所得結果，可以判斷能否將大三角外的另外兩個解圖格摺到粉紅色目標位置，結果如圖 21。

圖 21

六角星羊拼圖的三個謎底圖格不可摺成展開圖 T1、T2。

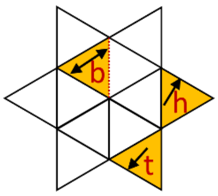
 ↓	 ↓	 ↓	 ↓	 ↓
T1  【說明】: 外格 4 只能摺到內格③、外格 5 只能摺到內格②，但此時外格 2 會摺進拼圖內面，最後形成的展開圖為 P1，不是 T1。	T1  【說明】: 外格 4 只能摺到內格⑤、外格 5 只能摺到內格⑥，但此時外格 6 會摺進拼圖內面，最後形成的展開圖為 P1，不是 T1。	T1  【說明】: 外格 4 不能摺到外格 1 和內格②。	T1  【說明】: 外格 4 只能摺到內格⑤；內格①只能摺到內格⑤。但將外格 4 摺到內格⑤時，內格④將被摺進拼圖內面，內格①無法摺到內格⑤的位置。	T1  【說明】: 內格①只能摺到內格⑤，外格 5 只能摺到內格④。但將內格①摺到內格⑤時，內格④將被摺進拼圖內面，外格 5 無法摺到內格④的位置。

 【說明】: 外格 5 只能摺到內格②，但此時外格 2 會被摺進拼圖內面，外格 4 將無法摺到外格 2 的位置。 T2  【說明】: 外格 5 不能摺到內格③和外格 2。	 【說明】: 外格 5 只能摺到內格⑥，但此時外格 6 會被摺進拼圖內面，外格 4 無法摺到外格 6 的位置。 T2  【說明】: 外格 5 不能摺到內格⑤和外格 6。	 【說明】: 外格 4 不能摺到外格 1 和內格⑥。  【說明】: 外格 4 不能摺到內格②和內格⑥	 【說明】: 外格 4 只能摺到內格⑤，外格 5 只能摺到內格⑥；但將外格 4 摺到內格⑥時，外格 5 會被摺進拼圖內面。 T2  【說明】: 外格 4 不能摺到內格④和內格⑥	 【說明】: 內格①只能摺到內格③，外格 5 只能摺到內格④。但此時內格⑤會摺進拼圖內面，最後形成的展開圖為 P1，不是 T1。 T2  【說明】: 外格 5 不能摺到內格③和內格⑤。

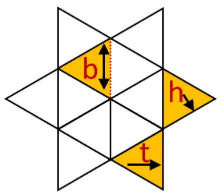
3. 六角星羊拼圖為 C1(1)模組，且 C1(1)模組由 P1 和 P2 得出的方向是不相同的，由圖 22 可得知，六角星羊拼圖的三個謎底圖格只有摺成展開圖 P1 時，羊頭、羊身體、羊尾巴才能連接正確。

圖 22

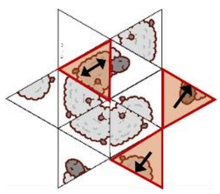
拼圖分別以 P1 和 P2 摺法所得的方向以及與六角星羊拼圖之對照



C1(1)(P1)摺法得到的方向



C1(1)(P2)摺法得到的方向



六角星羊拼圖

結果：

以先摺成展開圖再摺成正四面體的摺法來看，六角星羊拼圖的三個謎底圖格只能摺成展開圖 P1 和 P2 然而，根據根據研究發現，不同的摺法得到的方向可能不同。六角星羊拼圖為 C1(1)模組，且 C1(1)模組由 P1 和 P2 得出的方向是不相同的，因此可以證明摺法是唯一。

研究三：探討能摺出多隻正四面體羊的六角星拼圖設計

原六角星拼圖難解之處在於一旦選擇錯誤的羊部件，就怎麼試都無法成功。如果拼圖上的 3 個羊頭，每一個羊頭都能配對羊身體與尾巴圖格，成功摺出正四面體，這對於我們藉由

這個遊戲來進行數學幾何空間操作的學習而言，會有正向的鼓勵與幫助。因此我們試著探討能摺出多隻羊的六角形拚圖設計。

一隻羊需要 3 圖格，六角星拼圖有 12 個格子，最多可放入 4 隻羊。一隻羊等同於一個模組，利用我們在研究結果二所得的 23 個模組，找出可配對的模組，便可設計出 2 隻羊、3 隻羊和 4 隻羊的六角形拼圖。

研究三(一)：如何找出可配對的 2 個模組組合？

步驟 1：找出可配對的模組

定理二：

設兩模組為 M1 和 M2，$Z_{外}$為外圈占用格子數，$Z_{內}$為內圈占用格子數，

$Z_{外}$=外圈圖格數+兩圖格間的空格數，$Z_{內}$=內圈圖格數+兩圖格間的空格數。

(1) 當 M1 的外圈空格數=0 時，若 M2 的外圈剩餘格子數≧3，則 M1 和 M2 可配對。

當 M1 的內圈空格數=0 時，若 M2 的內圈剩餘格子數≧3，則 M1 和 M2 可配對。

(2) 當 M1 外圈的空格數＞0 時，若 M2 外圈剩餘格子數或空格數＞0，且 M1 $Z_{外}$+M2 $Z_{外}$≦8，則 M1 和 M2 可配對。

當 M1 內圈的空格數＞0 時，若 M2 內圈剩餘格子數或空格數＞0，且 M1 $Z_{內}$+M2 $Z_{內}$≦8，則 M1 和 M2 可配對。

<u>說明</u>：

(1)以外圈來看，當 M1 外圈的空格數=0，表示剩餘格子數最少有 3 格，此時，M2 占用的格子數要少於 3 格，也就是剩餘格子數要大於等於 3，才可搭配。內圈也是如此。

(2) 以外圈來看，當 M1 外圈空格數＞0，M2 外圈剩餘格子數或空格數＞0，表示 M1 和 M2 至少有 1 格是分散的，因此，

（M1 外圈占用格子數－1）＋（M2 外圈占用格子數－1）≦6，M1 和 M2 才能配對。

也就是 M1 外圈占用格子數＋M2 外圈占用格子數≦8。內圈也是如此。

以 A2－C3 為例，A2 外圈空格數=1＞0，C3 外圈空格數=2＞0

∵A2$Z_{外}$=4，C3$Z_{外}$=4，A2$Z_{外}$+ C3$Z_{外}$=8，∴A2－C3 可搭配。

以 D2－D3 為例，D2 內圈空格數=1>0，D3 內圈剩餘格子數=2>0，

∵D2$Z_{內}$=3，D3$Z_{內}$=4，D2$Z_{內}$+ D3$Z_{內}$=7≦8，∴D2－D3 可搭配。

各模組內外圈圖格數、兩圖格間的空格數以及 $Z_{外}$、$Z_{內}$值如表 7，兩模組 $Z_{外}$和與 $Z_{內}$和如表 8。

表 7

各模組內外圈圖格數、兩圖格間的空格數以及 $Z_{外}$、$Z_{內}$值

模組	外圈				內圈			
	圖格數 x	兩圖格間的空格數 y	占用格子數 $Z_{外}$=x+y	剩餘格子數 6－$Z_{外}$	圖格數 x	兩圖格間的空格數 y	占用格子數 $Z_{內}$=x+y	剩餘格子數 6－$Z_{內}$
A1	3	0	3	3	0	0	0	6
A2	3	1	4	2	0	0	0	6
A3	3	3	6	0	0	0	0	6
B1	0	0	0	6	3	0	3	3
B2	0	0	0	6	3	1	4	2
C1	2	0	2	4	1	0	1	5

C2	2	1	3	3	1	0	1	5
C3	2	2	4	2	1	0	1	5
D1	1	0	1	5	2	0	2	4
D2	1	0	1	5	2	1	3	3
D3	1	0	1	5	2	2	4	2

表 8

兩模組 $Z_{外}$和與 $Z_{內}$和一覽表

模組	A1		A2		A3		B1		B2		C1		C2		C3		D1		D2		D3	
	$Z_{外}$	$Z_{內}$	$Z_{外}$	$Z_{內}$	$Z_{外}$	$Z_{內}$	$Z_{外}$	$Z_{內}$	$Z_{外}$	$Z_{內}$	$Z_{外}$	$Z_{內}$	$Z_{外}$	$Z_{內}$	$Z_{外}$	$Z_{內}$	$Z_{外}$	$Z_{內}$	$Z_{外}$	$Z_{內}$	$Z_{外}$	$Z_{內}$
A1																						
A2	7	0																				
A3	9	0	10	0																		
B1	3	3	4	3	6	3																
B2	3	4	4	4	6	4	0	7														
C1	5	1	6	1	8	1	2	4	2	5												
C2	6	1	7	1	9	1	3	4	3	5	5	2										
C3	7	1	8	1	10	1	4	4	4	5	6	2	7	2								
D1	4	2	5	2	7	2	1	5	1	6	3	3	4	3	5	3						
D2	4	3	5	3	7	3	1	6	1	7	3	4	4	4	5	4	2	5				
D3	4	4	5	4	7	4	1	7	1	8	3	3	4	3	5	3	2	4	2	7		

依據定理二，從表 7、表 8 中篩選出不可配對的模組，如表 9。此外，由於 C1(3)模組只能夠透過翻轉變形，圖格位置受限，故而無法與 C2(1)配對。

表 9

各模組不可配對的模組

模組	不可配對的模組
A1	A2、A3、C3(1)、C3(2)
A2	A3
A3	C1(1)、C1(2)、C1(3)、C3(1)、C3(2)
B1	B2、D3(1)、D3(2)
B2	無
C1(1)	無
C1(2)	無
C1(3)	C2(1)

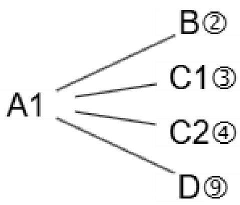
模組	不可配對的模組
C2(1)	無
C2(2)	無
C2(3)	無
C2(4)	無
C3(1)	無
C3(2)	無

模組	不可配對的模組
D1(1)	無
D1(2)	無
D1(3)	無
D2(1)	無
D2(2)	無
D2(3)	無
D2(4)	無
D3(1)	無
D3(2)	無

步驟 2：畫樹狀圖整理配對組合

我們以樹狀圖整理配對的模組組合與計算組合數，為了記錄方便，如果同一系列的模組都可以配對，我們就只記系列的代號，並以圈圈數字代表模組數量。例如 A1 可以跟 C1（1）、C1（2）、C1（3）配，我們就直接記成 C1③，以 A1、A2、A3 為例，樹狀圖如圖 23。因篇幅有限，所有兩模組配對樹狀圖見研究日誌，將配法數相加後可得組合方式共有 239 種。

圖 23



∵B、C、D 共 20 種，但不能配 C3
∴20－2=18 (18 種)

研究三(二)：如何找出可配對的 3 個模組組合？

步驟 1：找出可能可搭配的第三個模組

先算出 2 組圖案已使用的內圈與外圈格子數，再求出內圈與外圈剩餘的格子數，就可以知道可能可搭配的第三個模組，如表 10。

表 10 第三個圖案可能可搭配的模組

二個圖案	外	內
A	3	0
B	0	3
剩餘格子數	3	3
可搭配模組	C、D	

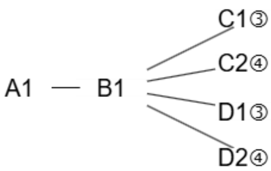
二個圖案	外	內
A	3	0
C	2	1
剩餘格子數	1	5
可搭配模組	D	

二個圖案	外	內
A	3	0
D	1	2
剩餘格子數	2	4
可搭配模組	D	

步驟 2:畫樹狀圖整理配對組合

我們從兩個圖案延伸，先把兩個圖案配法分別和 A1、A2、A3 配，刪除不能和 A1、A2 或 A3 配的模組，就可以得到三個圖案配法。以 A1、B1 和其他模組組成的三個圖案為例，先將 B1 和其他模組組成的兩個圖案和 A1 配，原本有 16 種，但因為 A1 不能跟 C3（1）和 C3（2）配，所以刪除後剩下 14 種，如圖 24。因篇幅有限，所有 3 組模組配對樹狀圖見研究日誌，而將配法數相加後可以得知組合方式共有 351 種。

圖 24



∵C、D 共 18 種，但 C3 與 A1 有重疊的圖格，D3 與 B1 有重疊的圖格，不能配
∴18－(2+2)=14(14 種)

研究三(三)：如何找出可配對的 4 個模組組合？

步驟 1：找出可能可搭配的第四個模組

我們先算出三個圖案配法的外圈和內圈已使用的格子數量，用 6 扣除後，根據剩下的外圈和內圈格子數來判斷第四個圖案可能可搭配的模組，如表 11。

表 11
第四個圖案可能可搭配的模組

三個圖案	外	內
A	3	0
B	0	3
C	2	1
剩餘格子數	1	2
可搭配模組	D	

三個圖案	外	內
A	3	0
B	0	3
D	1	2
剩餘格子數	2	1
可搭配模組	C，但圖案不重複，所以不可接 C	

三個圖案	外	內
A	3	0
C	2	1
D	1	2
剩餘格子數	0	3
可搭配模組	B，但圖案不重複，所以不可接 B	

三個圖案	外	內
A	3	0
D	1	2
D	1	2
剩餘格子數	1	2
可搭配模組	D	

從上表可以得知四個圖案的模組只可以是：A-B-C-D 和 A-D-D-D。

步驟 2:畫樹狀圖整理配對組合

將可能的組合畫成樹狀圖後，刪除會重疊的模組，就可得知四個模組的組合方式，因篇幅有限，所有 4 組模組配對樹狀圖見研究日誌。將配法數相加可以得知四個模組的組合方式共有 536 種。

結果：

找出可配對的模組組合後，就可分別設計出 239 種(2 模組組合)、351 種(3 模組組合)、536 種(4 模組組合)的六角星拼圖。種類繁多，我們如何從中選取難度高些的模組來進行設計？

研究三(四)：如何設計較難的多隻羊六角星拼圖？

討論 1 如何將模組難度數值化？

六角星拼圖模組有 23 種，考量羊頭、羊身體與羊尾巴在圖格的位置與方向，圖案設計會有 168 種，其中有難有易，例如 B1 模組相當容易，因為它本身就是正四面體展開圖，不需要移動圖格位置就可以完成正四面體羊。我們思考：能否制定一個合理的公式來計算模組的難度呢？綜合我們的研究結果，影響模組難度的因素有三個，說明如下：

影響模組難度的三因素

因素 1—對摺次數：摺成展開圖的對摺次數。對摺次數越多，難度越高

因素 2—對摺種類數：摺成展開圖的對摺方式種類個數。使用單純摺和缺口摺，會比僅使用單純摺的難度高。

因素 3—展開圖數：可摺成的展開圖種類個數。可摺成的展開圖越多種，難度越低。

定義難度值時，數值越高，表示難度越高的因素有對摺次數與對摺種類數，我們將它相乘以

突顯其與難度值成正比的想法；數值越高，表示難度越低的因素有展開圖數，我們將它以倒數呈現，與其他兩因素相乘，突顯其與難度值成反比的想法。

由此，我們針對模組難度做以下的定義：

$$\textbf{模組難度指數 DIF 值} = \textbf{對摺次數} \times \textbf{對摺種類數} \times \left(\frac{1}{\textbf{展開圖數}}\right)$$

各模組求得的 DIF 值整理如表 12。

表 12

各模組 DIF 值

模組	對摺次數	對摺種類數	展開圖數	DIF 值	模組	對摺次數	對摺種類數	展開圖數	DIF 值
A1	3	1	2	1.5	C3（1）	2	1	1	2
A2	3	1	3	1	C3（2）	2	1	1	2
A3	**4**	**1**	**1**	**4**	D1（1）	2	1	2	1
B1	0	0	2	0	D1（2）	0	0	1	0
B2	2	2	2	2	D1（3）	0	0	2	0
C1（1）	**3**	**1**	**2**	**1.5**	D2（1）	0	0	1	0
C1（2）	2	1	2	1	D2（2）	0	0	1	0
C1（3）	**2**	**2**	**1**	**4**	**D2（3）**	**2**	**2**	**1**	**4**
C2（1）	**2**	**2**	**1**	**4**	D2（4）	2	1	3	0.67
C2（2）	2	2	2	2	D3（1）	4	1	2	2
C2（3）	2	1	1	2	D3（2）	2	1	1	2
C2（4）	2	1	2	1					

結果：

1. DIF 值最高是 4 分，有模組 A3、C1（3）、C2（1）和 D2（3），這些模組會是比較難摺出正四面體羊的。
2. DIF 值 0 分的有 5 個模組，都是不需要對摺就可以摺成正四面體展開圖。
3. 最多模組的 DIF 值是 2 分。
4. 原六角星羊拼圖的設計是模組 C1（1），DIF 值只有 1.5 分，難度不算高，但因為有其他假圖的干擾，加深了完成正四面體羊的困難度，換句話說一旦知道要拼哪三個圖格，便可以輕鬆完成正四面體羊。

討論 2：計算多隻羊六角星拼圖的難度值

我們利用 Excel 試算表，見附錄 1，計算出兩組、三組、四組圖案各種設計的難度值，表 13 列出最高的 DIF 值以及搭配的模組。

表 13

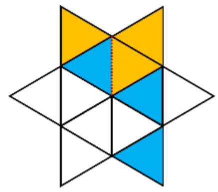
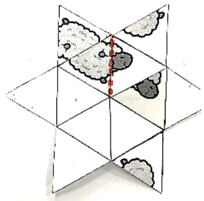
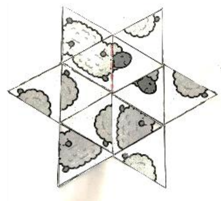
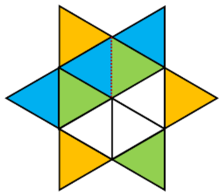
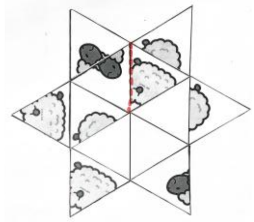
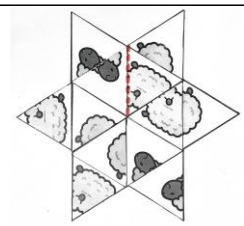
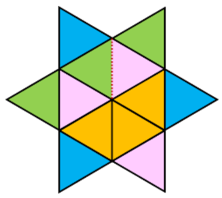
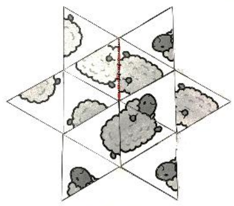
多隻羊六角星拼圖 DIF 值最大值與配對模組

模組組數	Max（DIF）	模組
2	8	A3-D2(3)、C1(3)-D2(3)、A3-C2(1)、C2(1)-D2(3)
3	10	A3-B2-C2(1)、A3-B2-D2(3)、A3-C2(1)-D3(1)、A3-C2(2)-D2(3)、A3-C2(3)-D2(3)、A3-D2(3)-D3(1)、A3-D2(3)-D3(2)
4	11.5	A1-B2-C1(3)-D2(3)、A1-B2-C2(1)-D2(3)

我們將這些模組實際繪製在六角星拼圖上，2 隻羊與 3 隻羊拼圖因還有空白格，因此設計時亦可加入假圖，如圖 25：

圖 25

多隻羊拼圖設計

 DIF 值較高的 2 模組組合設計	 可以摺出兩隻羊的拼圖設計(未加假圖)	 可以摺出兩隻羊的拼圖設計(加假圖)
 DIF 值較高的 3 模組組合設計	 可以摺出 3 隻羊的拼圖設計(未加假圖)	 可以摺出 3 隻羊的拼圖設計(加假圖)
 DIF 值較高的 4 模組組合設計	 可以摺出 4 隻羊的拼圖設計	

研究四：探討能摺出正八面體的多角星拼圖設計

正八面體每個面也都是正三角形，能否在六角星拼圖選定圖格摺出正八面體呢？

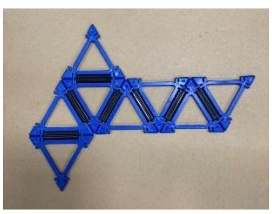
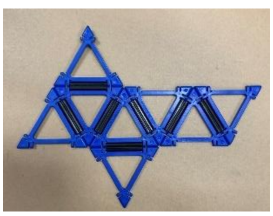
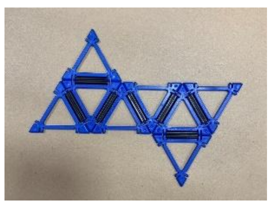
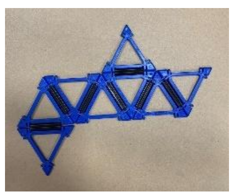
研究四(一)：六角星拼圖可摺成正八面體嗎？

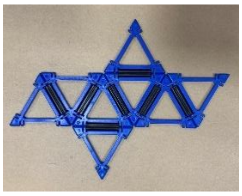
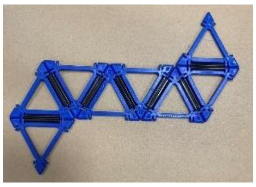
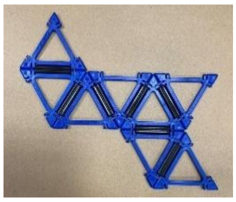
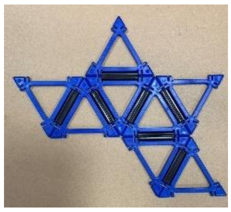
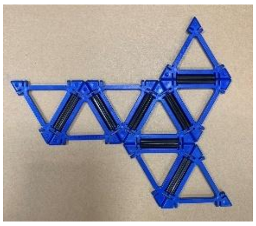
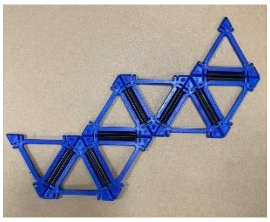
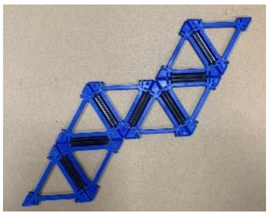
討論 1：在六角星拼圖上可置入正八面體展開圖嗎？

只要能在六角星拼圖上置入正八面體展開圖，便可摺成正八面體。我們利用智慧片排出 11 種正八面體展開圖，並進行編碼，如圖 26。

圖 26

11 種正八面體展開圖

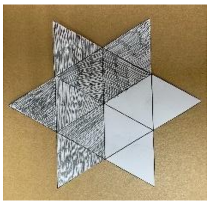
 （1，6，1）a	 （1，6，1）b	 （1，6，1）c	 （1，6，1）d

 （1，6，1）e	 （1，6，1）f	 （1，5，2）a	 （1，5，2）b
 （1，5，2）c	 （1，4，3）	 （2，4，2）	

結果：11 種展開圖，只有（1，5，2）b 可以置入六角星拼圖中，如圖 27。

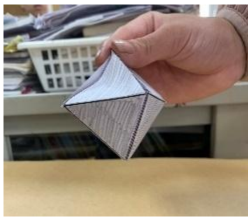
圖 27

正八面體展開圖置入六角星拼圖中



將展開圖（1，5，2）b 置入六角星拼圖中

➔

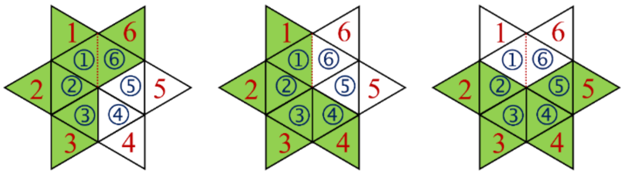


摺成正八面體

討論 2：如何移動圖格，將展開圖變形？

可以利用定理一可將圖格移到其他格子，將展開圖圖格打散，使操作者不易直接看出摺法。將置入六角星拼圖的正八面體展開圖旋轉、翻轉後，考量缺口與圖格相對位置，扣除重複與對稱的圖形後，可分成 3 類，如圖 28。

圖 28



A 類　　B 類　　C 類

接著，利用定理一可將展開圖圖格移到空白格。以 A 類為例，如果以外 5 作為目標位置，依定理一，外 1、外 3、內②、內⑥都可以摺至外 5，如圖 29 綠色格子。但是外 1、內②、內⑥圖格摺到外 5 時，即便使用缺口摺仍會蓋掉其他圖格，只有外 3 不會，所以只可將外 3 圖格移到外 5，如圖 30。各類型可移動圖格位置整理如下頁表 14。其中，A 類與 B 類只能移動一個圖格做變化，而 C 類則能同時移動 2 個圖格。因為 C 類空白的 4 格剛好位於缺口兩旁，因而可以透過缺口摺將內②移到外 1，內⑤移到外 6，且摺時不會蓋掉其他格子，如圖 31。

圖 29

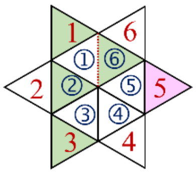


圖 30

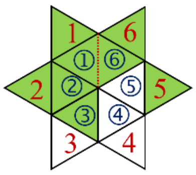


圖 31

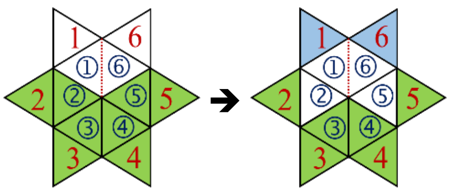


表 14

各類型圖格變化

類型	圖格變化
A	外 6➔外 4、內⑥➔內④、外 3➔外 5、內③➔內⑤、
B	外 4➔外 6、內④➔內⑥
C	內②➔外 1、內⑤➔外 6

研究四(二)：如何設計能摺成正八面體的多角星拼圖？

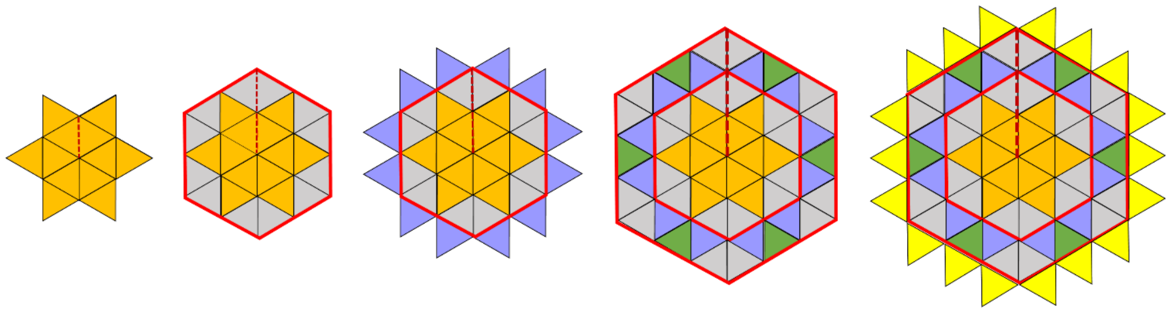
在六角星拼圖上置入正八面體展開圖，因為只有 12 格，只能置入一種展開圖，且空白只有 4 格，最多也只能將 2 個圖格同時移到其他位置，所以變化有限。如果能將六角星拼圖擴充成有更多個格子的拼圖，應就能有更多變化的正八面體展開圖圖格設計。

討論 1：下一個多角星拼圖是幾角星？格子數為何？

在六上數學規律問題單元中，我們學會怎麼有規律地找下一個圖形並列式。我們先將六角星補成正六邊形，再於各邊上畫上角，就可擴充成多角星拼圖，如圖 32。

圖 32

從六角星拼圖擴充成多角星拼圖

圖					
	六角星	補成正六邊形	每條邊畫上 2 個三角形 十二角星	補成正六邊形	每條邊畫上 3 個三角形 十八角星
角數	6		$6\times2=12$		$6\times3=18$
格子數	$6\times2=12$	$6\times2+6\times2$	$6\times2+6\times2+6\times2$ $=6\times6$ $=36$	$6\times2+6\times2+6\times2$ $+6\times1+6\times2$ $=6\times9$ $=54$	$6\times2+6\times2+6\times2$ $+6\times1+6\times2+6\times3$ $=6\times12$ $=72$

六角星拼圖可以擴充成 36 格的十二角星拼圖、72 格的十八角星拼圖，由圖 32 所得規律，可推論再下一個是 24 角星拼圖，格子數為 120 個，算式如下：

補成正六邊形

$6\times2+6\times2+6\times2+6\times1+6\times2+6\times3\boxed{+6\times2+6\times2}\boxed{+6\times4}$ 每條邊上會有 4 個三角形

$=6\times20$

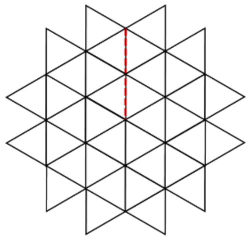
$=120$

討論 2：在十二角星拼圖上可置入正八面體展開圖嗎？

十二角星拼圖，如圖 33，共有 36 格，由左到右有 6 層，正八面體展開圖最多三層，如圖 26，所以 11 種正八面體展開圖均可置入十二角星拼圖。

圖 33

十二角星拼圖



討論 3：如何移動圖格，將十二展開圖變形？

應用探討六角星拼圖所得的定理一，我們可以延伸出定理三：

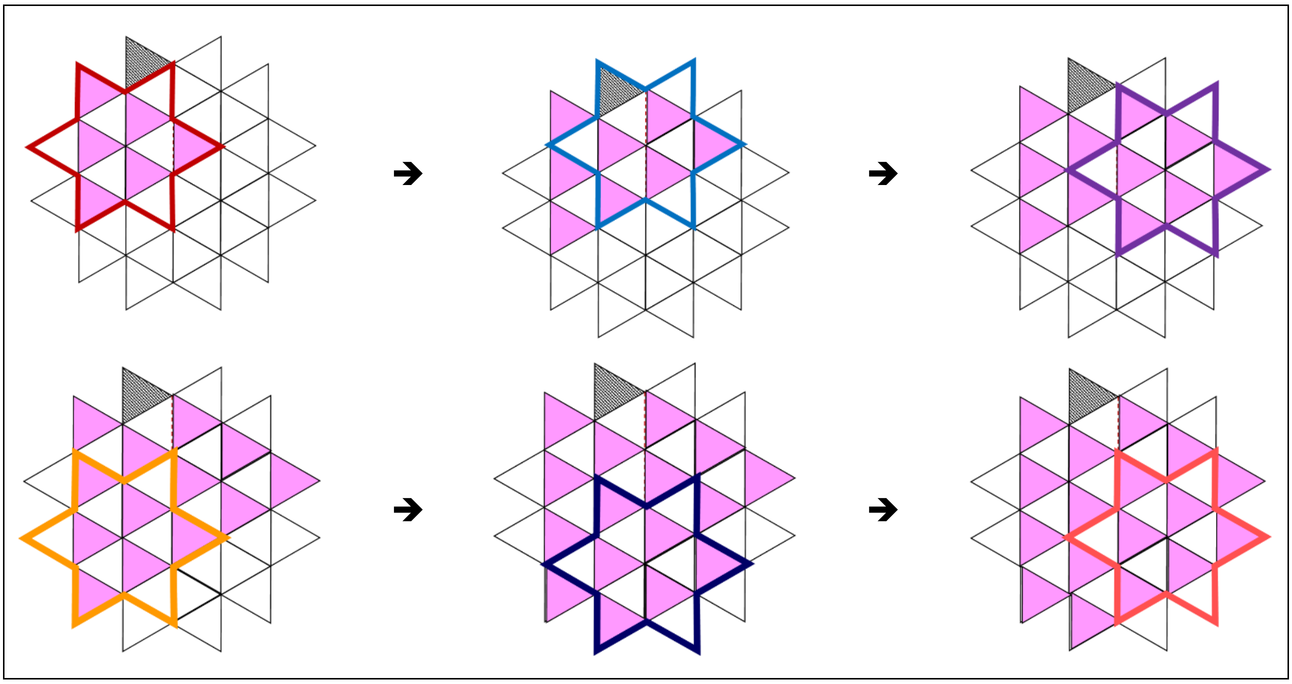
定理三：選定十二角星拼圖上任意一個格子作為目標位置，均存在 17 個相異的格子，可透過對摺單純摺或缺口摺的方式將這些格子摺至目標位置上。

<u>證明</u>：

①從涵蓋目標位置的六角星開始，畫出可摺至目標位置的 5 個格子後，針對尚未判斷的格子，可繼續延伸出下一個六角星，並找出可摺至目標位置的其他格子，如此延伸下去直到所有格子都判斷完。每一個目標位置均最少可利用 6 個六角星判斷出可摺至該目標位置的所有格子。以外 2 為例，如圖 34。

圖 34

應用六角星研究結果十二角星拼圖，可摺至目標位置的格子圖

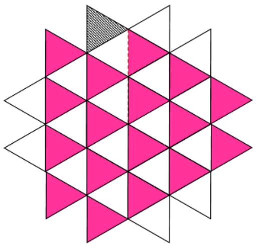
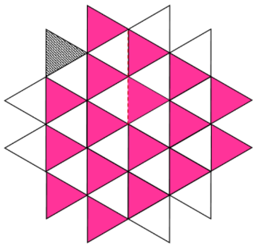
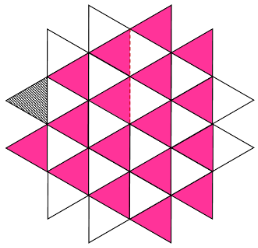
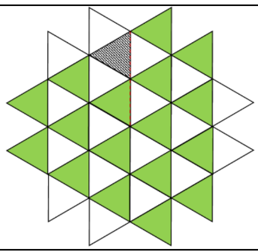
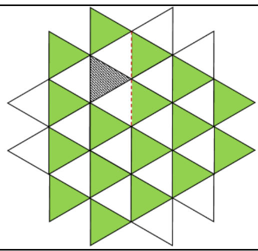
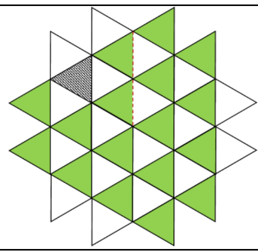
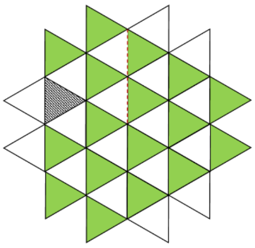
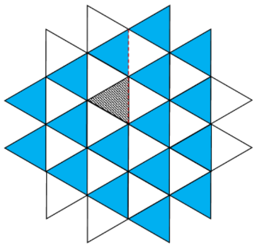
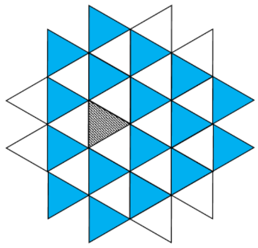


②根據定理一，每一個目標位置在六角星上均存在相異的 5 個格子，可將這些格子摺至目標位置。而每多一個六角星會多出 3 個格子，6 個六角星會多出 3×(6-1)個格子，第一個六角星扣除重複的會有(5-3)個格子，因此總共會有 3×(6-1)+2=17，17 個格子。

同樣的，我們亦可整理出摺至拼圖任意位置的所有格子圖，如表 15。利用表 15 可以幫助我們快速掌握可摺至某目標位置的所有格子。

表 15

以不同格子為目標位置，可摺至該目標位置的所有格子圖

目標格子	可摺至目標格子的格子圖	目標格子	可摺至目標格子的格子圖	目標格子	可摺至目標格子的格子圖
外(1)		外(2)		外(3)	
中 1		中 2		中 3	
中 4		內 1		內 2	

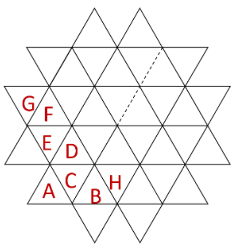
註： 灰色格子為目標位置，色格為可摺至目標位置的所有格子圖

圖 35 是以 11 種八面體展開圖製作的十二角星拼圖例。

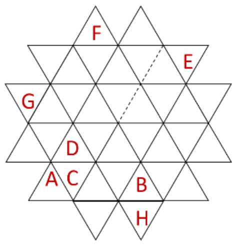
圖 35

以 11 種八面體展開圖製作的十二角星拼圖例

展開圖

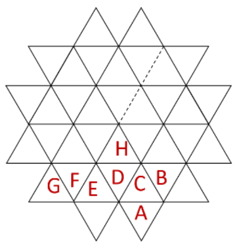


拼圖設計

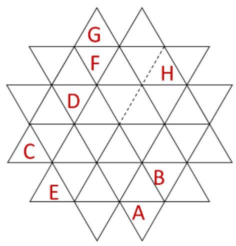


(1，6，1)a

展開圖

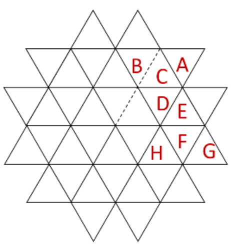


拼圖設計

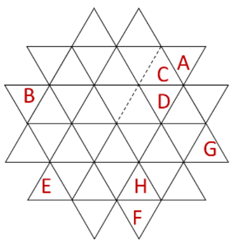


(1，6，1)b

展開圖

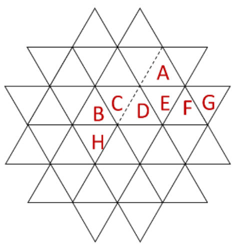


拼圖設計

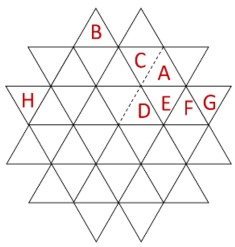


(1，6，1)c

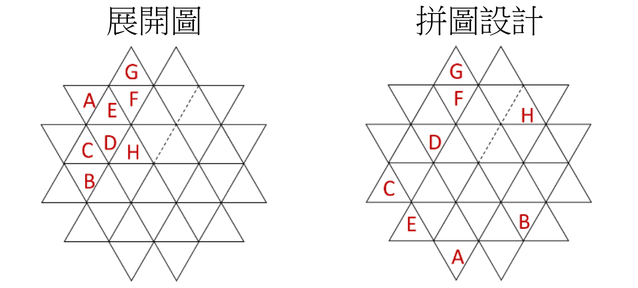
展開圖



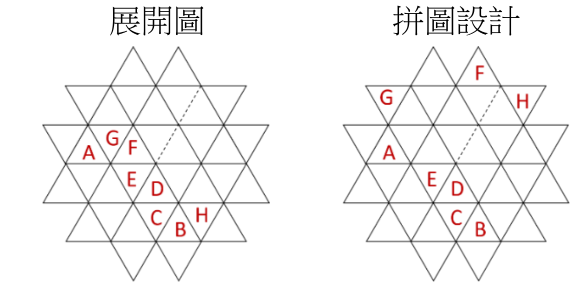
拼圖設計



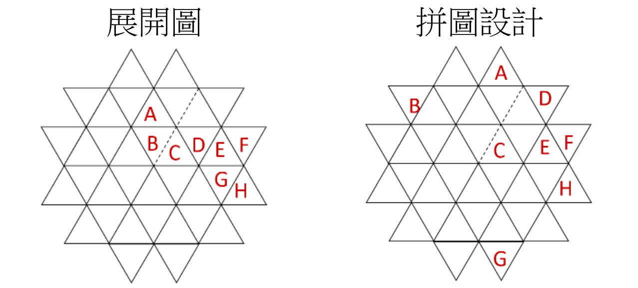
(1，6，1)d



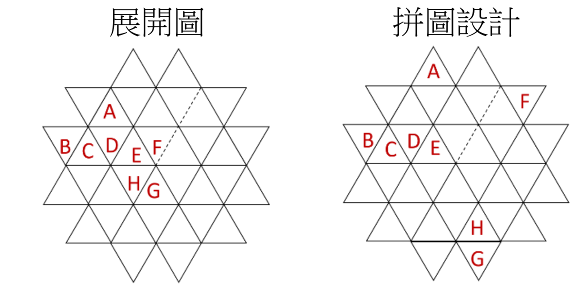
(1，6，1)e



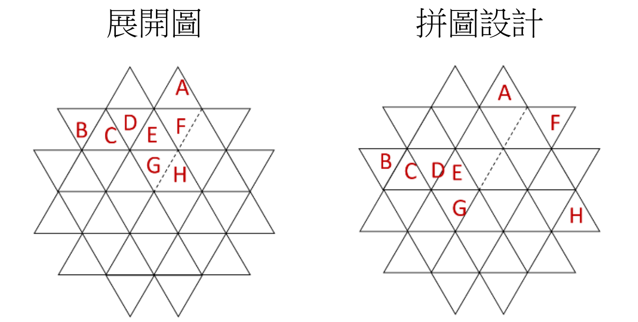
(1，6，1)f



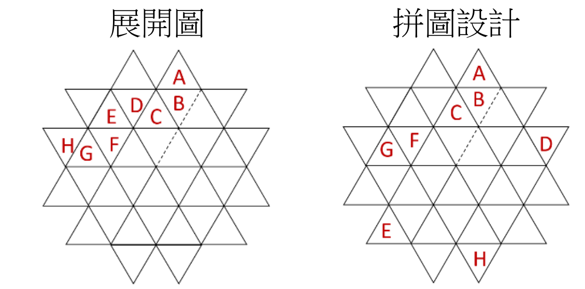
(1，5，2)a



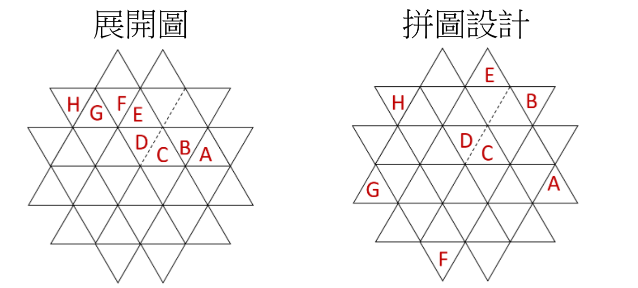
(1，5，2)b



(1，5，2)c



(1，4，3)



(2，4，2)

伍、討論

一、六角星羊拼圖解題密技

從研究結果，我們可以透過正四面體展開圖以及定理一的結果幫助玩家有效率且快速的摺成正面體羊，密技如下：

（一）如果知道玩家已知哪三個圖格是謎底圖格，可以先指定其中一格圖格，找出包含它的展開圖，再根據定理一結果判斷其他 2 個圖格如何摺至目標位置，就可快速摺成正四面體羊。

（二）如果玩家不知謎底圖格，如何避開假圖挑選謎底圖格呢？那我們可以先找任意的一個

圖格來思考。找出含有該圖格的展開圖組合，再根據定理一的結果判斷其他身體部位能否跟它合成展開圖，便可知找出謎底圖格。

二、設計六角星拼圖時，如何從六角星拼圖直接判斷羊頭、身體與尾巴的方向？

我們化簡為繁，試著找出 23 個模組的原型，看看是否先將模組轉換成原型，再透過原型，直接判斷羊頭、身體和尾巴的方向。

結果發現，23 個模組，可以歸納成 4 種原型，分別為 B1、D1（3）、D2（1）、D2（2），各模組與對應的原型如表 16。每一種原型的圖格中可放入羊頭、羊身體和羊尾巴，又各會有 3×2×1＝6 種，如表 17。

表 16

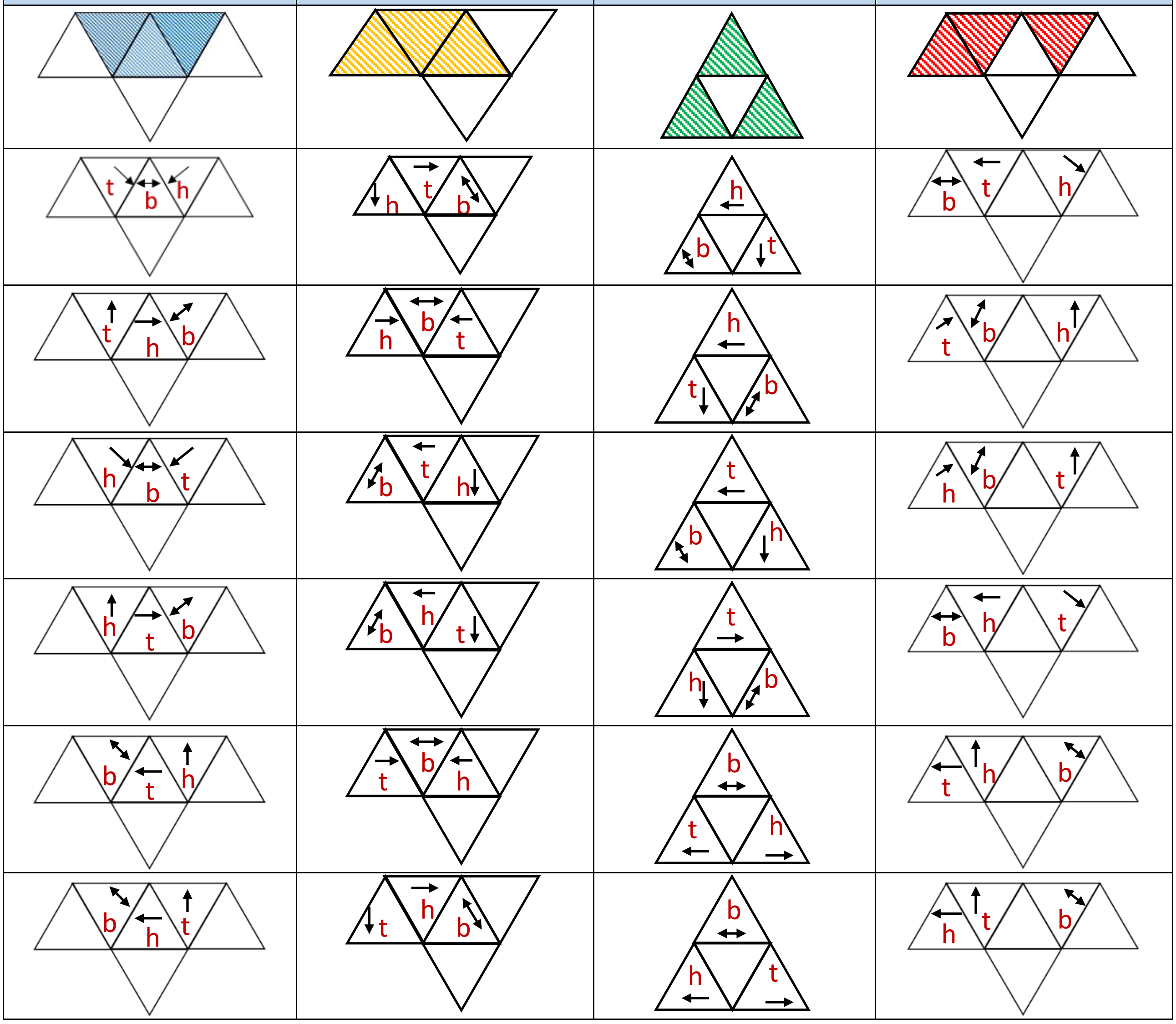
各模組與對應的原型

模組	摺法	原型
A1	P1 T1	B1 D1(3)
A2	P1 P2 T1	B1 D2(2) D1(3)
A3	T2	D2(1)
B1	P1 T1	B1 D1(3)
B2	P1, T1	B1 D1(3)
C1（1）	P1 P2	B1 D2(2)
C1（2）	P1 T1	D1(3)
C1（3）	P2	D2(2)
C2（1）	T2	D2(1)
C2（2）	P1 T1	D1(3)
C2（3）	T2	D2(1)
C2（4）	P1 T1	B1
C3（1）	P1	D1(3)
C3（2）	P2	D2(2)
D1（1）	P1 T1	B1 D1(3)
D1（2）	P2	D2(2)
D1（3）	P1 T1	D1(3)
D2（1）	T2	D2(1)
D2（2）	P2	D2(2)
D2（3）	T2	D2(1)
D2（4）	P1 P2 T1	B1 D2(2)
D3（1）	P1 T1	B1 D1(3)
D3（2）	P1	D1(3)

表 17

4 種原型

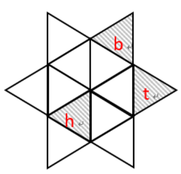
B1	D1（3）	D2（1）	D2（2）



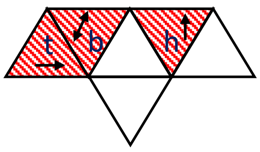
利用原型可以從六角星拼圖直接判斷圖案的方向。以 C1（1）P2 為例，P2 摺法的原型是 D2（2），從 D2（2）可以看出方向。說明如圖 36：

圖 36

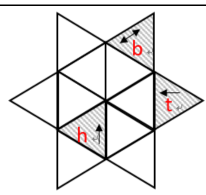
以原型判斷方向舉例



C1（1）P2



原型 D2(2)



C1（1）P2 方向

三、十二角星拼圖，缺口長短的影響

十二角星拼圖的缺口若縮短為一條邊長，則內圈的正六角星會沒有缺口，使用缺口摺的情況會大大受限，能摺至目標位置的格子也會減少。

陸、結論

一、透過先摺成正四面體展開圖的方法，可以將六角星拼圖摺成正四面體。

二、可摺成正四面體的六角星拼圖圖格組合方式有 23 個模型；加入考量羊頭、身體、尾巴的放置的圖格位置，以及這些部位的方向，能摺成正四面體羊的六角星拼圖設計有 168 種。

三、23 個模組，可以歸納成 B1、D1（3）、D2（1）和 D2（2）這 4 種原型，利用原型可以直接在六角星拼圖上判斷羊頭、身體和尾巴的方向，有助於設計六角星拼圖遊戲。

四、原六角星羊拼圖只能使用 C1（1）模組拼成正四面體羊，謎底圖格的解是唯一，摺法也是唯一。

五、透過配對模組設計 2 隻羊、3 隻羊和 4 隻羊的六角星拼圖，增加遊戲的可操作性。

六、根據影響模組難度的三個因素所定義出的模組難度指數 DIF 值能合理的呈現模組的困難度。DIF 值 $=$ 對摺次數 $\times$ 對摺種類數 $\times$ $\left(\frac{1}{\text{展開圖數}}\right)$

七、利用 Excel 試算表快速算出各模組以及多組模組的 DIF 值，可找出難度較高的模組，用來設計摺紙遊戲。

八、在六角星拼圖只可以置入一種正八面體展開圖，運用定理一可移動圖格變成難度較高的拼圖。

九、利用六角星拼圖的設計原理可設計出十二角星拼圖摺出正八面體的摺紙謎題。

柒、研究心得與展望

沒想到我們一開始覺得很難的六角星拼圖竟然不是最難的設計，而在研究過程中我們學到了分類、編碼、樹狀圖以及邏輯推導等進行數學研究的方法，雖然因為推翻自己的假設而重做了好幾次，但能完成這次的研究讓我們很有成就感！

此外，我們已將根據本研究結果設計出的多隻羊六角星拼圖應用在學校的創意闖關園遊會上，依據求出的難度值，將關卡分成基礎關、進階關和魔王關，讓全校學生都來挑戰。此外，我們也將我們找出的解題密技跟班上同學分享，幫助他們在擔任關主時能幫助闖關者成功過關。同學表示，以往都死記摺法，有了解題密技就不怕忘了怎麼摺了！

未來我們想繼續解構能摺成正八面體的十二角星拼圖，看看能否找出作為基底的模組以進一步深入探討；我們也想將十二角星拼圖擴展成十八角星拼圖，探討將正二十面體展開圖放入十八角星拼圖的可能性。

捌、參考文獻資料

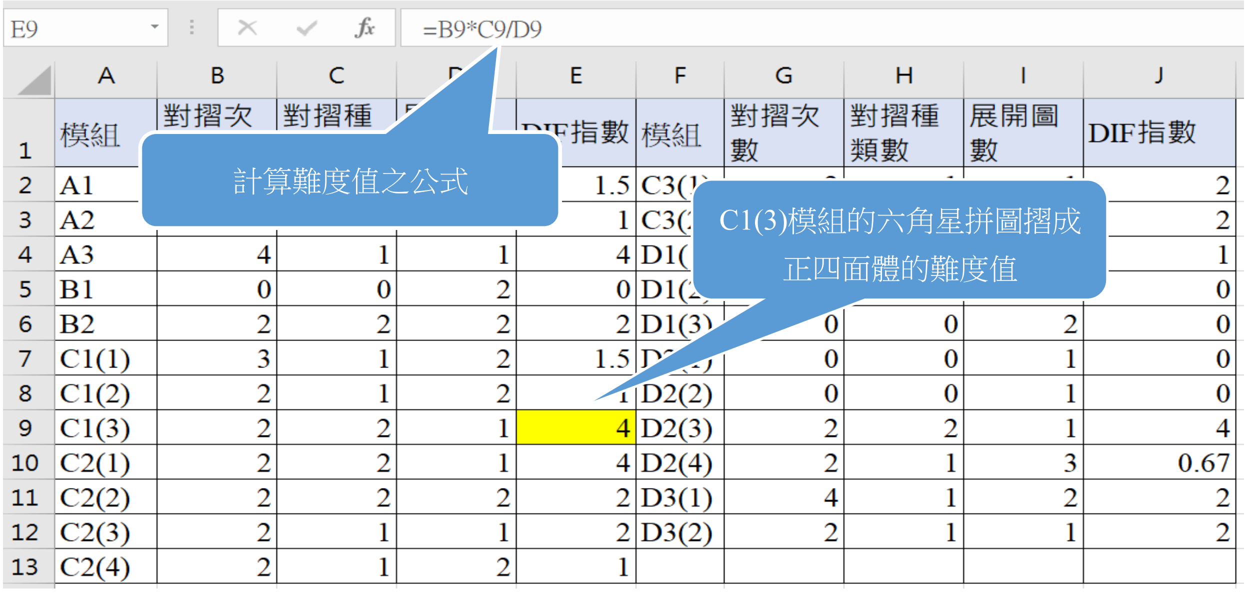
1. 林孟饗、蔡秉勳、沈運聖（2013）。莫利之交－莫利定理在平面與立體的延伸探討。中華民國第 53 屆中小學科學展覽會作品說明書。取自 https：//www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx？a=21&cat=10049&sid=10120。
2. 秋山仁（2013）。IQ 遊戲大百科第 1 冊平面圖形玩出你的創造力。天下雜誌出版。
3. 高允坤(2009)。升國中前必讀的漫畫數學教科書（3）-圖形(姜林權譯)。台灣麥克。

4. 楊峻盛、曾明慧、王若維、羅茜文（2005）。從摺紙中談規律之美。中華民國第 45 屆中小學科學展覽會作品說明書取自 https：//www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx？a=21&cat=42&sid=1471。

5. 鄭凱元、徐婉慈、賴睿加、王若瑄、林揚凱、林妤倩（2006）。柏拉圖的天空－正多面體展開圖之研究。中華民國第 46 屆中小學科學展覽會作品說明書。取自 https：//twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/elementary/0804/080402.pdf

玖、附錄

附錄 1　使用 Excel 試算表，計算六角星拼圖的圖格組合摺成正四面體的難度值



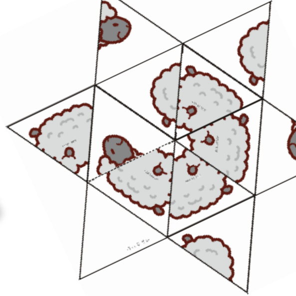
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	模組	對摺次	對摺種		DIF指數	模組	對摺次數	對摺種類數	展開圖數	DIF指數
2	A1				1.5	C3(				2
3	A2				1	C3(				2
4	A3	4	1	1	4	D1(				1
5	B1	0	0	2	0	D1(				0
6	B2	2	2	2	2	D1(3)	0	0	2	0
7	C1(1)	3	1	2	1.5	D	0	0	1	0
8	C1(2)	2	1	2	1	D2(2)	0	0	1	0
9	C1(3)	2	2	1	4	D2(3)	2	2	1	4
10	C2(1)	2	2	1	4	D2(4)	2	1	3	0.67
11	C2(2)	2	2	2	2	D3(1)	4	1	2	2
12	C2(3)	2	1	1	2	D3(2)	2	1	1	2
13	C2(4)	2	1	2	1					

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1			A1	A2	A3	B1	B2	C1(1)	C1(2)	C1(3)	C2(1)	C2(2)	C2(3)	C2(4)	C3(1)	C3(2)	D1(1)
2			0	1	4	0	2	1.5	1	4	4	2	2	1	2	2	1
3	A1	1.5															
4	A2	1															
5	A3	4															
6	B1	0															
7	B2	2															
8	C1(1)	1.5				5.5	7.5										
9	C1(2)	1				5	7										
10	C1(3)	4				8	10										
11	C2(1)	4				8	10										
12	C2(2)	2				6	8										
13	C2(3)	2				6	8										
14	C2(4)	1				5	7										
15	C3(1)	2				6	8										
16	C3(2)	2				6	8										
17	D1(1)	1				5	7										
18	D1(2)	0				4	6										5
19	D1(3)	0				4	6				8	6	6	5			5
20	D2(1)	0				4	6				8	6	6	5			5
21	D2(2)	0				4	6				8	6	6	5			5
22	D2(3)	4				**8**	10				12	10	10	9			9
23	D2(4)	0.67				4.67	6.67				8.67	6.67	6.67	5.67			5.67
24	D3(1)	2					8				10	8	8	7			7
25	D3(2)	2					8				10	8	8	7			7
26																	

【評語】080405

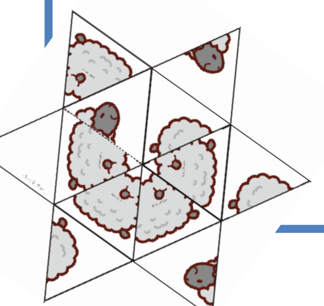
從一個有趣的「六角星羊拼圖摺紙遊戲」出發~探討將平面的六角星拼圖摺成一個正四面體,且使其中的三面連接起來是一隻完整羊的六角星拼圖摺紙遊戲。作者分類出可摺成正四面體的六角星拼圖圖格組合的 23 個模組，以此為基礎，除了計算所有六角星拼圖可摺成正四面體羊的設計組合總數、另外也設計出 2 隻羊、3 隻羊和 4 隻羊的六角星拼圖摺紙遊戲，以及證明了原六角星羊拼圖的謎底圖格與摺法的唯一性;此外作者透過置入正八面體展開圖的方式成功地將六角星拼圖摺成正八面體,最後也設計出利用十二角星拼圖摺出正八面體的摺紙遊戲。從最先嘗試將拼圖摺紙遊戲轉化為數學問題，然後透過文獻探討獲得啟發、並利用數學知識來解決問題；探究過程中，亦能嘗試改變條件來推廣問題的探討，然後循序漸進地解決問題，獲致研究發現；整體而言，圖文並茂的解說增加了研究內容的豐富度與可看性，研究過程符合科學探究的精神，也展現了數學學習的素養與創造性。

作品海報



尋找迷失的立體羊

—解構六角星拼圖之研究



摘　要

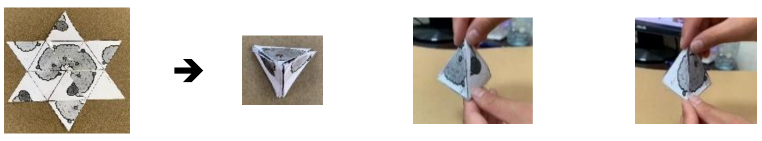
「六角星拼圖摺紙遊戲」是一個將平面的六角星拼圖摺成一個正四面體，且使其中的三面連接起來是一隻完整羊的摺紙遊戲。本研究以能摺出正四面體的 23 個圖格組合模組為基底，以展開圖作為平面圖形到立體形體的媒介，成功解構六角星拼圖圖格的選取與摺法。除了得出解謎密技外，也證明了謎底圖格與摺法的唯一性。此外，應用解構六角星拼圖所得之定理，將研究擴展至設計多隻羊拼圖以及摺出正八面體的多角星拼圖探討，並將之應用在創意園遊會闖關活動上。**（本作品之所有照片或圖片均由作者拍攝或繪製）**

壹、前言

一、研究動機

數學遊戲時間，老師下了一個挑戰給我們：將六角星羊拼圖上的圖案摺成「一隻」羊。六角星羊拼圖是由 12 個正三角形的面所組成，其中 3 個面上有羊頭圖案、5 個面上有羊身體圖案、3 個面上有羊尾巴圖案，以及 1 個空白面。我們得避開假圖的干擾，找到正確的三個部位圖案所在的面摺成羊。雖然拼圖上有一道缺口，方便拼摺，但很難將羊的三個部位連接拼在一起。突然，有同學成功了！原來，是要摺成正四面體，且使正四面體側面上的圖案連成一隻羊，如圖 1。

圖 1 六角星羊拼圖摺紙謎題



六角星拼圖　　俯視圖　　羊頭接羊身體　　羊身體接羊尾巴

但接下來我們請同學重新再摺時，他卻怎麼摺都摺不出立體羊來。老師常說：解題要能掌握數學的原型，知其所以然才能記得住、用得對。我們想知道有沒有什麼有系統的方法，只要掌握後，不管重複幾次都能摺成功？也好奇：謎底的三個面是如何選擇的？其他的面也能摺出羊圖嗎？摺法又是否唯一？還可以摺成其他的正多面體嗎？

二、研究目的

（一）探討將六角星拼圖摺成正四面體羊的摺法

（二）探討六角星羊拼圖謎底圖格與摺法的唯一性

（三）探討能摺出多隻正四面體羊的六角星拼圖設計

（四）探討能摺出正八面體的多角星拼圖設計

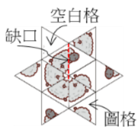
貳、研究設備及器材

六角星拼圖、空白六角星拼圖、空白十二角星拼圖、剪刀、智慧片、Excel、Word、Powerpoint、draw.io。

參、研究方法

一、名詞解釋

圖 2 拼圖名詞解釋



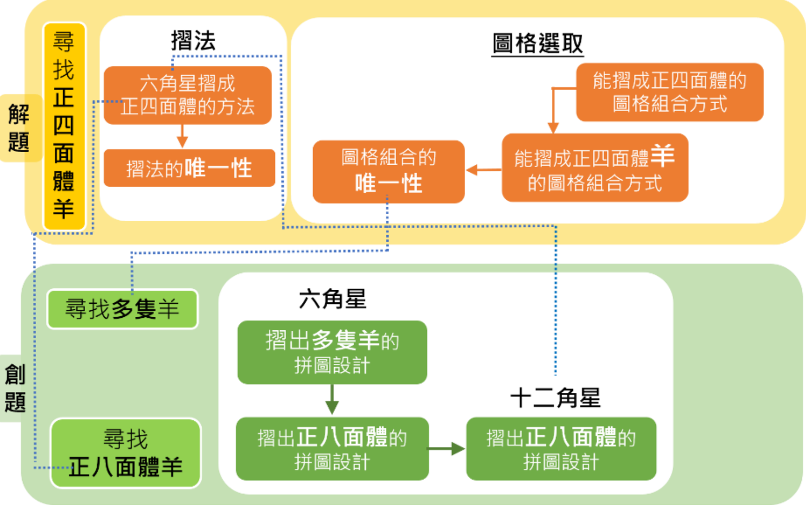
（1）如圖 2，六角星拼圖的每一個正三角形稱為格子、有圖案的格子稱為圖格，空白的格子稱為空白格。

（2）將六角星拼圖摺成正四面體的羊圖案，稱為正四面體羊。

（3）缺口是指剪開處。研究討論與記錄時，我們都讓缺口朝上方。

（4）單純摺：不透過缺口摺，僅以摺線為對稱軸，將格子摺到目標位置的對摺方法。缺口摺：透過缺口將格子摺到目標位置的對摺方法。

二、研究架構



三、文獻探討

（一）六角星拼圖

六角星羊拼圖取材自 IQ 遊戲大百科一書第 1 冊（秋山仁，2013）一書。書上雖然有解答，但僅指出將哪幾個三角形摺在一起以及摺紙步驟，並未敘明為何要這樣摺以及是否有其他的摺法。

（二）相關研究

表 1　**平面到立體以及與摺紙相關的研究**

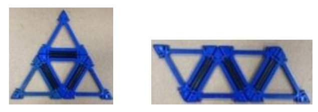
文獻名稱	與本研究相關內容摘要	對本研究的啟發
莫利之交－莫利定理在平面與立體的延伸探討（2013）	正多邊形具有很強的「對稱性」與「自我相似性」，正多面體則有很強的「對稱性」與「對偶性」。	六角星拼圖與正多邊形類似，也有很強的對稱性與自我相似性，研究摺法與圖格組合時可從此性質切入探索。
從摺紙中談規律之美（2005）	將紙條的摺痕定義出「內」與「外」之後，研究摺痕所形成數列的規律性及紙條立起來後最後所指的方向。	對摺六角星中的三角形時內摺或外摺對圖格造成的影響。

肆、研究過程與結果

研究一：探討將六角星拼圖摺成正四面體羊的摺法

我們想到五年級下學期立體形體單元曾學過將立體圖形的展開圖做成立體圖形，便試著先將六角星拼圖摺成正四面體展開圖，再摺成正四面體。正四面體展開圖有 2 種，如圖 3。

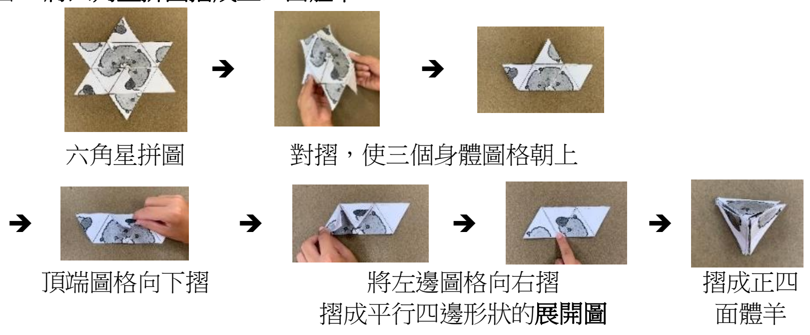
圖 3　**2 種正四面體展開圖**



大三角形狀　　平行四邊形狀

將六角星拼圖先摺成平行四邊形狀的展開圖便可摺成正四面體，如圖 4。

圖 4 **將六角星拼圖摺成正四面體羊**



研究二：探討六角星羊拼圖謎底圖格與摺法的唯一性

研究二(一)：能摺成正四面體的圖格組合為何？

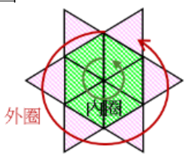
（一）能摺成正四面體的六角星拼圖圖格組合方式有幾種？

正四面體雖然有 4 個面，但只有 3 個面是羊部件圖格，第 4 個面可以是其他圖格或空白格，也就是說我們只要探討 3 個圖格的組合方式即可。

步驟 1：分類。

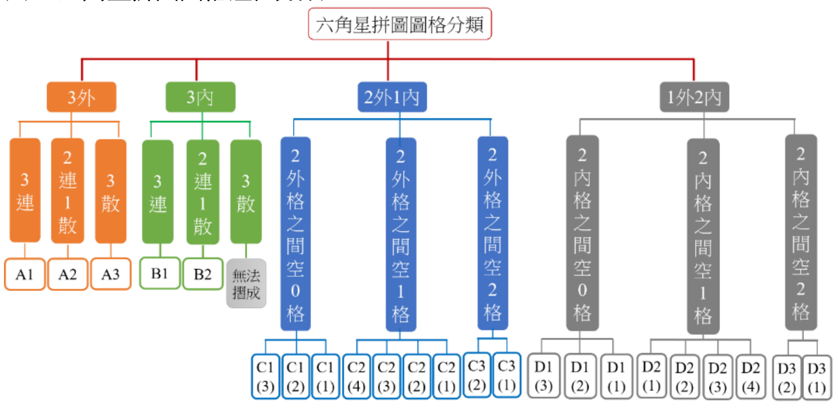
（1）將六角星分成外圈 6 格和內圈 6 格，如圖 5。依 3 個圖格佔內圈與外圈的格子數量，可分成：3 圖格在外圈（3 外）；2 圖格在外圈，1 圖格在內圈（2 外 1 內）；2 圖格在內圈，1 圖格在外圈（1 外 2 內）；3 圖格在內圈（3 內）四大類。

圖 5



（2）依照圖格間空白格數量進行二次分類。「3 連」是指 3 個圖格間沒有空白格；「2 連 1 散」指兩圖格相連，且與第 3 個圖格間有空白格；「3 散」指圖格間均有空白格。「2 外 1 內」又可分成 2 外圈格子之間空 0 格、空 1 格、空 2 格；「1 外 2 內」又可分成 2 內圈格子之間空 0 格、空 1 格、空 2 格，如圖 6。

圖 6 **六角星拼圖圖格組合分類**



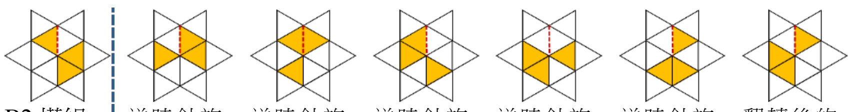
步驟 2：刪除無法摺成正四面體的圖格組合。

將各圖格組合一一畫出，共有 24 種圖格組合，但三內的三散類別無法摺成正四面體，故**共得出 23 種可摺成正四面體的圖格組合**，我們將這 23 種圖格組合稱為「模組」，並進行編碼，如表 2。

步驟 3：標註各模組的變形。

模組經旋轉、翻轉，我們稱模組的變形。由於缺口與圖格相對位置改變了，不一定都能摺成正四面體，如圖 7。各模組、代碼與其變形方式整理如表 2。

圖 7　**B2 模組各種變形**



B2 模組	逆時針旋轉 60°	逆時針旋轉 120°	逆時針旋轉 180°	逆時針旋轉 240°	逆時針旋轉 300°	翻轉後的模組
能否摺成	○	×	×	×	×	○

表 2　**23 個模組、代碼與其變形方式**

	A（三外）			B（三內）		
再分類	三連	二連一散	三散	三連	二連一散	三散
圖						
編碼	A1	A2	A3	B1	B2	無法摺成正四面體
變形	Ra、F	Ra、F	Ra、F	Ra、F	R60°、F	

	C（二外一內）								
再分類	2 外格之間空 0 格			2 外格之間空 1 格				2 外格之間空 2 格	
圖									
編碼	C1（1）	C1（2）	C1（3）	C2（1）	C2（2）	C2（3）	C2（4）	C3（1）	C3（2）
變形	Ra、F	Ra、F	F	R60°、F	Ra、F	Ra、F	Ra、F	Ra、F	Ra、F

	D（一外二內）								
再分類	2 內格之間空 0 格			2 內格之間空 1 格				2 內格之間空 2 格	
圖									
編碼	D1（1）	D1（2）	D1（3）	D2（1）	D2（2）	D2（3）	D2（4）	D3（1）	D3（2）
變形	Ra、F	Ra、F	Ra、F	Ra、F	Ra、F	R60°、F	Ra、F	Ra、F	Ra、F

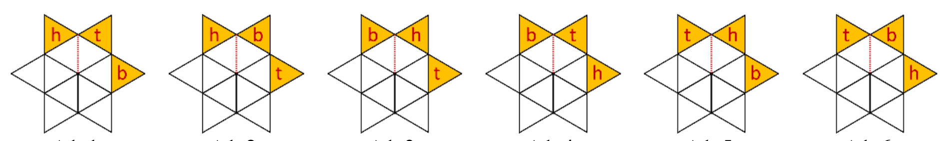
註：①RX°表示逆時針旋轉後 X°可摺成正四面體；②Ra 表示逆時針旋轉 60°、120°、180°、240°、300°後皆可摺成正四面體；③F 表示翻轉後可摺成正四面體

研究二(二)：能摺成羊圖案的圖格設計（羊頭、身體與羊尾巴的擺放方向）為何？

討論 1：羊頭、羊身體與羊尾巴圖案是否可任意擺放在模組的圖格中？

同一模組中，每一個圖格可以放羊頭（h）、羊身體（b）或羊尾巴（t）圖案，3x2x1=6，所以會有 6 種圖案擺放方式。以 A1 模組為例，會延伸出 6 種擺放方式，如圖 8。我們稱「次模組 A1-1」、「次模組 A1-2」「次模組 A1-3」，依此類推。

圖 8 **A1 的次模組**



我們發現，摺成正四面體後，因為圖格彼此都是相鄰的面，所以每一種圖案擺放位置都有可能摺成正四面體羊，不會有羊頭接羊尾巴的情況。

圖 9

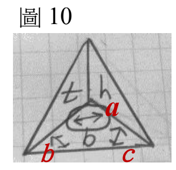
然而，由於羊頭、羊身體與羊尾巴位於三角圖格的一條邊上，如果連接方向不對，是有可能羊頭接不到羊身體的，如圖 9。

討論 2：影響羊頭、羊身體與羊尾巴圖案連接方向的因素？

發現 1：每一種次模組都只有一種連接方向能摺成羊圖

考量羊頭、身體與羊尾巴所在的圖格位置以及連接方向，一個圖格有 3 種連接方向，有 3 個部件圖格，因此每一種次模組會有 3x3x3=27 種不同方向的組合，但只有一種能摺成正四面體羊，說明如下：

圖 10

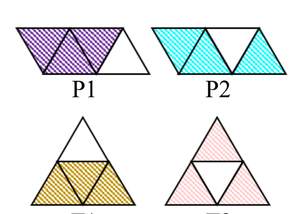


❶身體要能連頭和尾巴，所以頭、尾巴要配合身體方向。
❷身體有 *a*、*b*、*c*，3 種方向選擇，如圖 10，但要能接到頭，同時也要能接到尾，所以只剩下 1 種方向。只有方向 *a* 能接到頭，同時也能接到尾巴。

發現 2：同一個次模組，不同的摺法會產生相同或不同的方向組合。

將六角星拼圖摺成不同的正四面體展開圖，再摺成正四面體時，羊頭、羊身體與羊尾巴的連接是否也需要不同的方向呢？正四面體展開圖有 2 種，填入 3 個圖格和 1 個空白格後，會有 4 種組合，分別命名為 P1、P2、T1 和 T2，如圖 11。以 A1 模組為例，各次模組分別用 P1、T1 摺法所得到的方向是相同的；而以 A2 模組為例，各次模組分別用 P1、P2、T1 三種展開圖摺法所得到的方向都不相同。

圖 11 **展開圖圖格組合命名**



發現 3：方向數×6＝模組設計圖數，進而可算出所有六角星拼圖可摺成正四面體羊的設計組合總共有 168 種。

我們將同一模組因摺法產生的羊部件方向組合數量稱為方向數，找出各模組的方向數後，因各個模組會有 6 種次模組，模組設計圖數＝方向數×6，加總 23 個模組的設計圖數，可求得六角星拼圖圖格設計會有 168 種。23 個模組的方向數以及設計圖數整理如表 3。

表 3 **各模組摺法、方向數與設計圖數**

模組	摺法	方向數	設計圖數
A1	P1、T1	1	1×6=6
A2	P1、P2、T1	3	3×6=18
A3	T2	1	1×6=6
B1	P1、T1	1	1×6=6
B2	P1、T1	1	1×6=6
C1(1)	P1、P2	2	2×6=12
C1(2)	P1、T1	1	1×6=6
C1(3)	P2	1	1×6=6
C2(1)	T2	1	1×6=6
C2(2)	P1、T1	1	1×6=6
C2(3)	T2	1	1×6=6
C2(4)	P1、T1	1	1×6=6

模組	摺法	方向數	設計圖數
C3(1)	P1	1	1×6=6
C3(2)	P2	1	1×6=6
D1(1)	P1、T1	1	1×6=6
D1(2)	P2	1	1×6=6
D1(3)	P1、T1	1	1×6=6
D2(1)	T2	1	1×6=6
D2(2)	P2	1	1×6=6
D2(3)	T2	1	1×6=6
D2(4)	P1、P2、T1	3	3×6=18
D3(1)	P1、T1	1	1×6=6
D3(2)	P1	1	1×6=6
			合計 168

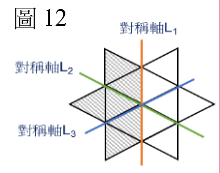
討論 3：如何判斷指定圖格能否摺至目標位置？

定理一：選定拼圖上任意一個格子作為目標位置，均存在 5 個相異的格子，可透過單純摺或缺口摺的方式將這些格子摺至目標位置上。

證明：

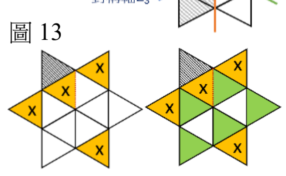
(1)①六角星拼圖為對稱圖形，只要考慮對稱軸一側的 6 個格子就可以了，如圖 12，以 L_1 為對稱軸，考慮 L_1 左側的 6 個塗色格子。

圖 12



②每一個目標位置都有 4 個以摺線為對稱軸的對稱面，如圖 13 的橘色格子。只要將格子摺到這些面的背面，就可以對摺回目標位置上。

圖 13



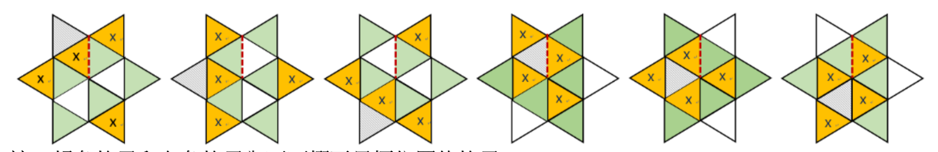
③可摺至橘色格子背面的格子必是橘色格子的對稱面。

④4 個橘色格子，每一個橘色格子會有 3 個對稱面，對稱面會有重複，除以 2 後，扣除目標格子：$\frac{4\times3}{2}-1=6-1=5$，故總共會有 5 個對稱面，如圖 13 的綠色格子，這些格子必可透過對摺的方式摺至目標位置上。

(2)使用缺口摺也是沿著摺線對摺，所以結果會與單純摺相同。

應用：利用定理一，可整理出摺至拼圖任意位置的所有格子圖，如圖 14。利用圖 14 可以幫助我們快速掌握可摺至某目標位置的所有格子。

圖 14 **以不同格子為目標位置，可摺至該目標位置的所有格子圖**



註：橘色格子和白色格子為不可摺至目標位置的格子
綠色格子為可摺至目標位置的格子

討論 4：單純摺與缺口摺的差異為何？

單純摺較缺口摺容易操作，且使用缺口摺與單純摺，都可摺至目標位置的結果一樣，既然如此，六角星拼圖中缺口的作用為何？

發現 4：採單純摺較缺口摺會蓋住較多的格子，透過缺口摺可避免蓋住其他完成正四面體展開圖所需的格子。但如沒有避免圖格被蓋住的需求，以單純摺來操作較為容易。

研究二(三)：六角星羊拼圖的謎底圖格是否為唯一解？

以三個羊頭圖格來思考它們和其他的身體和尾巴圖格是否能摺成正四面體羊。如圖 15，三個羊頭圖格位置分別以內⑥、外 5、外 3 表示。從表 4 可得知，六角星羊拼圖只能使用 C1(1)模組拼成正四面體羊，也就是它的謎底圖格是唯一解。

圖 15

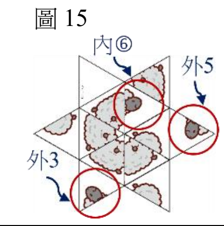


表 4 **含三個羊頭圖格之模組與能否摺成正四面體羊**

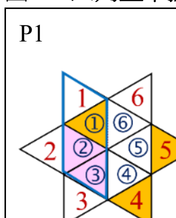
羊頭圖格位置	含有羊頭圖格模組	能否摺成正四面體羊	原因
內⑥	C1(3)、C3(1)、D2(1)、D3(1)	否	有空格
	C2(1)	否	有空格且圖案重複
	B1、C1(1)、C1(2)、C2(3)、C2(4)、C3(2)、D1(1)、D1(3)、D2(3)、D3(2)	否	圖案重複
	B2、C2(2)、D1(2)、D2(2)、D2(4)	否	圖案方向錯誤
外 5	A1、A2、A3、C2(1)、C2(2)、C2(3)、C2(4)	否	三格中有空格
	C1(2)、C1(3)、C3(1)、D1(1)、D1(2)、D2(1)、D2(3)、D2(4)、D3(1)	否	圖案重複
	D1(3)、D2(2)、D3(2)	否	圖案方向錯誤
	C1(1)	**是**	
外 3	A3	否	圖案重複
	C1(3)	否	三格有空格
	A1、A2、A3、C1(1)、C1(2)、C2(1)、C2(2)、C2(3)、C2(4)、C3(1)、C3(2)、D1(1)、D1(3)、D2(1)、D2(2)、D2(3)、D3(1)、D3(2)	否	圖案重複
	D1(2)、D2(4)	否	圖案方向錯誤

研究二(四)：摺法是否唯一？

應用定理一所得結果，可以得知謎底圖格只能摺成展開圖 P1、P2，但不能摺成 T1、T2，圖 16 為將三個謎底圖格摺成展開圖 P1、P2 的方法。

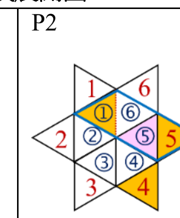
圖 16 **六角星羊拼圖的三個謎底圖格可摺成展開圖 P1、P2**

P1



【說明】：
∵外格 4 能摺到內格③、外格 5 能摺到內格②
∴可將三個解圖格摺成平行四邊形狀展開圖。

P2

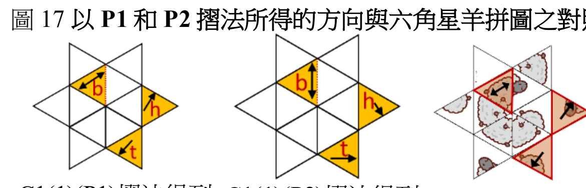


【說明】：
∵外格 4 能摺到內格⑤，並將內格①先摺到內格②的背面，再摺回內格①的正面，以免外格 4 摺到內格⑤時覆蓋住內格①。
∴可將三個解圖格摺成平行四邊形狀展開圖。

我們找出包含三圖格某一格的所有可能大三角形展開圖位置，共有五類。各類依據展開圖 T1 或 T2 會有不同的目標位置，總共會有 15 種情形。根據定理一所得結果，可以得知所有情形均無法將大三角外的另外兩個謎底圖格摺到目標位置。

六角星羊拼圖為 C1(1)模組，由圖 17 可知，六角星羊拼圖的三個謎底圖格只有摺成展開圖 P1 時，羊頭、羊身體、羊尾巴才能連接正確。

圖 17 **以 P1 和 P2 摺法所得的方向與六角星羊拼圖之對照**

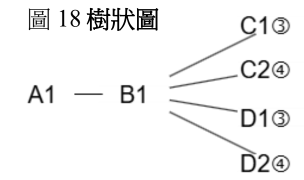


C1(1)(P1)摺法得到的方向　C1(1)(P2)摺法得到的方向　六角星羊拼圖

研究三：探討能摺出多隻正四面體羊的六角星拼圖設計

一隻羊需要 3 圖格，六角星拼圖有 12 個格子，最多可放入 4 隻羊。一隻羊等同於一個模組，利用研究二所得的 23 個模組，找出可配對的模組，便可設計出 2 隻羊、3 隻羊和 4 隻羊的六角星拼圖。思考圖格、空白格數量間的關係，我們得出定理二。利用定理二找出可搭配的 2 個模組組合，再繼續延伸，找出可配對的 3 個、4 個模組組合。由於資料繁複，我們利用樹狀圖整理圖案組合方式與數量，樹狀圖舉例如圖 18。

圖 18 **樹狀圖**



∵C、D 共 18 種，但 C3 與 A1 有重疊的圖格，D3 與 B1 有重疊的圖格，不能配對的有 2+2 種
∴18－(2+2)=14(14 種)

最後我們得出 2 個、3 個與 4 個模組組合分別有 239 種、351 種、536 種。

定理二：

設兩模組為 M1 和 M2，$Z_{外}$為外圈占用格子數，$Z_{內}$為內圈占用格子數，
$Z_{外}$=外圈圖格數+兩圖格間的空格數，$Z_{內}$=內圈圖格數+兩圖格間的空格數。

(1) 當 M1 的外圈空格數=0 時，若 M2 的外圈剩餘格子數≧3，則 M1 和 M2 可配對。
當 M1 的內圈空格數=0 時，若 M2 的內圈剩餘格子數≧3，則 M1 和 M2 可配對。

(2) 當 M1 外圈的空格數＞0 時，若 M2 外圈剩餘格子數或空格數＞0，且 M1 $Z_{外}$+M2 $Z_{外}$≦8，則 M1 和 M2 可配對。
當 M1 內圈的空格數＞0 時，若 M2 內圈剩餘格子數或空格數＞0，且 M1 $Z_{內}$+M2 $Z_{內}$≦8，則 M1 和 M2 可配對。

由於模組組合種類相當的多，如何從中選取難度高些的模組來進行設計呢？

討論 1 如何將模組難度數值化？

影響模組難度的因素有三個：

因素 1「對摺次數」：摺成展開圖的對摺次數。次數越多，難度越高。

因素 2「對摺種類數」：摺成展開圖的對摺方式種類個數。同時使用單純摺和缺口摺，會比僅使用單純摺的難度高。

因素 3「展開圖數」：可摺成的展開圖種類個數。可摺成的展開圖越多種，難度越低。

由此，我們針對模組難度做以下的定義：

$$\text{模組難度指數 DIF 值} = \text{對摺次數} \times \text{對摺種類數} \times \left(\frac{1}{\text{展開圖數}}\right)$$

我們利用 Excel 試算表計算出 2 組、3 組、4 組模組組合設計的難度值，表 5 列出最高的 DIF 值與模組組合。

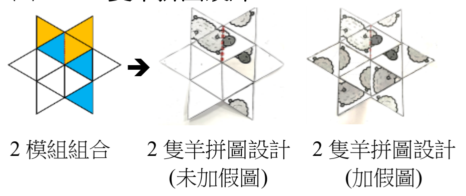
表 5 **多隻羊六角星拼圖 DIF 值最大值與模組組合**

圖案組數	Max（DIF）	模組
2	8	A3-D2(3)、C1(3)-D2(3)、A3-C2(1)、C2(1)-D2(3)
3	10	A3-B2-C2(1)、A3-B2-D2(3)、A3-C2(1)-D3(1)、A3-C2(2)-D2(3)、A3-C2(3)-D2(3)、A3-D2(3)-D3(1)、A3-D2(3)-D3(2)
4	11.5	A1-B2-C1(3)-D2(3)、A1-B2-C2(1)-D2(3)

討論 2 如何加入假圖？

我們將這些模組實際繪製在六角星拼圖上，2 隻羊與 3 隻羊拼圖因還有空白格，因此設計時亦可加入假圖，如圖 19、圖 20 和圖 21：

圖 19 **2 隻羊拼圖設計**

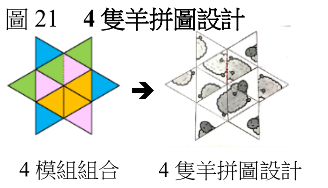


2 模組組合　2 隻羊拼圖設計(未加假圖)　2 隻羊拼圖設計(加假圖)

圖 20 **3 隻羊拼圖設計**

3 模組組合　3 隻羊拼圖設計(未加假圖)　3 隻羊拼圖設計(加假圖)

圖 21 **4 隻羊拼圖設計**



4 模組組合　4 隻羊拼圖設計

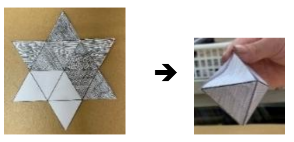
研究四：探討能摺出正八面體的多角星拼圖設計

研究四(一)：六角星拼圖可摺成正八面體嗎？

討論 1：在六角星拼圖上可置入正八面體展開圖嗎？

正八面體展開圖有 11 種。我們發現，只有圖 22 中的展開圖(塗色部分)可以置入六角星拼圖中。

圖 22 **六角星拼圖摺成正八面體**



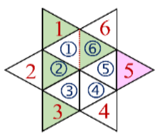
討論 2：如何移動圖格，將展開圖變形？

將置入六角星拼圖的正八面體展開圖旋轉、翻轉後，考量缺口與圖格相對位置，扣除重複與對稱的圖形後，可分成 3 類，如圖 23。

圖 23

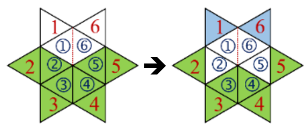
A 類　B 類　C 類

圖 24



利用定理一可將各類展開圖某些圖格移到空白格。以 A 類為例，說明如何變形：如果以外 5 作為目標位置，依定理一，外 1、外 3、內②、內⑥都可摺至外 5，見圖 24 綠色格子。但是外 1、內②、內⑥摺至外 5 時，即便使用缺口摺仍會蓋住其他圖格，只有外 3 不會，所以只可將外 3 圖格移到外 5，如圖 25。

圖 25

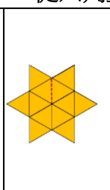
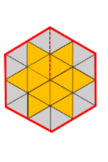
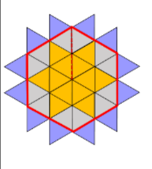
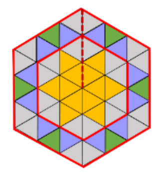
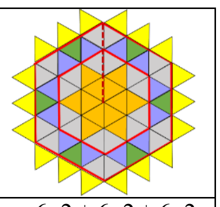


研究四(二)：如何設計能摺成正八面體的多角星拼圖？

討論 1：下一個多角星拼圖是幾角星？格子數為何？

在六上數學規律問題單元中，我們學會有規律的找下一個圖形並列式。我們先將六角星補成正六邊形，再於各邊上畫上角，就可擴充成多角星拼圖，如圖 26。

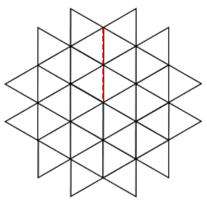
圖 26 **從六角星拼圖擴充成多角星拼圖**

圖					
格子數	6×2 =12	6×2＋6×2 =6×4 =24	6×2＋6×2 ＋6×2 =6×6 =36	6×2＋6×2 ＋6×2＋6×1 ＋6×2 =6×9=54	6×2＋6×2＋6×2 ＋6×1＋6×2＋6×3 =6×12 =72

討論 2：在十二角星拼圖上可置入正八面體展開圖嗎？

十二角星拼圖，如圖 27，共有 36 格，由左到右有 6 層，正八面體展開圖最多三層，所以 11 種正八面體展開圖均可置入。

圖 27 **十二角星拼圖**

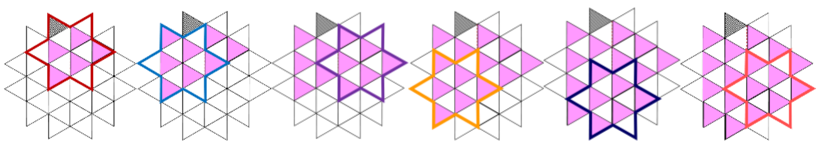


討論 3：如何移動圖格，將十二展開圖變形？

應用探討六角星拼圖所得的定理一，我們可以延伸出定理三：

定理三：選定十二角星拼圖上任意一個格子作為目標位置，均存在 17 個相異的格子，可透過單純摺或缺口摺的方式將這些格子摺至目標位置上。

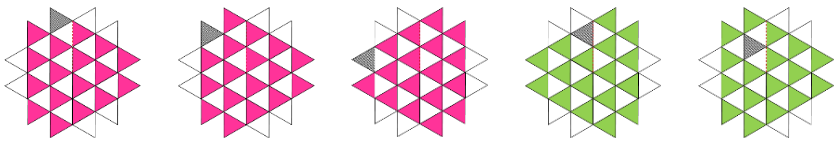
圖 28 **應用六角星研究結果十二角星拼圖，可摺至目標位置的格子圖**

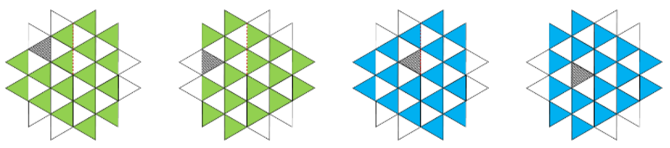


根據定理一，每一個目標位置在六角星上均存在相異的 5 個格子，可將這些格子摺至目標位置。而每多一個六角星會多出 3 個格子，6 個六角星會多出 3×(6-1)個格子，第一個六角星扣除重複的會有(5-3)個格子，因此總共會有 3×(6－1)+ (5－3)=17，17 個格子。

應用：整理摺至拼圖任意位置的所有格子圖，利用格子圖可以幫助我們快速掌握可摺至某目標位置的所有格子。

圖 29 **以不同格子為目標位置，可摺至該目標位置的所有格子圖**

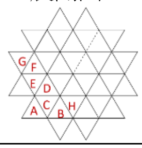
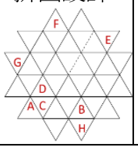
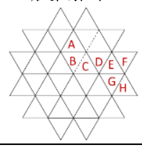
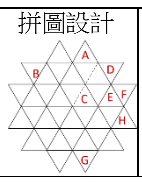
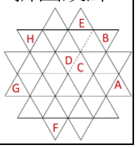




註：灰色格子為目標位置，色格為可摺至目標位置的所有格子圖

不同展開圖組合的十二角星拼圖摺紙謎題舉例如圖 30：

圖 30 **十二角星拼圖摺紙謎題設計舉例**

展開圖	拼圖設計	展開圖	拼圖設計	展開圖	拼圖設計
					

伍、討論

一、六角星羊拼圖解題密技

我們可以透過正四面體展開圖以及定理一的結果幫助玩家有效率且快速的摺成正四面體羊，密技如下：

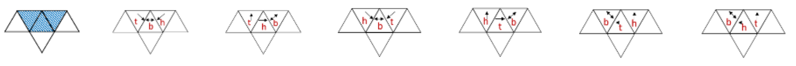
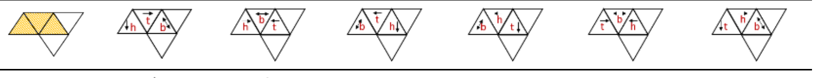
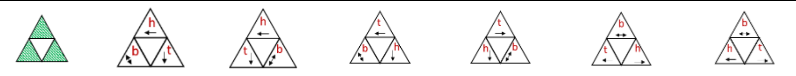
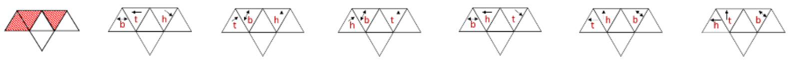
（一）如果知道玩家已知哪三個圖格是謎底圖格，可以先指定其中一格圖格，找出包含它的展開圖，再根據定理一結果判斷其他 2 個圖格如何摺至目標位置，就可快速摺成正四面體羊。

（二）如果玩家不知謎底圖格，如何避開假圖挑選謎底圖格呢？可以先找任意的一個圖格來思考：找出含有該圖格的展開圖組合，再應用定理一的結果判斷其他身體部位能否跟它合成展開圖，便可找出謎底圖格。

二、設計六角星拼圖，可利用原型直接判斷羊部件的方向

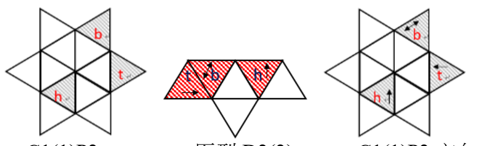
23 個模組，可歸納成 4 種原型，分別為 B1、D1(3)、D2(1)、D2(2)，每一種原型的圖格中可放入羊頭、羊身體和羊尾巴，又各會有 3×2×1＝6 種，如表 6。

表 6 **4 種原型及羊頭、羊身體和羊尾巴位置與方向變化**

原型	羊頭、羊身體和羊尾巴位置與方向變化
B1	
D1 (3)	
D2 (1)	
D2 (2)	

利用原型可從六角星拼圖直接判斷羊各部件的方向。以 C1(1)P2 為例，P2 摺法的原型是 D2(2)，從 D2(2)可看出方向，如圖 31。

圖 31 **以原型判斷方向**



C1(1)P2　原型 D2(2)　C1(1)P2 方向

三、十二角星拼圖，缺口長短的影響

十二角星拼圖的缺口若縮短為一條邊長，則內圈的六角星會沒有缺口，使用缺口摺的情況會大大受限，能摺至目標位置的格子也會減少。

陸、結論

一、透過先摺成正四面體展開圖的方法，可以將六角星拼圖摺成正四面體。

二、可摺成正四面體的六角星拼圖圖格組合方式有 23 個模組；加入考量羊頭、身體、尾巴的放置的圖格位置，以及這些部位的方向，能摺成正四面體羊的六角星拼圖設計有 168 種。

三、23 個模組，可以歸納成 B1、D1(3)、D2(1)和 D2(2)這 4 種原型，利用原型可以直接在六角星拼圖上判斷羊頭、身體和尾巴的方向，有助於設計六角星拼圖遊戲。

四、原六角星羊拼圖只能使用 C1(1)模組拼成正四面體羊，謎底圖格的解是唯一，摺法也是唯一。

五、透過配對模組設計 2 隻羊、3 隻羊和 4 隻羊的六角星拼圖，增加遊戲的可操作性。

六、在六角星拼圖只可置入一種正八面體展開圖，運用定理一可移動圖格設計圖格分散的拼圖。

七、利用定理一延伸得出的定理三能設計圖格分散的十二角星拼圖摺正八面體的摺紙謎題。

柒、研究心得與展望

我們已將根據本研究結果設計出的多隻羊六角星拼圖應用在學校的創意闖關園遊會上，也依據求出的難度值，將關卡分成基礎關、進階關和魔王關，讓全校學生都來挑戰。此外，我們也將我們找出的解題密技跟班上同學分享，幫助他們在擔任關主時能幫助闖關者成功過關。同學表示，以往都死記摺法，有了解題密技就不怕忘了怎麼摺了！

未來我們想繼續解構能摺成正八面體的十二角星拼圖，看看能否找出作為基底的模組以進一步深入探討；我們也想將十二角星拼圖擴展成十八角星拼圖，探討將正二十面體展開圖放入十八角星拼圖的可能性。

捌、參考文獻資料

1. 林孟鑾、蔡秉勳、沈運聖（2013）。莫利之交－莫利定理在平面與立體的延伸探討。中華民國第 53 屆中小學科學展覽會作品說明書。取自 https：//www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx？a=21&cat=10049&sid=10120。
2. 秋山仁（2013）。IQ 遊戲大百科第 1 冊平面圖形玩出你的創造力。天下雜誌出版。
3. 高允坤(2009)。升國中前必讀的漫畫數學教科書（3）-圖形(姜林權譯)。台灣麥克。
4. 楊峻盛、曾明慧、王若維、羅茜文（2005）。從摺紙中談規律之美。中華民國第 45 屆中小學科學展覽會作品說明書取自 https：//www.ntsec.edu.tw/science/detail.aspx？a=21&cat=42&sid=1471。
5.鄭凱元、徐婉慈、賴睿加、王若瑄、林揚凱、林妤倩（2006）。柏拉圖的天空－正多面體展開圖之研究。中華民國第 46 屆中小學科學展覽會作品說明書。取自 https：//twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/elementary/0804/080402.pdf