中華民國第65屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

團隊合作獎

080402

會再次相遇嗎?

學校名稱： 新北市樹林區文林國民小學

作者：	指導老師：
小六 林書毓	林忠正
小六 吳宥廷	王郁惠
小六 劉尚峻	
小五 王巧妍	

關鍵詞： 速率、相遇

會再次相遇嗎？

摘要

一群運動員在一條直線跑道上，以互不相同的均速做折返跑。當這群運動員於某一時刻全部相遇於某一點後，這樣的情形會不會再度發生？我們找出這群運動員第一次相遇和再次相遇的的條件及相遇點，並延伸探討圓形跑道相遇的情形，最後討論給定 k 名運動員的速率比，判斷其是否會相遇。

壹、前言

在一條長 x 的直線跑道上做折返跑，如果有 2 名運動員第一次相遇在$\frac{1}{2}x$的地方，其條件為何？又他們會再次相遇嗎？如果這 2 名運動員第一次相遇分別在$\frac{1}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、$\frac{1}{4}x$、$\frac{3}{4}x$、…的地方，其條件為何？又他們會再次相遇嗎？本文主要探討 k 名運動員，同時由原點出發，在什麼條件下會相遇？相遇點在哪裡？會再次相遇嗎？再次相遇點又為何？並延伸探討圓形跑道相遇的情形，最後討論給定 k 名運動員的速率比，判斷其是否會相遇。

一、原始題目

本題目出處為：International Mathematics Tournament of Towns 環球城市數學競賽 2008 秋季賽 國中組 初級卷 第五題。內容如下：

在一條直線的跑道上有數名運動員，每位運動員都以互不相同的均速跑步。他們由跑道的一端同時出發，當他們抵達跑道的另一端時立即折返繼續跑。已知出發後某一個時刻這些運動員全都相遇於某一點，試證這樣的情況將會再度發生。

二、文獻探討

我們上網找了很多資料，找到一篇李晨均的作品，比較如下：

文獻名稱	相同的條件	不同的探討內容及不同的解題方式
李晨均〈蜂擁而至〉全國中小學科展第 63 屆 國小組	多者在一條直線上做反覆運動，尋求相遇的條件	給定 3 個不同的速率比(有 3 組)，求同時由蜂巢出發，往返於花與蜂巢之間，問 3 者是否會相遇，延伸探討 k 隻蜜蜂，但沒有結果。
本文		由 2 名、3 名、…運動員相遇，找出多名運動員在 a 點相遇的集合 S，從集合 S 中任選 k 名運動員，他們同時都會在 a 點相遇，並在 2a 點再次相遇，並延伸探討圓形跑道相遇的情形及找出給定 k 名運動員的速率比，判斷他們是否相遇。

三、研究動機

上資優數學課時，我們做了很多題目，其中〈環球城市數學競賽題-數名運動員在直線跑道上折返跑的相遇問題〉讓我們覺得好玩、有趣，因為題目沒有給數據，如運動員的人數、跑道的長度、運動員間的速率比、相遇的時間點及相遇點在哪裡？在好奇心的驅使下，我們決定深入探討、一窺究竟。

四、研究目的

(一)數名運動員在直線跑道上做互不相同的均速折返跑，找出在某一時刻會全部相遇在同一點的情形及再次相遇的條件。

(二)將直線的跑道轉換為圓形跑道，探討運動員相遇的情形。

(三)在直線跑道上，給定 k 名運動員的速率比為 $V_1：V_2：V_3：\cdots\cdots：V_k$，這 k 名運動員會相遇的條件為何？

貳、研究設備及符號定義、名詞解釋

一、研究設備：自製模型、紙、筆、電腦

二、符號定義、名詞解釋及其他說明

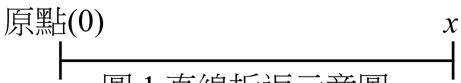


圖 1 直線折返示意圖

(一) 原點(0)、x：在直線的跑道上，將出發點標示為原點(0)、折返點標示為 x，如圖 1。

在圓形的跑道上，將出發點標示為原點(0)、圓周長標示為 x，如圖 2。

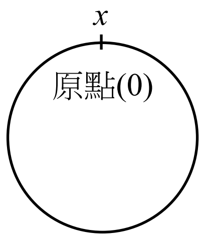


圖 2

(二)P_k：表示第 k 名運動員，如 P_1 為第一名(個)運動員，且 k 越大，代表那名運動員的速率越快。

(三)相遇：分為同方向的「追上」與反方向的「碰面」。

(四) a：相遇點，P_1、P_2的相遇點為 a。

(五)S_k：表示同時由原點出發，在 a 點相遇的所有可能集合，k 為區別碼。

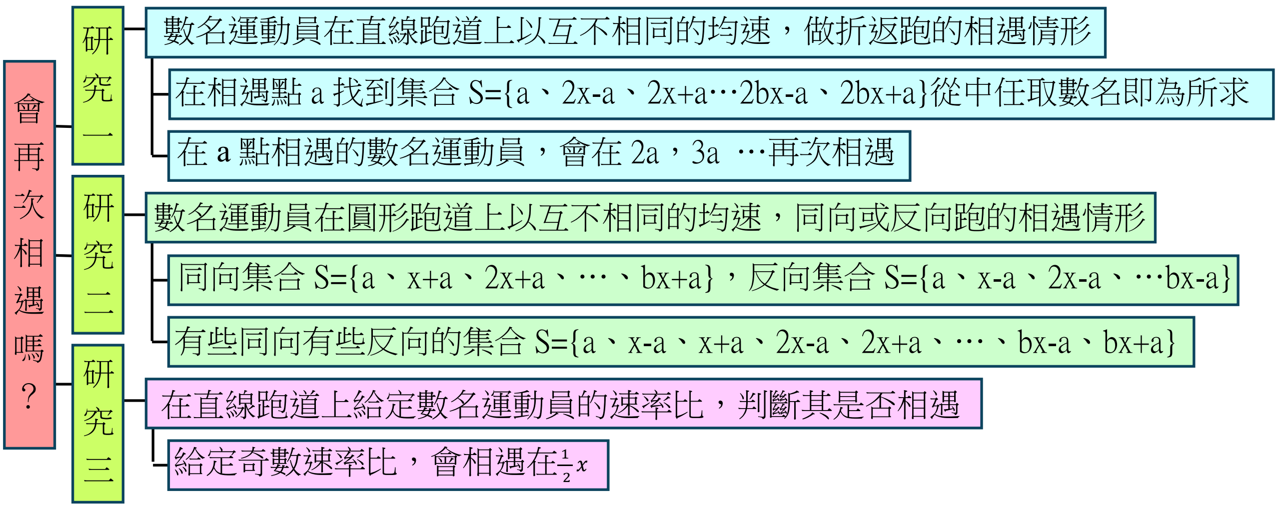
(六) V_k：表示第 k 名運動員的速率，如 V_1 為第一名(個)運動員的速率，且 k 越大代表速率越快。

(七)第一次相遇：P_1、P_2同時從原點出發，由於速率不同，P_1跑比較慢，若兩人在 a 點相遇則 P_1跑到 a 時，P_2由折返點 x 返回，也跑到 a，此時 P_1跑 a，P_2跑 $2x－a$。

(八)一個迴圈：P_i、P_j同時從原點出發，經過數次的相遇後，再次同時返回原點，稱為「一個迴圈」。

(九) k 名運動員他們的速率比為 $V_1：V_2：\cdots：V_k$，假設為最簡整數比，且 $V_1＜V_2＜\cdots＜V_k$

參、研究過程與結果



本研究所有圖片皆為作者與指導老師使用 word 繪製。

研究一：數名運動員在直線跑道上以互不相同的均速，做折返跑的相遇情形

在一條長 x 的直線跑道上，我們將 2 名運動員、3 名運動員、……k 名運動員在 $\frac{1}{2}x$、$\frac{1}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、$\frac{1}{4}x$、…的相遇點整理成表，觀察各表找出 k 名運動員第一次相遇和再度相遇的情形。

一、在直線跑道上折返跑，兩名運動員(P_1、P_2)相遇的情形

(一)P_1、P_2 同時由原點(0)出發，若兩人第一次相遇在 $\frac{1}{2}x$

1. P_1 跑 $\frac{1}{2}x$，P_2 跑 $\frac{3}{2}x$，由 $V_1T：V_2T=\frac{1}{2}x：\frac{3}{2}x=1：3$，知 $V_1：V_2=1：3$，如圖 3。

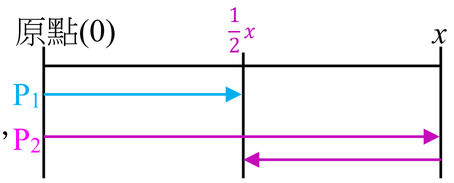


圖 3(碰面)

2. 承 1.，接著 P_1 繼續往前跑到 x，此時 P_2 跑回原點(0)後返回也跑到 x，兩人第二次相遇(追上)，如圖 4。

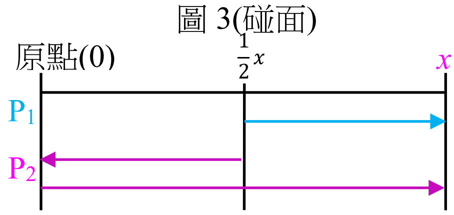


圖 4(追上)

3. 承 2.，接著 P_1 從折返點 x 返回跑到 $\frac{1}{2}x$，此時 P_2 從折返點 x 返回跑到原點(0)後，繼續跑到 $\frac{1}{2}x$，兩人第三次相遇(碰面)，如圖 5。

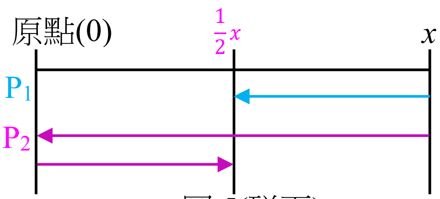


圖 5(碰面)

4. 承 3.，接著 P_1 從 $\frac{1}{2}x$跑回原點(0)，此時 P_2 從 $\frac{1}{2}x$ 跑到 x 後再返回跑到原點(0)，兩人第四次相遇(追上)，如圖 6。

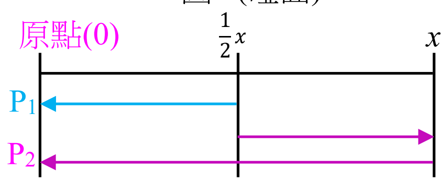


圖 6(追上)

5. 從上述 1.~4.知，兩人相遇的位置依序是：$\frac{1}{2}x$，x，$\frac{1}{2}x$，原點(0)，其中 x、原點(0)為追上。

(二) P_1、P_2 同時由原點(0)出發，若兩人第一次相遇在 $\frac{1}{3}x$

1. P_1 跑 $\frac{1}{3}x$，P_2 跑 $\frac{5}{3}x$，由 $V_1T：V_2T=\frac{1}{3}x：\frac{5}{3}x=1：5$，知 $V_1：V_2=1：5$，如圖 7。

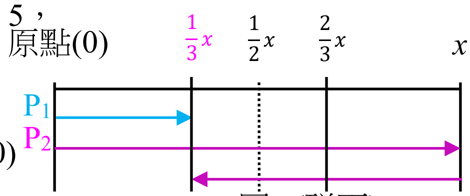


圖 7(碰面)

2.承 1.，接著 P_1 繼續往前跑到 $\frac{1}{2}x$，此時 P_2 跑回原點(0)後返回跑到 $\frac{1}{2}x$，兩人第二次相遇(追上)，如圖 8。

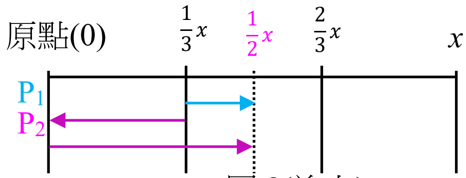


圖 8(追上)

$\boxed{\text{說明}}$：設 P_1、P_2 兩人相遇點為 ax，

由 $V_1T：V_2T=(ax-\frac{1}{3}x)：(ax+\frac{1}{3}x)=1：5$

$a=\frac{1}{2}$。

3.承 2.，接著 P_1 繼續往前跑到 $\frac{2}{3}x$，此時 P_2 跑到x後返回跑到 $\frac{2}{3}x$，兩人第三次相遇(碰面)，如圖 9。

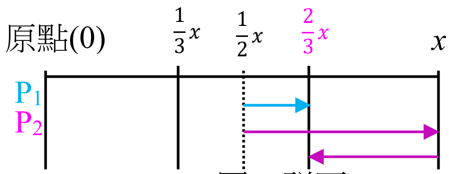


圖 9(碰面)

$\boxed{\text{說明}}$：設 P_1、P_2 兩人相遇點為 ax，

由 $V_1T：V_2T=(ax-\frac{1}{2}x)：(\frac{3}{2}x-ax)=1：5$，$a=\frac{2}{3}$。

4.承 3.，接著 P_1 繼續往前跑到 x，此時 P_2 跑回原點(0)後返回跑到 x，兩人第四次相遇(追上)，如圖 10。

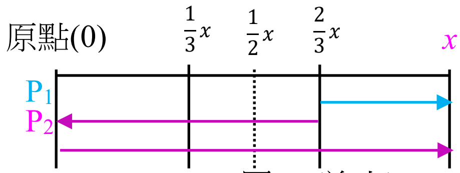


圖 10(追上)

$\boxed{\text{說明}}$：設 P_1、P_2 兩人相遇點為 ax，

由 $V_1T：V_2T=(ax-\frac{2}{3}x)：(ax+\frac{2}{3}x)=1：5$，$a=1$。

5.兩人同時由折返點x返回原點(0)的相遇情形，如圖 11~14。

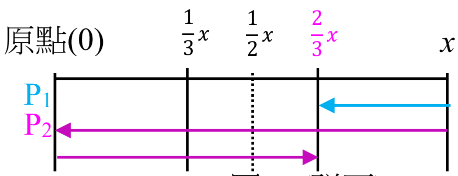


圖 11(碰面)

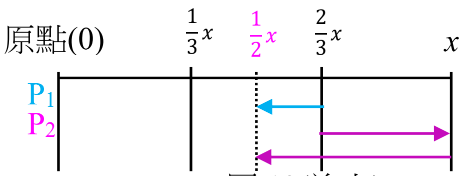


圖 12(追上)

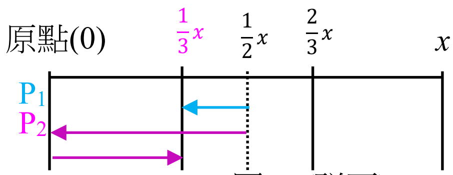


圖 13(碰面)

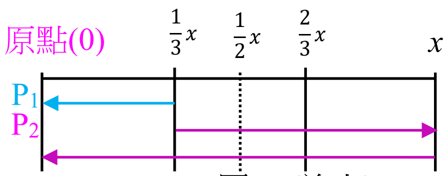


圖 14(追上)

6.從上述 1.~5.知，兩人相遇的位置依序是：$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，x，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，原點(0)，其中$\frac{1}{2}x$、x、$\frac{1}{2}x$，原點(0)為追上。

(三) P_1、P_2 同時由原點(0)出發，若兩人第一次相遇在 $\frac{2}{3}x$

1. P_1 跑 $\frac{2}{3}x$，P_2 跑 $\frac{4}{3}x$，

   由 $V_1T：V_2T＝\frac{2}{3}x：\frac{4}{3}x＝1：2$，知 $V_1：V_2＝1：2$，如圖 15。

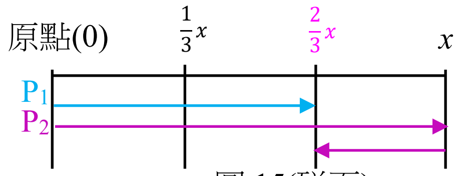


圖 15(碰面)

2. 承 1.，接著 P_1 繼續往前跑到 x 後返回跑到 $\frac{2}{3}x$，此時 P_2 跑回原點(0)後返回也跑到 $\frac{2}{3}x$的位置，兩人第二次相遇(碰面)，如圖 16。

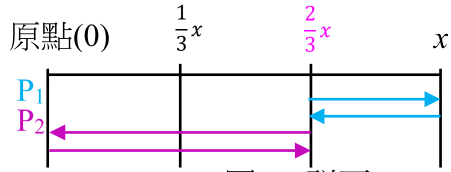


圖 16(碰面)

3. 承 2.，接著 P_1 繼續往前跑到原點(0)，此時 P_2 跑到 x 後返回也跑到原點(0)，兩人第三次相遇(追上)，如圖 17。

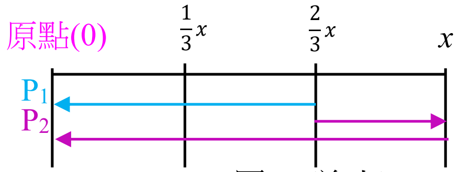


圖 17(追上)

4. 從上述 1.~3.知，兩人相遇的位置依序是：$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{3}x$，原點(0)，其中原點(0)為追上。

(四) P_1、P_2 同時由原點(0)出發，若兩人第一次相遇在$\frac{1}{4}x$

1. P_1 跑 $\frac{1}{4}x$，P_2 跑 $\frac{7}{4}x$，由 $V_1T：V_2T＝\frac{1}{4}x：\frac{7}{4}x＝1：7$，知 $V_1：V_2＝1：7$，如圖 18。

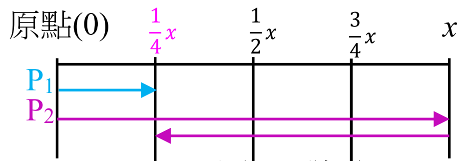


圖 18(碰面)

2. 承 1.，接著 P_1 繼續往前跑到$\frac{1}{3}x$，此時 P_2 跑回原點(0)後返回，也跑到$\frac{1}{3}x$的位置，兩人第二次相遇(追上)，如圖 19。

   說明：設 P_1、P_2 兩人相遇點為 ax，

   由 $V_1T：V_2T＝(ax－\frac{1}{4}x)：(ax＋\frac{1}{4}x)＝1：7$，$a＝\frac{1}{3}$。

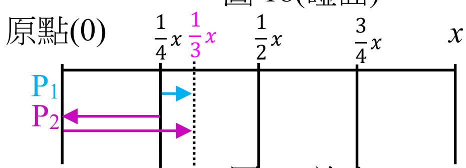


圖 19(追上)

3. 承 2.，接著 P_1 跑到$\frac{1}{2}x$，此時 P_2 往前跑到 x 後返回，也跑到 $\frac{1}{2}x$，兩人第三次相遇(碰面)，如圖 20。

   說明：設 P_1、P_2 兩人相遇點為 ax，

   由 $V_1T：V_2T＝(ax－\frac{1}{3}x)：(\frac{4}{3}x－ax＋\frac{1}{3}x)＝1：7$，$a＝\frac{1}{2}$。

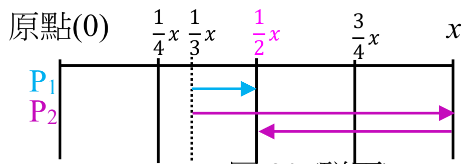


圖 20 (碰面)

4. 承 3.，在第三次相遇後，P_1 繼續往前跑到$\frac{2}{3}x$，此時 P_2 跑回原點(0)後返回，也跑到$\frac{2}{3}x$，兩人第四次相遇(追上)，如圖 21。

   說明：設 P_1、P_2 兩人相遇點為 ax，

   由 $V_1T：V_2T＝(ax－\frac{1}{2}x)：(ax＋\frac{1}{2}x)＝1：7$，$a＝\frac{2}{3}$。

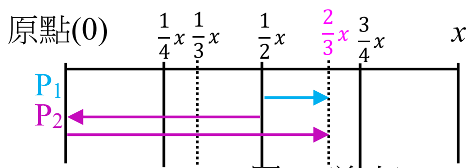


圖 21(追上)

5.承 4.，在第四次相遇後，P_1 繼續往前跑到$\frac{3}{4}x$，此時 P_2 往前跑到折返點 x 再返回，也跑到$\frac{3}{4}x$，兩人第五次相遇(碰面)，如圖 22。

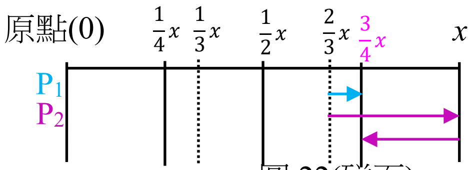


圖 22(碰面)

說明：設 P_1、P_2 兩人相遇點為 ax，

由 $V_1T：V_2T=(ax-\frac{2}{3}x)：(\frac{4}{3}x-ax)\ =1：7$，$a=\frac{3}{4}$。

6.承 5.，在第五次相遇後，P_1 繼續往前跑到 x，此時 P_2 跑回原點(0)後返回，也跑到 x，兩人第六次相遇(追上)，如圖 23。

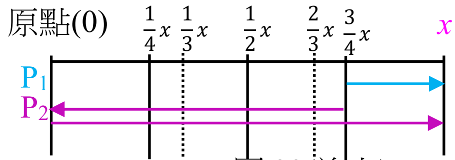


圖 23(追上)

說明：設 P_1、P_2 兩人相遇點為 ax，

由 $V_1T：V_2T=(ax-\frac{3}{4}x)：(ax+\frac{3}{4}x)\ =1：7$，$a=1$。

7.兩人同時由折返點(x)返回，回程與去程情形相同，如圖 24~圖 29。

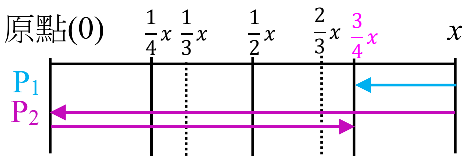


圖 24(碰面)

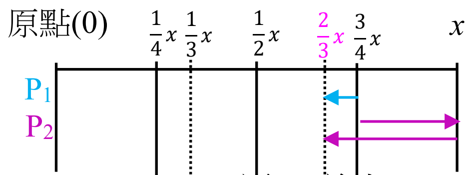


圖 25(追上)

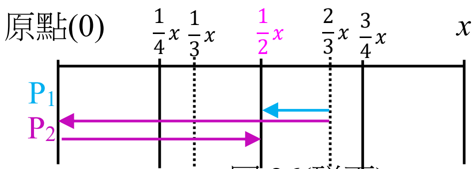


圖 26(碰面)

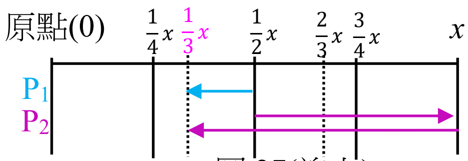


圖 27(追上)

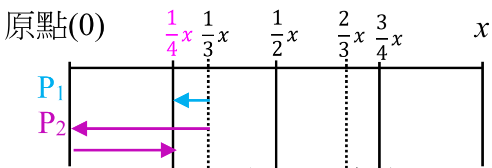


圖 28(碰面)

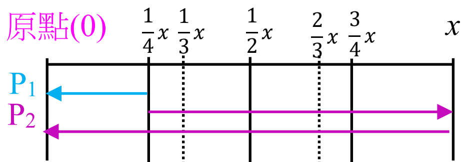


圖 29(追上)

8.從上述 1.~7.知，兩人第一次在 $\frac{1}{4}x$的位置相遇，則接下來兩人相遇的位置依序是：$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{3}{4}x$，x，$\frac{3}{4}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{4}x$，原點(0)。

(五) P_1、P_2 同時由原點(0)出發，若兩人第一次在 $\frac{3}{4}x$、$\frac{1}{5}x$、$\frac{2}{5}x$……的情形(詳見筆記)，將其結果整理成表一，表一中假設 P_1 跑了 a，P_2 跑了 $2x$－a。

表一 兩人相遇的情形

第一次相遇點	兩人從原點同時出發，再次回到原點前的所有相遇點	距離(速率)比
$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$，x，$\frac{1}{2}x$，0	1:3
$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，x，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，0	1:5
$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{3}x$，0	1:2
$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{3}{4}x$，x，$\frac{3}{4}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{4}x$，0	1:7
$\frac{3}{4}x$	$\frac{3}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{4}x$，x，$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{4}x$，0	3:5
$\frac{1}{5}x$	$\frac{1}{5}x$，$\frac{1}{4}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{3}{4}x$，$\frac{4}{5}x$，x，$\frac{4}{5}x$，$\frac{3}{4}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{5}x$，0	1:9
$\frac{2}{5}x$	$\frac{2}{5}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{5}x$，0	1:4
$\frac{3}{5}x$	$\frac{3}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，x，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{3}{5}x$，0	3:7
$\frac{4}{5}x$	$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，0	2:3
$\frac{1}{6}x$	$\frac{1}{6}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{5}{6}x$，x，$\frac{5}{6}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{1}{6}x$，0	1:11
$\frac{5}{6}x$	$\frac{5}{6}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{6}x$，x，$\frac{1}{6}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{5}{6}x$，0	5:7
$\frac{1}{7}x$	$\frac{1}{7}x$，$\frac{1}{6}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{5}{6}x$，$\frac{6}{7}x$，x，$\frac{6}{7}x$，$\frac{5}{6}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{6}x$，$\frac{1}{7}x$，0	1:13
$\frac{2}{7}x$	$\frac{2}{7}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{2}{7}x$，0	1:6
$\frac{3}{7}x$	$\frac{3}{7}x$，$\frac{3}{4}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{1}{4}x$，$\frac{4}{7}x$，x，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{3}{4}x$，$\frac{3}{7}x$，0	3:11
$\frac{4}{7}x$	$\frac{4}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，0	2:5
$\frac{5}{7}x$	$\frac{5}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，x，$\frac{2}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，0	5:9
$\frac{6}{7}x$	$\frac{6}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，0	3:4

(六)從上述(一)~(五)發現：

1.觀察每個「第一次」相遇點發現，在第一次相遇時，P_1 跑的距離＋P_2 跑的距離＝$2x$。

2.若 P_1 跑到 a 點和 P_2 第一次相遇，則 P_1 跑 a、P_2 跑 $2x$－a。

3.當 P_1 跑到 2a 時，P_1 和 P_2 會再次相遇，但不一定是第二次相遇，因為之間有可能有「追上」的情形。

4. P_1、P_2 第一次相遇的點＝$\frac{2v_1}{v_1+v_2}$；P_1、P_2 第一次追上的點＝$\frac{2v_1}{v_2-v_1}$。

5.當$\frac{2v_1}{v_2-v_1}$為正奇數時，只在x這點才會追上；而當$\frac{2v_1}{v_2-v_1}$為正偶數時，沒有追上的情形。

(七)相遇點的探討

設 P_1的速率為 V_1，P_2的速率為 $V_2(V_1 < V_2)$，所費時間為 T，相遇點為 a。

1.若第一次相遇是碰面在$\frac{1}{2}x$時，$V_1：V_2=1：3$。

$\boxed{\text{說明}}$：$V_1T=\frac{1}{2}x$ (1)，　$V_2T=2x-\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x$ (2)，

(1)、(2)兩式相除得到：$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$。

2.若第一次相遇是追上在$\frac{1}{2}x$時，$V_1：V_2=1：5$。

$\boxed{\text{說明}}$：$V_1T=\frac{1}{2}x$ (1)，　$V_2T=2x+\frac{1}{2}x=\frac{5}{2}x$ (2)，

(1)、(2)兩式相除得到：$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{5}$。

3.若第一次相遇是碰面在$a=\frac{m}{n}x$（m、n 為正整數）時，$a=\frac{m}{n}x=\frac{2v_1}{v_1+v_2}x$。

$\boxed{\text{說明}}$：$V_1T=\frac{m}{n}x$ (1)，　$V_2T=2x-\frac{m}{n}x$ (2)，

(1)、(2)兩式相除得到：$\frac{V_1}{V_2}=\frac{m}{2n-m}$，

第一次相遇是碰面在$a=\frac{m}{n}x=\frac{2v_1}{v_1+v_2}x$。

4.若第一次相遇是追上在$a=\frac{m}{n}x$（m、n 為正整數）時，$a=\frac{m}{n}x=\frac{2v_1}{v_2-v_1}x$。

$\boxed{\text{說明}}$：$V_1T=\frac{m}{n}x$ (1)，　$V_2T=2x+\frac{m}{n}x$ (2)，

(1)、(2)兩式相除得到：$\frac{V_1}{V_2}=\frac{m}{2n+m}$，

第一次相遇是追上在$a=\frac{m}{n}x=\frac{2v_1}{v_2-v_1}x$。

二、在直線跑道上折返跑，三名運動員(P_1、P_2、P_3)相遇的情形

(一)P_1、P_2、P_3 同時由原點(0)出發，若三人第一次相遇在$\frac{1}{2}x$

1.若 P_1跑了$\frac{1}{2}x$，P_2跑了$\frac{3}{2}x$，P_3跑了$\frac{5}{2}x$，

由 $V_1T：V_2T：V_3T=\frac{1}{2}x：\frac{3}{2}x：\frac{5}{2}x=1：3：5$，

知 $V_1：V_2：V_3=1：3：5$，如圖 30。

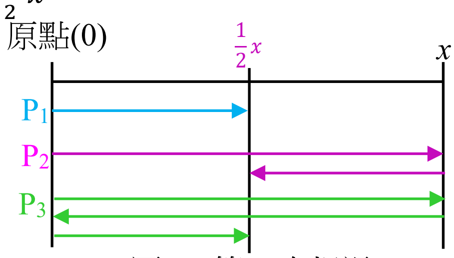


圖 30(第一次相遇)

2.承 1.，接著 P_1 繼續往前跑到 x，此時 P_2 跑回原點(0)後返回跑到 x，而 P_3 跑到 x 後返回原點(0)再次跑到 x，三人第二次相遇，如圖 31。

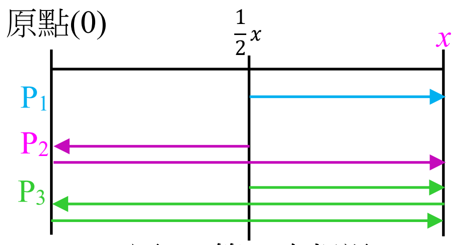


圖 31(第二次相遇)

3.承 2.，接著 P_1 從折返點 x 返回跑到$\frac{1}{2}x$，此時 P_2 從折返點 x 返回跑到原點(0)後，繼續跑到$\frac{1}{2}x$，而 P_3 從折返點 x 返回跑到原點(0)後，繼續跑到折返點 x 返回跑到$\frac{1}{2}x$，三人第三次相遇，如圖 32。

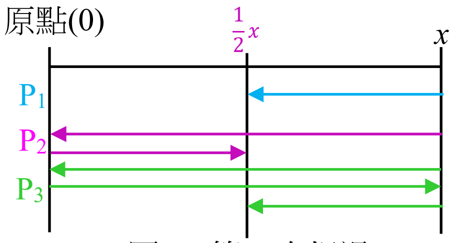


圖 32(第三次相遇)

4.承 3.，接著 P_1 從 $\frac{1}{2}x$跑回原點(0)，此時 P_2 從 $\frac{1}{2}x$ 跑到 x 後再返回跑到原點(0)，而 P_3 從 $\frac{1}{2}x$跑到原點(0)後，返回跑到 x，再返回跑到原點(0)，三人第四次相遇，如圖 33。

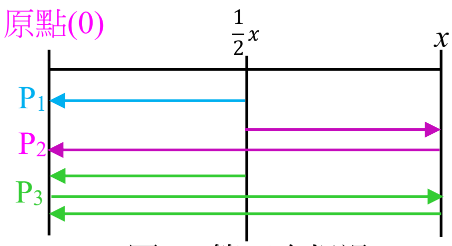


圖 33(第四次相遇)

5.從上述 1.~4.知，三人相遇的位置依序是：$\frac{1}{2}x$，x，$\frac{1}{2}x$，原點(0)。

(二)P_1、P_2、P_3 同時由原點(0)出發，若三人第一次相遇在$\frac{1}{3}x$

1.若 P_1 跑了$\frac{1}{3}x$，P_2 跑了$\frac{5}{3}x$，P_3 跑了$\frac{7}{3}x$，

由 $V_1T：V_2T：V_3T= \frac{1}{3}x：\frac{5}{3}x：\frac{7}{3}x=1：5：7$，

知 $V_1：V_2：V_3=1：5：7$，如圖 34。

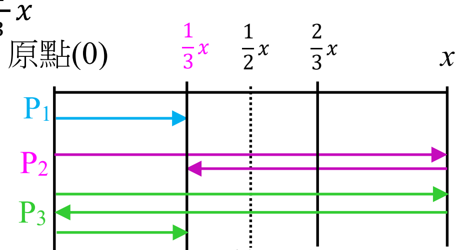


圖 34(第一次相遇)

2.承 1.，接著 P_1 繼續往前跑到$\frac{1}{2}x$，此時 P_2 跑回原點(0)後返回也跑到$\frac{1}{2}x$，而 P_3 跑到 x 後返回也跑到 $\frac{1}{2}x$，三人第二次相遇，如圖 35。

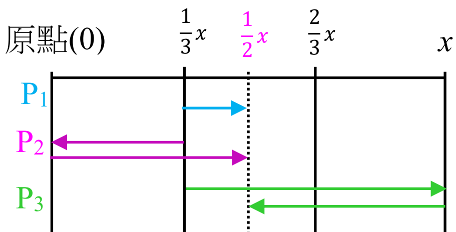


圖 35(第二次相遇)

説明：設 P_1、P_2、P_3 三人相遇點為 a，

由 $V_1T：V_2T：V_3T= (a-\frac{1}{3}x)：(a+\frac{1}{3}x)：(x-a+\frac{2}{3}x)=1：5：7$，$a=\frac{1}{2}x$。

3.承 2.，接著 P_1 繼續往前跑到$\frac{2}{3}x$，此時 P_2 跑到x後返回也跑到$\frac{2}{3}x$，而 P_3 跑到原點(0)後返回也跑到$\frac{2}{3}x$，三人第三次相遇，如圖 36。

説明：設 P_1、P_2、P_3 三人相遇點為 a，

由 $V_1T：V_2T：V_3T$

$=(a-\frac{1}{2}x)：(a+\frac{1}{6}x)：(a+\frac{1}{2}x)=1：5：7$，$a=\frac{2}{3}x$。

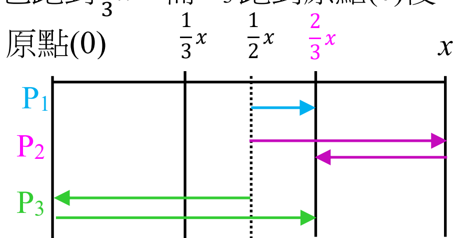


圖 36(第三次相遇)

4.承 3.，接著 P_1 繼續往前跑到折返點 x，此時 P_2 跑回原點(0)後返回也跑到 x，而 P_3 跑到 x 後，跑回原點(0)再返回跑到 x，三人第四次相遇，如圖 37。

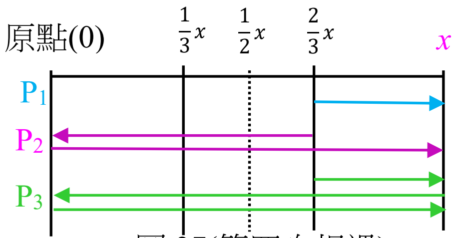


圖 37(第四次相遇)

5.三人同時由折返點返回原點時相遇的情形，如圖 38~圖 41。

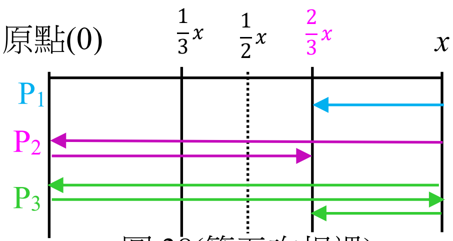


圖 38(第五次相遇)

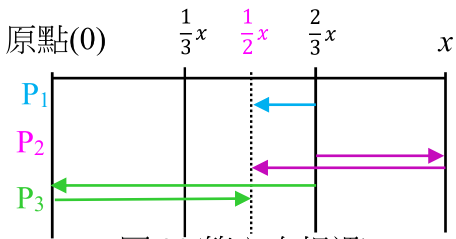


圖 39(第六次相遇)

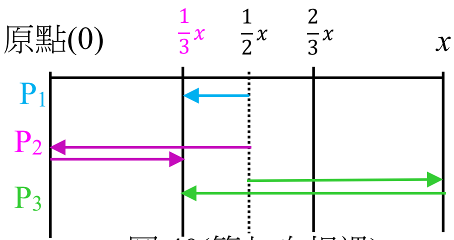


圖 40(第七次相遇)

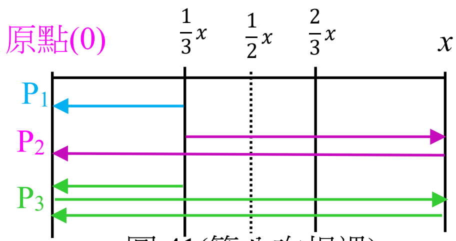


圖 41(第八次相遇)

6.從上述 1.~5.知，三人第一次相遇在$\frac{1}{3}x$，則接下來三人相遇的位置依序是：$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，x，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，原點(0)。

(三)P_1、P_2、P_3 同時由原點(0)出發，若三人第一次相遇在$\frac{2}{3}x$

1.若 P_1 跑了$\frac{2}{3}x$，P_2 了跑$\frac{4}{3}x$，P_3 跑了$\frac{8}{3}x$，

由 $V_1T：V_2T：V_3T=\frac{2}{3}x：\frac{4}{3}x：\frac{8}{3}x=1：2：4$，

知 $V_1：V_2：V_3=1：2：4$，如圖 42。

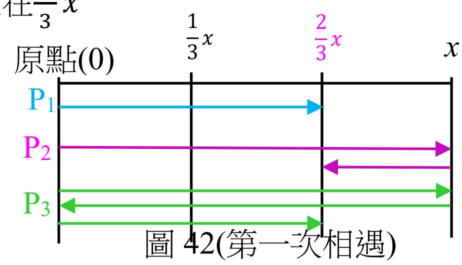


圖 42(第一次相遇)

2.承 1.，接著 P_1 繼續往前跑到 x 後返回$\frac{2}{3}x$，此時 P_2 跑回原點(0)後返回也跑到$\frac{2}{3}x$，而 P_3 跑到 x 後跑回原點(0)再跑到 x 後返回，也跑到$\frac{2}{3}x$，三人第二次相遇，如圖 43。

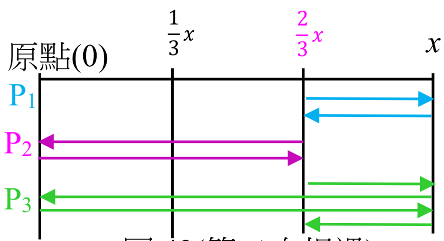


圖 43(第二次相遇)

3.承 2.，接著 P_1 繼續往前跑到原點(0)，此時 P_2 跑到折返點 x 後返回，也跑到原點(0)，而 P_3 跑回原點(0)後返回到折返點 x，再跑回原點(0)，三人第三次相遇，如圖 44。

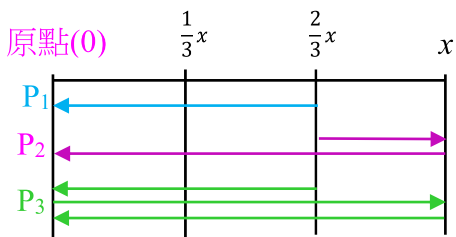


圖 44(第三次相遇)

4.從上述 1.~3.知，三人相遇的位置依序是：$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{3}x$，原點(0)。

(四) P_1、P_2、P_3 同時由原點(0)出發，若三人第一次相遇在$\frac{1}{4}x$

1.若 P_1 跑了$\frac{1}{4}x$，P_2 跑了$\frac{7}{4}x$，P_3 跑了$\frac{9}{4}x$，

由 V_1T：V_2T：V_3T= $\frac{1}{4}x$：$\frac{7}{4}x$：$\frac{9}{4}x$=1：7：9，

知 V_1：V_2：V_3=1：7：9，如圖 45。

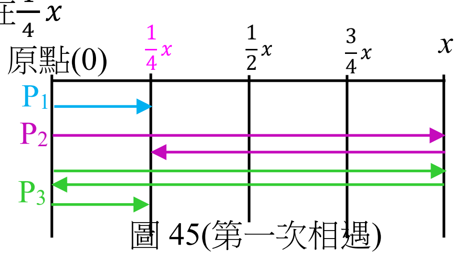


圖 45(第一次相遇)

2.承 1.，接著 P_1 繼續往前跑到$\frac{1}{2}x$，此時 P_2 跑回原點(0)後返回 x，最後也跑到$\frac{1}{2}x$，而 P_3 跑到 x 後返回原點(0)，最後也跑到$\frac{1}{2}x$，三人第二次相遇，如圖 46。

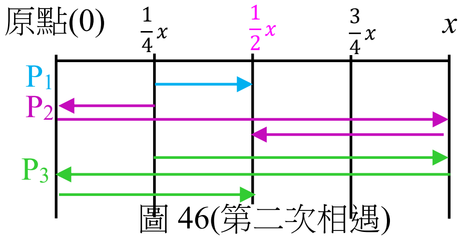


圖 46(第二次相遇)

3.承 2.，接著 P_1 繼續往前跑到$\frac{3}{4}x$，此時 P_2 往前跑到原點後返回 x，最後也跑到$\frac{3}{4}x$，而 P_3 往前跑到 x，返回原點後，最後也跑到$\frac{3}{4}x$，三人第三次相遇，如圖 47。

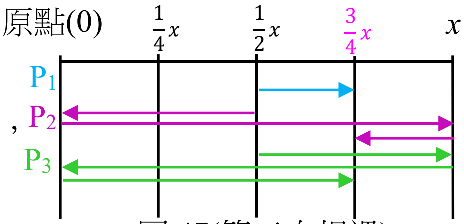


圖 47(第三次相遇)

4.承 3.，接著 P_1 繼續往前跑到 x，此時 P_2 跑回原點(0)後返回，也跑到 x，而 P_3 往前跑到 x，返回原點後，最後也跑到 x，三人第四次相遇，如圖 48。

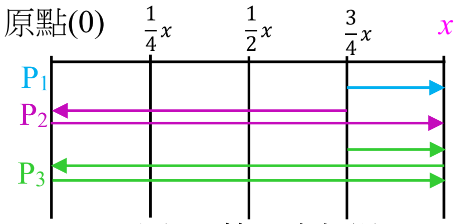


圖 48(第四次相遇)

5.三人同時由折返點返回，回程與去程情形相同，如圖 49~圖 52。

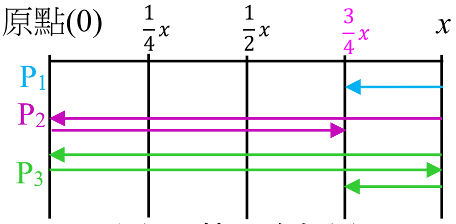


圖 49(第五次相遇)

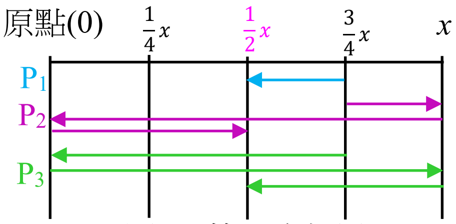


圖 50(第六次相遇)

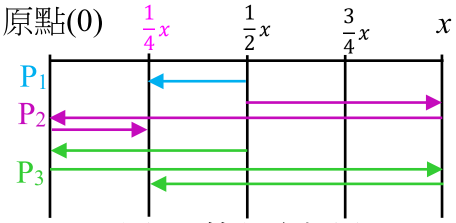


圖 51(第七次相遇)

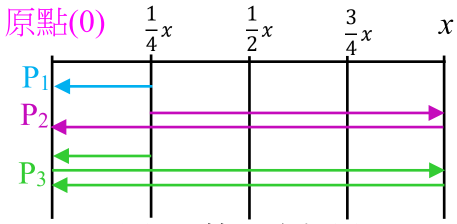


圖 52(第八次相遇)

6.從上述 1.~5.知，三人第一次相遇在$\frac{1}{4}x$，則接下來三人相遇的位置依序是：$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{4}x$，x，$\frac{3}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{4}x$，原點(0)。

(五) P_1、P_2、P_3 同時由原點(0)出發，若三人第一次相遇在$\frac{3}{4}x$、$\frac{1}{5}x$、$\frac{2}{5}x$……的情形(詳見筆記)，將其結果整理成表二，表二中假設 P_1 跑了 a，P_2 跑了 $2x$－a，P_3 跑了 $2x$＋a。

表二 三人相遇的情形

第一次相遇點	三人從原點同時出發，再次回到原點的所有相遇點	距離(速率)比
$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$，x，$\frac{1}{2}x$，0	1:3:5
$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，x，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，0	1:5:7
$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{3}x$，0	1:2:4
$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{4}x$，x，$\frac{3}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{4}x$，0	1:7:9
$\frac{3}{4}x$	$\frac{3}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{4}x$，x，$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{4}x$，0	3:5:11
$\frac{1}{5}x$	$\frac{1}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，x，$\frac{4}{5}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{5}x$，0	1:9:11
$\frac{2}{5}x$	$\frac{2}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，0	1:4:6
$\frac{3}{5}x$	$\frac{3}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，x，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{3}{5}x$，0	3:7:13
$\frac{4}{5}x$	$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，0	2:3:7
$\frac{1}{6}x$	$\frac{1}{6}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{5}{6}x$，x，$\frac{5}{6}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{6}x$，0	1:11:13
$\frac{5}{6}x$	$\frac{5}{6}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{6}x$，x，$\frac{1}{6}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{5}{6}x$，0	5:7:17
$\frac{1}{7}x$	$\frac{1}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，x，$\frac{6}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，0	1:13:15
$\frac{2}{7}x$	$\frac{2}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，0	1:6:8
$\frac{3}{7}x$	$\frac{3}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，x，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，0	3:11:17
$\frac{4}{7}x$	$\frac{4}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，0	2:5:9
$\frac{5}{7}x$	$\frac{5}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，x，$\frac{2}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，0	5:9:19
$\frac{6}{7}x$	$\frac{6}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，0	3:4:10

(六)從上述(一)~(五)發現:

1.觀察每個「第一次」相遇點，發現在第一次相遇時，P_3 跑的距離最少是 P_1 跑的距離加上 $2x$，也就是從原點(0)到折返點再回原點(0)，亦即跑一圈之後再加上 P_1 跑的距離。

2.若 P_1 跑到 a 點和 P_2、P_3 第一次相遇，則 P_1 跑 a、P_2 跑 $2x$－a、P_3 至少跑 $2x$＋a。

3.當 P_1 跑到 2a 時，P_1、P_2、P_3 會再次相遇。

4. P_1、P_2、P_3 的速率比為 V_1：V_2：V_3 時，V_1＋V_2＝V_3－V_1。

三、在直線跑道上折返跑，四名運動員(P_1、P_2、P_3、P_4)相遇的情形

(一)P_1、P_2、P_3、P_4 同時由原點(0)出發，若四人第一次相遇在$\frac{1}{2}x$

1.若四人第一次相遇在$\frac{1}{2}x$，相遇情形如圖 53~圖 56。

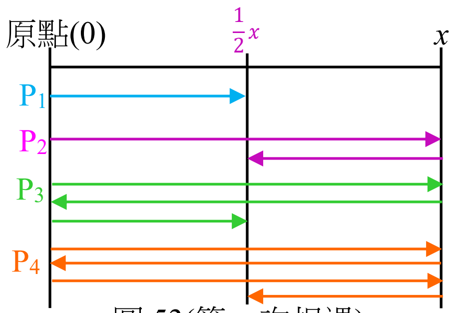


圖 53(第一次相遇)

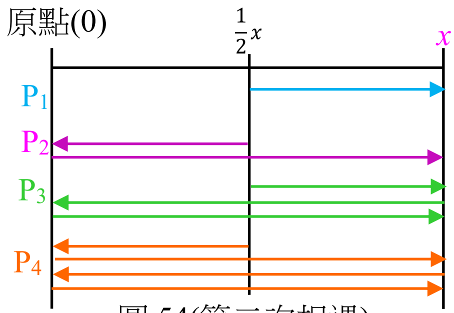


圖 54(第二次相遇)

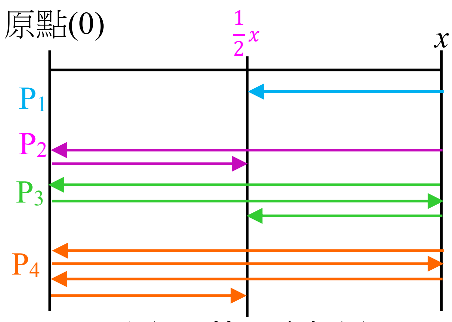


圖 55(第三次相遇)

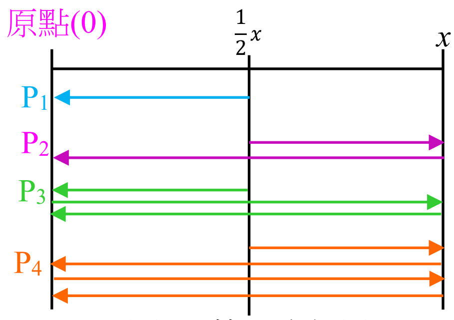


圖 56(第四次相遇)

2.四人相遇的位置依序是：$\frac{1}{2}x$，x，$\frac{1}{2}x$，原點(0)。

(二)P_1、P_2、P_3、P_4 同時由原點(0)出發，若四人第一次相遇在$\frac{1}{3}x$。

1.若四人第一次相遇在 $\frac{1}{3}x$，相遇情形如圖 57~圖 64。

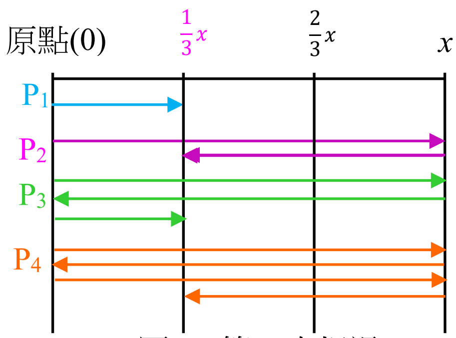


圖 57(第一次相遇)

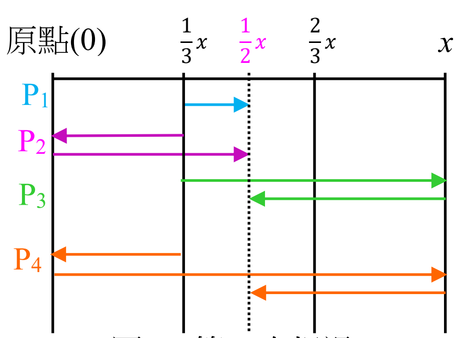


圖 58(第二次相遇)

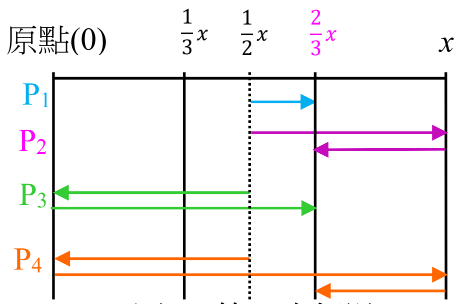


圖 59(第三次相遇)

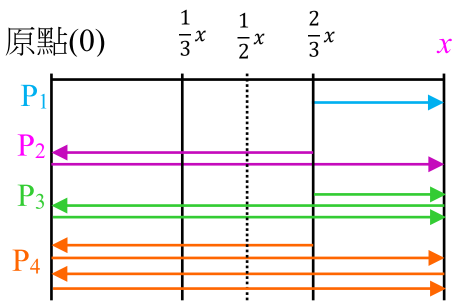


圖 60(第四次相遇)

2.四人同時由折返點返回原點時的相遇情形，如圖 61~圖 64。

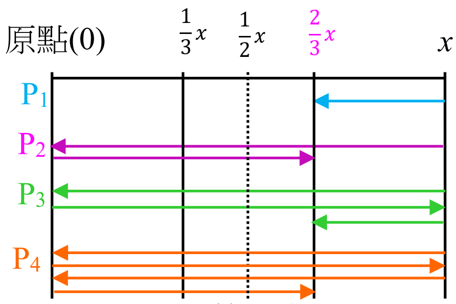


圖 61(第五次相遇)

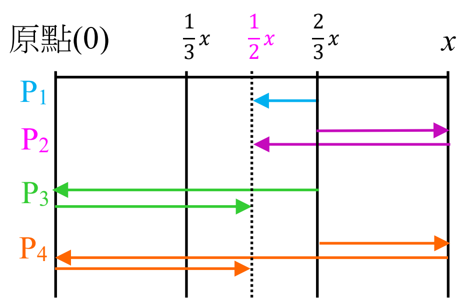


圖 62(第六次相遇)

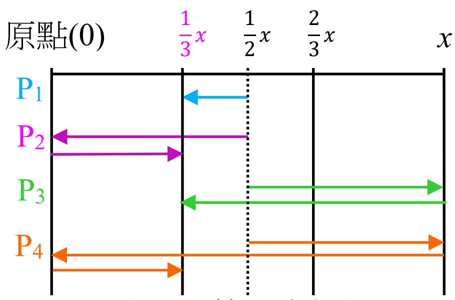


圖 63(第七次相遇)

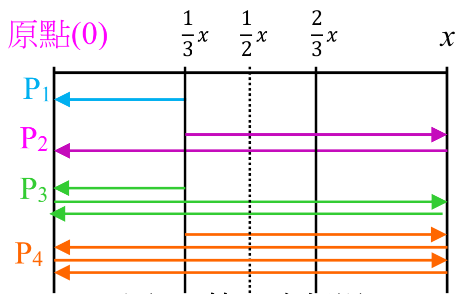


圖 64(第八次相遇)

3.從上述 1.~2.知，四人第一次相遇在$\frac{1}{3}x$，則接下來四人相遇的位置

依序是：$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，x，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，原點(0)。

(三)P_1、P_2、P_3、P_4 同時由原點(0)出發，若四人第一次相遇在$\frac{2}{3}x$

1.若四人第一次相遇在$\frac{2}{3}x$，則接下來四人的相遇情形，如圖 65~圖 67。

2.從上述 1.知，四人相遇的位置依序是：$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{3}x$，原點(0)。

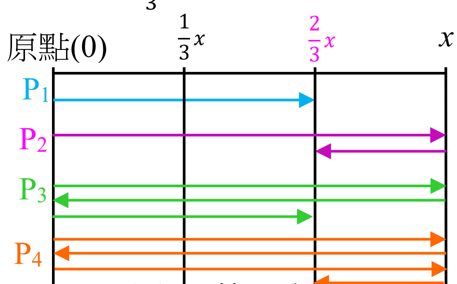


圖 65(第一次相遇)

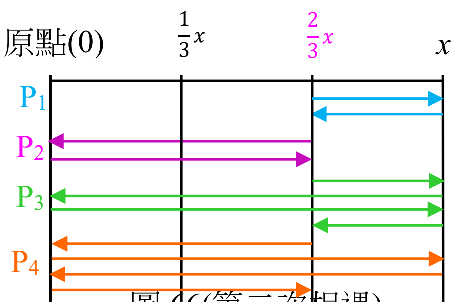


圖 66(第二次相遇)

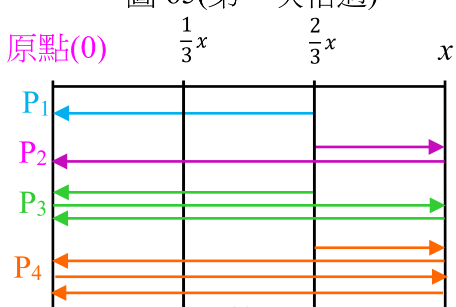


圖 67(第三次相遇)

(四)P_1、P_2、P_3、P_4 同時由原點(0)出發，若四人第一次相遇在 $\frac{1}{4}x$

1.若四人第一次相遇在$\frac{1}{4}x$，其相遇情形如圖 68~圖 75。

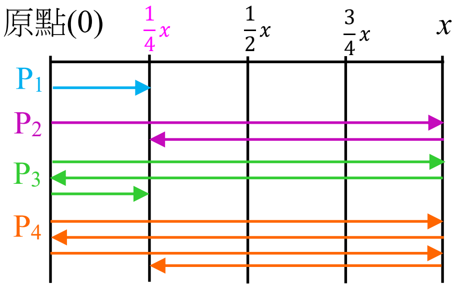


圖 68(第一次相遇)

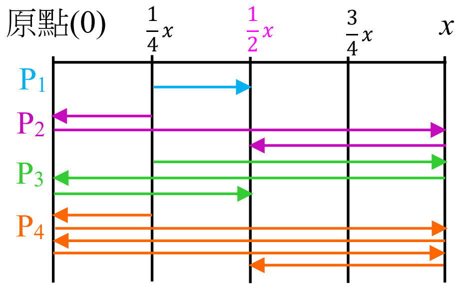


圖 69(第二次相遇)

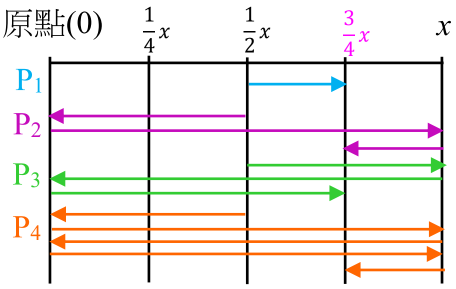


圖 70(第三次相遇)

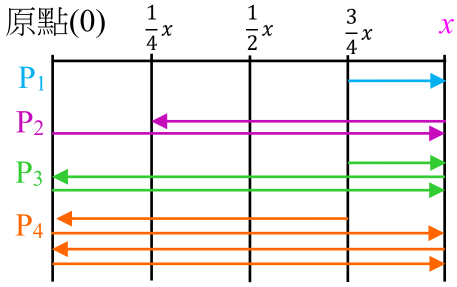


圖 71(第四次相遇)

2.四人同時由折返點返回，回程與去程情形相同，如圖 72~圖 75。

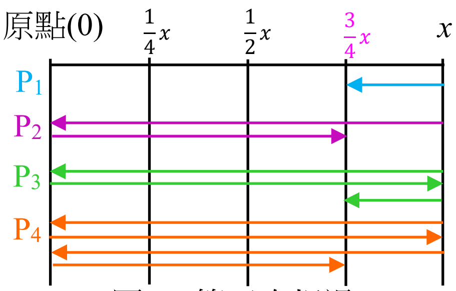


圖 72(第五次相遇)

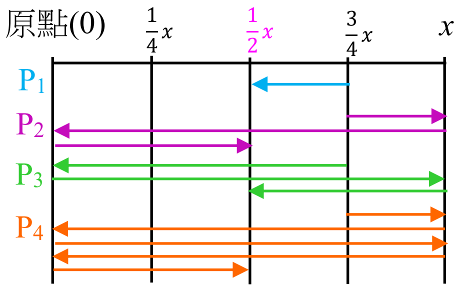


圖 73(第六次相遇)

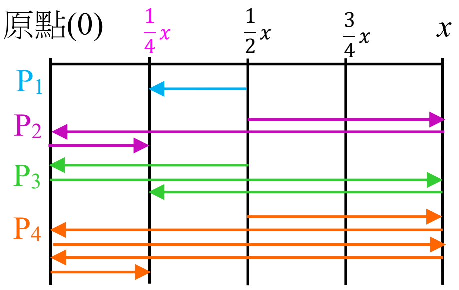


圖 74(第七次相遇)

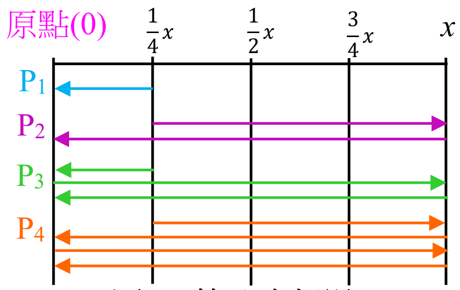


圖 75(第八次相遇)

3.從上述 1.~2.知，四人第一次相遇在$\frac{1}{4}x$，則接下來四人相遇的位置依序是：$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{4}x$，x，$\frac{3}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{4}x$，原點(0)。

(五) P_1、P_2、P_3、P_4 同時由原點(0)出發，若四人第一次相遇在$\frac{3}{4}x$、$\frac{1}{5}x$、$\frac{2}{5}x$……的情形(詳見筆記)，將其結果整理成表三，表三中假設 P_1 跑了 a，P_2 跑了 $2x$－a，P_3 跑了 $2x$＋a，P_4 跑了 $4x$－a。

表三 四人相遇的情形

第一次相遇點	四人從原點同時出發，再次回到原點前的所有相遇點	距離(速率)比
$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$，x，$\frac{1}{2}x$，0	1:3:5:7
$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，x，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，0	1:5:7:11
$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{3}x$，0	1:2:4:5
$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{4}x$，x，$\frac{3}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{4}x$，0	1:7:9:15
$\frac{3}{4}x$	$\frac{3}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{4}x$，x，$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{4}x$，0	3:5:11:13
$\frac{1}{5}x$	$\frac{1}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，x，$\frac{4}{5}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{5}x$，0	1:9:11:19
$\frac{2}{5}x$	$\frac{2}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，0	1:4:6:9
$\frac{3}{5}x$	$\frac{3}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，x，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{3}{5}x$，0	3:7:13:17
$\frac{4}{5}x$	$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，0	2:3:7:8
$\frac{1}{6}x$	$\frac{1}{6}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{5}{6}x$，x，$\frac{5}{6}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{6}x$，0	1:11:13:23
$\frac{5}{6}x$	$\frac{5}{6}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{6}x$，x，$\frac{1}{6}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{5}{6}x$，0	5:7:17:19
$\frac{1}{7}x$	$\frac{1}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，x，$\frac{6}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，0	1:13:15:27
$\frac{2}{7}x$	$\frac{2}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，0	1:6:8:13
$\frac{3}{7}x$	$\frac{3}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，x，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，0	3:11:17:25
$\frac{4}{7}x$	$\frac{4}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，0，	2:5:9:12
$\frac{5}{7}x$	$\frac{5}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，x，$\frac{2}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，0	5:9:19:23
$\frac{6}{7}x$	$\frac{6}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，0	3:4:10:11

(六)從上述(一)~(五)發現：

1.觀察每個「第一次」相遇點，發現在第一次相遇時，P_4 跑的距離最少是 P_2 跑的距離加上 $2x$，也就是從原點(0)到折返點再回原點(0)，即「跑一圈之後再加上 P_2 跑的距離」。

2.若 P_1 跑到 a 點和 P_2、P_3、P_4 第一次相遇，則 P_1 跑 a、P_2 跑 $2x$－a、P_3 至少跑 $2x$＋a、P_4 至少跑 $4x$－a。

3.當 P_1 跑到 2a 時，P_1、P_2、P_3、P_4 會再次相遇。

(七)從表一~表三中發現：若 a=$\frac{m}{n}x$，其中 m、n 互質，且 0＜m＜n，則

1.當 n、m 都是奇數，則 0、$\frac{1}{n}x$、$\frac{2}{n}x$、$\frac{3}{n}x$、⋯、$\frac{n-1}{n}x$也都是相遇點。

2.當 n 是偶數，則 0、$\frac{1}{n}x$、$\frac{2}{n}x$、$\frac{3}{n}x$、⋯、$\frac{n-1}{n}x$也都是相遇點。

3.當 n 是奇數，m 是偶數，則 0、$\frac{2}{n}x$、$\frac{4}{n}x$、$\frac{6}{n}x$、⋯、$\frac{n-1}{n}x$都是相遇點，

而 $\frac{1}{n}x$、$\frac{3}{n}x$、$\frac{5}{n}x$、⋯、$\frac{n-2}{n}x$不是相遇點。

說明：1. n、m 都是奇數，則 m、2m、⋯、(n-1)m、nm 分別除以 n，它們的餘數都不會相同，這些餘數恰為 1、2、3、⋯、n-1、0。因此 $\frac{m}{n}x$、$\frac{2m}{n}x$、$\frac{3m}{n}x$、⋯、$\frac{(n-1)m}{n}x$、$\frac{nm}{n}x$這 n 個點恰為 0、$\frac{1}{n}x$、$\frac{2}{n}x$、$\frac{3}{n}x$、⋯、$\frac{n-1}{n}x$這 n 個點。

2.當 n 為偶數，因為 n、m 互質，所以 m 為奇數，其證明方法與 1.同。

3.當 n 為奇數，m 為偶數，設 lm 除以 n 的商為 q，餘數為 r，則 lm＝nq+r

⇒ $\frac{lm}{n}x=\frac{nq+r}{n}x=qx+\frac{r}{n}x$，若$\frac{lm}{n}x$與 $\frac{r}{n}x$為同一點，則 q 為偶數，此時 r 為偶數，所以$\frac{1}{n}x$、$\frac{3}{n}x$、$\frac{5}{n}x$、⋯、$\frac{n-2}{n}x$不是相遇點。

反之，若 r 為偶數，則可找到 l，使得 lm＝nq+r，又因為 r、m 為偶數，n 為奇數，則 q 必為偶數，成立。

四、在直線跑道上折返跑，k 名運動員(P_1、P_2、P_3、⋯、P_k)相遇的情形

有 k 名運動員，分別為 P_1、P_2、⋯、P_k，其中 P_1 跑最慢。

(一)設原點到折返點的距離為 x，k 名運動員同時從原點出發，考慮 P_1 跑到 a 點時(0＜a＜x)，這 k 名運動員第一次同時在 a 點相遇。由於速率各不相同，所以跑者跑的距離依序為{a、2x－a、2x＋a、4x－a、4x＋a、6x－a、6x＋a、⋯、2bx－a、2bx＋a}，如圖 76。

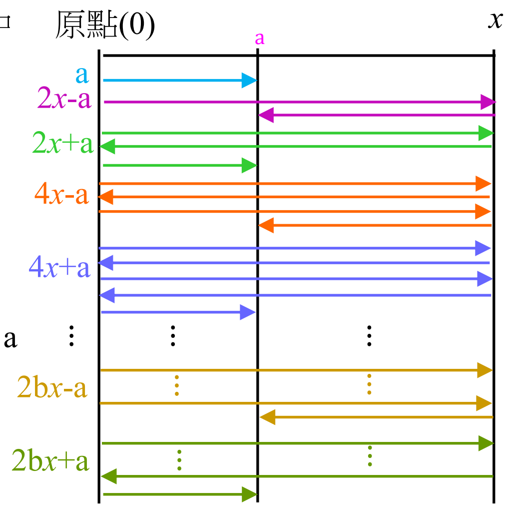


圖 76

(二)令集合 S_1＝{a、2x－a、2x＋a、4x－a、4x＋a、6x－a、6x＋a、⋯、2bx－a、2bx＋a}，則從集合 S_1 中任取 k 個數，即為這 k 名運動員同時從原點出發，且在 a 點相遇的情形。

(三)當 P_1 由 a 點跑到 2a 點時，由於跑步的時間多了一倍，故所有運動員跑的距離也會多一倍，即跑者跑的距離依序為{2a、4x－2a、4x＋2a、8x－2a、8x＋2a、⋯、4bx－2a、4bx＋2a}，所以這 k 名運動員第一次同時在 a 點相遇後，也會在 2a 點再次相遇，亦即

這 k 名運動員在時間 t 時第一次相遇，則在 2t、3t、…也會相遇。

$\boxed{說明}$：設第 1 個運動員在時間 t 時跑 a ($0<a<x$)，則其他運動員跑的距離為 $2bx-a$(碰面)或 $2bx+a$(追上)。yt 分鐘時，第 1 個運動員跑 ya (y=2、3…)，其他運動員跑 $y(2bx-a)$或 $y(2bx+a)\Rightarrow ya+y(2bx-a)=y\cdot 2bx$(碰面)或 $ya+y(2bx+a)=y(2bx+2a)$(追上)，故當 k 名運動員在時間 t 時第一次相遇，則在 2t，3t…yt 也會相遇。

研究二：數名運動員在圓形跑道上以互不相同的均速，同向或反向跑的相遇情形

在圓形跑道上取一點為原點(0)，圓周長為 x，如圖 77。數名運動員(P_1、P_2、P_3、…、P_k，距離比 $P_1<P_2<P_3<\cdots<P_k$，其中 P_1 跑最慢)以互不相同的均速從原點出發，有順時針方向者，也有逆時針方向者，當他們全部相遇在 a ($0<a<\frac{1}{2}x$)點時，探討如下：

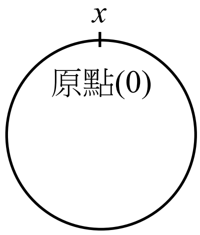


圖 77

一、與 P_1 跑同向的相遇情形

(一)P_1、P_2 兩個人同時從原點同向出發，若 2 人在 a 點相遇，則 P_1 至少跑了 a 的距離，P_2 至少跑了 $x+a$ 的距離，如圖 78。

(二)P_1、P_2、P_3 三個人同時從原點同向出發，若 3 人在 a 點相遇，則 P_1 至少跑了 a 的距離，P_2 至少跑了 $x+a$ 的距離，P_3 至少跑了 $2x+a$ 的距離，因每個人的速率不同，且相遇在 a 點，所以每增加一名運動員，就至少增加一圈的距離。

(三)數名運動員與 P_1 同時從原點同向出發，且在 a 點相遇，其距離依序為$\{a、x+a、2x+a、3x+a、\cdots、(b-1)x+a\}$。

(四)令集合 $S_2=\{a、x+a、2x+a、3x+a、\cdots、(b-1)x+a\}$，則從集合 S_2 中任取 k 個數，即為 k 名運動員與 P_1 同時從原點同向出發，且在 a 點相遇的情形。

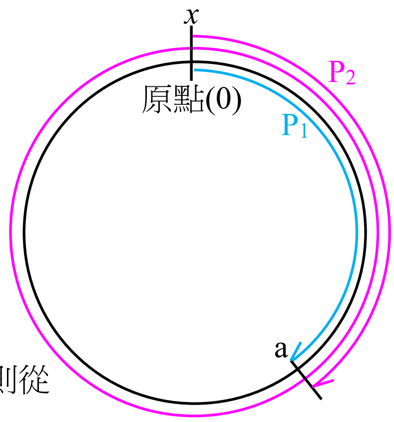


圖 78

(五)當 P_1 由 a 點跑到 2a 點時，由於跑步的時間多了一倍，所以所有的運動員所跑的距離也會多一倍，可得跑者跑的距離依序為$\{2a、2x+2a、4x+2a、6x+2a、\cdots\cdots、2(b-1)x+2a\}$，亦即這 k 名運動員第一次同時在 a 點相遇後，也會在 2a 點再次相遇。

二、與 P_1 跑反向的相遇情形

(一)P_1、P_2 兩個人同時從原點反向出發，若 2 人在 a 點相遇，則 P_1 至少跑了 a 的距離，P_2 至少跑了 $x-a$ 的距離，如圖 79。

(二)P_1、P_2、P_3 三個人同時從原點出發，P_2、P_3 與 P_1 反向，若 3 人在 a 點相遇，則 P_1 至少跑了 a 的距離，P_2 至少跑了 $x-a$ 的距離，P_3 至少跑了 $2x-a$ 的距離，因每個人的速率不同，

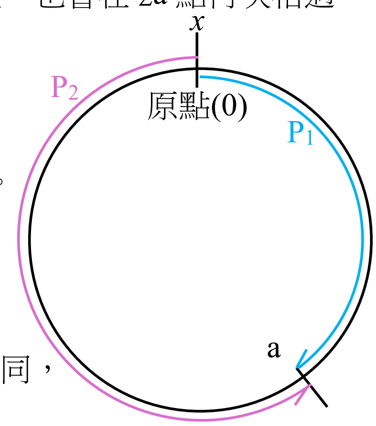


圖 79

且相遇在 a 點，所以每增加一名運動員，就至少增加一圈的距離。

(三)數名運動員與 P_1 同時從原點反向出發，且在 a 點相遇，則運動員跑的距離依序為{a、x－a、2x－a、3x－a、…、(b－1)x－a}。

(四)令集合 S_3＝{a、x－a、2x－a、3x－a、…、(b－1)x－a}，則從集合 S_3 中任取 k 個數，即為 k－1 名運動員與 P_1 同時從原點反向出發，且在 a 點相遇的情形。

(五)當 P_1 由 a 點跑到 2a 點時，由於跑步的時間多了一倍，所以所有的運動員所跑的距離也會多一倍，則運動員跑的距離依序為{2a、2x－2a、4x－2a、6x－2a、…、2(b－1)x－2a}，亦即這 k 名運動員第一次同時在 a 點相遇後，也會在 2a 點再次相遇。

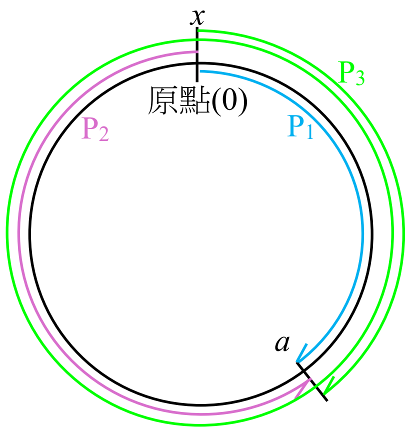


圖 80

三、數名運動員與 P_1 有跑同向、有跑反向的相遇情形

(一) P_1、P_2、P_3 三個人同時從原點出發，P_2 與 P_1 反向，P_3 與 P_1 同向，若 3 人在 a 點相遇，則 P_1 至少跑了 a 的距離，P_2 至少跑了 x－a 的距離，P_3 至少跑了 x＋a 的距離，如圖 80。

(二)P_1、P_2、P_3、P_4、P_5 五個人同時從原點出發，P_2、P_4 與 P_1 反向，P_3、P_5 與 P_1 同向，若 5 人在 a 點相遇，則 P_1 至少跑了 a 的距離，P_2 至少跑了 x－a 的距離，P_3 至少跑了 x＋a 的距離，P_4 至少跑了 2x－a 的距離，P_5 至少跑了 2x＋a 的距離，因每個人的速率不同，且相遇在 a 點，所以在正反 2 種方向每增加一名運動員，就至少增加一圈的距離。

(三)數名運動員與 P_1 同時從原點或同向或反向出發，且在 a 點相遇，則數名運動員跑的距離依序為{a、x－a、x＋a、2x－a、2x＋a、…、2bx－a、2bx＋a}。

(四)令集合 S_4＝{a、x－a、x＋a、2x－a、2x＋a、…、2bx－a、2bx＋a}，則從集合 S_4 中任取 k 個數，即為 k 名運動員同時從原點與 P_1 同向或反向出發，且在 a 點相遇的情形。

(五)當 P_1 由 a 點跑到 2a 點時，由於跑步的時間多了一倍，所以所有的運動員所跑的距離也會多一倍，則數名運動員跑的距離依序為{2a、2x－2a、2x＋2a、4x－2a、…4bx－2a、4bx＋2a }，亦即這 k 名運動員第一次同時在 a 點相遇後，也會在 2a 點再次相遇。

研究三：在直線跑道上給定數名運動員的速率比，探討相遇的情形

在研究一中，我們給定 k 名運動員的相遇點 a，找出這 k 名運動員的速率比，並說明再次相遇的條件。而研究二是把直線跑道轉換為圓形跑道，找出符合相遇條件的集合 S，從 S 中任取 k 名運動員跑步的距離，即為所求。

在研究三中，我們將探討給定 k 名運動員的速率比為 V_1：V_2：V_3：…V_k時，這 k 名運動員在什麼條件下會相遇。

一、給定 k 名運動員的速率比為 $V_1：V_2：V_3：\cdots：V_k$

對於每個 $V_i\,(i\geq 2)$，設 V_i-V_1(或 V_i+V_1)與 V_1+V_2 的最大公因數為 $d_i>1$，

且設 D 為 d_2、d_3、d_4、……d_k 的最大公因數，若 D>1，則這 k 名運動員必會相遇。

$\boxed{說明}$：設 $t=\frac{V_1+V_2}{D}$，對於每個 V_i，則 $(V_i-V_1)t=(V_i-V_1)\cdot\frac{V_1+V_2}{D}=\frac{V_i-V_1}{D}(V_1+V_2)$，

(或 $(V_i+V_1)t=(V_i+V_1)\cdot\frac{V_1+V_2}{D}=\frac{V_i+V_1}{D}(V_1+V_2)$)

因為 $d_i\mid V_i-V_1$(或 $d_i\mid V_i+V_1$)且 $D\mid d_i$，所以 $\frac{V_i-V_1}{D}$ 為正整數(或 $\frac{V_i+V_1}{D}$ 為正整數)，

若 D>1，則 $(V_i-V_1)t$(或 $(V_i+V_1)t$)為 V_1+V_2 的倍數，此時這 k 名運動員會在

$at=\frac{2V_1}{V_1+V_2}\cdot\frac{V_1+V_2}{D}x=\frac{2V_1}{D}x$ 相遇。

(1)若 D 是偶數，則 d_3、……d_k 全是偶數，

$\Rightarrow V_2\pm V_1$、$V_3\pm V_1$、……$V_k\pm V_1$ 全是偶數，

$\Rightarrow V_1$、V_2、V_3、……V_k 同為奇數(P23 已證明會相遇在 $\frac{1}{2}x$)或同為偶數(不合，因為

$V_1：V_2：V_3：\cdots：V_k$ 是最簡整數比)，因此可設 D 為奇數。

(2)D 不整除 V_1：若 D 整除 V_1，因為 $D\mid V_1+V_2$ 且 $D\mid V_i-V_1 \Rightarrow D\mid V_2$、

$D\mid V_3$、……$D\mid V_k$，$\Rightarrow V_1：V_2：V_3：\cdots：V_k$ 不是最簡整數比，矛盾。

(3)由(1)、(2)知，$\frac{2V_1}{D}$ 不是整數，所以 at 不在 0、x 的位置。

(4)舉例說明

$\boxed{例一}$ $V_1：V_2：V_3：V_4=9：12：16：23 \Rightarrow$ 會相遇

$\Rightarrow (V_3-V_1\ ,V_1+V_2)=(16-9，9+12)=(7，21)=7$

$\Rightarrow (V_4-V_1\ ,V_1+V_2)=(23-9，9+12)=(14，21)=7$

$\Rightarrow (V_3-V_1\ ,V_1+V_2)=(V_4-V_1\ ,V_1+V_2)=7$，$t=3 \Rightarrow$ 會相遇

二、探討森棚教官數學題——飛到西飛到東

〈飛到西飛到東〉三隻速度不同的蜜蜂同時從蜂巢出發，在蜂巢與一朵花之間來回等速直線飛行，蜂巢與花的距離為 1 單位，一旦飛到大花馬上回頭再往蜂巢飛，碰到蜂巢又回頭往大花飛，如此周而復始。只考慮理想的狀態，不考慮加速度等等因素，飛得最慢的蜜蜂從蜂巢到花飛一趟要 1 分鐘。

Q1：如果三隻蜜蜂的速度比是 1：2：4 時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

Q2：如果三隻蜜蜂的速度比是 1：3：9 時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

Q3：如果三隻蜜蜂的速度比是 1：$\frac{3}{2}$：$\frac{9}{4}$時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

$\boxed{說明一}$：Q1 三隻蜜蜂速度比 V_1：V_2：V_3＝1：2：4，

(1) P_1、P_2 第一次的相遇點 $a=\frac{2V_1}{V_1+V_2}x \Rightarrow a=\frac{2\times1}{1+2}x \Rightarrow a=\frac{2}{3}x$。

(2)將 x 分成 3 等份，P_1、P_2 的相遇點分別為：$\frac{2}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、0，如圖 81、圖 82。

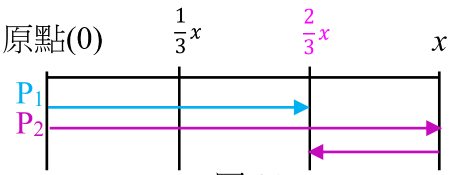


圖 81

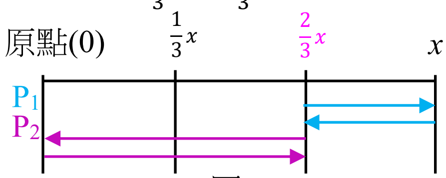


圖 82

(3)相同的時間點，P_3 的位置分別為：$\frac{2}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、0，如圖 83、圖 84。

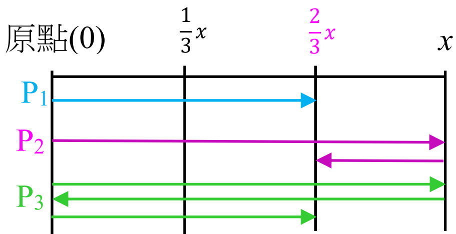


圖 83

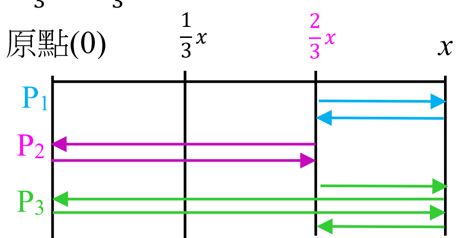


圖 84

(4) P_1、P_2 第一次的相遇點為$\frac{2}{3}x$，與 P_3 在相同的時間點位置相同。若 P_1 跑 a 距離的時間為 t，P_1、P_2、P_3 同時由原點出發，在時間為 t 時，三人會在 $\frac{2}{3}x$的地方相遇。

$\boxed{說明二}$：Q2 三隻蜜蜂速度比 V_1：V_2：V_3＝1：3：9，

(1) P_1、P_2 第一次的相遇點 $a=\frac{2V_1}{V_1+V_2}x \Rightarrow a=\frac{2\times1}{1+3}x \Rightarrow a=\frac{1}{2}x$。

(2)將 x 分成 2 等份，P_1、P_2 的相遇點分別為：$\frac{1}{2}x$、x、$\frac{1}{2}x$、0，如圖 85、圖 86，回程路徑圖省略。

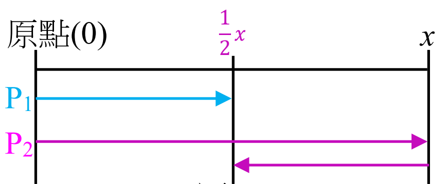


圖 85

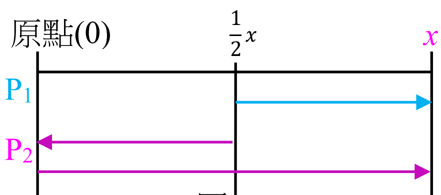


圖 86

(3)相同的時間點，P_3 的位置分別為：$\frac{1}{2}x$、x、$\frac{1}{2}x$、0，如圖 87、圖 88，回程路徑圖省略。

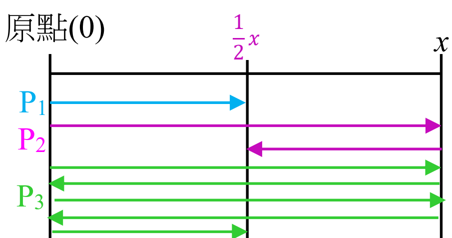


圖 87

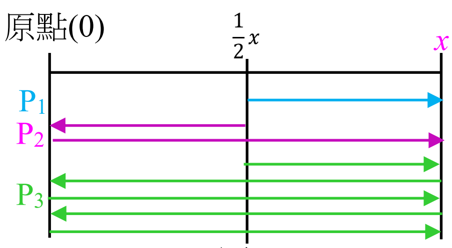


圖 88

(4) P_1、P_2 第一次的相遇點為 $\frac{1}{2}x$，與 P_3 在相同的時間點位置相同。若 P_1 跑 a 距離的時間為 t，P_1、P_2、P_3 同時由原點出發，在時間為 t 時，三人會在 $\frac{1}{2}x$ 的地方相遇。

$\boxed{\text{說明三}}$：Q3 三隻蜜蜂速度比 $V_1：V_2：V_3=1：\frac{3}{2}：\frac{9}{4}$，

(1)將 $1：\frac{3}{2}：\frac{9}{4}$ 化成整數比 4：6：9，

P_1、P_2 第一次的相遇點 $a=\frac{2V_1}{V_1+V_2}x \Rightarrow a=\frac{2\times4}{4+6}x \Rightarrow a=\frac{8}{10}x \Rightarrow a=\frac{4}{5}x$。

(2)將 x 分成 5 等份，P_1、P_2 相遇的點分別為：$\frac{4}{5}x$、$\frac{2}{5}x$、$\frac{2}{5}x$、$\frac{4}{5}x$、0，如圖 89、圖 90。

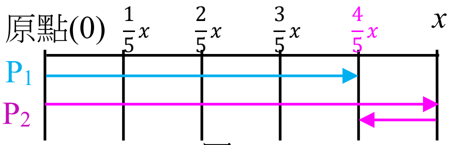


圖 89

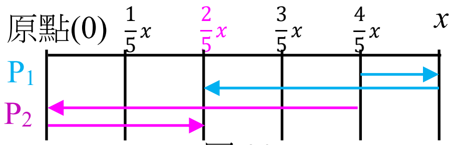


圖 90

(3)相同的時間點，P_3 的位置分別為：$\frac{1}{5}x$、$\frac{2}{5}x$、$\frac{2}{5}x$、$\frac{4}{5}x$、0，如圖 91、圖 92，回程路徑圖省略。

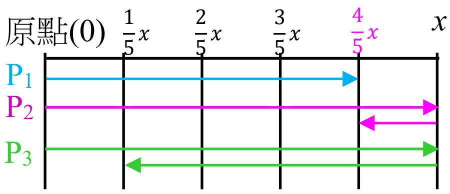


圖 91

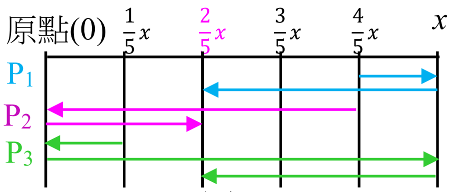


圖 92

(4) P_1、P_2 第二次的相遇點為 $\frac{2}{5}x$，與 P_3 在相同的時間點位置相同。若 P_1 跑 a 距離的時間為 t，P_1、P_2、P_3 同時由原點出發，在時間為 2t 時，三人會在 $\frac{2}{5}x$ 的地方相遇。

$\boxed{\text{說明四}}$：利用我們找到相遇的條件 $\Rightarrow (V_3-V_1，V_1+V_2)\neq1$

Q1：三隻蜜蜂速度比 $V_1：V_2：V_3=1：2：4$，

$\Rightarrow (V_3-V_1，V_1+V_2)=(4-1，1+2)=3\neq1$

$\Rightarrow$ 在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點。

Q2：三隻蜜蜂速度比 $V_1：V_2：V_3=1：3：9$，

$\Rightarrow (V_3-V_1，V_1+V_2)=(9-1，1+3)=4\neq1$

$\Rightarrow$ 在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點。

.Q3：三隻蜜蜂速度比 $V_1：V_2：V_3=1：\frac{3}{2}：\frac{9}{4}=4：6：9$，

$\Rightarrow (V_3-V_1, V_1+V_2)=(9-4, 4+6)=5\neq 1$

$\Rightarrow$ 在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點。

肆、討論

一、兩個有趣的現象

在探討運動員的速率比時，我們從研究一的資料中發現兩個有趣的現象，可以直接判斷是否會相遇，以及相遇點在哪裡？

(一)現象一：當給定的速率比全為奇數時，會相遇在$\frac{1}{2}x$

1.例如 $a=1$、$x=2$，則 $2x-a=3$、$2x+a=5$、$4x-a=7$、$4x+a=9$、$6x-a=11$、$6x+a=13$、$8x-a=15\cdots$(如圖 93)，集合{1、3、5、7、9、11、13、15⋯}剛好符合集合 $S_1=\{a、2x-a、2x+a、4x-a、4x+a、6x-a、6x+a、8x-a\ \cdots\}$的形式，所以速率比全為奇數時，會在$\frac{1}{2}x$相遇。

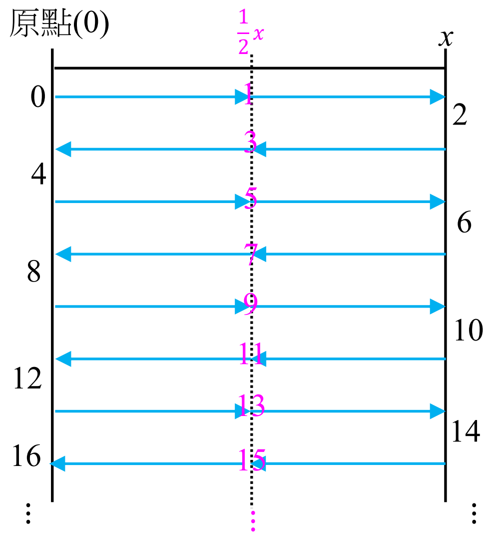


圖 93

2.將 1.的情形一般化：有 k 名運動員 P_1、P_2、⋯P_k，其速率比為 $V_1:V_2:\cdots:V_k$，設此連比為最簡整數比，且均為奇數，則$\frac{x}{2}$必是一個相遇點。

$\boxed{\text{說明}}$：當 P_1 跑了$\frac{V_1}{2}x$，此時其他人各跑了

$\frac{V_1}{2}x\times\frac{V_2}{V_1}=\frac{V_2}{2}x$、$\frac{V_1}{2}x\times\frac{V_3}{V_1}=\frac{V_3}{2}x$、⋯、$\frac{V_1}{2}x\times\frac{V_k}{V_1}=\frac{V_k}{2}x$。

因為 V_1、V_2、⋯、V_k 均為奇數，所以$\frac{V_1}{2}x$、$\frac{V_2}{2}x$、⋯、$\frac{V_k}{2}x$均在同一點$\frac{x}{2}$。

3.承 2.，反之，若$\frac{x}{2}$是一個相遇點，則最簡速率比 $V_1:V_2:\cdots:V_k$ 中，V_1、V_2、⋯、V_k 必都是奇數。

$\boxed{\text{說明}}$：若有一個 Vi 是偶數，因為 $V_1:V_2:\cdots:V_k$ 是最簡整數比，則必有一個 V_j 是奇數。在相遇點時，設 Vi 跑了$(2b+\frac{1}{2})x=\frac{4b+1}{2}x$ 或 $(2b+1+\frac{1}{2})x=\frac{4b+3}{2}x$，此時 V_j 跑了$\frac{(4b+1)v_j}{2v_i}x$ 或 $\frac{(4b+3)v_j}{2v_i}x$，這兩數的分子為奇數，分母為 4 的倍數，這也就是說當 Vi 跑到$\frac{x}{2}$的點時，V_j 不會跑到$\frac{x}{2}$的點。

(二)現象二：當給定的速率比全為偶數時(排除 3 的倍數)，會相遇在$\frac{2}{3}x$

1.例如 a＝2、x＝3，則 2x－a＝4、2x＋a＝8、4x－a＝10、4x＋a＝14、6x－a＝16、6x＋a＝20、8x－a＝22…(如圖 94)，集合{2、4、8、10、14、16、20、22…}剛好符合集合 S_1＝{a、2x－a、2x＋a、4x－a、4x＋a、6x－a、6x＋a、8x－a…}的形式，所以速率比全為偶數時(排除 3 的倍數)，會相遇在$\frac{2}{3}x$。

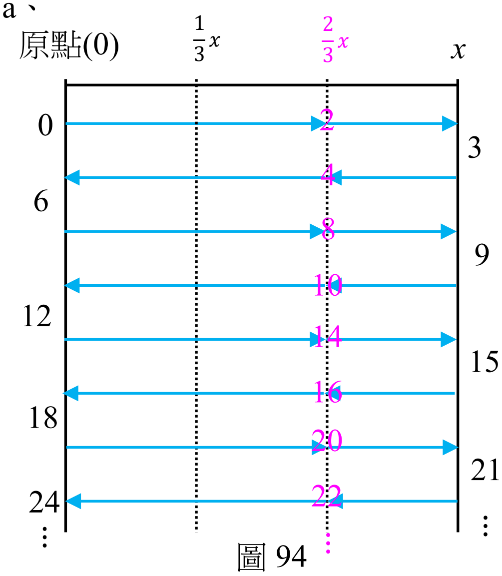


圖 94

2.若偶數的速率比中有 3 的倍數時，可先將全部的比除以 2，除以 2 後若能得到一個全為奇數的比，即可比照現象一，會相遇在$\frac{1}{2}x$，否則另外討論。

3.將 1.的情形一般化：有 k 名運動員 P_1、P_2、…、P_k，其速率的最簡整數比為 V_1：V_2：…：V_k，這些 Vi 都不是 3 的倍數，則$\frac{2}{3}x$會是一個相遇點。

$\boxed{\text{說明}}$：若 P_1 跑了$\frac{4v_1}{3}x$時，其餘 P_2、…、P_k 各跑了$\frac{4v_2}{3}x$、$\frac{4v_3}{3}x$、……、$\frac{4v_k}{3}x$。

每個 i，Vi＝3b＋1，或 Vi＝3b＋2

若 Vi＝3b＋1，則$\frac{4v_i}{3}x=\frac{12b+4}{3}x=(4b+1)x+\frac{x}{3}$與$\frac{2}{3}x$是相同的點。

若 Vi＝3b＋2，則$\frac{4v_i}{3}x=\frac{12b+8}{3}x=(4b+2)x+\frac{2x}{3}$與$\frac{2}{3}x$是相同的點。

4.承 3.，反之，若$\frac{2}{3}x$是一個相遇點，則這些 Vi 都不是 3 的倍數。

$\boxed{\text{說明}}$：若有一個 Vj 是 3 的倍數，因為 V_1：V_2：…：V_k 是最簡整數比，則必有一個不是 3 的倍數，設為 Vi。

在相遇點時，Vi 跑了$(2b+\frac{2}{3})x=\frac{6b+2}{3}x$ 或 $(2b+1+\frac{1}{3})x=\frac{6b+4}{3}x$

此時 Vj 跑了$\frac{6b+2}{3}x\times\frac{v_j}{v_i}$ 或 $\frac{6b+4}{3}x\times\frac{v_j}{v_i}$

因 Vj 是 3 的倍數，上兩式可以化簡為$\frac{(6b+2)v_j'}{v_i}x$ 或 $\frac{(6b+4)v_j'}{v_i}x$　$(v_j=3v_j')$

分子是整數，分母 Vi 不是 3 的倍數，因此這兩個分數所在的點都不會是$\frac{2}{3}x$，也就是說當 Vi 走到點$\frac{2}{3}x$時，Vj 不會走到點$\frac{2}{3}x$。

(三)當給定的速率比有奇數有偶數時，將其速率比×2，使之換成偶數比(排除 3 的倍數)，則會相遇在$\frac{2}{3}x$，若速率比中有 3 的倍數時，另外討論。

二、三名運動員(P_1、P_2、P_3)的討論

(一)若 V_1：V_2：V_3＝1：3：5

1.首先考慮 V_1：V_2＝1：3，

第一次相遇點 $a=\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_1+V_2}x=\frac{2\times1}{1+3}x=\frac{1}{2}x$，⇒相遇點在$\frac{1}{2}x$、$x$、$\frac{1}{2}x$、0。

第一次追上點 $a=\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_2-V_1}x=\frac{2\times1}{3-1}x=x$，⇒追上點在$x$、0。

2.再考慮 V_1：V_3＝1：5，

第一次相遇點 $a=\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_1+V_3}x=\frac{2\times1}{1+5}x=\frac{1}{3}x$，⇒相遇點在$\frac{1}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、$x$、$\frac{2}{3}x$、$\frac{1}{3}x$、0。

第一次追上點 $a=\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_3-V_1}x=\frac{2\times1}{5-1}x=\frac{1}{2}x$，⇒追上點在$\frac{1}{2}x$、$x$、$\frac{1}{2}x$、0。

3.由上述 1.2.知，三人相遇點在$\frac{1}{2}x$、x、$\frac{1}{2}x$、0，此時 P_1、P_2 為相遇，而 P_3 追上 P_1。

(二)若 V_1：V_2：V_3＝1：5：7

1.首先考慮 V_1：V_2＝1：5，

第一次相遇點 $a=\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_1+V_2}x=\frac{2\times1}{1+5}x=\frac{1}{3}x$，⇒相遇點在$\frac{1}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、$x$、$\frac{2}{3}x$、$\frac{1}{3}x$、0。

第一次追上點 $a=\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_2-V_1}x=\frac{2\times1}{5-1}x=\frac{1}{2}x$，⇒追上點在$\frac{1}{2}x$、$x$、$\frac{1}{2}x$、0。

2.再考慮 V_1：V_3＝1：7，

第一次相遇點 $a=\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_1+V_3}x=\frac{2\times1}{1+7}x=\frac{1}{4}x$，⇒相遇點在$\frac{1}{4}x$、$\frac{1}{2}x$、$\frac{3}{4}x$、$x$、$\frac{3}{4}x$、$\frac{1}{2}x$、$\frac{1}{4}x$、0。

第一次追上點 $a=\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_3-V_1}x=\frac{2\times1}{7-1}x=\frac{1}{3}x$，⇒追上點在$\frac{1}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、$x$、$\frac{2}{3}x$、$\frac{1}{3}x$、0。

3.由上述 1.2.知，(1)三人相遇點在$\frac{1}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、x、$\frac{2}{3}x$、$\frac{1}{3}x$、0，此時 P_1、P_2 為相遇，而 P_3 追上 P_1；(2)三人相遇點在$\frac{1}{2}x$、x、$\frac{1}{2}x$、0，此時 P_1、P_3 為相遇，而 P_2 追上 P_1。

(三)若 V_1：V_2：V_3＝1：2：4

1.首先考慮 V_1：V_2＝1：2，

第一次相遇點 $a=\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_1+V_2}x=\frac{2\times1}{1+2}x=\frac{2}{3}x$，⇒相遇點在$\frac{2}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、0。

第一次追上點 $a=\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_2-V_1}x=\frac{2\times1}{2-1}x=2x$，⇒追上點在0，亦即無追上。

2.再考慮 V_1：V_3＝1：4，

第一次相遇點 a＝$\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_1+V_3}x=\frac{2\times1}{1+4}x=\frac{2}{5}x$，⇒相遇點在$\frac{2}{5}x$、$\frac{4}{5}x$、$\frac{4}{5}x$、$\frac{2}{5}x$、 0

第一次追上點 a＝$\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_3-V_1}x=\frac{2\times1}{4-1}x=\frac{2}{3}x$，⇒追上點在$\frac{2}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、0。、

3.由上述 1.2.知，三人相遇點在$\frac{2}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、0，此時 P_1、P_2為相遇，而 P_3追上 P_1。

(四)若 V_1：V_2：V_3＝1：7：9

1.首先考慮 V_1：V_2＝1：7，

第一次相遇點 a＝$\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_1+V_2}x=\frac{2\times1}{1+7}x=\frac{1}{4}x$，⇒相遇點在$\frac{1}{4}x$、$\frac{1}{2}x$、$\frac{3}{4}x$、$x$、$\frac{3}{4}x$、$\frac{1}{2}x$、$\frac{1}{4}x$、0。

第一次追上點 a＝$\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_2-V_1}x=\frac{2\times1}{7-1}x=\frac{1}{3}x$，⇒追上點在$\frac{1}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、$x$、$\frac{2}{3}x$、$\frac{1}{3}x$、0。

2.再考慮 V_1：V_3＝1：9，

第一次相遇點 a＝$\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_1+V_3}x=\frac{2\times1}{1+9}x=\frac{1}{5}x$，⇒相遇點在$\frac{1}{5}x$、$\frac{2}{5}x$、$\frac{3}{5}x$、$\frac{4}{5}x$、$x$、$\frac{4}{5}x$、$\frac{3}{5}x$、$\frac{2}{5}x$、$\frac{1}{5}x$、0。

第一次追上點 a＝$\frac{m}{n}x=\frac{2V_1}{V_3-V_1}x=\frac{2\times1}{9-1}x=\frac{1}{4}x$，⇒追上點在$\frac{1}{4}x$、$\frac{1}{2}x$、$\frac{3}{4}x$、$x$、$\frac{3}{4}x$、$\frac{1}{2}x$、$\frac{1}{4}x$、0。

3.由上述 1.2.知，三人相遇點在$\frac{1}{4}x$、$\frac{1}{2}x$、$\frac{3}{4}x$、x、$\frac{3}{4}x$、$\frac{1}{2}x$、$\frac{1}{4}x$、0，此時 P_1、P_2為相遇，而 P_3追上 P_1。

三、相遇若發生在原點和折返點，此種相遇的方式為追上的情形，兩人第一次相遇不會發生在折返點。

四、兩人在直線跑道上做折返跑時，因速率不同，較快者到折返點後返回，兩人一定會相遇，兩人第一次相遇，必為面對面相遇，此時兩人所跑的距離和為 $2x$，爾後再有面對面相遇，它的相遇點會是第一次相遇點的倍數；若相遇點不是第一次相遇點的倍數，此種相遇的方式為追上的情形。

五、在討論多人相遇的情形時，我們以最慢的兩人 P_1和 P_2相遇點為基準，較快的 P_3、P_4⋯來會合，因為 P_1和 P_2相遇的頻率較少，方便討論。

伍、結論

一、數名運動員在直線跑道上以互不相同的均速做折返跑的相遇情形

有 k 名運動員，分別標示為 P_1、P_2、P_3、…、P_k，其中 P_1 跑最慢。

(一)設原點到折返點的距離為 x，k 名運動員同時從原點出發，考慮 P_1 跑到 a 點時($0<a<x$)，這 k 名運動員第一次同時在 a 點相遇。由於速率各不同，其跑者的距離依序為{a、$2x-a$、$2x+a$、$4x-a$、$4x+a$、$6x-a$、$6x+a$、…、$2bx-a$、$2bx+a$}，如圖 95。

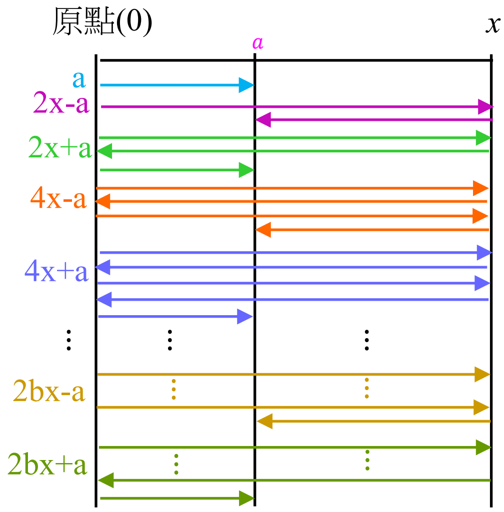


圖 95

(二)令 S_1＝{a、$2x-a$、$2x+a$、$4x-a$、$4x+a$、$6x-a$、$6x+a$、…、$2bx-a$、$2bx+a$}，則從 S_1 中任取 k 個數，即為 k 名運動員同時從原點出發，且在 a 點相遇的情形。

(三)當 P_1 由 a 點跑到 2a 點時，由於跑步的時間多了一倍，所以所有的運動員所跑的距離也會多一倍，其跑者的距離依序為{2a、$4x-2a$、$4x+2a$、$8x-2a$、$8x+2a$、$12x-2a$、$12x+2a$、…、$4bx-2a$、$4bx+2a$}，亦即這 k 名運動員第一次同時在 a 點相遇後，會在 2a 點再次相遇。

二、數名運動員在圓形跑道上以互不相同的均速跑步時的相遇情形

(一)數名運動員與 P_1 同時從原點或同向或反向出發，且在 a 點相遇，其距離依序為{a、$x-a$、$x+a$、$2x-a$、$2x+a$、…、$2bx-a$、$2bx+a$}。

(二)令 S_4＝{a、$x-a$、$x+a$、$2x-a$、$2x+a$、…、$2bx-a$、$2bx+a$}，則從 S_4 中任取 k 個數，即為 k 名運動員同時從原點或同向或反向出發，且在 a 點相遇的情形。

(三)當 P_1 由 a 點跑到 2a 點時，由於跑步的時間多了一倍，所以所有的運動員所跑的距離也會多一倍，其跑者的距離依序為{2a、$2x-2a$、$2x+2a$、$4x-2a$、$4x+2a$、…、$4bx-2a$、$4bx+2a$ }，亦即這 k 名運動員第一次同時在 a 點相遇後，會在 2a 點再次相遇。

三、在直線跑道上折返跑，k 名運動員(P_1、P_2、P_3、…、P_k)相遇的情形

給定 k 名運動員的速率比為 $V_1:V_2:V_3:\cdots:V_k$

(一)對於每個 $V_i\,(i\geq 2)$，設 V_i-V_1(或 V_i+V_1)與 V_1+V_2的最大公因數為 $d_i>1$，且設 D 為 d_3、d_4、d_5、……d_k的最大公因數，若 D>1，則這 k 名運動員必會相遇。

(二)當給定的速率比全為奇數時，會在$\frac{1}{2}x$相遇。

(三)當都不是 3 的倍數，會在$\frac{2}{3}x$相遇。

陸、參考文獻資料

一、International Mathematics Tournament of Towns 環球城市數學競賽 2008 秋季賽 國中組 初級卷 第五題。

二、游森棚 (2022 February) 11、特約專欄〈森棚教官數學題——飛到西飛到東〉 科學研習月刊第 61 卷第 1 期. https://www.ntsec.gov.tw/article/detail.aspx?a=5132

三、李晨均〈蜂擁而至〉中華民國第 63 屆中小學科學展覽會國小組 數學科

【評語】080402

此作品探討數名運動員在直線跑道上做互不相同的均速折返跑,找出在某一時刻會全部相遇在同一點的情形以及會再次相遇的條件。之後並延伸探討圓形跑道相遇的情形，以及討論在直線跑道上，給定數名運動員的速率比，判斷是否會相遇的條件。作者主要是先找出這群運動員第一次相遇的地點,接著分析再次相遇的條件及相遇地點，這個想法很自然且直接，也成功地得到不錯的結果，不過在討論給定運動員的速率比的情形時，僅得到一些特定的結果，如果能針對這部分的內容進行加強，則作品更顯完整。

作品海報

會再次相遇嗎？

壹、前言

在一條長x的直線跑道上做折返跑，如果有2名運動員第一次相遇在$\frac{1}{2}x$，其條件為何？又他們會再次相遇嗎？如果這2名運動員第一次相遇分別在$\frac{1}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、$\frac{1}{4}x$、$\frac{3}{4}x$、…，其條件為何？又他們會再次相遇嗎？本文主要探討k名運動員，同時由原點出發，在什麼條件下會相遇？相遇點在哪裡？會再次相遇嗎？再次相遇點又為何？並延伸探討圓形跑道相遇的情形，最後討論給定k名運動員的速率比，判斷其是否會相遇。

一、研究動機

環球城市數學競賽題—數名運動員在直線跑道上折返跑的相遇問題[1]，如運動員的人數、運動員間的速率比、相遇的時間點及相遇點的關係，在好奇心的驅使下，我們決定深入探討、一窺究竟。

二、研究目的

(一)數名運動員在直線跑道上做互不相同的均速折返跑，找出在某一時刻會全部相遇在同一點的情形及再次相遇的條件。

(二)將直線的跑道轉換為圓形跑道，探討運動員相遇的情形。

(三)在直線跑道上，給定k名運動員的速率比為$V_1:V_2:V_3:\cdots:V_k$，這k名運動員會相遇的條件為何？

貳、研究過程

會再次相遇嗎？

- 研究一
  - 數名運動員在直線跑道上以互不相同的均速，做折返跑的相遇情形
    - 在相遇點a找到集合S={a、2x-a、2x+a⋯2bx-a、2bx+a}從中任取數名即為所求
    - 在a點相遇的數名運動員，會在2a，3a ⋯再次相遇
- 研究二
  - 數名運動員在圓形跑道上以互不相同的均速，同向或反向跑的相遇情形
    - 同向集合S={a、x+a、2x+a、⋯、bx+a}，反向集合S={a、x-a、2x-a、⋯bx-a}
    - 有些同向有些反向的集合S={a、x-a、x+a、2x-a、2x+a、⋯、bx-a、bx+a}
- 研究三
  - 在直線跑道上給定數名運動員的速率比，判斷其是否相遇的情形
    - 給定奇數速率比，會相遇在$\frac{1}{2}x$

參、研究結果

研究一：數名運動員在直線跑道上以互不相同的均速，做折返跑的相遇情形

在一條長x的直線跑道上，我們將2名運動員、3名運動員、⋯、k名運動員分別在$\frac{1}{2}x$、$\frac{1}{3}x$、$\frac{2}{3}x$、$\frac{1}{4}x$、⋯的相遇點整理成表，觀察各表找出k名運動員第一次相遇和再度相遇的情形。

一、在直線跑道上折返跑，兩名運動員(P_1、P_2)相遇的情形，如圖1~圖4

(一)P_1、P_2同時由原點(0)出發，若兩人第一次相遇在$\frac{1}{2}x$

1. P_1跑了$\frac{1}{2}x$，P_2跑了$\frac{3}{2}x$，由$V_1T:V_2T=\frac{1}{2}x:\frac{3}{2}x=1:3$，知$V_1:V_2=1:3$，如圖1。
2. 承1.，接著P_1繼續往前跑到x，此時P_2跑回原點(0)後返回也跑到x，兩人第二次相遇(追上)，如圖2。
3. 承2.，接著P_1從x返回跑到$\frac{1}{2}x$，此時P_2從x返回跑到原點後，繼續跑到$\frac{1}{2}x$，兩人第三次相遇，如圖3。
4. 承3.，接著P_1從$\frac{1}{2}x$跑回原點，此時P_2從$\frac{1}{2}x$跑到x後再返回跑到原點，兩人第四次相遇(追上)，如圖4。
5. 從上述1.~4.知，兩人相遇的位置依序是$\frac{1}{2}x$，x，$\frac{1}{2}x$，原點(0)，其中x、原點(0)為追上。

(二)我們將二人相遇的情形整理成表一，表一中假設P_1跑了a，P_2跑了$2x-$a。

表一 兩人相遇的情形

第一次相遇點	兩人從原點同時出發，再次回到原點前的所有相遇點	距離(速率)比
$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$，x，$\frac{1}{2}x$，0	1:3
$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，x，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，0	1:5
$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{3}x$，0	1:2
$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{3}{4}x$，x，$\frac{3}{4}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{4}x$，0	1:7
$\frac{3}{4}x$	$\frac{3}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{4}x$，x，$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{4}x$，0	3:5
$\frac{1}{5}x$	$\frac{1}{5}x$，$\frac{1}{4}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{3}{4}x$，$\frac{4}{5}x$，x，$\frac{4}{5}x$，$\frac{3}{4}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{5}x$，0	1:9
$\frac{2}{5}x$	$\frac{2}{5}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{5}x$，0	1:4
$\frac{3}{5}x$	$\frac{3}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，x，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{3}{5}x$，0	3:7
$\frac{4}{5}x$	$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，0	2:3
$\frac{1}{6}x$	$\frac{1}{6}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{5}{6}x$，x，$\frac{5}{6}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{1}{6}x$，0	1:11
$\frac{5}{6}x$	$\frac{5}{6}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{6}x$，x，$\frac{1}{6}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{5}{6}x$，0	5:7
$\frac{1}{7}x$	$\frac{1}{7}x$，$\frac{1}{6}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{5}{6}x$，$\frac{6}{7}x$，x，$\frac{6}{7}x$，$\frac{5}{6}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{6}x$，$\frac{1}{7}x$，0	1:13
$\frac{2}{7}x$	$\frac{2}{7}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{2}{7}x$，0	1:6
$\frac{3}{7}x$	$\frac{3}{7}x$，$\frac{3}{4}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{1}{4}x$，$\frac{4}{7}x$，x，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{3}{4}x$，$\frac{3}{7}x$，0	3:11
$\frac{4}{7}x$	$\frac{4}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，0，	2:5
$\frac{5}{7}x$	$\frac{5}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，x，$\frac{2}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，0	5:9
$\frac{6}{7}x$	$\frac{6}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，0	3:4

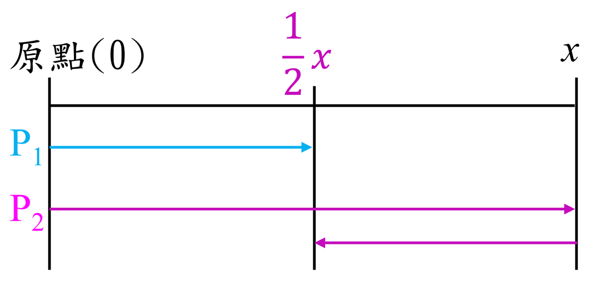


圖1(碰面)

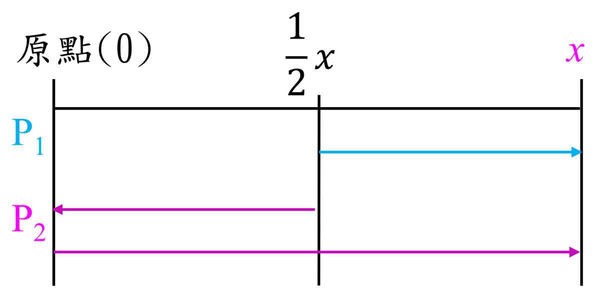


圖2(追上)

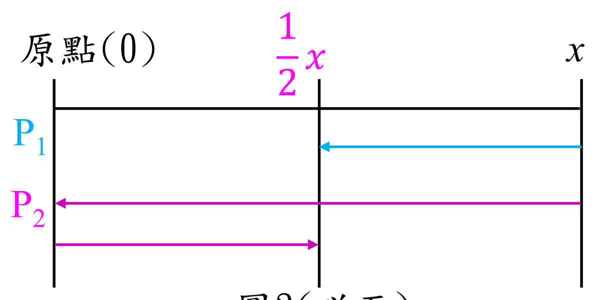


圖3(碰面)

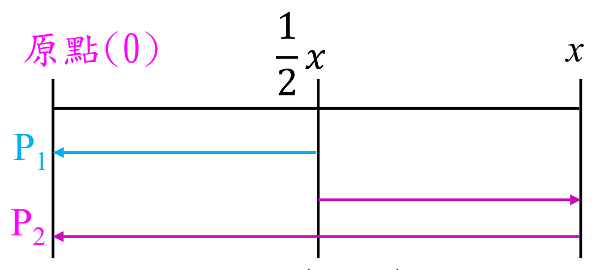


圖4(追上)

二、在直線跑道上折返跑，三名運動員(P_1、P_2、P_3)相遇的情形，如圖5~圖8

(一)P_1、P_2、P_3同時由原點(0)出發，若三人第一次相遇在$\frac{1}{2}x$，其情形如圖5~圖8。

(二)我們將三人相遇的情形整理成表二，表二中假設P_1跑了a，P_2跑了$2x-$a， P_3跑了$2x+$a。

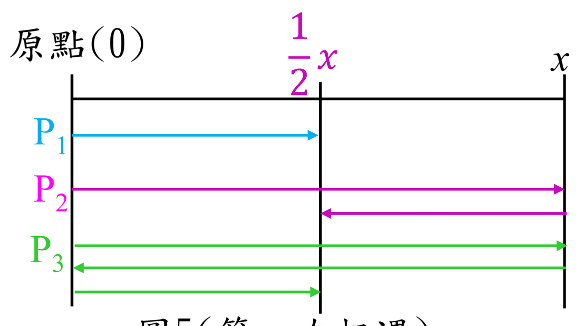


圖5(第一次相遇)

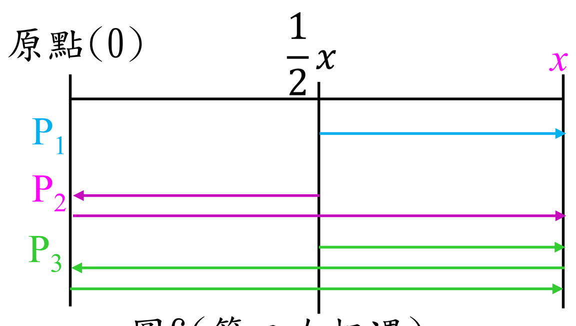


圖6(第二次相遇)

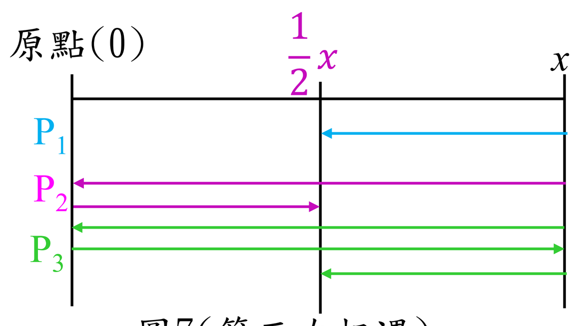


圖7(第三次相遇)

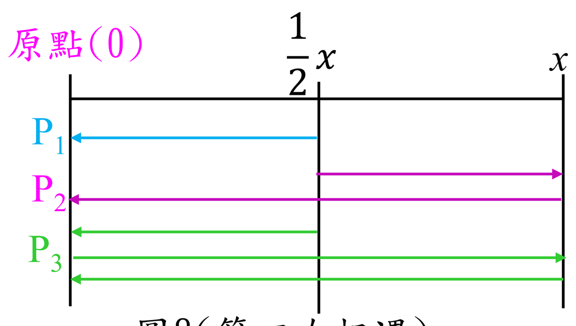


圖8(第四次相遇)

表二 三人相遇的情形

第一次相遇點	三人從原點同時出發，再次回到原點前的所有相遇點	距離(速率)比
$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$，x，$\frac{1}{2}x$，0	1:3:5
$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，x，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，0	1:5:7
$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{3}x$，0	1:2:4
$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{4}x$，x，$\frac{3}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{4}x$，0	1:7:9
$\frac{3}{4}x$	$\frac{3}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{4}x$，x，$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{4}x$，0	3:5:11
$\frac{1}{5}x$	$\frac{1}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，x，$\frac{4}{5}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{5}x$，0	1:9:11
$\frac{2}{5}x$	$\frac{2}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，0	1:4:6
$\frac{3}{5}x$	$\frac{3}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，x，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{3}{5}x$，0	3:7:13
$\frac{4}{5}x$	$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，0	2:3:7
$\frac{1}{6}x$	$\frac{1}{6}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{5}{6}x$，x，$\frac{5}{6}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{6}x$，0	1:11:13
$\frac{5}{6}x$	$\frac{5}{6}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{6}x$，x，$\frac{1}{6}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{5}{6}x$，0	5:7:17
$\frac{1}{7}x$	$\frac{1}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，x，$\frac{6}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，0	1:13:15
$\frac{2}{7}x$	$\frac{2}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，0	1:6:8
$\frac{3}{7}x$	$\frac{3}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，x，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，0	3:11:17
$\frac{4}{7}x$	$\frac{4}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，0	2:5:9
$\frac{5}{7}x$	$\frac{5}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，x，$\frac{2}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，0	5:9:19
$\frac{6}{7}x$	$\frac{6}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，0	3:4:10

三、在直線跑道上折返跑，四名運動員(P_1、P_2、P_3、P_4)相遇的情形，如圖9~圖12

(一)P_1、P_2、P_3、P_4同時由原點(0)出發，若四人第一次相遇在$\frac{1}{2}x$，其情形如圖9~圖12。

(二)我們將四人相遇的情形整理成表三，表三中假設P_1跑了a，P_2跑了$2x-a$，P_3跑了$2x+a$，P_4跑了$4x-a$。

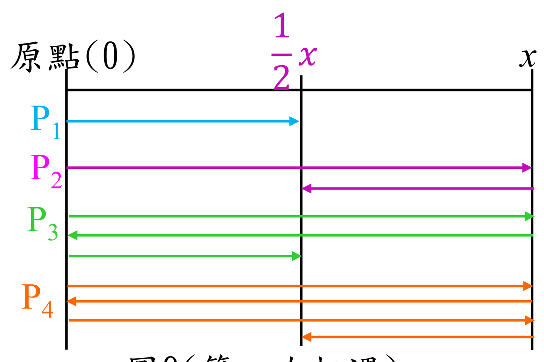


圖9(第一次相遇)

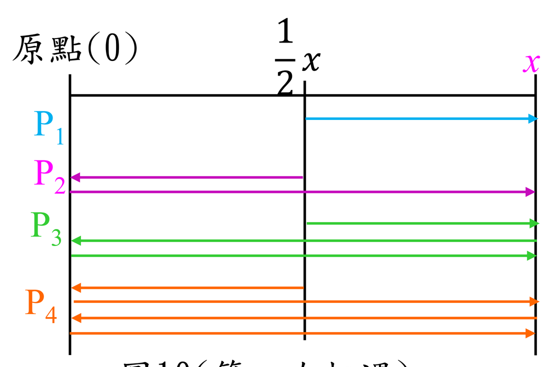


圖10(第二次相遇)

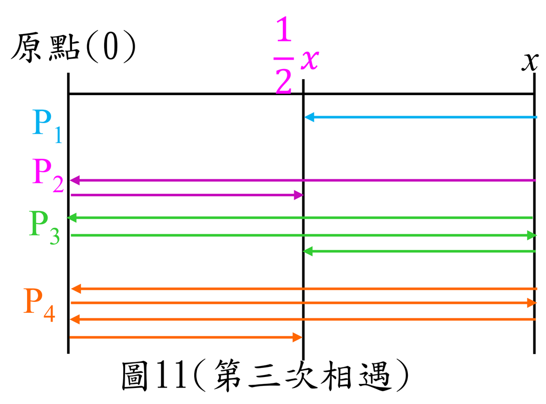


圖11(第三次相遇)

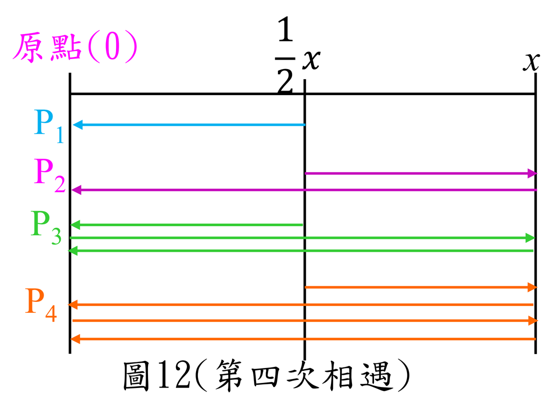


圖12(第四次相遇)

表三 四人相遇的情形

第一次相遇點	四人從原點同時出發，再次回到原點前的所有相遇點	距離(速率)比
$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$，x，$\frac{1}{2}x$，0	1:3:5:7
$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，x，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，0	1:5:7:11
$\frac{2}{3}x$	$\frac{2}{3}x$，$\frac{2}{3}x$，0	1:2:4:5
$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{4}x$，x，$\frac{3}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{4}x$，0	1:7:9:15
$\frac{3}{4}x$	$\frac{3}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{4}x$，x，$\frac{1}{4}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{4}x$，0	3:5:11:13
$\frac{1}{5}x$	$\frac{1}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，x，$\frac{4}{5}x$，$\frac{3}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{5}x$，0	1:9:11:19
$\frac{2}{5}x$	$\frac{2}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，0	1:4:6:9
$\frac{3}{5}x$	$\frac{3}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，x，$\frac{2}{5}x$，$\frac{1}{5}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{4}{5}x$，$\frac{3}{5}x$，0	3:7:13:17
$\frac{4}{5}x$	$\frac{4}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{2}{5}x$，$\frac{4}{5}x$，0	2:3:7:8
$\frac{1}{6}x$	$\frac{1}{6}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{5}{6}x$，x，$\frac{5}{6}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{6}x$，0	1:11:13:23
$\frac{5}{6}x$	$\frac{5}{6}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{6}x$，x，$\frac{1}{6}x$，$\frac{2}{3}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{3}x$，$\frac{5}{6}x$，0	5:7:17:19
$\frac{1}{7}x$	$\frac{1}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，x，$\frac{6}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，0	1:13:15:27
$\frac{2}{7}x$	$\frac{2}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，0	1:6:8:13
$\frac{3}{7}x$	$\frac{3}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，x，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{5}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，0	3:11:17:25
$\frac{4}{7}x$	$\frac{4}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，0，	2:5:9:12
$\frac{5}{7}x$	$\frac{5}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，x，$\frac{2}{7}x$，$\frac{3}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，$\frac{1}{2}x$，$\frac{1}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{5}{7}x$，0	5:9:19:23
$\frac{6}{7}x$	$\frac{6}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{4}{7}x$，$\frac{2}{7}x$，$\frac{6}{7}x$，0	3:4:10:11

四、從表一中發現：P_1、P_2 第一次碰面的點$=\frac{2v_1}{v_1+v_2}x$； P_1、P_2第一次追上的點$=\frac{2v_1}{v_2-v_1}x$。

(一)若第一次相遇是碰面在$a=\frac{m}{n}x$（m、n為正整數）時，$a=\frac{m}{n}x=\frac{2v_1}{v_1+v_2}x$。

說明：$V_1T=\frac{m}{n}x$ (1)， $V_2T=2x-\frac{m}{n}x$ (2)， (1)、(2)兩式相除得到：$\frac{V_1}{V_2}=\frac{m}{2n-m}$，

第一次相遇是碰面在$a=\frac{m}{n}x=\frac{2v_1}{v_1+v_2}x$。

(二)若第一次相遇是追上在$a=\frac{m}{n}x$（m、n為正整數）時，$a=\frac{m}{n}x=\frac{2v_1}{v_2-v_1}x$。

說明：$V_1T=\frac{m}{n}x$ (1)， $V_2T=2x+\frac{m}{n}x$ (2)， (1)、(2)兩式相除得到：$\frac{V_1}{V_2}=\frac{m}{2n+m}$，

第一次相遇是追上在$a=\frac{m}{n}x=\frac{2v_1}{v_2-v_1}x$。

五、從表一~表三中發現：若$a=\frac{m}{n}x$，其中m、n互質，且$0<m<n$，則

(一)當n、m都是奇數，則0、$\frac{1}{n}x$、$\frac{2}{n}x$、$\frac{3}{n}x$、…、$\frac{n-1}{n}x$也都是相遇點。

(二)當n是偶數，則0、$\frac{1}{n}x$、$\frac{2}{n}x$、$\frac{3}{n}x$、…、$\frac{n-1}{n}x$也都是相遇點。

(三)當n是奇數，m是偶數，則0、$\frac{2}{n}x$、$\frac{4}{n}x$、$\frac{6}{n}x$、…、$\frac{n-1}{n}x$都是相遇點，而 $\frac{1}{n}x$、$\frac{3}{n}x$、$\frac{5}{n}x$、…、$\frac{n-2}{n}x$不是相遇點。

六、結論一：在直線跑道上折返跑，k名運動員(P_1、P_2、P_3、…、 P_k)相遇的情形

有k名運動員，分別為P_1、P_2、…、 P_k，其中P_1跑最慢。

(一)設原點到折返點的距離為x，k名運動員同時從原點出發，考慮P_1跑到a點時($0<a<x$)，這k名運動員第一次同時在a點相遇。由於速率各不相同，所以跑者跑的距離依序為{a、$2x-a$、$2x+a$、$4x-a$、$4x+a$、$6x-a$、$6x+a$、…、$2bx-a$、$2bx+a$}，如圖13。

(二)令集合S_1＝{a、$2x-a$、$2x+a$、$4x-a$、$4x+a$、$6x-a$、$6x+a$、…、$2bx-a$、$2bx+a$}，則從集合S_1中任取k個數，即為這k名運動員同時從原點出發，且在a點相遇的情形。

(三)當P_1由a點跑到2a點時，由於跑步的時間多了一倍，故所有運動員跑的距離也會多一倍，即跑者跑的距離依序為{2a、$4x-2a$、$4x+2a$、$8x-2a$、$8x+2a$、…、$4bx-2a$、$4bx+2a$}，所以這k名運動員第一次同時在a點相遇後，也會在2a點再次相遇，亦即這k名運動員在時間t時第一次相遇，則在2t、3t、…也會相遇。

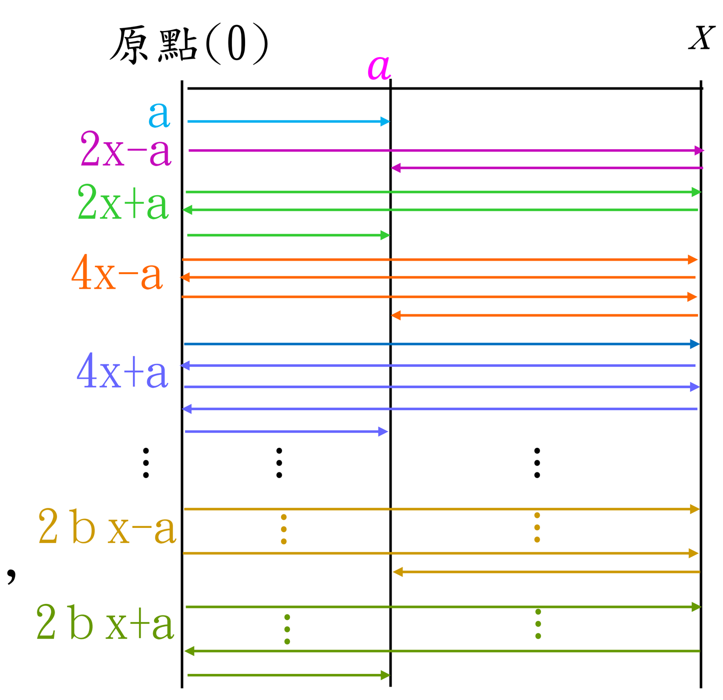


圖13

說明：設第1個運動員在時間t時跑a ($0<a<x$)，則其他運動員跑的距離為$2bx-a$(碰面)或$2bx+a$(追上)。yt分鐘時，第1個運動員跑ya(y=2、3…)，其他運動員跑$y(2bx-a)$或$y(2bx+a)$⇒$ya+y(2bx-a)=y\cdot 2bx$(碰面)或$ya+y(2bx+a)=y(2bx+2a)$(追上)，故當k名運動員在時間t時第一次相遇，則在2t、3t、…、yt也會相遇。

研究二：數名運動員在圓形跑道上以互不相同的均速，同向或反向跑的相遇情形

在圓形跑道上取一點為原點(0)，圓周長為x，如圖14。數名運動員(P_1、P_2、P_3、…、P_k，距離比$P_1<P_2<P_3<\cdots<P_k$，其中P_1跑最慢)以互不相同的均速從原點出發，有順時針方向者，也有逆時針方向者，當他們全部相遇在a ($0<a<\frac{1}{2}x$)點時，探討如下：

一、與P_1跑同向的相遇情形，如圖15。

二、與P_1跑反向的相遇情形，如圖16。

三、數名運動員與P_1有跑同向、有跑反向的相遇情形，如圖17。

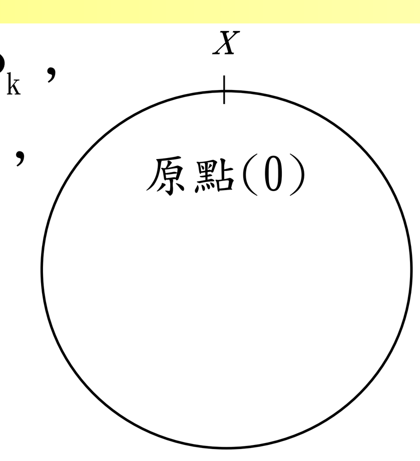


圖14

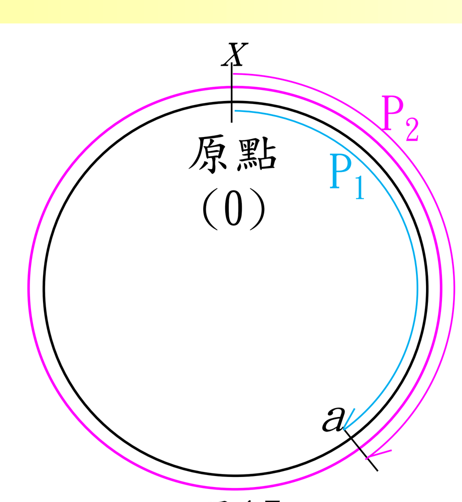


圖15

四、結論二：數名運動員在圓形跑道上以互不相同的均速跑步時的相遇情形

(一)數名運動員與P_1同時從原點或同向或反向出發，且在a點相遇，其距離依序為{a、$x-a$、$x+a$、$2x-a$、$2x+a$、…、$2bx-a$、$2bx+a$}。

(二)令S_2＝{a、$x-a$、$x+a$、$2x-a$、$2x+a$、…、$2bx-a$、$2bx+a$}，則從S_2中任取k個數，即為k名運動員同時從原點或同向或反向出發，且在a點相遇的情形。

(三)當S_2由a點跑到2a點時，由於跑步的時間多了一倍，所以所有的運動員所跑的距離也會多一倍，其跑者的距離依序為{2a、$2x-2a$、$2x+2a$、$4x-2a$、$4x+2a$、…、$4bx-2a$、$4bx+2a$ }，亦即這k名運動員第一次同時在a點相遇後，會在2a點再次相遇。

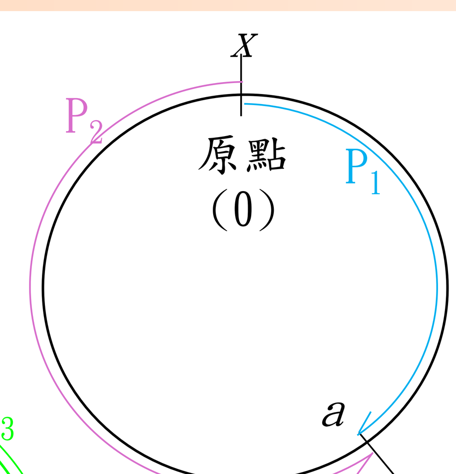


圖16

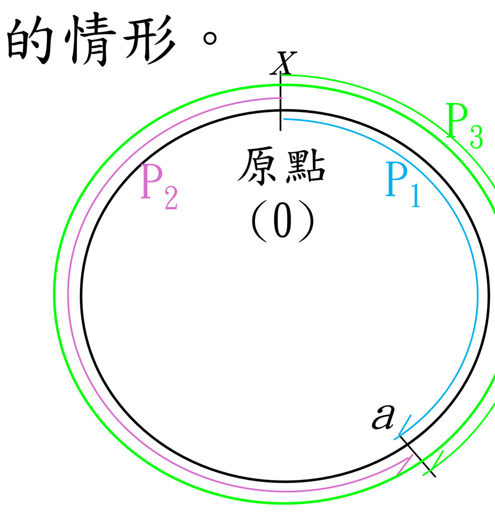


圖17

研究三：在直線跑道上給定數名運動員的速率比，探討相遇的情形

給定k名運動員的速率比為V_1：V_2：V_3⋯：V_k時，這k名運動員在什麼條件下會相遇。

一、給定k名運動員的速率比為V_1：V_2：V_3：⋯：V_k，對於每個V_i（i≥3），設V_i-V_1(或V_i+V_1)與V_1+V_2的最大公因數為$d_i>1$，且設D為d_3、d_4、d_5、⋯d_k的最大公因數，若D>1，則這k名運動員必會相遇。

說明：設$t=\frac{v_1+v_2}{D}$，對於每個V_i，則$(V_i-V_1)t=(V_i-V_1)\cdot\frac{v_1+v_2}{D}=\frac{v_i-v_1}{D}(V_1+V_2)$，

(或$(V_i+V_1)t=(V_i+V_1)\cdot\frac{v_1+v_2}{D}=\frac{v_i+v_1}{D}(V_1+V_2)$)，因為$d_i\mid V_i-V_1$(或 $d_i\mid V_i+V_1$)且 $D\mid d_i$，

所以$\frac{v_i-v_1}{D}$為正整數(或$\frac{v_i+v_1}{D}$為正整數)。

若D>1，則$(V_i-V_1)t$(或$(V_i+V_1)t$)為V_1+V_2的倍數，此時這k名運動員會在

$at=\frac{2v_1}{v_1+v_2}\cdot\frac{v_1+v_2}{D}x=\frac{2v_1}{D}x$相遇。

(1)若D是偶數，則d_3、d_4、⋯、d_k全是偶數，⇒$V_2\pm V_1$、$V_3\pm V_1$、⋯、$V_k\pm V_1$全是偶數，

⇒ V_1、V_2、⋯、V_k同為奇數或同為偶數(不合，因為V_1：V_2：V_3：⋯：V_k是最簡整數比)，

因此可設D為奇數。

(2)D不整除V_1：若D整除V_1，因為$D\mid V_1+V_2$ 且 $D\mid V_i-V_1$ ⇒ $D\mid V_2$、$D\mid V_3$、⋯⋯$D\mid V_k$，

⇒V_1：V_2：V_3：⋯：V_k不是最簡整數比，矛盾。

(3)由(1)、(2)知，$\frac{2v_1}{D}$不是整數，所以at不在0、x的位置。

(4)舉例說明　若V_1：V_2：V_3：V_4＝9：12：16：23 ⇒ 會相遇

$d_3=(V_3-V_1，V_1+V_2)=(7，21)=7$，$d_4=(V_4-V_1，V_1+V_2)=(14，21)=7$

⇒$D=(d_3，d_4)=(7，7)=7$　⇒ $at=\frac{2v_1}{D}x=\frac{18}{7}x=\frac{54}{21}x=2x+\frac{12}{21}x$，

⇒P_1、P_2、P_3、P_4會在$\frac{12}{21}x$相遇。

二、探討森棚教官數學題——飛到西飛到東

〈飛到西飛到東〉三隻速度不同的蜜蜂同時從蜂巢出發，在蜂巢與一朵花之間來回等速直線飛行，蜂巢與花的距離為1單位，一旦飛到大花馬上回頭再往蜂巢飛，碰到蜂巢又回頭往大花飛，如此周而復始。只考慮理想的狀態，不考慮加速度等等因素，飛得最慢的蜜蜂從蜂巢到花飛一趟要1分鐘。

Q1:若三隻蜜蜂速度比1：2：4，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

Q2:若三隻蜜蜂速度比1：3：9，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

Q3:若三隻蜜蜂速度比1:$\frac{3}{2}$:$\frac{9}{4}$，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

說明一：(1)Q1三隻蜜蜂速度比V_1：V_2：V_3＝1：2：4，相遇情形如圖18~圖21。

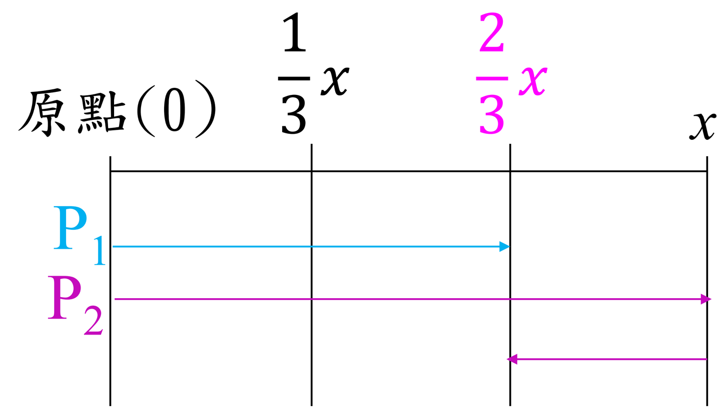


圖18

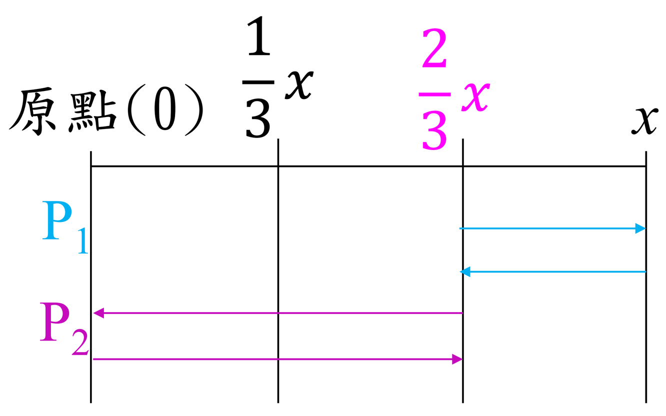


圖19

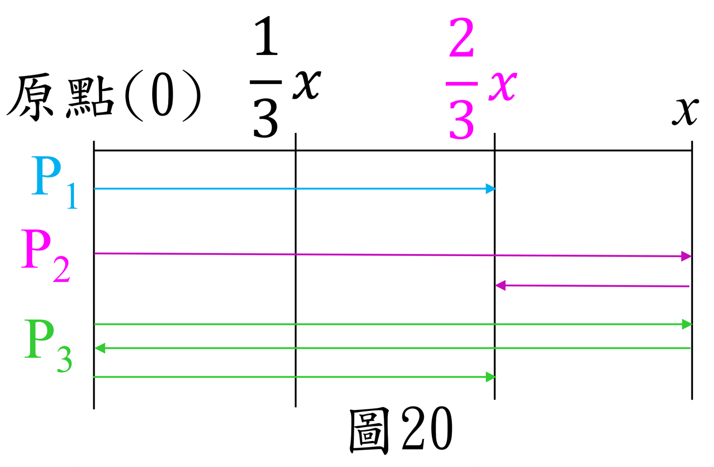


圖20

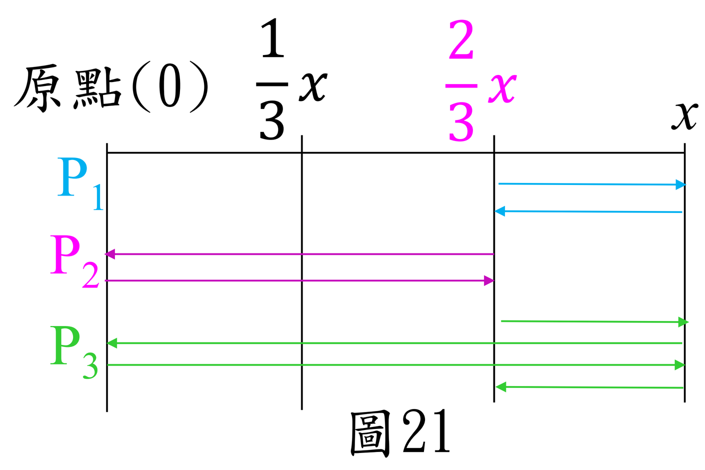


圖21

說明二：Q2、Q3做法省略，我們利用找到相遇的條件⇒$(V_3-V_1，V_1+V_2)\neq1$，

Q1：三隻蜜蜂速度比V_1：V_2：V_3＝1：2：4，⇒$(V_3-V_1，V_1+V_2)=(4-1，1+2)=3\neq1$

Q2：三隻蜜蜂速度比V_1：V_2：V_3＝1：3：9，⇒$(V_3-V_1，V_1+V_2)=(9-1，1+3)=4\neq1$

Q3：三隻蜜蜂速度比V_1：V_2：V_3＝1：$\frac{3}{2}$：$\frac{9}{4}$＝4：6：9，　⇒$(V_3-V_1，V_1+V_2)=(9-4，4+6)=5\neq1$

上述Q1~Q3的$(V_3-V_1，V_1+V_2)\neq1$，所以在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點。

三、結論三：在直線跑道上，給定k名運動員的速率比為V_1：V_2：V_3：⋯：V_k

對於每個V_i(i≥3)，設V_i-V_1(或V_i+V_1)與V_1+V_2的最大公因數為$d_i>1$，且設D為d_3、d_4、d_5、⋯d_k的最大公因數，若D>1，則這k名運動員必會相遇。

肆、討論：兩個有趣的現象

一、現象一：當給定的速率比全為奇數時，會相遇在$\frac{1}{2}x$

(一)例如a＝1、x＝2，則$2x-a=3$、$2x+a=5$、$4x-a=7$、$4x+a=9$、$6x-a=11$、$6x+a=13$、$8x-a=15$⋯(如圖26)，集合{1、3、5、7、9、11、13、15⋯}剛好符合集合S_1＝{a、$2x-a$、 $2x+a$、$4x-a$、$4x+a$、$6x-a$、$6x+a$、$8x-a$ ⋯}的形式，所以速率比全為奇數時，會在$\frac{1}{2}x$相遇。

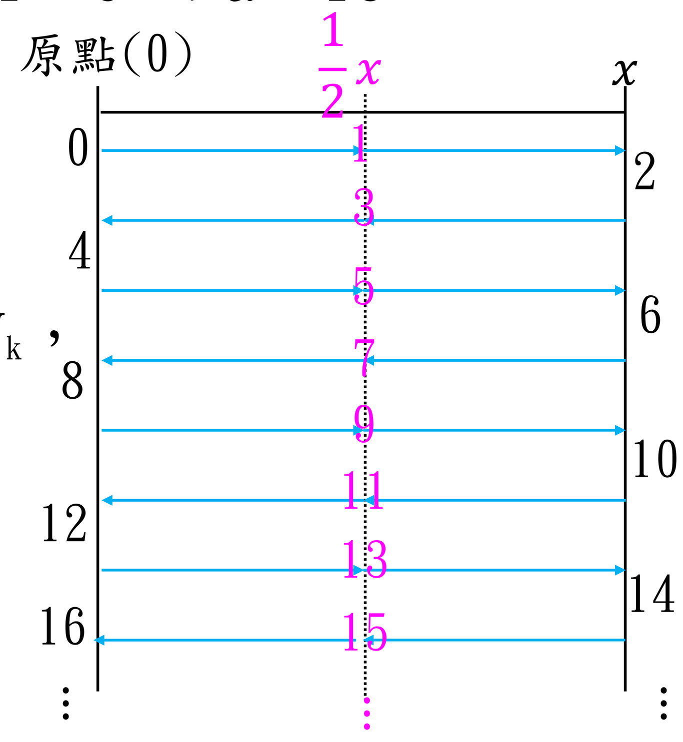


圖26

(二)將(一)的情形一般化：有k名運動員P_1、P_2、⋯、P_k，其速率比為V_1：V_2：⋯：V_k，設此連比為最簡整數比，且均為奇數，則$\frac{x}{2}$必是一個相遇點。

說明：當P_1跑了$\frac{V_1}{2}x$，此時其他人各跑了$\frac{V_1}{2}x\times\frac{V_2}{V_1}=\frac{V_2}{2}x$、$\frac{V_1}{2}x\times\frac{V_3}{V_1}=\frac{V_3}{2}x$、⋯、$\frac{V_1}{2}x\times\frac{V_k}{V_1}=\frac{V_k}{2}x$。因為$V_1$、$V_2$、$V_3$、⋯、$V_k$均為奇數，

所以$\frac{V_1}{2}x$、$\frac{V_2}{2}x$、⋯、$\frac{V_k}{2}x$均在同一點$\frac{x}{2}$。

二、現象二：當給定的速率比全為偶數時(排除3的倍數)，會相遇在$\frac{2}{3}x$

(一)例如a＝2、x＝3，則$2x-a=4$、$2x+a=8$、$4x-a=10$、$4x+a=14$、⋯(如圖27)，集合{2、4、8、10、14、16、20、22⋯}剛好符合集合S_1＝{a、$2x-a$、 $2x+a$、$4x-a$、$4x+a$、$6x-a$、$6x+a$、$8x-a$ ⋯}的形式，所以速率比全為偶數時(排除3的倍數)，會相遇在$\frac{2}{3}x$。

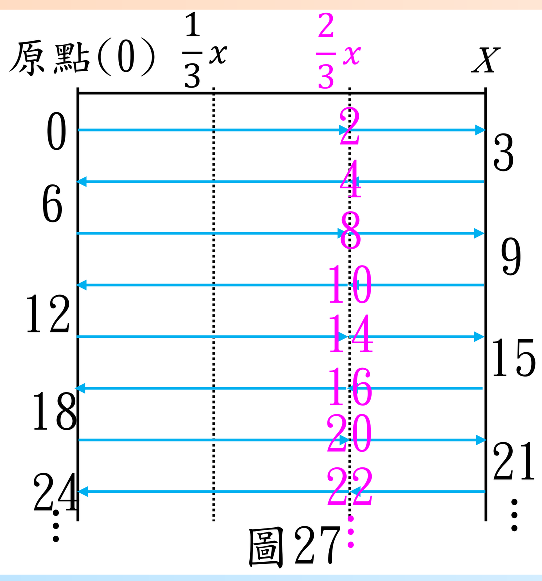


圖27

(二)將(一)的情形一般化：有k名運動員P_1、P_2、⋯、P_k，其速率比為V_1：V_2：⋯：V_k，這些V_i都不是3的倍數，則$\frac{2}{3}x$會是一個相遇點。

伍、參考文獻資料

[1]International Mathematics Tournament of Towns環球城市數學競賽 2008秋季賽 國中組 初級卷 第五題。

[2]游森棚 (2022 February) 11、特約專欄〈森棚教官數學題——飛到西飛到東〉 科學研習月刊第61卷第1期.

[3]李晨均、戴浚澔 <蜂擁而至> 中華民國第63屆中小學科學展覽會國小組 數學科

本研究所有圖片皆為作者與指導老師使用word繪製。