中華民國第65屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080403

星芒交匯-探討特定四面體之費馬點

學校名稱：　彰化縣彰化市南郭國民小學

作者：	指導老師：
小六　王沐嘉	陳宥妤 吳嘉明

關鍵詞：　費馬點、四面體、托里切利點

星芒交匯-探討特定四面體之費馬點

摘 要

本研究探討特定四面體中費馬點之存在條件與其坐標表示式。本研究以邊長為 2 之正四面體為例，利用幾何對稱與空間向量運算，證明其費馬點唯一，並求得其座標為 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$。進一步探討具特定對稱性之四面體，底面為任意三角形 ABC，且使 ΔABC 與 ΔABD 全等，設 $\overline{EF}$ 為 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 中點連線，探討費馬點落在線段 $\overline{EF}$ 上之情形。透過空間幾何分析，推得若特定四面體的費馬點落在 $\overline{EF}$ 上，則 $c_1=0.5b_1$。進而，當費馬點 P 落在 $\overline{EF}$ 上時，其費馬點 $P\left(p_1,p_2,p_3\right)$ 坐標表示式如下:

$$p_1=0.5b_1\text{，}\ p_2=\frac{0.5b_1}{b_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}}\left(c_2+d_2\right)\text{，}\ p_3=\frac{0.5b_1d_3}{b_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}}$$

此外，利用費馬點唯一性及平面四邊形費馬點性質，說明此點亦為四邊形 $IJAB$ 之費馬點，研究成果將平面幾何中費馬點概念成功推廣至特定四面體，並提出當不滿足此條件時，費馬點坐標的一般化推廣仍有待後續探究。

壹、前言

一、研究動機

在資優班的獨立研究課程中，老師指導我們查閱歷屆全國科展資料時，我發現有許多作品探討了平面幾何中的費馬點問題，例如三角形中距離總和最小點的性質與求法（鄭弘旻、林保良，1986；鄭旻佳、張佑任，2005），相關研究涵蓋幾何作圖（李豪韋等，2009；陳璽文等，2003；黃靖堯等，2020）、向量分析（謝多等，2024）與物理力平衡（李文展等，2008）等方法。這讓我對費馬點產生了濃厚興趣。此外，也有一些研究將它推論至多邊形與邊的長度加權，但將其推導到四面體的費馬點座標表示法之研究較少，所以我進一步思考：若將費馬點從平面推廣到空間，特別是四面體中，是否也能找到類似的性質與明確的坐標表示？再度查找資料之後，我發現針對四面體中費馬點的研究相當稀少，尤其缺乏具體條件與坐標推導的結果。因此，我決定以特定具對稱性的四面體為研究對象，嘗試推導其費馬點的存在條件與坐標公式，並進一步將費馬點的理論由平面推廣至空間。

二、文獻回顧

在研究中，研究者找到了關於費馬點的作品（詳如參考文獻），其中有一些費馬點的性質，在之後的研究將應用到，相關內容重點整理如下：

（一）費馬點的定義與基本性質：

費馬點（Fermat Point），也稱為托里切利點（Torricelli Point）或斯坦納點（Steiner Point），以二維三角形為例，是指在給定的 ΔABC 平面內，尋找一點 P ，使得點 P 到三角形三個頂點的距離之 $(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})$ 達到最小值。

（二）幾何特性：

1. $120°$ 角條件：如果 ΔABC 的所有內角都小於 $\angle A \geq 120°$ ，則費馬點 P 是三角形內唯一一點，使得 $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120°$ 。

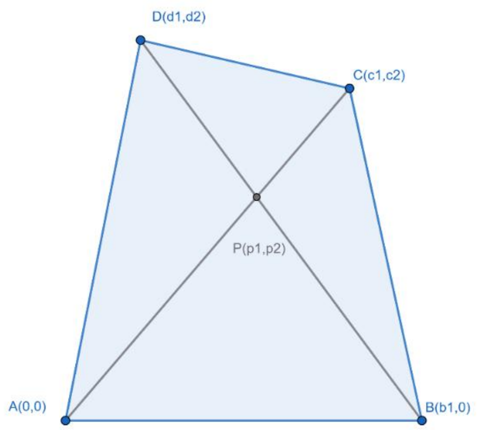
2.托里切利幾何作圖法：費馬點是分別以 ΔABC 的三邊為邊，向外作正三角形 (例如，正 ΔABM 、正 ΔBCN 、正 ΔACP) 後，這三個正三角形的外接圓的交點，這個交點也被稱為托里切利點。

3.鈍角三角形 (存在內角大於等於 $120°$ 的情況)：如果 ΔABC 有一個內角大於等於 $120°$ ，則費馬點就是這個鈍角的頂點。例如，若 $\angle A \geq 120°$ ，則費馬點 P 為頂點 A 。

4.物理學原理：可以利用物理學的力學平衡原理找到費馬點。將三個力（大小相等，方向分別指向三角形三個頂點）作用於一點，當系統達到平衡時，該點的位置即為費馬點 P 。這也與最小勢能原理相符。

5.向量性質：當三角形內角皆小於 $120°$ 時，從費馬點 P 出發的三個向量 $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ 、 $\overrightarrow{PC}$ ，在平移後可以構成一個正三角形，並且向量和 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$ 。

6.四邊形費馬點：將對角相連，其交點為費馬點（許瑋婷等，2005）。



圖一 四邊形費馬點的做圖（作者自行繪製）

7. 費馬點是唯一的

費馬點的存在與唯一性問題，V. Boltyanski , H. Martini and V. Soltan 之電子書中，第 244-247 頁有提出，可供本研究參考。

三、研究目的

本研究提出下列研究目的：

（一）找出邊長等於 2 之正四面體的費馬點坐標位置。

（二）求出特定四面體的費馬點落在 $\overline{EF}$ 上之條件。特定四面體是指四面體 $ABCD$ 中，底面為 ΔABC，且 ΔABC 與 ΔABD 全等， E 點為 $\overline{CD}$ 之中點， F 點為 $\overline{AB}$ 之中點之四面體。

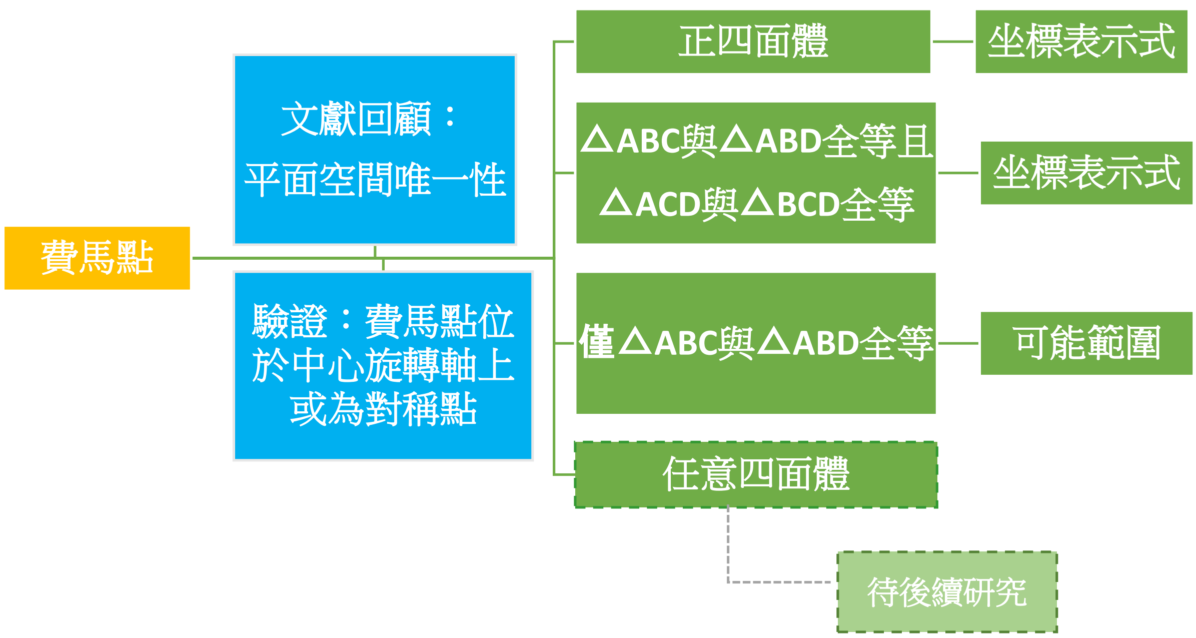
（三）特定四面體的費馬點落在 $\overline{EF}$ 上時，求出費馬點坐標表示式。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、電腦繪圖軟體 GeoGebra。

參、研究架構與過程

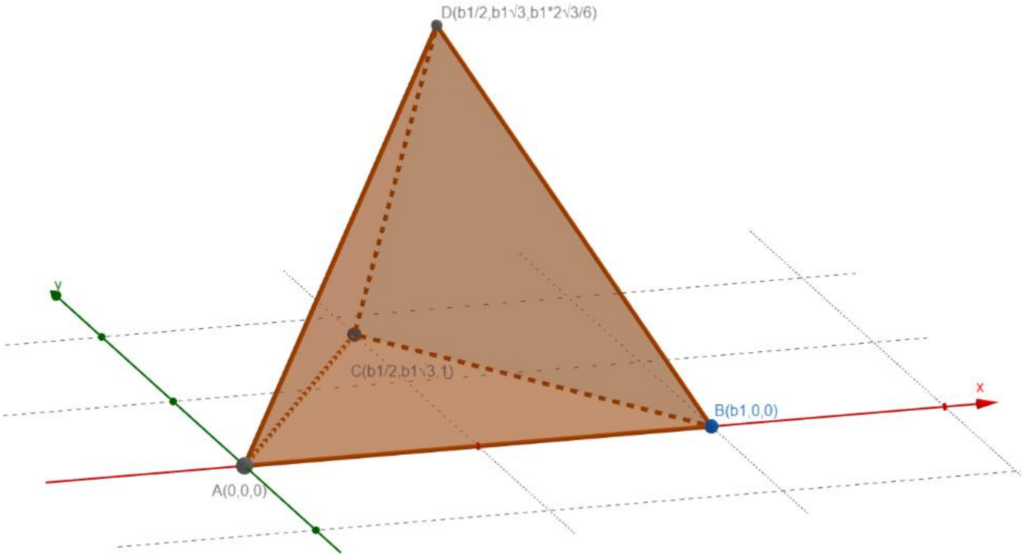
一、研究架構



二、符號定義

（一）設費馬點為 $P\left(p_1, p_2, p_3\right)$，特定四面體 $ABCD$ 之頂點坐標分別為 $A(0,0,0)$、$B(b_1,0,0)$、$C(c_1,c_2,0)$ 與 $D(d_1,d_2,d_3)$。

（二）取 $b_1=2$、$c_1=1$、$c_2=\sqrt{3}$、$d_1=1$、$d_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$、$d_3=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，即邊長為 2 之正四面體 $ABCD$。

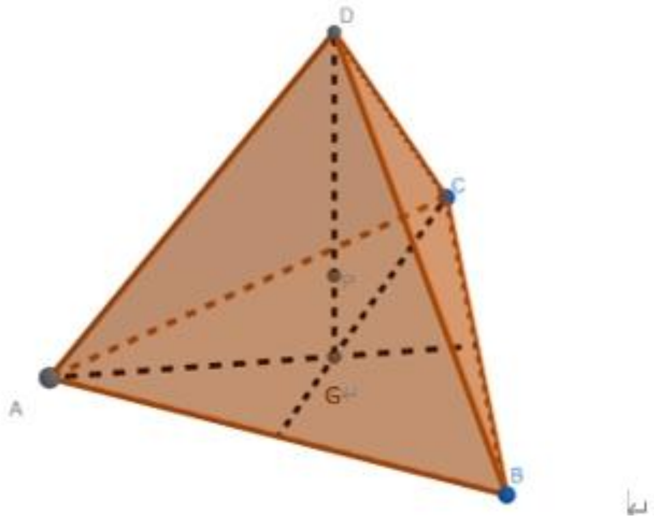


圖二 正四面體 $ABCD$ （作者自行繪製）

三、研究過程

（一）正四面體的費馬點

取 $b_1=2$、$c_1=1$、$c_2=\sqrt{3}$、$d_1=1$、$d_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$、$d_3=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，即邊長為 2 之正四面體 $ABCD$，求空間中一點 $P\left(p_1, p_2, p_3\right)$，使得 $(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD})$ 為最小時，點 P 的坐標為何？



圖三 正四面體 $ABCD$（作者自行繪製）

先考慮其底面正三角形 ΔABC 的重心，記為 G 。假設在四面體 $ABDG$ 中，存在一點 N ，且 N 不位於 $\overline{DG}$ 上。若假設 N 為費馬點的候選點，則將 N 點繞 $\overline{DG}$ 軸，分別逆時鐘旋轉 $120°$ 和 $240°$，可得到點 M 點和 K 點。因為 $ABCD$ 四面體為正四面體，所以四面體 $ABDG$ 、四面體 $ACDG$ 與四面體 $BCDG$ 全等，且 M 點在四面體 $ACDG$ 中， K 點在四面體 $BCDG$ 中，進而可得知：

$\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD}=\overline{NA}+\overline{NB}+\overline{NC}+\overline{ND}=\overline{KA}+\overline{KB}+\overline{KC}+\overline{KD}$ ，

若 N 、 M 、 K 皆為費馬點，能使得到四個頂點距離和的最小值，則這與費馬點應具備唯一性的概念產生矛盾 [20]。為了避免此矛盾， N 、 M 、 K 必須共點，所以正四面體 $ABCD$ 之費馬點 P 點，位於 $\overline{DG}$ 之上。

接著，設 H 為正三角形 ΔBCD 的重心，基於前述的邏輯，若 P 不位於 $\overline{AH}$ 上，亦產生費馬點不唯一之矛盾情況，因此 P 點也需要位於 $\overline{AH}$ 之上。

綜合以上推論， P 點必須同時位於 $\overline{DG}$ 和 $\overline{AH}$ 上，那麼 P 點的位置即位於 $\overline{DG}$ 與 $\overline{AH}$ 的交點上。進一步觀察，發現這個交點 P ，滿足

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD}$ 。

由於此點 $P(p_1,p_2,p_3)$ 的座標計算，可利用 $30°$-$60°$-$90°$ 之直角三角形的性質，以及正三角形重心到頂點的距離，等於正三角形底邊高的三分之二倍。因為正三角形 ABC 之三頂點座標為: $A(0,0,0)$ 、 $B(2,0,0)$ 與 $C(1,\sqrt{3},0)$ ，所以： G 點座標為 $G\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$ 。又因為 $P(p_1,p_2,p_3)$ 的座標之 X 分量與 Y 分量，與 G 點的座標之 X

分量與 Y 分量相同，故得到 $p_1=1$與 $p_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

另外，因為D點的座標為$D\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，且$P\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},p_3\right)$要滿足

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD}$，代入距離公式得到

$$\overline{PC}=\sqrt{(1-1)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+p_3^2}=\overline{PD}=\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(p_3-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}$$

兩邊平方，可得

$$\frac{4}{3}+p_3^2=\left(p_3-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 。$$

解出 $p_3=\frac{4}{3}\times\frac{3}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$ ，所以P的坐標為$\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$。

由上可知，當正四面體邊長均為 2 時，P的坐標為$\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$。

（二）特定四面體之費馬點

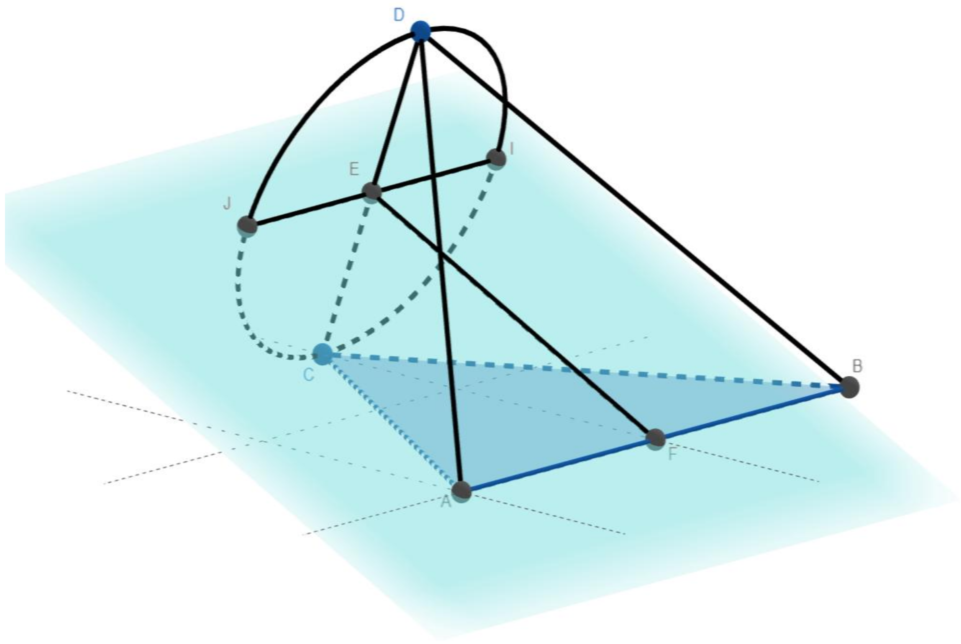
假設四面體$ABCD$之底座ΔABC的三頂點座標，分為$A(0,0,0)$、$B(b_1,0,0)$與$C(c_1,c_2,0)$，這裡$b_1>0$，$c_1>0$，$c_2>0$，則在ΔABC與ΔABD全等的條件下，發現頂點$D(d_1,d_2,d_3)$之座標，根據$\overline{CB}=\overline{DB}$可得

$$\left(c_1-b_1\right)^2+c_2^2=\left(d_1-b_1\right)^2+d_2^2+d_3^2 ， \qquad (1)$$

又根據$\overline{CA}=\overline{DA}$可得

$$c_1^2+c_2^2=d_1^2+d_2^2+d_3^2 ， \qquad (2)$$

解聯立 (1)(2) 可得，$d_1=c_1$。帶入 (1) 可得 $d_2^2+d_3^2=c_2^2$ ，故$0<d_2<c_2$，$0<d_3<c_2$。因點E為$\overline{CD}$之中點，點F為$\overline{AB}$之中點，故E點座標為$E\left(c_1,0.5\left(c_2+d_2\right),0.5d_3\right)$，$F$點座標為$F\left(0.5b_1,0,0\right)$，此時，通過$A$點、$B$點、$E$點之平面$ABE$的方程式，可推得$y-\frac{c_2+d_2}{d_3}z=0$。



圖四 平面 ABE 與 E 為圓心 $\overline{ED}$ 為半徑的示意圖（作者自行繪製）

觀察角 $\angle DEF$ ，運用向量來進行思考，因向量 $\overrightarrow{ED}=\left(0,0.5\left(d_2-c_2\right),0.5d_3\right)$ ，向量 $\overrightarrow{EF}=\left(0.5b_1-c_1,-0.5\left(c_2+d_2\right),-0.5d_3\right)$ ，計算兩向量之內積

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EF}&=\left(0,0.5\left(d_2-c_2\right),0.5d_3\right)\cdot\left(0.5b_1-c_1,-0.5\left(c_2+d_2\right),-0.5d_3\right)\\&=-0.25\left(d_2^2-c_2^2\right)-0.25d_3^2=0.25\left\{c_2^2-\left(d_2^2+d_3^2\right)\right\}=0\end{aligned}$$

發現內積等於 0，亦即 $\angle DEF=90°$ 。接下來，以 E 點為圓心，線段 $\overline{ED}$ 為半徑，作通過 D 點且垂直於平面 ABE 的圓，此時，假設此圓之圓周上的點與平面 ABE 相交於 I 點與 J 點，如圖五所示，又令 I 點座標為 $I\left(i_1,i_2,i_3\right)$ ，因為 I 點在平面 ABE 上，故

$$i_2=\frac{c_2+d_2}{d_3}i_3 \text{ 。} \tag{3}$$

另外，因為 I 點到 E 點的距離等於 $\overline{ED}$ ，可得

$$\left(i_1-c_1\right)^2+\left(i_2-\frac{c_2+d_2}{2}\right)^2+\left(i_3-\frac{d_3}{2}\right)^2=\left(\frac{d_2-c_2}{2}\right)^2+\left(\frac{d_3}{2}\right)^2 \text{，} \tag{4}$$

接著，向量 $\overrightarrow{EI}$ 垂直向量 $\overrightarrow{EF}$ ，可使用向量 $\overrightarrow{EI}$ 與向量 $\overrightarrow{EF}$ 之內積等於 0，來得關係式，故得

$$\left(i_1-c_1\right)\left(\frac{b_1}{2}-c_1\right)+\left(i_2-\frac{c_2+d_2}{2}\right)\left(-\frac{c_2+d_2}{2}\right)+\left(i_3-\frac{d_3}{2}\right)\left(-\frac{d_3}{2}\right)=0 \text{。} \quad (5)$$

將 (3) 式帶入 (4) 式。可得

$$\left(i_1-c_1\right)^2+2\left(i_3-\frac{d_3}{2}\right)^2\left\{\frac{c_2^2+c_2d_2}{d_3^2}\right\}=\frac{c_2^2-c_2d_2}{2} \quad (6)$$

將 (3) 式帶入 (5) 式。可得

$$\left(i_1-c_1\right)\left(\frac{b_1}{2}-c_1\right)=\frac{c_2^2+c_2d_2}{d_3}\left(i_3-\frac{d_3}{2}\right) \quad (7)$$

將 (7) 式帶入 (6) 式。可得

$$\left(i_1-c_1\right)^2+2\left(i_1-c_1\right)^2\left(\frac{b_1}{2}-c_1\right)^2\left\{\frac{1}{c_2^2+c_2d_2}\right\}=\frac{c_2^2-c_2d_2}{2}$$

故 $i_1=c_1+\sqrt{G}$ 或 $i_1=c_1-\sqrt{G}$ ，這裡

$$G=\frac{c_2^4-c_2^2d_2^2}{\left(b_1-2c_1\right)^2+2\left(c_2^2+c_2d_2\right)} \text{。}$$

將所得 i_1 帶入 (7) 式，可得

$$i_3=\frac{d_3}{2}\pm\frac{d_3\left(b_1-2c_1\right)\left(c_2^2-c_2d_2\right)}{2\left(b_1-2c_1\right)^2+4\left(c_2^2+c_2d_2\right)}$$

帶入 (3) 式，可得

$$i_2=\frac{c_2+d_2}{d_3}\left\{\frac{d_3}{2}\pm\frac{d_3\left(b_1-2c_1\right)\left(c_2^2-c_2d_2\right)}{2\left(b_1-2c_1\right)^2+4\left(c_2^2+c_2d_2\right)}\right\}$$

整理後，可得 I 點座標 $I\left(i_1,i_2,i_3\right)$ 如下:

$$i_1=c_1+\sqrt{\frac{c_2^4-c_2^2d_2^2}{\left(b_1-2c_1\right)^2+2\left(c_2^2+c_2d_2\right)}} \text{，} i_2=\frac{c_2+d_2}{d_3}\left\{\frac{d_3}{2}+\frac{d_3\left(b_1-2c_1\right)\left(c_2^2-c_2d_2\right)}{2\left(b_1-2c_1\right)^2+4\left(c_2^2+c_2d_2\right)}\right\} \text{，}$$

$$i_3=\frac{d_3}{2}+\frac{d_3\left(b_1-2c_1\right)\left(c_2^2-c_2d_2\right)}{2\left(b_1-2c_1\right)^2+4\left(c_2^2+c_2d_2\right)} \text{。}$$

另一方面，因為 J 點到 E 點的距離等於 $\overline{ED}$ ，且向量 $\overrightarrow{EJ}$ 垂直向量 $\overrightarrow{EF}$ ，可得向量 $\overrightarrow{EJ}$ 與向量 $\overrightarrow{EF}$ 之內積等於 0，故得 J 點座標 $J\left(j_1,j_2,j_3\right)$ 如下:

$$j_1 = c_1 - \sqrt{\frac{c_2^4 - c_2^2 d_2^2}{\left(b_1 - 2c_1\right)^2 + 2\left(c_2^2 + c_2 d_2\right)}} \text{ , } j_2 = \frac{c_2 + d_2}{d_3}\left\{\frac{d_3}{2} - \frac{d_3\left(b_1 - 2c_1\right)\left(c_2^2 - c_2 d_2\right)}{2\left(b_1 - 2c_1\right)^2 + 4\left(c_2^2 + c_2 d_2\right)}\right\}$$

$$j_3 = \frac{d_3}{2} - \frac{d_3\left(b_1 - 2c_1\right)\left(c_2^2 - c_2 d_2\right)}{2\left(b_1 - 2c_1\right)^2 + 4\left(c_2^2 + c_2 d_2\right)} \text{ 。}$$

根據任意四邊形的費馬點為兩對角線的交點(許瑋婷等，2005)，利用這個性質，討論四邊形 $IJAB$ 之費馬點時，即直線 $\overleftrightarrow{AI}$ 與直線 $\overleftrightarrow{BJ}$ 之交點。因此，接下來，計算直線 $\overleftrightarrow{AI}$ 與直線 $\overleftrightarrow{BJ}$ 之交點座標，經指導老師的指導，空間兩直線的交點求法，使用直線的參數式來求解。可得直線 $\overleftrightarrow{AI}$ 之方程式為 $x = i_1 t$ ， $y = i_2 t$ ， $z = i_3 t$ ，其中 $t \in R$ ，直線 $\overleftrightarrow{BJ}$ 之方程式為 $x = b_1 + \left(j_1 - b_1\right)s$ ， $y = j_2 s$ ， $z = j_3 s$ ，其中 $s \in R$ 。因此，解聯立 $i_1 t = b_1 + \left(j_1 - b_1\right)s$ 且 $i_2 t = j_2 s$ 時，可得 $t = \dfrac{b_1}{i_1 - \dfrac{i_2}{j_2}\left(j_1 - b_1\right)}$ ，故假設兩直線的交點為 P ，則其座標 $P\left(p_1, p_2, p_3\right)$ 如下:

$$p_1 = \frac{i_1 b_1}{i_1 - \dfrac{i_2}{j_2}\left(j_1 - b_1\right)} \text{ , } p_2 = \frac{i_2 b_1}{i_1 - \dfrac{i_2}{j_2}\left(j_1 - b_1\right)} \text{ , } p_3 = \frac{i_3 b_1}{i_1 - \dfrac{i_2}{j_2}\left(j_1 - b_1\right)} \text{ 。} \quad (8)$$

接下來，假設特定四面體之費馬點，落在線段 $\overline{EF}$ 上，發現若交點 P ，落在線段 $\overline{EF}$ 上時，則求 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 之最小值，等同於求 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PI} + \overline{PJ}$ ，理由是 $\overline{PC} = \overline{PD} = \overline{PI} = \overline{PJ}$ 。這樣，不就是，求特定四面體之費馬點，等同於求 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PI} + \overline{PJ}$ 之最小值。也就是，求四邊形 $IJAB$ 之費馬點。而四邊形 $IJAB$ 之費馬點，即直線 $\overleftrightarrow{AI}$ 與直線 $\overleftrightarrow{BJ}$ 之交點。因此，檢視 (8) 式， P 點要落在線段 $\overline{EF}$ 上，則要滿足怎樣之條件之問題。因為直線 $\overleftrightarrow{FE}$ 之方程式為 $x = 0.5b_1 + (c - 0.5b_1)t$ ， $y = 0.5\left(c_2 + d_2\right)t$ ， $z = 0.5 d_3 t$ ，其中 $t \in R$ ，所以，從 (8) 式可知，取下面的參數：

$$\hat{t} = \frac{2 i_1 b_1}{i_1 - \dfrac{i_2}{j_2}\left(j_1 - b_1\right)}\left\{\frac{1}{2} + \frac{\left(b_1 - 2c_1\right)\left(c_2^2 - c_2 d_2\right)}{2\left(b_1 - 2c_1\right)^2 + 4\left(c_2^2 + c_2 d_2\right)}\right\}$$

可得 $p_2 = 0.5\left(c_2 + d_2\right)\hat{t}$ ， $p_3 = 0.5 d_3 \hat{t}$ 。但 p_1 若無進一步條件，會產生問題。經觀察發現，當 $c_1 = 0.5b_1$ 時， $\dfrac{i_2}{j_2} = 1$ ，

$i_1-\frac{i_2}{j_2}\left(j_1-b_1\right)=2\sqrt{\frac{c_2^2-c_2d_2}{2}}+b_1=\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}+b_1$，$i_1=c_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}$，故得 $p_1=0.5b_1$。

同時，在 $c_1=0.5b_1$ 的條件下，發現因向量 $\overrightarrow{FB}=\left(0.5b_1,0,0\right)$，向量 $\overrightarrow{FE}=\left(0,0.5\left(c_2+d_2\right),0.5d_3\right)$，計算兩向量之內積

$$\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FE}=\left(0.5b_1,0,0\right)\cdot\left(0,0.5\left(c_2+d_2\right),0.5d_3\right)=0.$$

發現內積等於 0，亦即 $\angle EFB=90°$。也就是線段 $\overline{JI}$ 平行線段 $\overline{AB}$，因此，ΔIJP 與 ΔBAP 相似，故對應邊成比例，也就是，$\frac{\overline{IP}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{IJ}}{\overline{BA}}$，又 ΔIEP 與 ΔAFP 相似，故對應邊成比例，也就是，$\frac{\overline{IP}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{EP}}{\overline{FP}}$，故得 $\frac{\overline{IP}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{IJ}}{\overline{BA}}$，另外，可知 $\overline{AB}=b_1$。向量 $\overrightarrow{FE}=\left(c_1-0.5b_1,0.5\left(c_2+d_2\right),0.5d_3\right)$，故費馬點 P 的座標 $P\left(p_1,p_2,p_3\right)$ 為 F 點座標，加上向量 $\overrightarrow{FE}$ 之 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}+\overline{CD}}$ 倍，亦即

$$\left(0.5b_1,0,0\right)+\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}+\overline{CD}}\overrightarrow{FE}=\left(0.5b_1,0,0\right)+\frac{b_1}{b_1+\sqrt{\left(c_2-d_2\right)^2+d_3^2}}\left(c_1-0.5b_1,0.5\left(c_2+d_2\right),0.5d_3\right)$$

因為 $\left(c_2-d_2\right)^2+d_3^2=2\left(c_2^2+c_2d_2\right)$ 整理後可得

$$p_1=0.5b_1,\quad p_2=\frac{0.5b_1}{b_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}}\left(c_2+d_2\right),\quad p_3=\frac{0.5b_1d_3}{b_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}} \tag{9}$$

經由上述分析，可得特定四面體之費馬點，若落在線段 $\overline{EF}$ 上，則 $c_1=0.5b_1$，此時，P 點的座標 $P\left(p_1,p_2,p_3\right)$ 為 (9) 式之內容。由上述式子中可以發現，(9) 式與 (8) 式是以不同的方法得出的結果，但當 $c_1=0.5b_1$ 時，(9) 式與 (8) 式是相同的，進一步檢驗 (8) 式，

故，$p_1=\frac{i_1b_1}{i_1-\frac{i_2}{j_2}\left(j_1-b_1\right)}=\frac{\left(c_1+\sqrt{\frac{c_2^2-c_2d_2}{2}}\right)b_1}{2\sqrt{\frac{c_2^2-c_2d_2}{2}}+b_1}=0.5b_1$，

$$p_2=\frac{i_2b_1}{i_1-\frac{i_2}{j_2}\left(j_1-b_1\right)}=\frac{\left(\frac{c_2+d_2}{2}\right)b_1}{\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}+b_1},\quad p_3=\frac{i_3b_1}{i_1-\frac{i_2}{j_2}\left(j_1-b_1\right)}=\frac{0.5d_3b_1}{\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}+b_1}$$

可發現與 (9) 式吻合。

因為正四面體為特定四面體之特例，取 $b_1=2$，$c_1=1$，$c_2=\sqrt{3}$，$d_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，來帶入 (9) 式驗證，並注意到 $d_2^2+d_3^2=c_2^2$，可得 $d_3=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。此時，$p_1=0.5b_1=1$，

$$p_2=\frac{0.5b_1}{b_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}}\left(c_2+d_2\right)=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{2+\sqrt{2\times2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{，}$$

$$p_3=\frac{0.5b_1d_3}{b_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}}=\frac{0.5\times2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2+\sqrt{2\times2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}\text{。}$$

肆、研究結果

（一）邊長為 2 的正四面體，其費馬點 P 的坐標為 $\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$。

（二）已知特定四面體 $ABCD$ 之四頂點座標，分為 $A(0,0,0)$、$B(b_1,0,0)$、$C(c_1,c_2,0)$ 與 $D(d_1,d_2,d_3)$，則此特定四面體的費馬點，若落在 $\overline{EF}$ 上，則 $c_1=0.5b_1$。

（三）特定四面體的費馬點 P 的坐標 $P\left(p_1,p_2,p_3\right)$，落在 $\overline{EF}$ 上時，其費馬點坐標表示式如下:

$$p_1=0.5b_1\text{，}\quad p_2=\frac{0.5b_1}{b_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}}\left(c_2+d_2\right)\text{，}\quad p_3=\frac{0.5b_1d_3}{b_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}}\text{。}$$

伍、討論

若 $c_1=0.5b_1$ 時，代入 $I\left(i_1,i_2,i_3\right)$ 與 $J\left(j_1,j_2,j_3\right)$ 之座標表示式，可得

$$i_1=c_1+\sqrt{\frac{c_2^2-c_2d_2}{2}}\text{，}\quad i_2=\frac{c_2+d_2}{2}\text{，}\quad i_3=\frac{d_3}{2}\text{，}$$

$$j_1=c_1-\sqrt{\frac{c_2^2-c_2d_2}{2}}\text{，}\quad j_2=\frac{c_2+d_2}{2}\text{，}\quad j_3=\frac{d_3}{2}\text{，}$$

故對任意 $P\left(p_1,p_2,p_3\right)$，得到

$$\overline{PI}^2=\left\{(p_1-c_1)-\sqrt{\frac{c_2^2-c_2d_2}{2}}\right\}^2+\left(p_2-\frac{c_2+d_2}{2}\right)^2+\left(p_3-\frac{d_3}{2}\right)^2$$

$$\overline{PJ}^2=\left\{(p_1-c_1)+\sqrt{\frac{c_2^2-c_2d_2}{2}}\right\}^2+\left(p_2-\frac{c_2+d_2}{2}\right)^2+\left(p_3-\frac{d_3}{2}\right)^2$$

$$\overline{PC}^2=(p_1-c_1)^2+(p_2-c_2)^2+p_3^2$$

$$\overline{PD}^2=(p_1-c_1)^2+(p_2-d_2)^2+(p_3-d_3)^2$$

進一步計算，並利用$c_2^2=d_2^2+d_3^2$關係式可得

$$\begin{aligned}\overline{PI}^2+\overline{PJ}^2&=2(p_1-c_1)^2+(c_2^2-c_2d_2)+2p_2^2-2(c_2+d_2)p_2+\frac{(c_2+d_2)^2}{2}+2p_3^2-2d_3p_3\\&\quad+\frac{d_3^2}{2}\\&=2(p_1-c_1)^2+2p_2^2-2(c_2+d_2)p_2+2p_3^2-2d_3p_3+2c_2^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{PC}^2+\overline{PD}^2&=2(p_1-c_1)^2+2p_2^2-2(c_2+d_2)p_2+(c_2^2+d_2^2)+2p_3^2-2d_3p_3+d_3^2\\&=2(p_1-c_1)^2+2p_2^2-2(c_2+d_2)p_2+2p_3^2-2d_3p_3+2c_2^2,\end{aligned}$$ 。

故得$\overline{PI}^2+\overline{PJ}^2=\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$。

由上述式子可知，本研究之特定的四面體中，求$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$，等同於求$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PI}^2+\overline{PJ}^2$之最小值。然因$A$點，$B$點，$I$點，$J$點在同一平面上，所以，求$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PI}^2+\overline{PJ}^2$之最小值，等同於在四邊形$IJAB$中探求即可。

然而，本研究的企圖是希望能得到$\overline{PI}+\overline{PJ}=\overline{PC}+\overline{PD}$，使得求特定的四面體，等同於求四邊形$IJAB$之費馬點，以完成這個假定：本研究之特定的四面體中，費馬點落在$\overline{EF}$上之充分必要條件為$c_1=0.5b_1$。

陸、結論與建議

本研究根據三個研究目的進行探究，經與所列文獻對照，本研究之研究結果是文獻中沒有的內容。另外，檢視本研究所定義之特定四面體，當費馬點落在$\overline{EF}$上時，即$c_1=0.5b_1$，此時的特定四面體之底面三角形ΔABC為等腰三角形，故得到$\overline{CA}=\overline{CB}$，再根據$\Delta ABC$與$\Delta ABD$全等，故得$\overline{CA}=\overline{DA}$，$\overline{CB}=\overline{DB}$，因此，這個特定四面體，有四個邊是相等的，即$\overline{CA}=\overline{DA}=\overline{CB}=\overline{DB}$。

本研究所設定的特定四面體，若$c_1=0.5b_1$時，費馬點是否一定落在$\overline{EF}$上，以及若費馬

點不落在$\overline{EF}$上時，此時費馬點P的座標$P(p_1, p_2, p_3)$表示式為何？進而，一般情形費馬點P的座標$P(p_1, p_2, p_3)$表示式為何？這些問題，值得我未來進一步去探索。

在跨領域應用的部份，四面體費馬點問題可推廣至物理力平衡、資訊演算法、美術對稱結構的部份，也值得後續的研究做進一步的探討。

柒、參考文獻

中文文獻

1.王聖麟、張簡保昌、陳文玲、洪煒倫（1995）。費馬點外又一章。第 36 屆全國中小學科展作品。

2.李文展、洪翊琇、陳怡方、林冠妤（2008）。 利用回復路徑追蹤費馬點。 第 48 屆全國中小學科展作品。

3.李柄賢、邱于賓（2015）。 過定角內定點之直線所圍三角形之六心軌跡性質研究。第 55 屆全國中小學科展作品。

4.李豪韋、詹士緯、謝明益、蔡政錝（2009）。 凡走過必留下軌跡。第 49 屆全國中小學科展作品。

5.周炫谷、李奕瑋、江恆真（2008）。 “橋”與“路”。 第 48 屆全國中小學科展作品。

6.周擎、簡致軒（2013）。循規蹈矩。第 53 屆全國中小學科展作品。

7.林祐民、張瀚之（2006）。 由 Brocard Point 發現幾何不等式。臺灣 2006 年國際科展作品。

8.姚尚汶（2013）。過已知點之正多邊形性質研究。第 53 屆全國中小學科展作品。

9.張竣為、陳竹欣（2020）。圓例覺醒。第 60 屆全國中小學科展作品。

10.許瑋婷、李兆甯、李巧君、黃偉庭（2005）。總站該設在哪裡--另類的費馬點研究。第 45 屆全國中小學科展作品。

11.陳璽文、曾資晏、陳璽中（2003）。費馬點的剋星。第 43 屆全國中小學科展作品。

12.彭盛皓（2016）。 好一個「基因」— 十字型橢圓規的推廣研究。第 56 屆全國中小學科展作品。

13.黃靖堯、梁家瑋、李旻威（2020）。那裡就是你。第 60 屆全國中小學科展作品。

14.葉家熙、王文祥、石晉豪（2020）。十全十美--銳角三角形內特殊點分割三角形面積比。第 60 屆全國中小學科展作品。

15.鄒宗辰、陳柏甫、葉俊逸、莊皓宇（2006）。史坦納樹。第 46 屆全國中小學科展作品說明書。

16.鄭弘旻、林保良（1986）。 數學的哈雷彗星─奇妙的費馬點。第 26 屆全國中小學科展作品。

17.鄭旻佳、張佑任（2005）。國家寶藏。第 45 屆中小學科展作品。

18.蕭敦仁（2001）。費馬點的研究與應用。第 41 屆全國中小學科展作品。

19.謝多、孫承玉、蔡承育（2024）。 四方輻輳-探討正方形加權費馬點之位置變化。第 64 屆全國中小學科展作品。

外文文獻

1.V. Boltyanski , H. Martini and V. Soltan (1999) : Geometric Methods and Optimization Problems. Springer.

【評語】080403

此作品證明正四面體與一個特定四面體的費馬點之存在唯一性質並且精確求出其坐標表示式。作品中的證明推導十分嚴謹且完整，但由於只侷限在特定的四面體上討論，相對也弱化了研究的深度，這是比較可惜的部分。

作品海報

星芒交匯

探討特定四面體之費馬點

壹、前言

一、研究動機

在資優班的獨立研究課程中，老師指導我們查閱歷屆全國科展資料時，我發現有許多作品探討了平面幾何中的費馬點問題，這讓我對費馬點產生了濃厚興趣。此外，也有一些研究將它推論至多邊形與邊的長度加權，但將其**推導到四面體的費馬點坐標表示法之研究較少**，所以我進一步思考：若將費馬點從平面推廣到空間，特別是四面體中，是否也能找到類似的性質與明確的坐標表示？因此，我決定以**特定具對稱性的四面體**為研究對象，嘗試**推導其費馬點的存在條件與坐標公式**，並進一步將費馬點的理論**由平面推廣至空間**。

二、文獻回顧

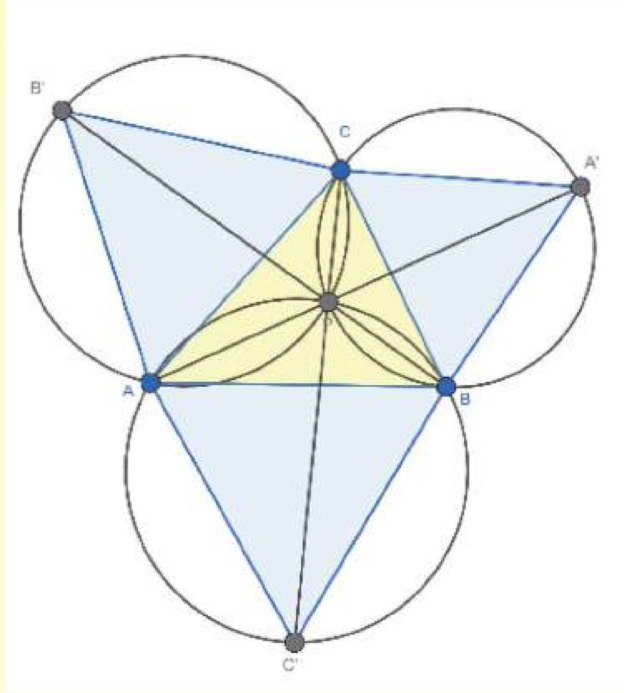
在關於費馬點的作品，其中有一些費馬點的性質，在之後的研究將應用到，相關內容重點整理如下：

（一）**費馬點的定義與基本性質**：費馬點（Fermat Point），也稱為托里切利點（Torricelli Point）或斯坦納點（Steiner Point），以二維三角形為例，是指在給定的 ΔABC 面內，尋找一點 P，使得點 P 到三角形三個頂點的距離之 $(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})$ 達到最小值。**2. 不論是平面或立體圖形，費馬點都具備唯一性。**

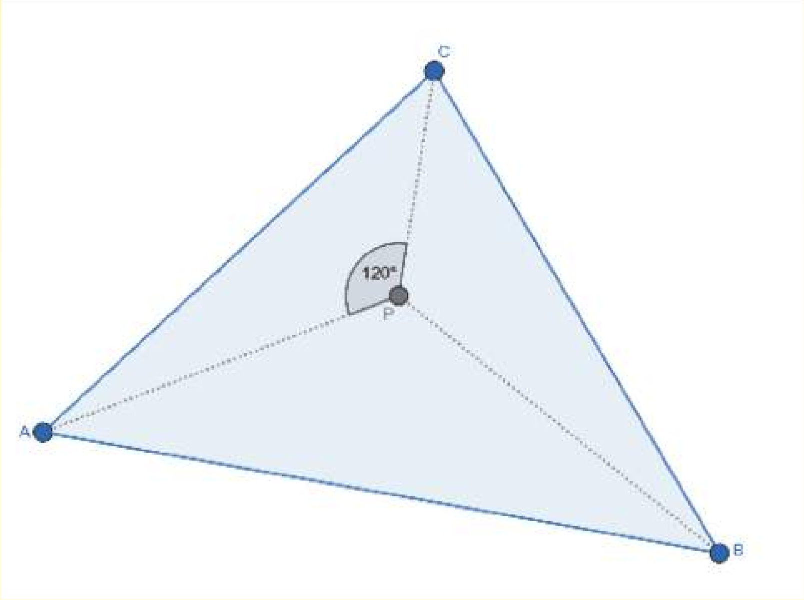
（二）**幾何特性**：1. $120°$ 角條件：如果 ΔABC 的所有內角都小於 $120°$，則費馬點 P 是三角形內唯一一點，使得 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$。2. 鈍角三角形且鈍角大於等於 $120°$：若 ΔABC 有一個內角大於等於 $120°$（例如 $\angle A\ge 120°$），則費馬點就是這個鈍角的頂點（費馬點 P 為頂點 A）。3. **四邊形費馬點：將對角相連，其交點為費馬點。**

（三）向量性質：當三角形內角皆小於 $120°$ 時，從費馬點 P 出發的三個向量 $\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$，在平移後可以構成一個正三角形，並且向量和 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$。

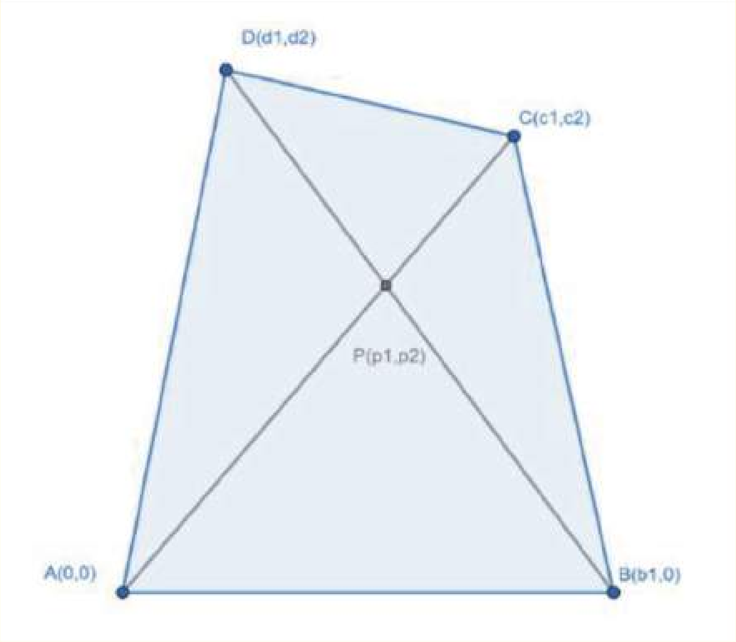
（四）物理性質：可以利用物理學的力學平衡原理找到費馬點。



圖一 托里切利作圖法示意圖



圖二 三角形費馬點 120° 角



圖三 四邊形費馬點作圖

三、研究目的

本研究提出下列研究目的：

（一）找出邊長等於 2 之正四面體的費馬點坐標位置。

（二）求出特定四面體的費馬點落在 $\overline{EF}$ 上之條件。特定四面體是指四面體 $ABCD$ 中，底面為 ΔABC，且 ΔABC 與 ΔABD 全等，E 點為 $\overline{CD}$ 之中點，F 點為 $\overline{AB}$ 之中點之四面體。

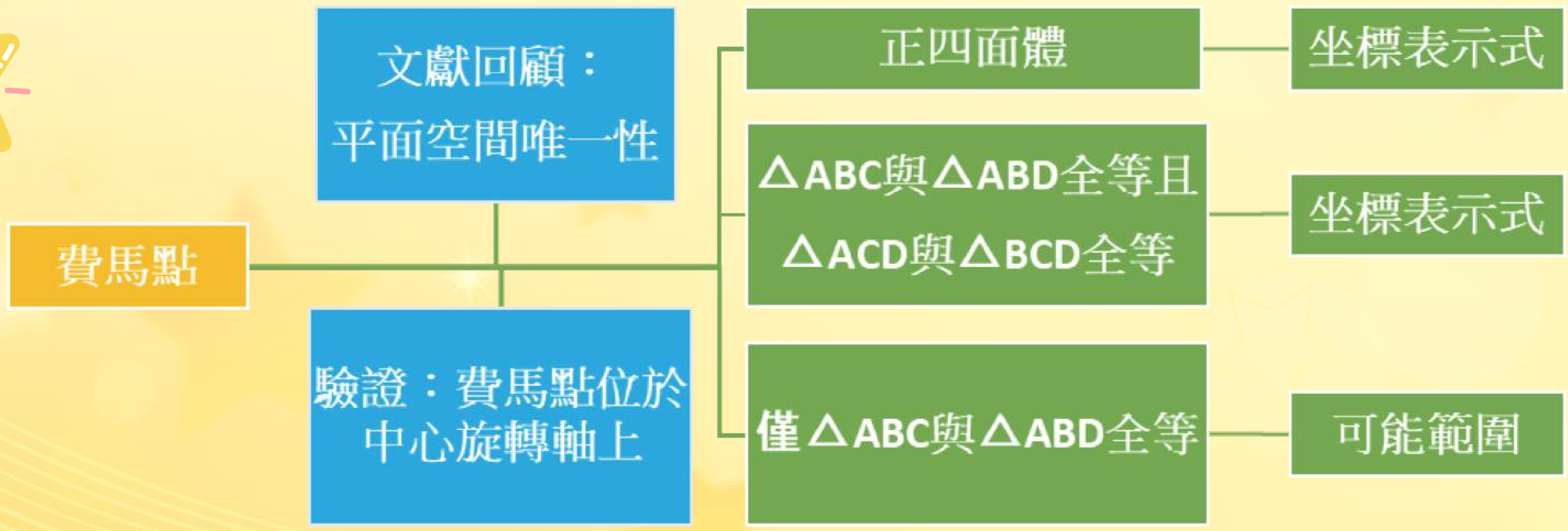
（三）特定四面體的費馬點落在 $\overline{EF}$ 上時，求出費馬點坐標表示式。

貳、研究設備及器材

本研究所使用的研究設備為紙、筆、電腦、電腦繪圖軟體 geogebra

參、研究架構與過程

一、研究架構

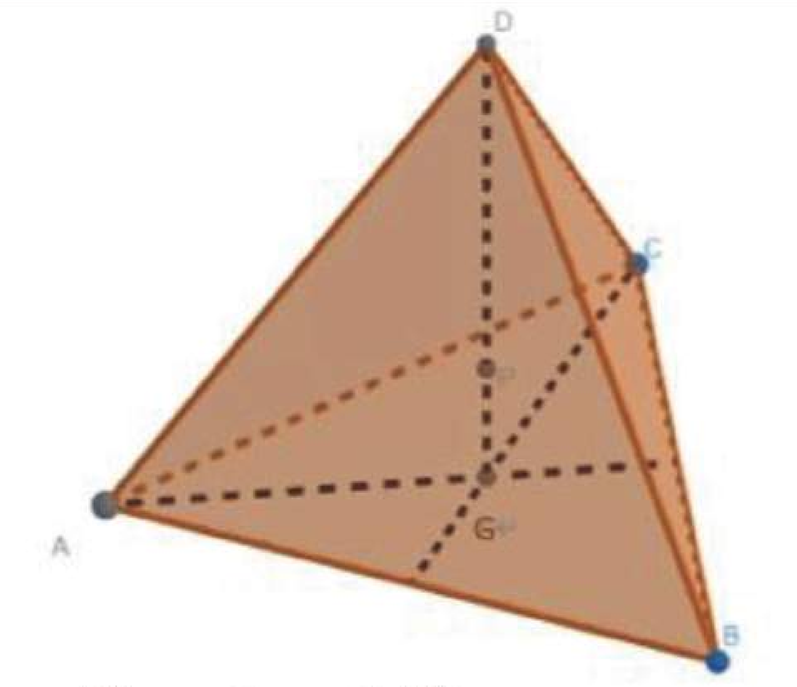


二、研究過程

（一）**正四面體的費馬點**

取 $b_1=2$、$c_1=1$、$c_2=\sqrt{3}$、$d_1=1$、$d_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$、$d_3=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，即邊長為 2 之正四面體 $ABCD$，求空間中一點 $P(p_1,p_2,p_3)$，使得 $(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD})$ 為最小時，點 P 的坐標為何？

底面正三角形 ΔABC 的重心，記為 G。假設在四面體 $ABDG$ 中，**存在一點費馬點候選點** N。若假設 N 為費馬點的候選點，則將 N 點繞 $\overline{DG}$ 軸，分別逆時鐘旋轉 $120°$ 和 $240°$，可得到點 M 點和 K 點，且

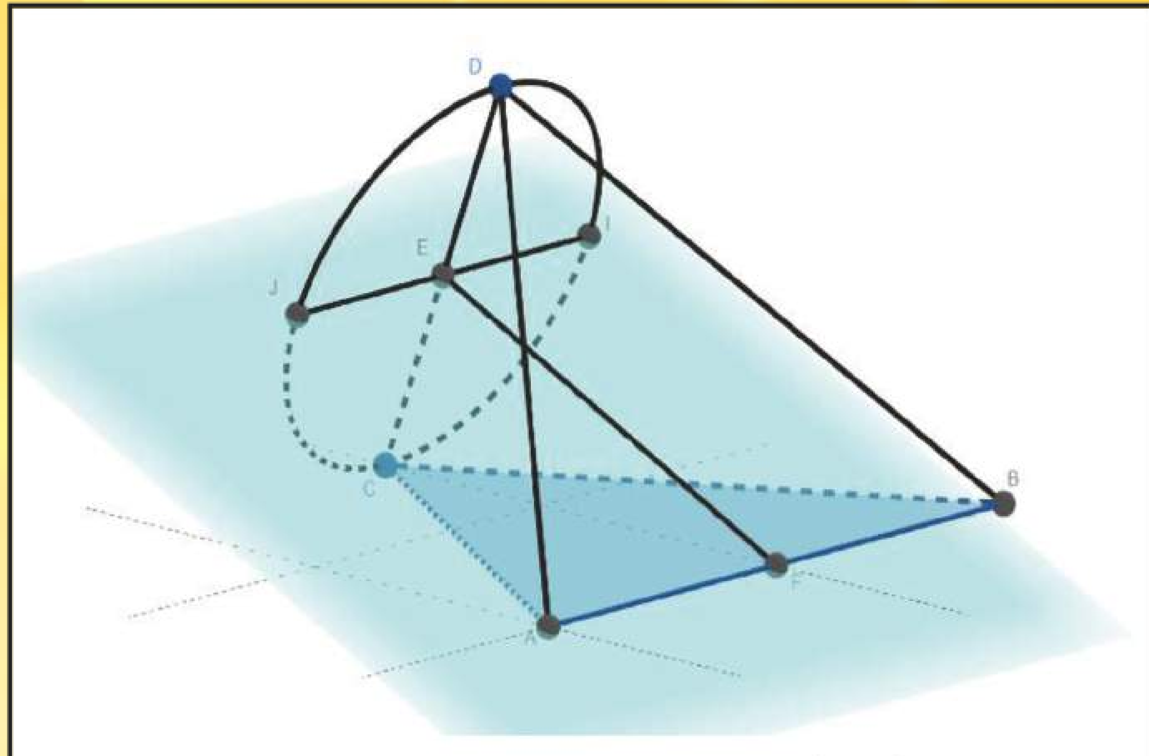


圖四 正四面體

$\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD}=\overline{NA}+\overline{NB}+\overline{NC}+\overline{ND}=\overline{KA}+\overline{KB}+\overline{KC}+\overline{KD}$，如果 N 為費馬點則會產生費馬點不唯一之矛盾情況，**所以費馬點 P 必須位於 $\overline{DG}$ 上**。接著，設 H 為正三角形 ΔBCD 的重心，基於前述的邏輯，若 P 不位於 $\overline{AH}$ 上，亦產生費馬點不唯一之矛盾情況，**因此 P 點也需要位於 $\overline{AH}$ 上**。綜合以上推論，P 點必須同時位於 $\overline{DG}$ 和 $\overline{AH}$ 上，那麼 P 點的位置即**位於 $\overline{DG}$ 與 $\overline{AH}$ 的交點上**。進一步觀察，發現這個交點 P，滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD}$。由於此點 $P(p_1,p_2,p_3)$ 的坐標計算，可利用 $30°-60°-90°$ 之直角三角形的性質，以及正三角形重心到頂點的距離，等於正三角形底邊高的三分之二倍。由上可知，當正四面體邊長均為 2 時，P 的坐標為 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$。

（二）**特定四面體之費馬點**

假設四面體 $ABCD$ 之底座 ΔABC 的三頂點坐標，分為 $A(0,0,0)$、$B(b_1,0,0)$ 與 $C(c_1,c_2,0)$，這裡 $b_1>0$，$c_1>0$，$c_2>0$，則**在 ΔABC 與 ΔABD 全等的條件下**，發現頂點 $D(d_1,d_2,d_3)$ 之坐標，根據 $\overline{CB}=\overline{DB}$ 可得 $(c_1-b_1)^2+c_2^2=(d_1-b_1)^2+d_2^2+d_3^2$ --(1)，又根據 $\overline{CA}=\overline{DA}$ 可得 $c_1^2+c_2^2=d_1^2+d_2^2+d_3^2$ -- (2)，$d_2^2+d_3^2=c_2^2$，故 $0<d_2<c_2$，$0<d_3<c_2$。因點 E 為 $\overline{CD}$ 之中點，點 F 為 $\overline{AB}$ 之中點，故 E 點坐標為 $E\left(c_1,0.5\left(c_2+d_2\right),0.5d_3\right)$，$F$ 點坐標為 $F\left(0.5b_1,0,0\right)$，此時，通過 A 點、B 點、E 點之平面 ABE 的方程式，可推得 $y-\frac{c_2+d_2}{d_3}z=0$。**觀察角 $\angle DEF$，運用向量來進行思考**，因


圖五 平面 ABE 與 E 為圓心 $\overline{ED}$ 為半徑

$\overrightarrow{ED}=\left(0,0.5\left(d_2-c_2\right),0.5d_3\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(0.5b_1-c_1,-0.5\left(c_2+d_2\right),-0.5d_3\right)$，**計算兩向量之內積發現內積等於 0，亦即** $\angle DEF=90°$。接下來，以 E 點為圓心，線段 $\overline{ED}$ 為半徑，作通過 D 點且垂直於平面 ABE 的圓，此時，假設此圓之圓周上的點與平面 ABE 相交於 I 點與 J 點，又令 I 點坐標為 $I\left(i_1,i_2,i_3\right)$，因為 I 點在平面 ABE 上，故 $i_2=\frac{c_2+d_2}{d_3}i_3$。另外，因為 I 點到 E 點的距離等於 $\overline{ED}$，計算後可得 I 點坐標 $I\left(i_1,i_2,i_3\right)$ 如下：

$$i_1=c_1+\sqrt{\frac{c_2^4-c_2^2d_2^2}{\left(b_1-2c_1\right)^2+2\left(c_2^2+c_2d_2\right)}}\text{，}i_2=\frac{c_2+d_2}{d_3}\left\{\frac{d_3}{2}+\frac{d_3\left(b_1-2c_1\right)\left(c_2^2-c_2d_2\right)}{2\left(b_1-2c_1\right)^2+4\left(c_2^2+c_2d_2\right)}\right\}\text{，}$$

$$i_3=\frac{d_3}{2}+\frac{d_3\left(b_1-2c_1\right)\left(c_2^2-c_2d_2\right)}{2\left(b_1-2c_1\right)^2+4\left(c_2^2+c_2d_2\right)}$$

另一方面，因為 J 點到 E 點的距離等於 $\overline{ED}$，且向量 $\overrightarrow{EJ}$ 垂直向量 $\overrightarrow{EF}$，可得向量 $\overrightarrow{EJ}$ 與向量 $\overrightarrow{EF}$ 之內積等於 0，故得 J 點坐標 $J\left(j_1,j_2,j_3\right)$ 如下：

$$j_1=c_1-\sqrt{\frac{c_2^4-c_2^2d_2^2}{\left(b_1-2c_1\right)^2+2\left(c_2^2+c_2d_2\right)}}\text{，}j_2=\frac{c_2+d_2}{d_3}\left\{\frac{d_3}{2}-\frac{d_3\left(b_1-2c_1\right)\left(c_2^2-c_2d_2\right)}{2\left(b_1-2c_1\right)^2+4\left(c_2^2+c_2d_2\right)}\right\}$$

$$j_3=\frac{d_3}{2}-\frac{d_3\left(b_1-2c_1\right)\left(c_2^2-c_2d_2\right)}{2\left(b_1-2c_1\right)^2+4\left(c_2^2+c_2d_2\right)}$$

。根據任意四邊形的費馬點為兩對角線的交點，利用這個性質，討論四邊形 $IJAB$ 之費馬點時，即直線 $\overleftrightarrow{AI}$ 與直線 $\overleftrightarrow{BJ}$ 之交點。使用直線的參數式來求解。可得直線 $\overleftrightarrow{AI}$ 之方程式為 $x=i_1t$，$y=i_2t$，$z=i_3t$，其中 $t\in R$，直線 $\overleftrightarrow{BJ}$ 之方程式為 $x=b_1+\left(j_1-b_1\right)s$，$y=j_2s$，$z=j_3s$，其中 $s\in R$。**求特定四面體之費馬點，等同於求 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PI}+\overline{PJ}$ 之最小值**，也就是，求四邊形 $IJAB$ 之費馬點；而**四邊形 $IJAB$ 之費馬點，即直線 $\overleftrightarrow{AI}$ 與直線 $\overleftrightarrow{BJ}$ 之交點**。

當 $c_1=0.5b_1$ 時，計算可得 $p_1=0.5b_1$。同時，在 $c_1=0.5b_1$ 的條件下，發現 $\overrightarrow{FB}=\left(0.5b_1,0,0\right)$，向量 $\overrightarrow{FE}=\left(0,0.5\left(c_2+d_2\right),0.5d_3\right)$，內積等於 0，亦即 $\angle EFB=90°$；也就是 **$\overline{JI}$ 平行 $\overline{AB}$**，因此，**ΔIJP 與 ΔBAP 相似**，故對應邊成比例，也就是，$\frac{\overline{IP}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{IJ}}{\overline{BA}}$，且可知 $\overline{AB}=b_1$。計算分析可得特定四面體之費馬點，**推論出落在線段 $\overline{EF}$ 上條件與原因**，此時：

$$p_1=0.5b_1\text{，}p_2=\frac{0.5b_1}{b_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}}\left(c_2+d_2\right)\text{，}p_3=\frac{0.5b_1d_3}{b_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}}\text{。}$$

肆、研究結果

（一）**正四面體的費馬點**：對於邊長為 2 的正四面體，本研究利用幾何對稱性與空間向量運算，證明其費馬點唯一，並成功求得其坐標為 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$。

（二）**特定四面體費馬點落在特定線段上的條件**：針對本研究定義之特定四面體，頂點為 $A(0,0,0)$、$B(b_1,0,0)$、$C(c_1,c_2,0)$ 與 $D(d_1,d_2,d_3)$，且滿足 ΔABC 與 ΔABD 全等，E 為 $\overline{CD}$ 中點，F 為 $\overline{AB}$ 中點），其費馬點 P 若落在連線 $\overline{EF}$ 上，則必須滿足條件 $c_1=0.5b_1$。

（三）**特定條件下費馬點的坐標公式：**當上述特定四面體的費馬點 P 落在 $\overline{EF}$ 上 時（即滿足 $c_1=0.5b_1$），其 P 的坐標 $P\left(p_1,p_2,p_3\right)$ 表示式為：

$$p_1=0.5b_1 \text{，} p_2=\frac{0.5b_1}{b_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}}\left(c_2+d_2\right) \text{，} p_3=\frac{0.5b_1d_3}{b_1+\sqrt{2\left(c_2^2-c_2d_2\right)}}$$

（四）**特定條件下四面體的幾何特性：**當滿足 $c_1=0.5b_1$ 時，此特定四面體之底面三角形 ΔABC 為等腰三角形（因 c₁為 C 點 x 坐標，$0.5b_1$ 為 $\overline{AB}$ 中點的 x 坐標，意味 C 點在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上，故 $\overline{CA}=\overline{CB}$）。再結合 ΔABC 與 ΔABD 全等的條件，可推得此特定四面體具有四條邊長相等之特性，即 $\overline{CA}=\overline{DA}=\overline{CB}=\overline{DB}$。

伍、討論

當 ΔACD 與 ΔBCD 全等，即 $c_1=0.5b_1$ 時，代入 $I\left(i_1,i_2,i_3\right)$ 與 $J\left(j_1,j_2,j_3\right)$ 之坐標表示式，可得

$$i_1=c_1+\sqrt{\frac{c_2^2-c_2d_2}{2}} \text{，} i_2=\frac{c_2+d_2}{2} \text{，} i_3=\frac{d_3}{2} \text{，} j_1=c_1-\sqrt{\frac{c_2^2-c_2d_2}{2}} \text{，} j_2=\frac{c_2+d_2}{2} \text{，} j_3=\frac{d_3}{2} \text{，}$$

故對任意 $P\left(p_1,p_2,p_3\right)$，得到

$$\overline{PI}^2=\left\{\left(p_1-c_1\right)-\sqrt{\frac{c_2^2-c_2d_2}{2}}\right\}^2+\left(p_2-\frac{c_2+d_2}{2}\right)^2+\left(p_3-\frac{d_3}{2}\right)^2 \text{，}$$

$$\overline{PJ}^2=\left\{\left(p_1-c_1\right)+\sqrt{\frac{c_2^2-c_2d_2}{2}}\right\}^2+\left(p_2-\frac{c_2+d_2}{2}\right)^2+\left(p_3-\frac{d_3}{2}\right)^2$$

$$\overline{PC}^2=\left(p_1-c_1\right)^2+\left(p_2-c_2\right)^2+p_3^2 \quad \text{，} \quad \overline{PD}^2=\left(p_1-c_1\right)^2+\left(p_2-d_2\right)^2+\left(p_3-d_3\right)^2$$

進一步計算，並利用 $c_2^2=d_2^2+d_3^2$ 關係式可得 $\overline{PI}^2+\overline{PJ}^2=\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$。

由上可知，本研究之特定的四面體中，求 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$，等同於求 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PI}^2+\overline{PJ}^2$ 之最小值。然因 A 點，B 點，I 點，J 點在同一平面上，所以，求 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PI}^2+\overline{PJ}^2$ 之最小值，等同於在四邊形 $IJAB$ 中探求即可。然而，進一步設定所由 $\overline{PI}+\overline{PJ}=\overline{PC}+\overline{PD}$，使得求特定的四面體，等同於求四邊形 $IJAB$ 之費馬點，以完成一開始的假設：**本研究之特定的四面體中，費馬點落在 $\overline{EF}$ 上之充分必要條件為 $c_1=0.5b_1$。**

陸、結論與建議

本研究根據三個研究目的進行探究，經與所列文獻對照，本研究之研究結果是文獻中沒有的內容。另外，檢視本研究所定義之特定四面體，當費馬點落在 $\overline{EF}$ 上時，即 $c_1=0.5b_1$，此時的特定四面體之底面三角形 ΔABC 為等腰三角形，故得到 $\overline{CA}=\overline{CB}$，再根據 ΔABC 與 ΔABD 全等，故得 $\overline{CA}=\overline{DA}$，$\overline{CB}=\overline{DB}$，因此，這個特定四面體，有四個邊是相等的，即 $\overline{CA}=\overline{DA}=\overline{CB}=\overline{DB}$。

本研究所設定的特定四面體，若 $c_1=0.5b_1$ 時，費馬點是否一定落在 $\overline{EF}$ 上，以及若費馬點不落在 $\overline{EF}$ 上時，此時費馬點 P 的坐標 $P\left(p_1,p_2,p_3\right)$ 表示式為何？進而，一般情形費馬點 P 的坐標 $P\left(p_1,p_2,p_3\right)$ 表示式為何？這些問題，值得我未來進一步去探索。

在跨領域應用的部份，四面體費馬點問題可推廣至物理力平衡、資訊演算法、美術對稱結構的部份，也值得後續的研究做進一步的探討。

柒、參考文獻

核心中文文獻

1. 王聖麟、張簡保昌、陳文玲、洪煒倫（1995）。費馬點外又一章。第 36 屆全國中小學科展作品。
2. 許瑋婷、李兆甯、李巧君、黃偉庭（2005）。總站該設在哪裡--另類的費馬點研究。第 45 屆全國中小學科展作品。
3. 陳璽文、曾資晏、陳璽中（2003）。費馬點的剋星。第 43 屆全國中小學科展作品。
4. 黃靖堯、梁家瑋、李旻威（2020）。那裡就是你。第 60 屆全國中小學科展作品。
5. 鄭弘旻、林保良（1986）。 數學的哈雷彗星—奇妙的費馬點。第 26 屆全國中小學科展作品。
6. 鄭旻佳、張佑任（2005）。國家寶藏。第 45 屆中小學科展作品。
7. 蕭敦仁（2001）。費馬點的研究與應用。第 41 屆全國中小學科展作品。
8. 謝多、孫承玉、蔡承育（2024）。 四方輻輳-探討正方形加權費馬點之位置變化。第 64 屆全國中小學科展作品。

外文文獻

1. V. Boltyanski , H. Martini and V. Soltan (1999) : Geometric Methods and Optimization Problems. Springer.