中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第三名

080401

方圓之間—魔錶 3 探秘

學校名稱：屏東縣屏東市仁愛國民小學

作者：	指導老師：
小六 邱宇辰	陳淑慧 鄭鈺清

關鍵詞：對稱性、立柱唯一性、同步轉

方圓之間—魔錶 3 探秘

摘要

本研究找出魯比克鐘最少步數解法，發現立柱影響連動範圍、鐘面組合數和同步轉解法：

一、立柱具有唯一性：用於考慮鐘面重疊範圍時，$2 \leq n \leq 8$用鐘面集合的交、差集計算；以阿達瑪矩陣積得到全部鐘面連動範圍。

二、對稱性是決定影響唯一圖的關鍵，考慮「雙重對稱」特性，得到 5 種唯一立柱組合。

三、組合數與起始狀態數：無對稱軸時，鐘面有 n 個的組合，組合數為4^n個，起始狀態數有4^n-1。有 1 個對稱軸，對稱軸上有 a 個鐘，共有 n 個鐘的鐘面組合，組合數為$\frac{4^n+2^{n+a}}{2}$個，起始狀態數有$\frac{4^n+2^{n+a}}{2}-1$個。

四、 鐘面同步轉在考慮立柱唯一性與鐘面對稱性，彼此獨立的鐘面僅有 14 個，同一指向 0 的最少步數一定是 7 步。

壹、 研究動機

學期初的時候在一個魔方比賽場合遇到友隊給我的魔錶(Rubik’s Clock)，我覺得這個玩具的轉法可以用矩陣表現，就著手探究起來。

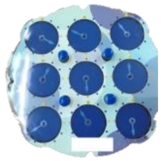


*圖 1 魯比克鐘

貳、研究目的

一、 找出所有異構鐘面組合及圖連通特性。

二、 立柱數量對鐘面連動範圍的影響及可影響的鐘面數量。

三、 研究 n 同步轉的條件為何以及同一指向 0 的最少次數。

參、 研究設備及器材

一、3×3魔錶。

二、USL 方塊、磁鐵版和強力磁鐵自製鐘面，如圖 2-1、圖 2-2-1 和 2-2-2。

三、筆記本、筆、平板(拍照用*)、電腦(繪圖和處理資料*)。

四、微軟 Excel 程式及 GeoGebra 程式。

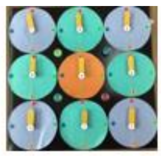


圖 2-1 自製 4 指向鐘面

圖 2-2-1 簡化鐘面(正)

圖 2-2-2 簡化鐘面

*資料來源：本研究使用照片和圖片皆研究者自行拍攝、繪製。

肆、研究過程及方法

研究魔錶的結構和操作方法之後，我採用以下釋義與方法說明：

一、 形似魔方的魔錶

魔錶又叫做魯比克鐘(Rubik's Clock, 以下簡稱 RCK)，我很好奇魔錶與傳統1 × 3 × 3魔術方塊(Rubik cube)有哪些差異。分析魔錶結構後發現，兩者相同之處是都有上、下兩面 9 個方塊/鐘面。兩者的差別在於魔方前後左右顏色不同，目標是將多色組合的混亂狀態轉動到六個面顏色一致。魔錶則是多了指針，目標是**將指向從混亂轉為一致**。

圖 3-1 **正面結構**　　圖 3-2 **背面結構**

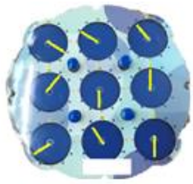


圖 3-3 **起始狀態**


圖 3-4 **完成狀態**

(一) 鐘面結構：RCK 上下兩面各有 9 個小鐘，指針與一般時鐘相同皆有 12 個方向。本研究以「mod 4」將鐘面訂為 4 個指向(0,1,2,3)，12 點鐘↑0，3 點鐘→1，6 點鐘↓2，9 點鐘←3。

(二) 立柱：共 4 個，詳圖 3-1，圍繞立柱的鐘面會同步旋轉。

(三) 鐘面編號有 3 種，角鐘面(代稱 C)、邊鐘面(代稱 E)和中心鐘面(代稱 M)。

(四) 遊戲規則：任意打散鐘面後，旋轉四個角的旋鈕，把指針的混亂狀態調整至全體指向 12 點鐘(即完成狀態)。圖 3-3 起始狀態

(五) 找出**最少步數**：所有非完成狀態的其他狀態都可以當作起始狀態。本研究在找出從指針混亂狀態(圖例 3-3)到全部鐘面皆指向 0(即 12 時，如圖 3-4)的最少步數。

二、 解釋名詞

(一) 對稱軸：包含將 RCK 翻面的 *Flip*，再細分為以 **x 軸**為旋轉軸的 ***x-Flip***、以 **z 軸**為旋轉軸的 ***z-Flip*** 兩種，還有以 **y 軸**為旋轉軸但**不翻面**的 ***y-turn*** (詳右下圖 4)。

(二) 立柱狀態：以 *p*(*pins*)表示，1/0 表示有/無，以 4 元組(4-tuples)表現，(1,1,1,1)表示有 4 個立柱。

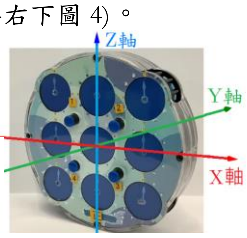


圖 4 **對稱軸**

(三) *C*(*p*)是p可完成的最大鐘面組合數。

(四) *I(influence)*：指連動範圍，和立柱一起連動的鐘面。

(五) *A(Area)*是影響範圍，轉動過程中全部被改變的鐘面。

(六) *ST*：同步轉(Simultaneous Turns)，正面轉動的同時，反面同步進行獨立的轉動。[p;u,d]表示立柱狀態為 p 時，正面立柱轉動 u 格、反面立柱轉動 d 格。

(七) 阿達瑪矩陣積(Hadamard product of matrix)：兩矩陣 A 和 B 的阿達瑪矩陣積$A \odot B = C$，第 i 列第 j 行的元素為$c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$，也就是將 A 和 B 同位置的元素相乘。

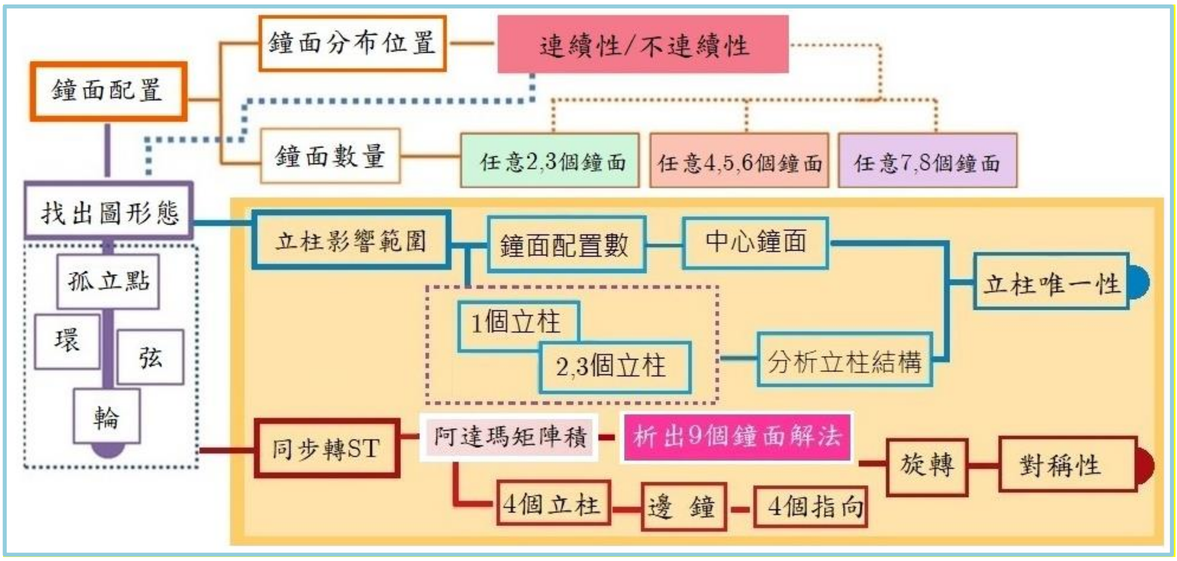
(八) 集合(set)：由元素(elements)組成的集合體，本研究中，元素為鐘面編號數字。

(九) 簡單圖(graph)有點(vertices)和邊(edges)、是有序對$G=(V,E)$[5]：

1. $\boldsymbol{K_n}$：n 點完全圖，點彼此相連；$\overline{\boldsymbol{K_n}}$：有 n 個孤立點，沒有邊。
2. $\boldsymbol{P_n}$：P 是路徑(path)，有 n 個點，n-1 條邊。
3. $\boldsymbol{C_n}$：表示 n 點圈(cycle)，有「起點和終點相同」的 n 點路徑。
4. $\boldsymbol{V_c^m}$表示 m 點環(ring)，包含 m 點圈C_m及其中連接不相鄰點的**弦**(chord)。
   $\boldsymbol{V_c^{max}}$表示最大環點數，$\boldsymbol{V_c^{min}}$表示最小環點數。
5. $\boldsymbol{W_n}$：表示 n+1 點輪，將$\boldsymbol{C_n}$的全部頂點都連接到一個新點/完全點後產生的圖。
6. $\boldsymbol{K_{m,n}}$：完全二分圖，有兩個大小為 m, n 的點集，兩點相鄰若且唯若屬於不同點集。

(十) 歐拉圖(Eulerian diagram)：點表示鐘面，邊表示立柱控制的連動鐘面範圍。以此形成的無向圖，該圖存在行跡包含的所有邊。

三、研究架構



我在研究過程中先找出所有鐘面的可能性，以坐標軸與圖特徵確認唯一圖的數量，同時發現對稱是改變鐘面狀態的方法。其後以交集和差集確認立柱數量對鐘面連動範圍。

最後，分析對稱軸與阿達瑪矩陣積分析 9 鐘面得到同步轉最少步數。

四、文獻回顧與討論

從國內外文獻發現，與 RCK 相關的研究多以群論切入，僅有兩篇解 12 指向解魔錶最少步數，一篇是用程式解 [6]，另有一篇是用線性代數建構矩陣 [7]。歷年數學科作品僅有 4 件魔方研究，早期有「魔術方塊解法的數學理論」(第 25 屆)[1]以線性代數中矩陣和向量等工具分析旋轉、組合運算(轉)等轉動法。近期有「簡析魔術方塊 2－魔術方塊公式解之分析」(第 54 屆) [4] 將各方格編號後以速解常見的「層先法」分析步驟通式。

第 47 屆國小組數學科作品—魔術「方塊」變「平面」[2]

第 51 屆國小組數學科作品—神奇的魔術方塊-餘數的應用與探討[3]

兩件國小組作品前者以摺紙探討色紙上「割線」數量及位置對可顯出面數的影響，後者以自創編碼探討重複同一組轉動後回到原位轉法，再以最小公倍數計算重複次數。

根據以上所述，本研究重點則在於析出異構 n 鐘面，以 G= (V, E)表示連通與不連通，探討連通性與立柱的關係。進一步探討 RCK 正、反面指向同一最少步數，以交集、聯集解出3 ≤鐘面數≤ 8的正反面指向同一最少步數，以阿達瑪矩陣積解出 9 鐘面指向同一性最少步數。

五、 找出所有異構鐘面組合及圖連通特性 (研究目的一)

(一) 分析所有鐘面組合可能性及結構

我以點代表鐘面，形成連續 3 鐘面(Continuous 3)與不連續 3 鐘面(Non-C3)，比對方法是把鐘面 9 視為座標中心，n 鐘面數放入座標中比對。以 1C2E 為例(圖 5)，以點表示鐘面、邊對稱軸、角對稱軸、斜角對稱軸，對應同構類型，得到 3 種唯一圖，分別命名為「邊連線 Side」、「中心連線 Central」和「對角連線 Diagnal」。

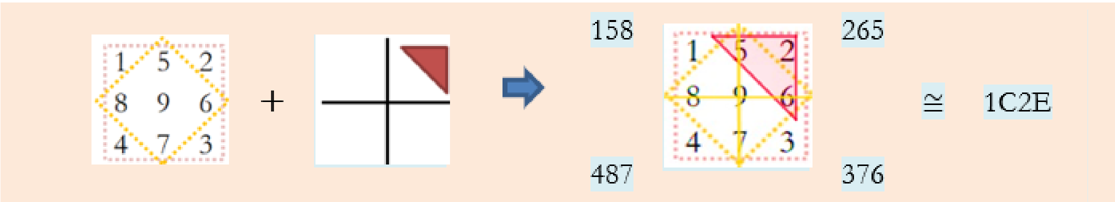
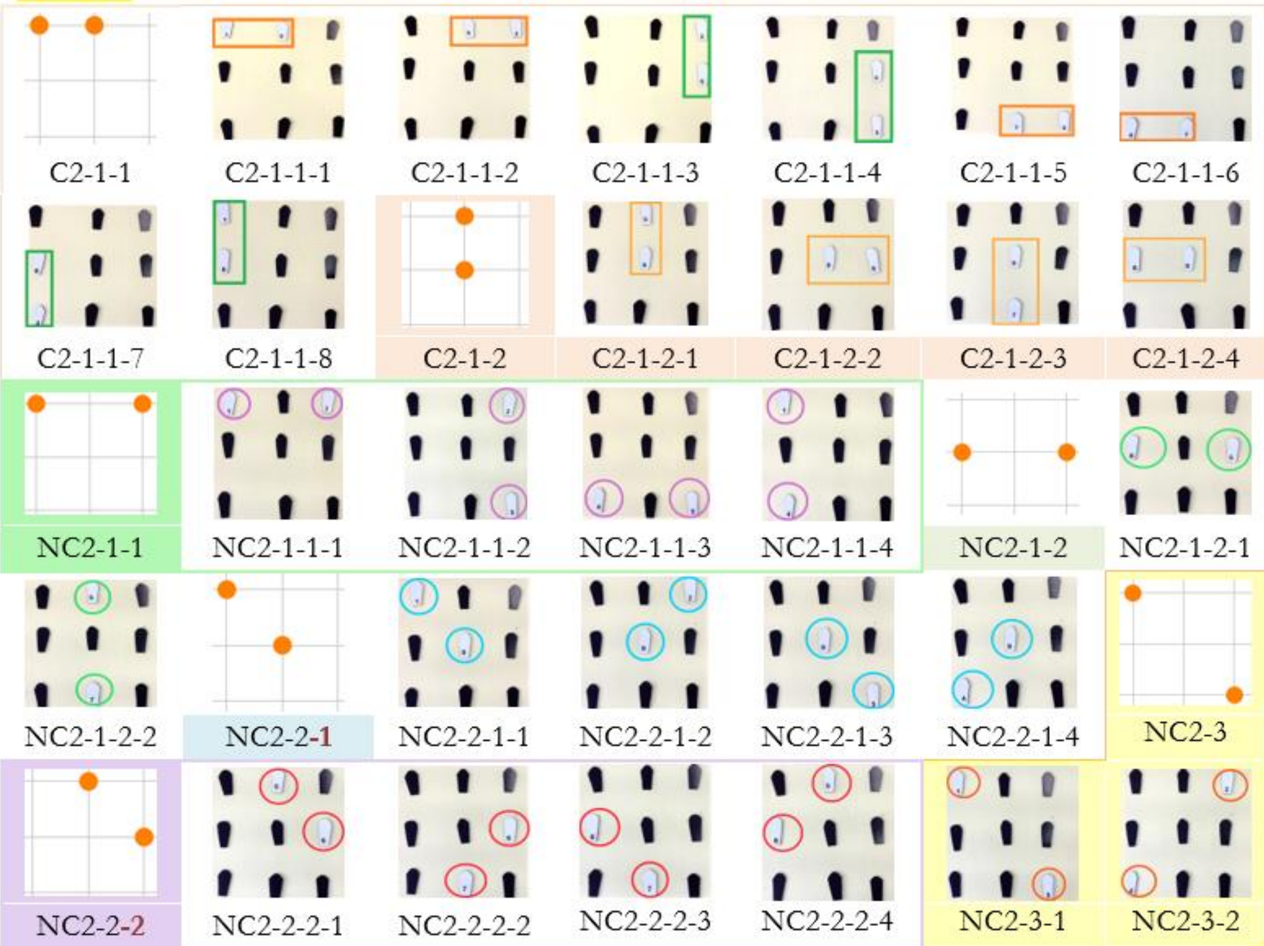
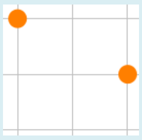


圖 5 **檢視異構的方法**

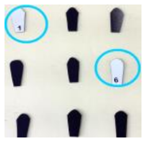
具體的鐘面配置如「1 邊鐘+2 角鐘」即 1E2C 視為 Side 同構；把「中心鐘+2 邊鐘」即 1M2E 視為 Central 同構；把「中心鐘+2 角鐘」即 1M2C 視為 Diagnal 同構。

2 個鐘面：鐘面組合分為連續鐘面 C2(Continuous 2)與不連續鐘面 NC2 (Non-C2)如下

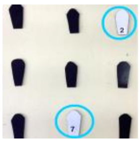




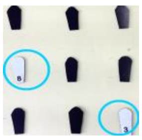
NC2-4



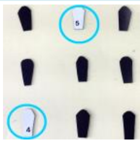
NC2-4-1



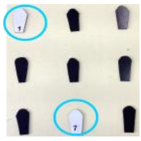
NC2-4-2



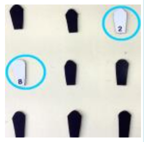
NC2-4-3



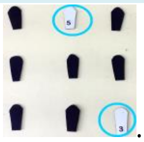
NC2-4-4



NC2-4-5



NC2-4-6



NC2-4-7

NC2-4-8

$$C_2^3=\frac{3\times 2}{2\times 1}=3$$

C2 x 軸位置

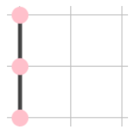
$$C_1^3=\frac{3\times 2}{1\times 2}=3$$

C2 y 軸位置

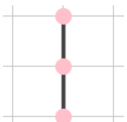
我把 NC2 依照鐘面相對位置，以鏡射、翻轉、平移分類成「相同類型」，再依角、邊、中心鐘的數目細分(即不考慮平移)變成**同構類型**，搭配坐標軸找出唯一圖得到以下結果。

1. **C2** 共有 12 種組合，有 8 種不包含中心鐘，和 **C2-1-1** 同構；另外 4 種包含中心鐘，和 C2-1-2 同構。C2 的可能擺放位置，x 軸位置有$C_2^3=3$種，但是「左、右」的組合會不連續；y 軸則有$C_1^3=3$種可能擺放位置；而 C2 可以是「2×1」或是「1×2」兩種擺法，故 C2 共有$(3-1)\times 3\times 2=12$種組合。
2. **NC2 中，NC2-1** 有 6 種組合，其中，4 種由 2 個角鐘組成，和 NC2-1-1 同構；另外 2 種是相對的邊鐘，和 NC2-1-2 同構。NC2-1 在棋盤上的可能擺放位置，x 軸位置有$C_2^3=3$種，但是「左、中」及「中、右」兩組合會成為連續圖 C2；y 軸則有$C_1^3=3$種可能擺放位置；此 NC2 可以是3×1「橫放」或是1×3「直放」兩種擺法，故 NC2-1 共有$(3-2)\times 3\times 2=6$種組合。
3. **NC2-2** 的「最小外接矩形」為2×2，共有 8 種組合，4 種為「中心+角鐘」的組合，和 NC2-2-1 同構；另外 4 種是兩個相鄰的邊鐘，和 NC2-2-2 同構。NC2-2 的可能擺放位置，x 軸位置有$C_2^3=3$種，可是「左、右」的組合外接矩形是$n\times 3$，形成異構圖；y 軸位置有$C_2^3=3$種，但「上、下」的組合外接矩形是$3\times m$，也會形成異構圖$(1\le n,m\le 3)$。xy 組合確定後，形成一個2×2的範圍，NC2-2 在此範圍內的擺放可能性有$4\times 2=8$種，但「**旋轉$180°$**」及「**沿著$45°$對角連線翻轉**」都不會改變 NC2-2，因此不同的擺放法剩下$8\div(2\times 2)=2$種，故 NC2-2 共有$(3-1)\times(3-1)\times 2=8$種可能組合。
4. **NC2-3** 只有 2 種組合，2 種屬於同一個同構類型，都是由兩個相對的角鐘組成的。NC2-3「最小外接矩形」為3×3，和鐘面範圍相同，所以不需考慮平移。翻轉的作用和旋轉$90°$一樣，所以也不納入考慮。但 NC2-3 如果旋轉$180°$，就會變回原樣，因此只有$\frac{360°\div 90°}{360°\div 180°}=\frac{4}{2}=2$種組合。
5. **NC2-4** 有 8 種組合，都是一個角鐘和一個不相鄰的邊鐘，所以全部屬於同一個同構類型。NC2-4 中，每個角鐘可以配對 2 個邊鐘，因此共有$4\times 2=8$種組合。

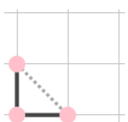
3 個鐘面：全部鐘面組合有 16 個，5 個連續鐘面和 11 個不連續鐘面；鐘面之間的縱橫連接以實線/邊表示，對角連接以虛線表示(鐘面組合 C3-1-1~NC3-8)。



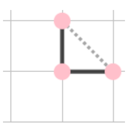
C3-1-1



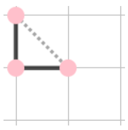
C3-1-2



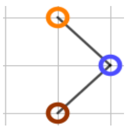
C3-2-1



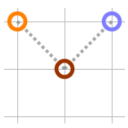
C3-2-2



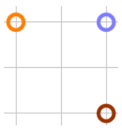
C3-2-3



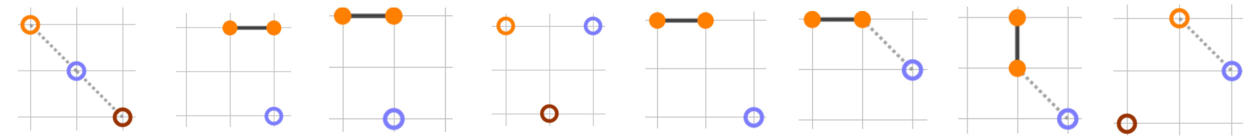
NC3-1-1



NC3-1-2

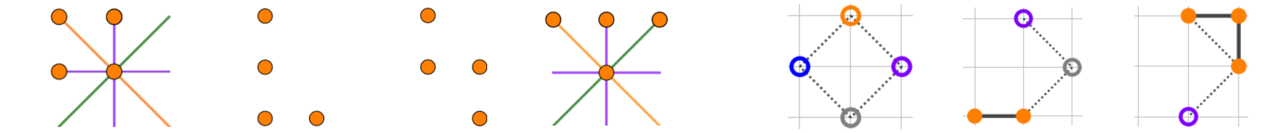


NC3-2

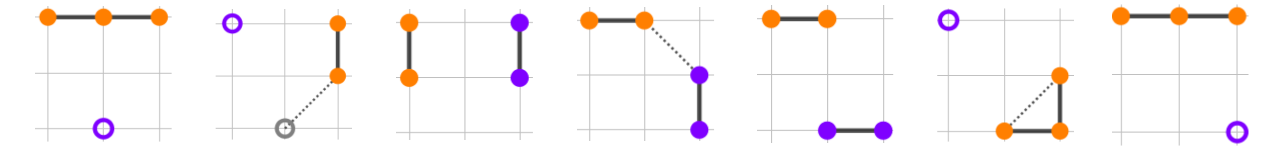


NC3-3	NC3-4-1	NC3-4-2	NC3-5	NC3-6	NC3-7-1	NC3-7-2	NC3-8

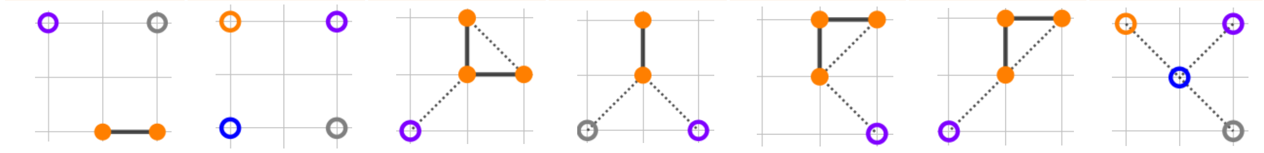
4 個鐘面：全部配置有 21 個，4 個連續鐘面和 17 個不連續鐘面(鐘面組合 C4-1~NC4-17) 。



C4-1	C4-2	C4-3	C4-4	NC4-1	NC4-2	NC4-3

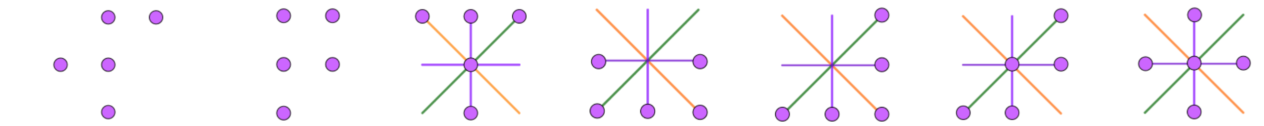


NC4-4	NC4-5	NC4-6	NC4-7	NC4-8	NC4-9	NC4-10

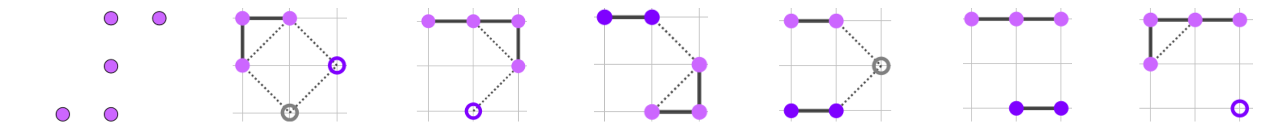


NC4-11	NC4-12	NC4-13	NC4-14	NC4-15	NC4-16	NC4-17

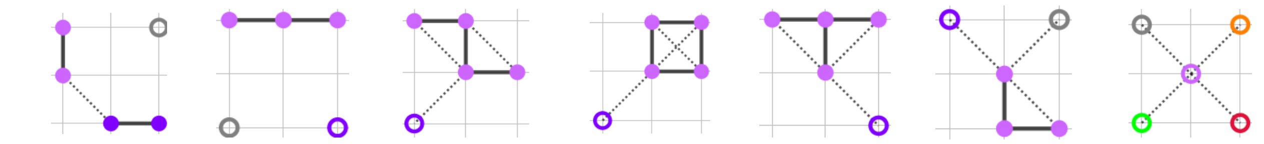
5 個鐘面：有 8 個連續鐘面和 13 個不連續鐘面(鐘面組合 C5-1~NC5-13) 全部有 21 個。



C5-1	C5-2	C5-3	C5-4	C5-5	C5-6	C5-7
$V_C^5=1$	$V_C^5=2$	$V_C^4=1$	$V_C^3=2$	$V_C^3=1$	$V_C^5=1$	$V_C^5=4$

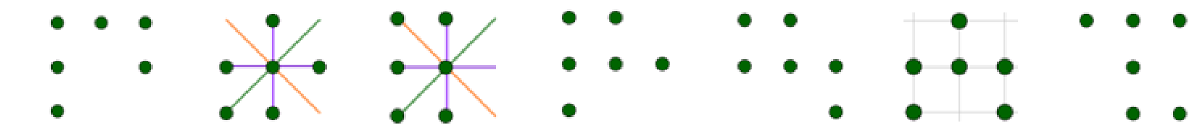


C5-8	NC5-1	NC5-2	NC5-3	NC5-4	NC5-5	NC5-6
$V_C^3=2$	$V_C^5=1$	$V_C^3=1$	$V_C^3=1$	$V_C^{max}=0$	$V_C^{max}=0$	$V_C^3=1$

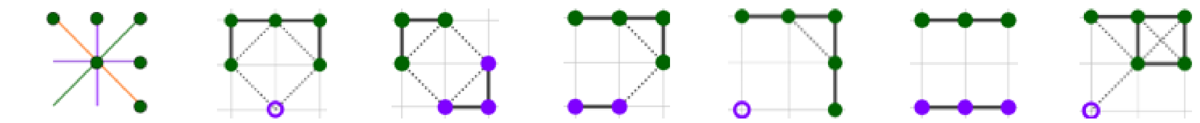


NC5-7	NC5-8	NC5-9	NC5-10	NC5-11	NC5-12	NC5-13
$V_C^{max}=0$	$V_C^{max}=0$	$V_C^4=1$	$V_C^4=3$	$V_C^4=1$	$V_C^3=1$	$V_C^{max}=0$

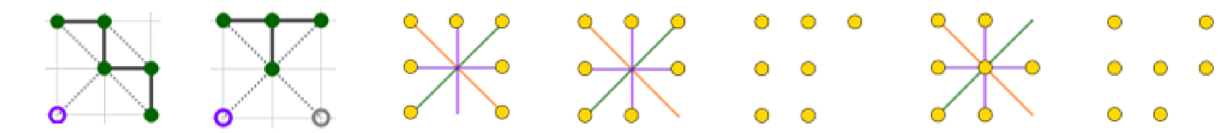
6、7、8 鐘面：6 個鐘面全部配置有 16 個，8 個連續鐘面和 8 個不連續鐘面；7 個鐘面全部配置有 8 個，7 個連續鐘面和唯一 1 個不連續鐘面如下；8 個鐘面只有 3 個連續鐘面，沒有不連續的鐘面組合。(圖 C6-1~C8-3)



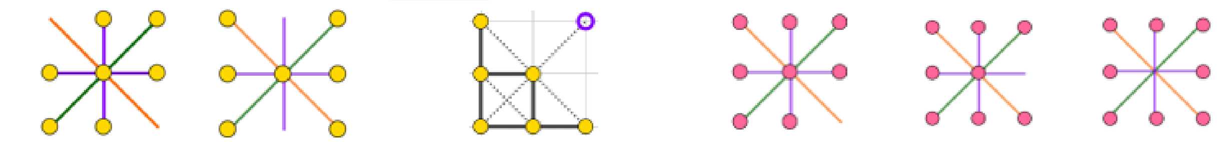
C6-1	C6-2	C6-3	C6-4	C6-5	C6-6	C6-7
$V_C^3 = 2$	$V_C^6 = 5$	$V_C^6 = 4$	$V_C^6 = 1$	$V_C^6 = 1$	$V_C^6 = 1$	$V_C^4 = 1$



C6-8	NC6-1	NC6-2	NC6-3	NC6-4	NC6-5	NC6-6
$V_C^6 = 1$	$V_C^6 = 1$	$V_C^6 = 1$	$V_C^3 = 1$	$V_C^3 = 1$	$V_C^{max} = 0$	$V_C^5 = 2$



NC6-7	NC6-8	C7-1	C7-2	C7-3	C7-4	C7-5
$V_C^5 = 1$	$V_C^4 = 1$	$V_C^3 = 2$	$V_C^7 = 1$	$V_C^7 = 2$	$V_C^7 = 6$	$V_C^7 = 1$

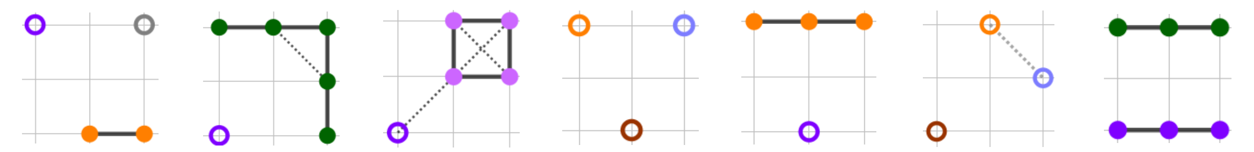


C7-6	C7-7	NC7-1	C8-1	C8-2	C8-3
$V_C^7 = 6$	$V_C^4 = 2$	$V_C^6 = 1$	$V_C^8 = 7$	$V_C^8 = 1$	$V_C^8 = 1$

(二) 以孤立點、弦、環、輪找出異構圖

1. 圖——不連通

不孤立點只出現在非連通圖，因為它的度序列為 0。n 點圖不可能有 n-1 個孤立點，因為 n-1 個孤立點表示最後一個點也是孤立點。

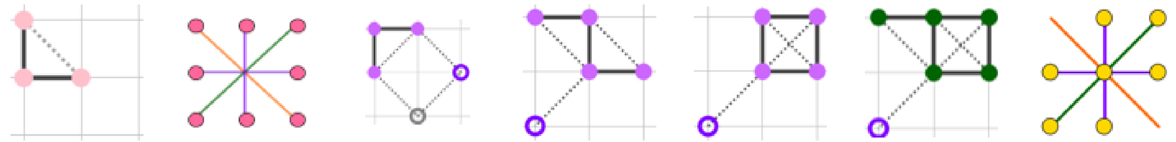


NC4-11	NC6-4	NC5-10	NC3-6	NC4-4	NC3-9	NC6-5

2. 圖——連通

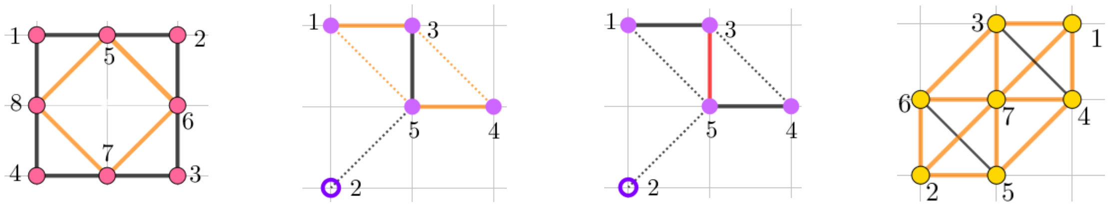
環是一個起點和終點相同的封閉迴路，如 C3-5。弦是連接環上兩個不相鄰點的邊，如 NC5-1。輪是將環上每個點都連接到一個新點的圖，如 C7-6。

環	環	弦	弦	輪	輪	輪



C3-5	C8-3	NC5-1	NC5-9	NC5-10	NC6-6	C7-6

C8-3 有 3 點環(1,5,8),(2,5,6),(3,6,7),(4,7,8)，V_C^4有(5,6,7,8)，V_C^5有(1,5,6,7,8),(2,6,7,8,5),(3,7,8,5,6),(4,8,5,6,7)，V_C^6有(1,5,2,6,7,8),(2,6,3,7,8,5),(3,7,4,8,5,6),(4,8,1,5,6,7),(1,5,6,3,7,8),(2,6,7,4,8,5)，V_C^7有(1,5,2,6,3,7,8),(2,6,3,7,4,8,5),(3,7,4,8,1,5,6),(4,8,1,5,9,6,7)，V_C^8有(1,2,3,4,5,6,7,8)，共 20 種環。



C8-3 環種類　　NC5-9 環種類　　NC5-9 弦種類　　C7-6 輪種類

本研究中$\boldsymbol{V_C^{min}}$ =3，隨著**鐘面數**≥ **4**增加，會出現環套環，即「**弦**」的構造[5]；

$$\mathbf{3 \le V_C^m \le 8}$$

$$\mathbf{4 \le W_n \le 7}$$

六、 立柱數量對鐘面連動範圍的影響及可影響的鐘面數量(研究目的二)

(一) 立柱唯一性

若不考慮對稱性，立柱有$2^4-1=15$種狀態：(1,0,0,0)、(1,0,0,1)、(1,0,1,0)、(1,0,1,1)、(1,1,0,0)、(1,1,0,1)、(1,1,1,0)、(1,1,1,1)、(0,0,0,1)、(0,0,1,0)、(0,0,1,1)、(0,1,0,0)、(0,1,0,1)、(0,1,1,0)、(0,1,1,1)。若考慮對稱性的話，必須去除旋轉、鏡射後重複的立柱狀態，會得到「5 種唯一立柱」：(1,0,0,0)、(1,1,0,0)、(1,0,1,0)、(1,1,1,0)、(1,1,1,1)。

(1,0,0,1)	(1,1,0,0)	(1,1,1,0)	(1,1,0,1)	(1,0,1,1)	(1,0,0,0)	(0,1,0,0)
2 實 2 虛立柱		3 實 1 虛立柱			1 實 3 虛立柱	
● ○ ● ○	● ● ○ ○	● ● ○ ●	● ● ● ○	● ○ ● ●	● ○ ○ ○	○ ● ○ ○
圖 6-1~2		圖 6-3、6-4、6-5			圖 6-6~6-7	

【對稱中的對稱】

(1,0,1,0)除了斜45°的翻轉，是「**第一級對稱**」以外，若是縱、橫翻轉，再旋轉90°，也會維持原樣，這就是翻、旋轉並用的「**第二級對稱**」。我發現，在有對稱性的前提下，翻轉和旋轉是可以達到相同結果。

表 1 **第二級對稱**

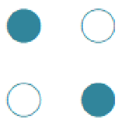
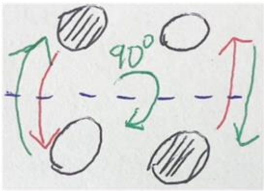
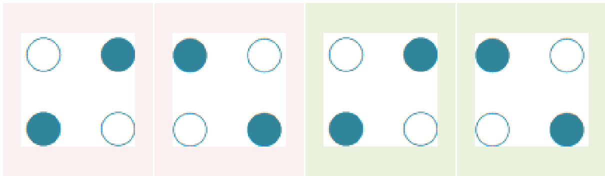
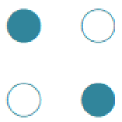
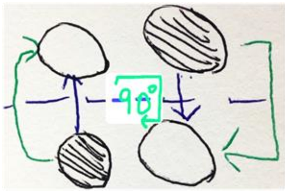
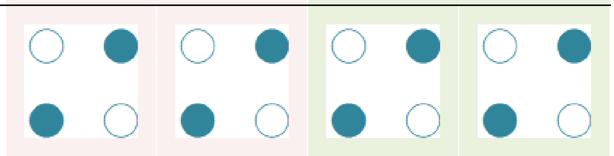
 (1,0,1,0)		 橫向翻轉→旋轉90° 縱向翻轉→旋轉 90°
 (1,0,1,0)		 橫向翻轉 旋轉90° 縱向翻轉 旋轉 90°

圖 7 **變換方式**　　　　圖 8 **縱、橫翻轉對照旋轉**

上表上排是**依序變換**，下排是**分開變換**。(1, 0, 1, 0) 有180°旋轉對稱，將其翻轉、旋轉後，與 RCK 翻面的效果相同且互補，是五個唯一立柱中，唯一有第二級對稱的狀態。

(二)立柱連動範圍

將各立柱狀態的連動範圍以圖呈現，黃色為 1、白色為 0、立柱為藍色。反面為正面沿著 Z 軸旋轉(z-Flip)後的結果，因此討論立柱時只考慮正面結果。

1.**立柱 1⇆3**：正面 1 反面 3 的影響範圍，共有 4 種狀態，4 種的差異只有旋轉角度，相對鐘面位置皆相同。

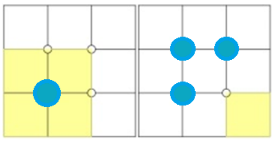
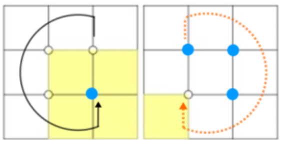
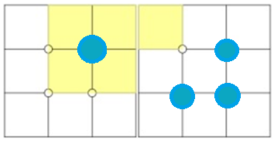
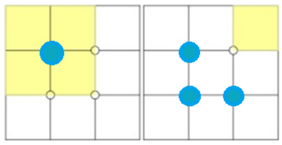
狀態 1	狀態 2	狀態 3	狀態 4
			
(10,0,0,1) ⇆(1,1,1,0)	(0,0,1,0) ⇆(1,1,0,1)	(0,1,0,0) ⇆(1,0,1,1)	(1,0,0,0) ⇆(0,1,1,1)

圖 9　**立柱 1⇆3 影響範圍**

單一個立柱的影響範圍就是周圍的 4 個鐘面，及背面對應的角鐘面。當鄰近立柱的齒輪轉動時，會帶動正、反角鐘面，正角鐘面再透過立柱影響鄰近 3 個鐘面。

2. **立柱 2⇆2**：正面 2 反面 2 的影響範圍

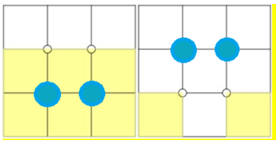
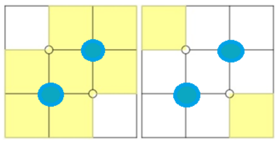
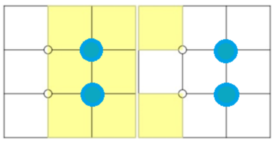
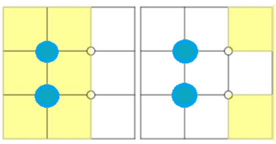
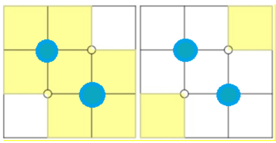
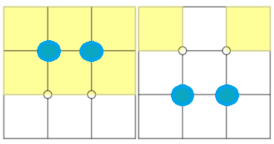
 10-1_(0,0,1,1) ⇆(1,1,0,0)	 10-2_(0,1,0,1) ⇆(1,0,1,0)	 10-3_(0,1,1,0) ⇆(1,0,0,1)
 10-4_(1,0,0,1) ⇆(0,1,1,0)	 10-5_(1,0,1,0) ⇆(0,1,0,1)	 10-6_(1,1,0,0) ⇆(0,0,1,1)

圖 10 **立柱 2⇆2 影響範圍**

相鄰的兩個立柱影響範圍是周邊 6 個鐘加背面兩個鐘，對角的兩個立柱因重疊較少，影響範圍較大，為正面 7 個鐘加背面 2 個鐘。

3. **立柱 3⇆1**：正面 3 反面 1 的影響範圍

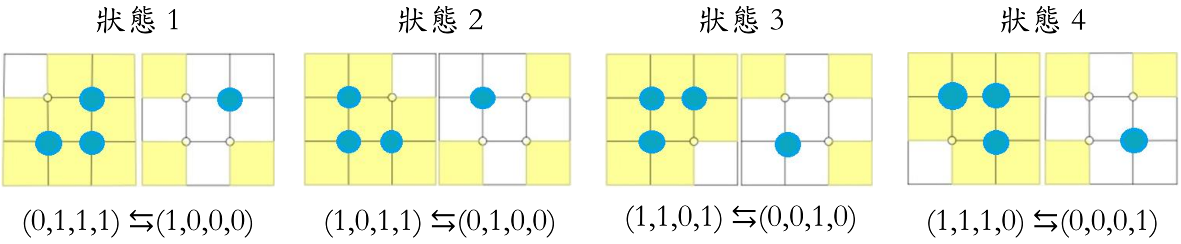


圖 11 **立柱 3⇆1 的影響範圍**

這個狀態包含正面除了一個角鐘面外的所有鐘及背面 3 個角鐘面。

4. **立柱 4⇆0**：正面(1,1,1,1)反面(0,0,0,0)的影響範圍

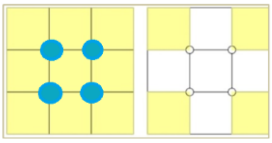


圖 12 **全立柱的影響範圍**

正 4⇆0 ，反 0⇆4
4 個立柱影響範圍含括正面每一個鐘和背面所有角鐘面，當所有正面指針指向皆相同時，可用來將全部指針指向 12 時。

當正面角鐘面是 0, 1, 2, 3，反面角鐘面會是 0, 3, 2, 1，**角鐘面連動使指向永遠相同**。

立柱具有改變鐘面的決定性，立柱的對稱軸也會存在於鐘面範圍(如圖 10-1)，左右鏡像對稱同時存在於立柱與連動範圍；成群立柱成單一狀態，狀態間的對稱使其同構，故有 5 個唯一立柱，即立柱唯一性。

(三) 多重連動範圍的分析

1. 「重疊」產生交集

當兩個不同的立柱狀態A和B的影響範圍重疊時，從完成狀態進行[A:1]和[B:1]後再進行[A + B:-1]，也就是兩個立柱狀態的聯集往負方向轉動一格後，「非 0 鐘面」即重複範圍。

第 1 種

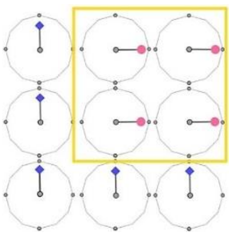


圖 13-1 **[A:1]**

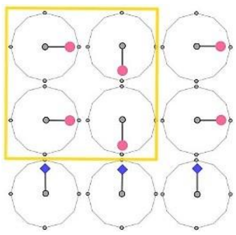


圖 13-2 **[B:1]**

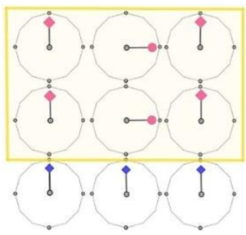


圖 13-3 **[A + B:-1]**

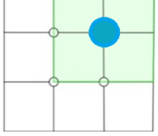


圖 13-4 **I(A)**

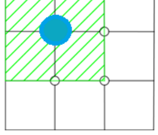


圖 13-5 **I(B)**

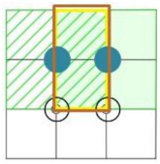


圖 13-6 **I(A)⨀I(B)**

$A = (0,1,0,0), B = (1,0,0,0)$

$$I(A) \odot I(B)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0\times 1 & 1\times 1 & 1\times 0 \\ 0\times 1 & 1\times 1 & 1\times 0 \\ 0\times 0 & 0\times 0 & 0\times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第 2 種

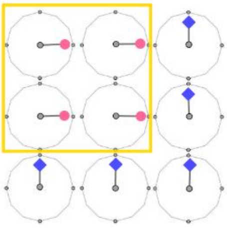


圖 14-1 **[*A*:1]**

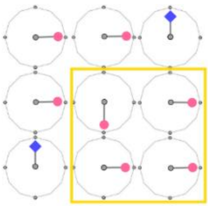


圖 14-2 **[B:1]**

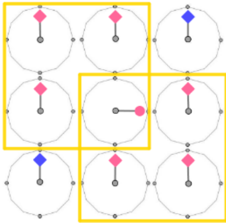


圖 14-3 **[A + B:-1]**

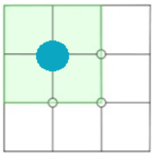


圖 14-4 **I(*A*)**

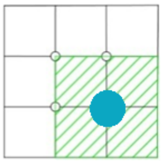


圖 14-5 **I(*B*)**

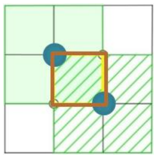


圖 14-6 **I(*A*)⨀I(*B*)**

$$A=(1,0,0,0), B=(0,0,1,0)$$

$$I(A)\odot I(B)$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times 0&1\times 0&0\times 0\\1\times 0&1\times 1&0\times 1\\0\times 0&0\times 1&0\times 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

1 號立柱影響左上角 4 個鐘面(圖 14-4)，3 號立柱影響右下角 4 個鐘面(圖 14-5)，兩個範圍互相位於斜對角，形成(1,0,1,0)如表 1 的狀態，檢視鐘面重疊範圍交集為中心鐘面。

第 3 種

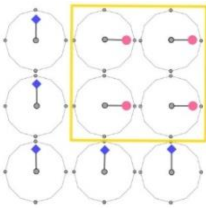


圖 15-1 **[*A*:1]**

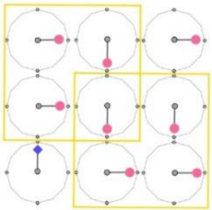


圖 15-2 **[B:1]**

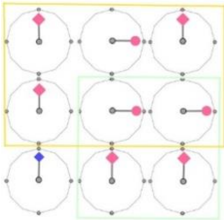


圖 15-3 **[A + B:-1]**

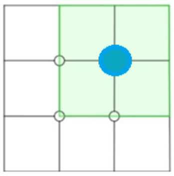


圖 15-4 **I(*A*)**

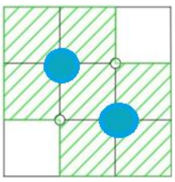


圖 15-5 **I(*B*)**

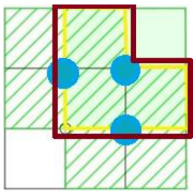


圖 15-6 **I(*A*)⨀I(*B*)**

$$A=(0,1,0,0), B=(1,0,1,0)$$

$$I(A)\odot I(B)$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\times 1&1\times 1&1\times 0\\0\times 1&1\times 1&1\times 1\\0\times 0&0\times 1&0\times 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

I(*B*)未包含右上方 2 號角鐘面的緣故，I(*A*)和 I(*B*)的重疊範圍即 I(*A*)－角鐘面。

儘管 I(*A*)和 I(*B*)的影響範圍也包含背面的角鐘面，但沒有重疊，進行完這 3 個轉動後會恢復指向 12。兩矩陣的阿達瑪積也會成為重複範圍的矩陣。由於矩陣內的元素都是 0 和 1，這兩個數字的乘法組合只有 1×1，故只有A和B重疊的區域會是 1，其他的元素都是 0。

鐘面集合的交集和阿達瑪矩陣積都可以用來計算重疊的連動範圍。

以第 1 種$A=(0,1,0,0), B=(1,0,0,0)$、第 2 種$A=(1,0,0,0), B=(0,0,1,0)$、第 3 種$A=(0,1,0,0), B=(1,0,1,0)$為例。依序處理[*A*:1] →[B:1] → [A + B:-1]，在鐘面上只會轉動交集，因此只要兩集合可在鐘面上被立柱析出，其交集也可以在鐘面上呈現。

2. 「突出」產生差集

兩個影響範圍A和B除了相互重疊外，也可能A完全包含在B內，兩者交集為A，也就是$I(A) \odot I(B) = I(A)$。此時，B和A的差集$B \backslash A$ [9]，也就是在B內但不在A內的鐘面，可由從完成狀態做[B:1]和[A:-1]後，非 0 的鐘面所得到。第 1 種$A = (0,1,0,0), B = (1,1,0,0)$、第 2 種$A = (0,1,0,0), B = (1,1,1,0)$、第 3 種$A = (0,1,0,0), B = (0,1,0,1)$。

第 1 種

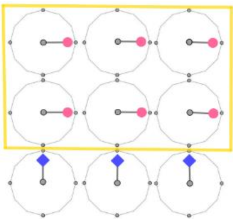


圖 16-1 **[*B*:1]**

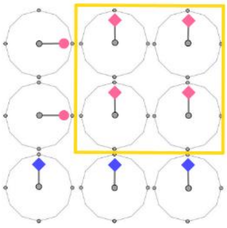


圖 16-2 **[*A*:-1]**

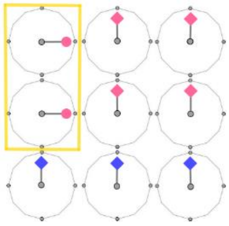


圖 16-3 **差集**

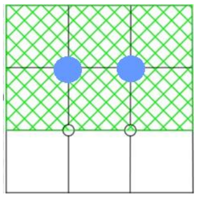


圖 16-4 **(*B*)**

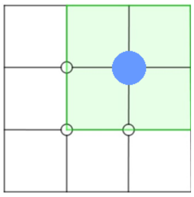


圖 16-5 **I(*A*)**


圖 16-6 **差集**

$A = (0,1,0,0), B = (1,1,0,0)$

$I(B) - I(A)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-0 & 1-1 & 1-1 \\ 1-0 & 1-1 & 1-1 \\ 0-0 & 0-0 & 0-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

差集可由矩陣間相減所得到。由於A完全包含在B內，不會出現「在A內但不在B內」，0-1 得到-1 的情況。我發現如果 A 維持$(0,1,0,0)$，但 B 改為$(1,1,1,0)$，則這個情況和上一個類似，但B多了一個立柱和兩個鐘面。由於這兩個鐘面都不屬於A，因此差集變大。

A位於B正中央，將B分成兩塊，因此不連續鐘面也能以差集同步改變。

第 2 種

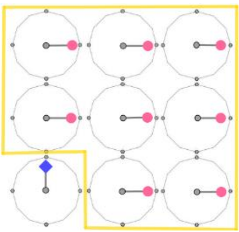


圖 17-1 **[*B*:1]**

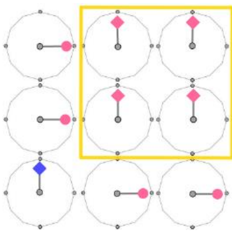


圖 17-2 **[*A*:-1]**

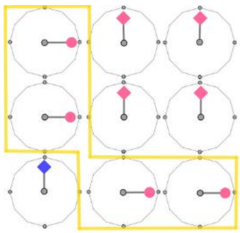


圖 17-3 **差集**

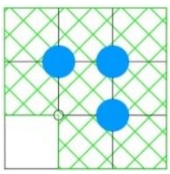


圖 17-4 **I(*B*)**

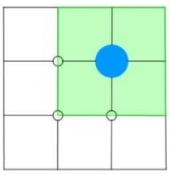


圖 17-5 **I(*A*)**

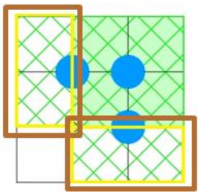


圖 17-6 **差集**

$A = (0,1,0,0), B = (1,1,1,0)$

$B - A$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-0 & 1-1 & 1-1 \\ 1-0 & 1-1 & 1-1 \\ 0-0 & 1-0 & 1-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

第 3 種

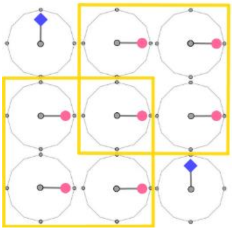


圖 18-1 **[*B*:1]**

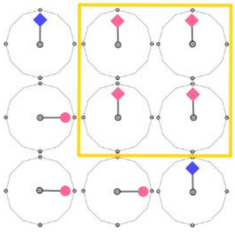


圖 18-2 **[*A*:-1]**

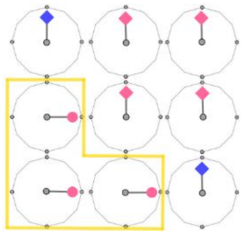


圖 18-3 **差集**

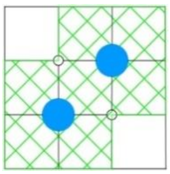


圖 18-4 **I(*B*)**

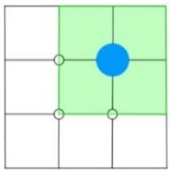


圖 18-5 **I(*A*)**

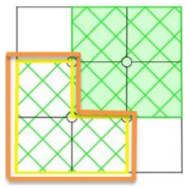


圖 18-6 **差集**

$A = (0,1,0,0), B = (0,1,0,1)$

$B - A$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0-0 & 1-1 & 1-1 \\ 1-0 & 1-1 & 1-1 \\ 1-0 & 1-0 & 0-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

因為B的正立柱呈斜對角，含括 7 個鐘面而不是 6 個，因此去掉A後，剩下的差集有 3 個鐘面，左下角鐘面將其他兩個邊鐘面連接起來，不會被A切斷，所以差集是連續的。

七、 n 同步轉的條件及指向同一的最少步數(研究目的三)

RCK 上可以同時進行「正面立柱」及「背面立柱」的轉動：18 個鐘面，有 4 個角鐘面互相連動，因此有 14 個獨立數值。由於 **1 次轉動可以將 1 個鐘面對齊**，因此需要 14 個轉動。**正、反面同時轉動需$14 \div 2 = 7$個同步轉(ST)**。以下為 1 種起始狀態，以**數值 mod4** 呈現。

表 2 **同步轉編碼**

正面/反面鐘面符號			計算結果			數值 mod4		
a/-b 左上-角鐘	**e/j** 上-邊鐘	b/-a 右上-角鐘	0/1	1/1	3/0	a=0 -a=0	b=3 -b=1	c=2 -c=2
h/k 左-邊鐘	i/n 中心鐘	f/m 右-邊鐘	2/0	1/2	3/0	d=1 -d=3	e=1 j=1	f=3 m=0
d/-c 左下-角鐘	g/l 下-邊鐘	c/-d 右下-角鐘	1/2	1/3	2/3	g=1 l=3	h=2 k=0	i=1 n=2

【發現】具正反關係值：(a,-a)、(b,-b)、(c,-c)、(d,-d)。獨立存在值：e, f, g, h, i.j, k, l, m, n。數值分析例如[0111; g-f-d-m/n-l] ⟺(g-f-d-m/n-l)= (1-3-1-0/2-3)=(-3,-1) ⟺ [1011; (-3,-1)]mod 4=(1,3)，以 9 個鐘面的 7 個同步轉例，**色框**表示**角鐘連動**。為了使正反面同步，我想到利用正面 ST 數值使用加法、反面使用減法得到第 1 次數值後再同餘值：

(一) **同步轉 1-ST 1** [1011; g-f-d-m/n-l]，轉動計算正面$g-f-d-m=-3$；反面$n-1=-1$

正面 1011		
a+**g-f-d-m**=0+(-3)	e+**g-f-d-m**=1+(-3)	b+**n-l**=3+(-1)
h+g-f-d-m=2+(-3)	i+**g-f-d-m**=1+(-3)	f+**g-f-d-m**=3+(-3)
d+**g-f-d-m=1+(-3)**	g+**g-f-d-m=1+(-3)**	c+**g-f-d-m**=2+(-3)

數值 mod 4			鐘面狀態		
1	2	2	→	↓	↓
3	2	0	←	↓	↑
2	2	3	↓	↓	←

反面 1000		
-b-(**n-l**)=1-(-1)	j-(**n-l**)=1-(-1)	-a-(**g-f-d-m**)=0-(-3)
k-(**n-l**)=0-(-1)	n-(**n-l**)=2-(-1)	m=0
-c-(**g-f-d-m**)=2-(-3)	l=3	-d-(**g-f-d-m**)=3-(-3)

反面 mod 4			鐘面狀態		
2	2	3	↓	↓	←
1	3	0	→	←	↑
1	3	2	→	←	↓

ST1 完成後，反面的中心鐘與下邊鐘必消去變成 l。下邊鐘不會被 ST1 影響，依然為$l=3$，而中心鐘數值為$n-(n-l)=n-n+l=l=3$，數值相同。

(二) **同步轉 2-ST 2** [1001; f-g, l-m]，轉動計算正面$\mathrm{f}-\mathrm{g}=3-1=2$；反面$\mathrm{l}-\mathrm{m}=3-0=3$。

正面 1001			數值 mod 4			鐘面狀態		
a+g-f-d-m+(**f-g**)=1+2	e+g-f-d-m+(**f-g**)=2+2	b+n-l+(**l-m**)=2+3	**3**	**0**	**1**	←	↑	→
h+g-f-d-m+(**f-g**)=3+2	i+g-f-d-m+(**f-g**)=2+2	g-d-m=0	**1**	**0**	**0**	→	↑	↑
g-f-m+(**f-g**)=2+2	2g-f-d-m+(**f-g**)=2+2	c+g-f-d-m+(**l-m**)=3+3	**0**	**0**	**2**	↑	↑	↓
反面 1001			數值 mod 4			鐘面狀態		
l-n-b-(**l-m**)=2-3	l-n+j-(**l-m**)=2-3	f+d+m-g-a-(**f-g**)=3-2	**3**	**3**	**1**	←	←	→
l-n+k-(**l-m**)=1-3	l-(**l-m**) =3-3	m=0	**2**	**0**	**0**	↓	↑	↑
f+d+m-g-c-(**l-m**)=1-3	l-(**l-m**) =3-3	f+m-g-(**f-g**) =2-2	**2**	**0**	**0**	↓	↑	↑

當 ST2 完成之後，反面右下角的 4 個鐘面數值皆會消去，變成 m， m=0。

因為 ST1 完成時，反面的中心鐘與下邊鐘都消去變成 l，在 ST2 時，這兩個鐘由反面的立柱轉到 m=0 的位置，而右下角鐘面則由正面立柱使用**角鐘連動**的方式轉到$\mathrm{m}=0$。

角鐘連動是正反面之間唯一互相影響的方式，可以讓同步轉 1 個就 3 個數值(**反面鐘、與正面連動的角鐘及正反面皆影響不到的「基準鐘」**)指向變成相同。

(三) **同步轉 3-ST3**[(1,0,0,0); g-i, f-c+m-l]，轉動計算正面$\mathrm{g}-\mathrm{i}=1-1=0$；

反面 $\mathrm{f}-\mathrm{c}+\mathrm{m}-\mathrm{l}=3-2+0-3=-2\equiv 2\ (mod\ 4)$。

正面(1,0,0,0)			數值 mod 4			鐘面狀態		
a-d-m+(**g-i**)=3+0	e-d-m+(**g-i**)=0+0	b+n-m+(**f-c+m-l**)=1+2	3	0	3	←	↑	←
h-d-m+(**g-i**)=1+0	i-d-m+(**g-i**) =0+0	g-d-m=0	1	**0**	**0**	→	↑	↑
-m+(**f-c+m-l**)=0+2	g-d-m=0	c+g-f-d-2m+l+(**f-c+m-l**)=2+2	2	**0**	**0**	↓	↑	↑
反面(1,0,1,1)			數值 mod 4			鐘面狀態		
m-n-b -(**f-c+m-l**)=3-2	j+m-n -(**f-c+m-l**)=3-2	d+m-a-(**g-i**)=1-0	1	1	1	→	→	→
k+m-n-(**f-c+m-l**)=2-2	m-(**f-c+m-l**)=0-2	m-(**f-c+m-l**)=0-2	0	**2**	**2**	↑	↓	↓
f+d+2m-g-c-l-(**f-c+m-l**)=2-2	m-(**f-c+m-l**)=0-2	m-(**f-c+m-l**)=0-2	0	**2**	**2**	↑	↓	↓

當 ST3 完成之後，正面右下角的 4 個鐘面數值皆會消去，變成 g-d-m=0。

因為 ST2 完成時，正面的右邊鐘與下邊鐘都消去變成 g-d-m=0，在 ST3 時，中心鐘由正面立柱轉向 g-d-m=0；右下角鐘則是由反面立柱透過角鐘連動轉到 g-d-m=0。同時，反面的右下 4 個鐘面依然相同，因為**反面立柱(1,0,1,1)和右下 4 個鐘面的差集為空集合**。

從 ST1 到 ST3，數值消去使兩面的右下都產生數值相同，我稱為「階段 1」。這個過程可由對角對稱軸「複製」至兩面的左上方。

(四) **x-Flip**：由於正反兩面的右下角 2x2 範圍完成，利用對稱性翻轉 (Flip 左上→右下)，形成 **2 對角立柱**(1,0,1,0)與(0,1,0,1)影響範圍，c-f+l=2 和 g-d-m=0 分別以 **A** 和 **B** 代換。

正面		
A=2	A=2	-B=0
A=2	A=2	k-n+c-f+l=0
d+m-a+i-g=1	j-n+c-f+l=1	c-f+l-n-b=1
反面		
B=0	B=0	-A=2
B=0	B=0	h-d-m+g-i=1
b+n-c+f-l=3	e-d-m+g-i=0	a-d-m+g-i=3

數值 mod 4			鐘面狀態		
2	2	0	↓	↓	↑
2	2	0	↓	↓	↑
1	1	1	→	→	→
數值 mod 4			**鐘面狀態**		
0	0	2	↑	↑	↓
0	0	1	↑	↑	→
3	0	3	←	↑	←

(五) **同步轉 4-ST4** [1011;j-k+a-h,i-e] ，正面轉動計算 j-k+a-h= $1-0+0-2=-1\equiv 3(mod\ 4)$；反面轉動計算 i-e =$1-1=0$。

正面 1011		
A+(**j-k+a-h**)=2+3	A+(**j-k+a-h**)=2+3	-B+(**i-e**)=0+0
A+(**j-k+a-h**)=2+3	A+(**j-k+a-h**)=2+3	k-n+c-f+l+(**j-k+a-h**) =0+3
d+m-a+i-g+(**j-k+a-h**) =1+3	j-n+c-f+l+(**j-k+a-h**) =1+3	c-f+l-n-b+(**j-k+a-h**) =1+3
反面 1000		
B-(**i-e**)=0-0	B-(**i-e**)=0-0	-A-(**j-k+a-h**)=2-3
B-(**i-e**)=0-0	B-(**i-e**)=0-0	h-d-m+g-i=1
b+n-c+f-l-(**j-k+a-h**)=3-3	e-d-m+g-i=0	a-d-m+g-i-(**j-k+a-h**)=3-3

數值 mod 4			鐘面狀態		
1	1	0	→	→	↑
1	1	3	→	→	←
0	0	0	↑	↑	↑
數值 mod 4			**鐘面狀態**		
0	0	3	↑	↑	←
0	0	1	↑	↑	→
0	0	0	↑	↑	↑

ST4 完成後，反面的中心鐘與下邊鐘必消去變成 B-i+e。下邊鐘不會被 ST4 影響，依然為$e-d-m+g-i=0$，而中心鐘數值為$B-(i-e)=g-d-m-i+e=e-d-m+g-i=0$，數值相同。

(六) **同步轉 5-ST5** [1001;k-j,e-h] ，正面轉動計算 k-j= $0-1=-1\equiv 3(mod\ 4)$；反面轉動計算 e-h =$1-2=-1\equiv 3(mod\ 4)$。

正面 1001		
A+j-k+a-h+(**k-j**)=1+3	A+j-k+a-h+(**k-j**)=1+3	i-e-B+(**e-h**)=0+3
A+j-k+a-h+(**k-j**)=1+3	A+j-k+a-h+(**k-j**)=1+3	A+j+a-h-n=3
d+m+i-g+j-k-h+(**k-j**) =0+3	2j-n+A-k+a-h+(**k-j**) =0+3	A-n-b+j-k+a-h+(**e-h**) =0+3
反面 1001		
B+e-i-(**e-h**)=0-3	B+e-i-(**e-h**)=0-3	k-a+h-j-A-(**k-j**)=3-3
B+e-i-(**e-h**)=0-3	B+e-i-(**e-h**)=0-3	h+B-i=1
b+n-A-j+k-a+h-(**e-h**)=0-3	B+e-i-(**e-h**)=0-3	B-i-j+k+h-(**k-j**)=0-3

數值 mod 4			鐘面狀態		
0	0	3	↑	↑	←
0	0	3	↑	↑	←
3	3	3	←	←	←
數值 mod 4			**鐘面狀態**		
1	1	0	→	→	↑
1	1	1	→	→	→
1	1	1	→	→	→

當 ST5 完成之後，反面右下角的 4 個鐘面數值皆會消去，變成 B-i+h=1。因為 ST4 完成時，反面的中心鐘與下邊鐘都消去變成 B+e-i，在 ST5 時，這兩個鐘由反面的立柱轉到 B-i+h=1 的位置，而右下角鐘面則由正面立柱使用**角鐘連動**的方式轉到 B-i+h=1。

(七) **同步轉 6-ST6** [1000;j-n,k+b+h-e] ，正面轉動計算 j-n= $1-2=-1\equiv 3(mod\ 4)$；

反面轉動計算 k+b+h-e =$0+3+2-1=4\equiv 0(mod\ 4)$。

正面 1000		
(**j-n**)+A+a-h=0+3	(**j-n**)+A+a-h=0+3	i-B-h+(**k+b+h-e**)=3
(**j-n**)+A+a-h=0+3	(**j-n**)+A+a-h=0+3	j-n+A+a-h=3
i-B-h+(**k+b+h-e**) =3	j-n+A+a-h=3	A-n-b+j-k+a-2h+e + (**k+b+h-e**) =3

數值 mod 4			鐘面狀態		
3	3	3	←	←	←
3	3	3	←	←	←
3	3	3	←	←	←

反面 1011		
B-i+h-(**k+b+h-e**)=1-0	B-i+h-(**k+b+h-e**)=1-0	h-A-a-(**j-n**)=0+1
B-i+h-(**k+b+h-e**)=1-0	B-i+h-(**k+b+h-e**)=1-0	B-i+h-(**k+b+h-e**)=1-0
b+n-A-j+k-a+2h-e -(**k+b+h-e**)=1-0	B-i+h-(**k+b+h-e**) =1-0	B-i+h-(**k+b+h-e**) =1-0

數值 mod 4			鐘面狀態		
1	1	1	→	→	→
1	1	1	→	→	→
1	1	1	→	→	→

當 ST6 完成之後，正面右下角的 4 個鐘面數值皆會消去，變成 j-n+A+a-h=3。因為 ST5 完成時，正面的右邊鐘與下邊鐘都消去變成 g-d-m=0，在 ST6 時，中心鐘由正面立柱轉向 j-n+A+a-h=3；右下角鐘則是由反面立柱透過角鐘連動轉到 j-n+A+a-h=3。

從 ST4 到 ST6，數值消去使兩面的右下都產生數值相同，我稱為「階段 2」。階段 1 和 2 將兩面左上及右下共 7 個鐘面轉至相同，這 7 個鐘恰好為立柱(1,0,1,0)的影響範圍。

(八) **同步轉 7-ST7** [1010;n-j-A-a+h,i-B+k+b-e]，正面轉動計算 n-j-A-a+h= $2-1-2-0+2=1$；

反面轉動計算 B-i-k-b+e =$0-1-0-3+1=-3\equiv 1\ (mod\ 4)$。

正面 1010		
j-n+A+a-h+ (**n-j-A-a+h**)=3+1	j-n+A+a-h+ (**n-j-A-a+h**)=3+1	i-B+k+b-e+ (**i-B+k+b-e**)=3+1
j-n+A+a-h+ (**n-j-A-a+h**)=3+1	j-n+A+a-h+ (**n-j-A-a+h**)=3+1	j-n+A+a-h+ (**n-j-A-a+h**)=3+1
j-n+A+a-h+ (**n-j-A-a+h**)=3+1	j-n+A+a-h+ (**n-j-A-a+h**)=3+1	j-n+A+a-h+ (**n-j-A-a+h**)=3+1

數值 mod 4			鐘面狀態		
0	0	0	↑	↑	↑
0	0	0	↑	↑	↑
0	0	0	↑	↑	↑

反面 1010		
B-i-k-b+e- (**i-B+k+b-e**)=1-1	B-i-k-b+e- (**i-B+k+b-e**)=1-1	n-A-j-a+h- (**n-j-A-a+h**)=1-1
B-i-k-b+e- (**i-B+k+b-e**)=1-1	B-i-k-b+e- (**i-B+k+b-e**)=1-1	B-i-k-b+e- (**i-B+k+b-e**)=1-1
B-i-k-b+e- (**i-B+k+b-e**)=1-1	B-i-k-b+e- (**i-B+k+b-e**)=1-1	B-i-k-b+e- (**i-B+k+b-e**)=1-1

數值 mod 4			鐘面狀態		
0	0	0	↑	↑	↑
0	0	0	↑	↑	↑
0	0	0	↑	↑	↑

最後一個**同步轉 7-ST7**，使用 I(1,0,1,0)的範圍將正、反面同時轉至方向 0。I(1,0,1,0)包含中心鐘與 4 個邊鐘、2 個角鐘，兩面的角鐘因為**角鐘連動**而可以同時指向 0。(1,0,1,0)是唯一連動範圍包括$4\div 2=2$個角鐘，以及所有邊鐘的唯一立柱：由於邊鐘無法從另一面控制（「邊鐘連動」並不存在），立柱必須要可以控制全部的邊鐘。(1,0,1,0)也擁有對稱性，因此可以透過斜角對稱的 2x2 範圍，對齊 I(1,0,1,0)的所有鐘面。

伍、研究結果與討論

研究發現立柱對鐘面組合產生影響。實際操作時，鐘面數會隨著立柱出現改變。由於相鄰 2 鐘面由 1 個立柱控制，相對 2 鐘面雖然要以 2、3 個立柱控制，但其圖特徵皆相同，因此本研究不考慮 2 鐘面配置與立柱的關係。在分析 n 個鐘面的組合配置中，指向同一最少步數的立柱順序如下。

一、 立柱數量影響鐘面連動範圍及連通性—3~8 個鐘面組合

表 3 $NC3$起始混散狀態到完成指向同一的結果

始混散狀態			完成指向	指向同一最少步數		影響範圍	圖(V,E)特徵		直	斜
鐘面配置		組合數	立柱順序	指 123	指 0	鐘面數	$\overline{K_n}$	P_n	$\overline{K_n}$	P_n
567-1	NC3-1	39	4→3→2,3	2	3	8	3	0	0	3
567-2	NC3-1	39	1→2→2,3	2	3	8	3	0	0	3
123	NC3-2	39	1→2→3	3	3	8	3	0	3	0
129-1	NC3-3	39	4→1→1,2	2	3	8	3	0	0	3
129-2	NC3-3	39	3→1→1,2	2	3	8	3	0	0	3
139-1	NC3-4	39	2→1→1,3	2	3	8	3	0	0	3
139-2	NC3-4	39	4→1→1,3	2	3	8	3	0	0	3
139-3	NC3-4	39	1→3→1,3	2	3	7	3	0	0	3
235-1	NC3-5	63	1→2→3	3	3	8	1	2	1	2
235-2	NC3-5	63	1→2→2,3	2	3	8	1	2	1	2
127-1	NC3-6	39	1→1,2→1,2,3,4	2	3	9	3	0	3	0
127-2	NC3-6	39	1→2→4	3	3	8	3	0	3	0
127-3	NC3-6	39	1→2→3	3	3	8	3	0	3	0
135	NC3-7	63	2→1→3	2	3	8	1	2	1	2
156	NC3-8	63	3→2→1,2	2	3	8	1	2	0	3
456-1	NC3-9	39	4→3→2	3	3	8	3	0	1	2
456-2	NC3-9	39	4→1→2	3	3	8	3	0	1	2
157-1	NC3-10	63	4→2→1	3	3	8	1	2	1	2
157-2	NC3-10	63	3→2→1	3	3	8	1	2	1	2
359-1	NC3-11	63	2→3→2,3	2	3	6	1	2	0	3
359-2	NC3-11	63	2→3→4	3	3	8	1	2	0	3
359-3	NC3-11	63	1→3→2,3	2	3	8	1	2	0	3
359-4	NC3-11	63	1→4→2,3	2	3	9	1	2	0	3

表 4 $C3$起始混散狀態到完成指向同一的結果

始混散狀態			完成指向	指向同一最少步數		影響範圍	圖(V,E)特徵		直	斜
鐘面配置		組合數	立柱順序	指 123	指 0	鐘面數	P_n	C_n	P_n	C_n
184	C3-1-1	39	1→4→1,4	2	3	6	3	0	3	0
579-1	C3-1-2	39	2→3→2,3	2	3	6	3	0	3	0

始混散狀態			完成指向	指向同一最少步數		影響範圍	圖(V,E)特徵		直	斜
579-2	C3-1-2	39	4→2→2,3	2	3	8	3	0	3	0
579-3	C3-1-2	39	1→3→2,3	2	3	8	3	0	3	0
579-4	C3-1-2	39	1→4→2,3	2	3	9	3	0	3	0
579-5	C3-1-2	39	1→4→1,4	2	3	6	3	0	3	0
579-6	C3-1-2	39	2→4→1,4	2	3	8	3	0	3	0
579-7	C3-1-2	39	3→1→1,4	2	3	8	3	0	3	0
158	C3-2-1	39	1→2→4	2	3	8	3	0	0	3
569-1	C3-2-2	39	4→1→2	2	3	8	3	0	0	3
569-2	C3-2-2	39	4→3→2	2	3	8	3	0	0	3
159	C3-2-3	63	4→2→1	2	3	8	3	0	0	3

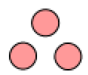
我把鐘面配置分類為直邊 (縱線、橫線)和斜邊 (縱、橫、斜線)，在不考慮立柱影響下，僅就鐘面配置的圖特徵分析，發現：

(1) 在**表 4** 中，直邊形成的圖沒有圈；加入斜邊會構成$\boldsymbol{C_3}$的圖如 C3-2-1~3-2-3。

(2) 在鐘面配置上，直邊構成的$\boldsymbol{P_3}$形成邊連線/中心連線，加入斜邊不會出現圈如 C3-1-1~3-1-2。

(3) 考慮直圖時，我注意到孤立點的出現，在不連續鐘面配置，NC3 會出現 3 點皆孤立點$\overline{K_3}$，還有路徑和孤立點混和的$\overline{K_1}+\boldsymbol{P_2}$ (直斜圖的組合詳**表 5**)。

$\overline{K_3}$ (3,0)



$\overline{K_1}+\boldsymbol{P_2}$ (3,1)

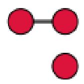
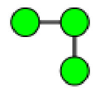


圖 19-1~2

表 5 **直、斜圖組合類型一覽表**

直 / 斜	$\overline{K_3}$	$\overline{K_1}+P_2$	P_3
$\overline{K_3}$	$(\overline{K_3},\overline{K_3})$		
$\overline{K_1}+P_2$	$(\overline{K_3},\overline{K_1}+P_2)$	$(\overline{K_1}+P_2,\overline{K_1}+P_2)$	
P_3	$(\overline{K_3},P_3)$	$(\overline{K_1}+P_2,P_3)$	(P_3,P_3)
C_3			(P_3,C_3)

$\boldsymbol{P_3}$ (3,2)



$\boldsymbol{C_3}$ (3,3)

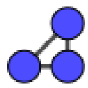


圖 19-3~4

表 6 **NC4 起始混散狀態到完成指向同一的結果**

始混散狀態			完成指向指向同一/影響範圍				(V,E)特徵 **直** **斜**				
鐘面配置		組合數	立柱順序	指 0123	指 0	鐘面數	類別	K_n	C_n	mP_n	$K_{m,n}$
5678-1	NC4-1	54	1→2,3→1,2,3	3	3	6	直	4	0	(0,0)	(0,0)
5678-2	NC4-1	54	2→3,4→2,3,4	3	3	6	直	4	0	(0,0)	(0,0)
5678-3	NC4-1	54	3→4,1→3,4,1	3	3	6	斜	0	4	(0,0)	(0,0)
5678-4	NC4-1	54	4→1,2→4,1,2	3	3	6	斜	0	4	(0,0)	(0,0)
5674-1	NC4-2	255	2→3→2,3→2,3,4	3	4	8	直	2	0	(1,2)	(0,0)
5674-2	NC4-2	255	1→2→2,3→4	3	4	9	斜	0	0	(1,4)	(0,0)

始混散狀態			完成指向指向同一/影響範圍				(V,E)特徵 直 斜				
鐘面配置		組合數	立柱順序	指 0123	指 0	鐘面數	類別	$\overline{K_n}$	C_n	mP_n	$K_{m,n}$
5672-1	NC4-3	255	2→1→3→4	3	4	9	直	1	0	(1,3)	(0,0)
5672-2	NC4-3	255	1→3→2→2,3	3	4	8	斜	0	3	(1,2)	(0,0)
1257-1	NC4-4	159	1→2→1,2→3	4	4	8	直	1	0	(1,3)	(0,0)
1257-2	NC4-4	159	1→2→1,2→4	4	4	8	斜	1	0	(1,3)	(0,0)
1267-1	NC4-5	255	1→2→3→4	4	4	9	直	2	0	(1,2)	(0,0)
1267-2	NC4-5	255	1→2→3→2,3	3	4	8	斜	1	0	(1,3)	(0,0)
1268	NC4-6	135	1→2→3→4	4	4	9	直	0	0	(2,2)	(0,0)
1356	NC4-7	135	1→2→1,2→1,2,3	3	4	8	直	0	0	(2,2)	(0,0)
							斜	0	0	(1,4)	(0,0)
1357	NC4-8	135	1→3→2→4	3	4	9	直	0	0	(2,2)	(0,0)
1367	NC4-9	159	3→2→4→1	3	4	9	直	1	0	(1,3)	(0,0)
							斜	1	3	(0,0)	(0,0)
1235	NC4-10	255	1→2→1,2→3	4	4	8	直	1	0	(1,3)	(0,0)
1237	NC4-11	255	1→2→3→4	4	4	9	直	2	0	(1,2)	(0,0)
1234	NC4-12	55	1→2→3→4	3	3	9	直	4	0	(0,0)	(0,0)
5694-1	NC4-13	159	4→1→3→1,3	3	4	8	直	1	0	(1,3)	(0,0)
5694-2	NC4-13	159	4→1→2→2,4	3	4	8	斜	0	3	(1,2)	(0,0)
5694-3	NC4-13	159	4→3→2→2,4	3	4	8	直	1	0	(1,3)	(0,0)
3459-1	NC4-14	159	4→2→3→2,3	4	4	8	直	2	0	(1,2)	(0,0)
3459-2	NC4-14	159	4→1→3→1,3	4	4	8	斜	0	0	(0,0)	(1,3)
2359	NC4-15	255	2→3→1→4	4	4	9	直	1	0	(1,3)	(0,0)
							斜	0	3	(1,2)	(0,0)
2459-1	NC4-16	255	2→4→1,4→2,4	3	4	8	直	1	0	(1,3)	(0,0)
2459-2	NC4-16	255	1→2→3→4	4	4	8	斜	0	3	(1,2)	(0,0)
1239	NC4-17	159	1→2→3→4	4	4	9	直	4	0	(0,0)	(0,0)
							斜	0	0	(0,0)	(1,3)

表 7　**C4 起始混散狀態到完成指向同一的結果**

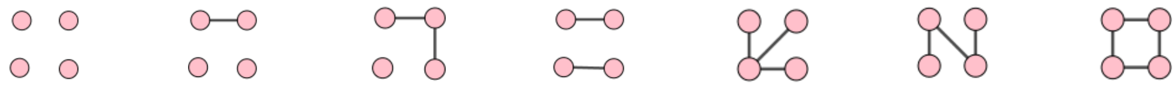
始混散狀態			完成指向	指向同一/影響範圍			(V,E)特徵直 斜			
鐘面組合		組合數	立柱順序	指 0123	指 0	鐘面數	圖形類別	C_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n
1256	**C4-2**	255	1→2→1,2→3	4	4	8	直	0	(1,4)	(0,0)	0
							斜	3	(1,2)	(0,0)	0
5679-1	**C4-4**	159	4→1→3→2,3	3	4	9	斜	4	(1,2)	(0,0)	0
5679-2	**C4-4**	159	2→1→3→2,3	3	4	8	斜	4	(1,2)	(0,0)	0
5679-3	**C4-4**	159	3→4→2→2,3	3	4	8	直	0	(0,0)	(1,3)	0
2569	**C4-1**	159	2→3→1→4	4	4	9	直	4	(0,0)	(0,0)	0
							斜	0	(0,0)	(0,0)	4

始混散狀態			完成指向	指向同一/影響範圍			$(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$特徵 **直** **斜**				
鐘面配置		組合數	立柱順序	指 0123	指 0	鐘面數	圖形類別	C_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n
1569	**C4-3**	255	1→2→3→4	4	4	9	直	0	(1,4)	(0,0)	0
							斜	4	(1,2)	(0,0)	0
1689	**C4-2**	255	1→2→4→3,4	4	4	9	直	0	(1,4)	(0,0)	0
							斜	3	(1,2)	(0,0)	0
1259-1	**C4-4**	159	1→2→1,2→3	4	4	8	直	0	(0,0)	(1,3)	0
1259-2	**C4-4**	159	1→2→1,2→4	4	4	8	斜	4	(1,2)	(0,0)	0

1. 直線圖形：無論鐘面配置數，直線圖形全部都不會有C_3，因為縱橫邊無法形成$C_3 = V_C^3$。

表 8　4 個鐘面圖形表與唯一圖

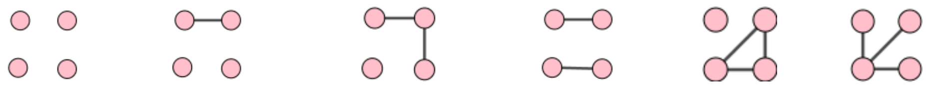
$\overline{K_4}$	$P_2+\overline{K_2}$	$P_3+\overline{K_1}$	$2P_2$	$K_{1,3}$	P_4	C_4



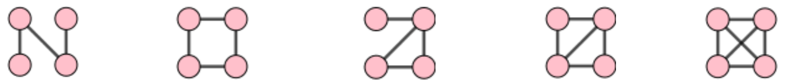
2. 斜線圖形：C4 和 NC4 的斜線圖形包含純孤立點圖、路徑和孤立點混和圖、多重不相連路徑圖、圈和孤立點混和圖、純圈圖、純路徑圖、圈和分支路徑混和圖、完全二分圖及完全圖。

表 9　4 個鐘面圖與唯一圖

$\overline{K_4}$	$P_2+\overline{K_2}$	$P_3+\overline{K_1}$	$2P_2$	$C_3+\overline{K_1}$	$K_{1,3}$



P_4	C_4	C_3+P_1	C_4+P_1	K_4



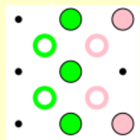


圖 20 **鐘面組合**

5 鐘面組合經常出現 2+3 鐘面的形式(詳圖 20)，2 鐘面組合一定是角鐘(C)+角鐘=2C，3 鐘面組合可能是邊鐘(E)+中心鐘(M)+邊鐘=2E+M, E+E+C=2E+C, C+E+C=2C+E, E+E+E=3E, E+M+C, C+M+C=2C+M, **也就是 C((1,1,0,0))的 6 個鐘面組合。**

表 8　**NC5 起始混散狀態到完成指向同一的結果**

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍			$(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$特徵					
鐘面組合	組合數	立柱順序	指 0123	→指 0	鐘面數	圖形類別	$\overline{K_n}$	mC_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n
15678-1	543	1→4→2→3→2,3	5	5	9	直	2	(0,0)	(1,3)	(0,0)	0
15678-2	543	1→2→3→4→3,4	5	5		斜	0	(1,5)	(1,1)	(0,0)	0
12567	1023	1→2→1,2→4→3	5	5	9	直	1	(0,0)	(1,4)	(0,0)	0
						斜	0	(1,3)	(2,1)	(0,0)	0
13567	1023	1→2→3→2,3→4	5	5	9	直	0	(0,0)	(1,3),(1,2)	(0,0)	0
						斜	0	(1,3)	(1,3)	(0,0)	0
14567	543	1→4→2→3→2,3	5	5	9	直	1	(0,0)	(2,2)	(0,0)	0
						斜	0	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍				$(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$特徵				
鐘面組合	組合數	立柱順序	指 0123	→指 0	鐘面數	圖形類別	$\overline{K_n}$	mC_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n
12357	1023	1→2→1,2→3→4	5	5	9	直	0	(0,0)	(1,3),(1,2)	(0,0)	0
12358	1023	1→2→1,2→3→4	5	5	9	直	1	(0,0)	(1,4)	(0,0)	0
						斜	1	(1,3)	(1,2)	(0,0)	0
12378	543	1→2→3→4→3,4	5	5	9	直	1	(0,0)	(2,2)	(0,0)	0
						斜	1	(0,0)	(1,4)	(0,0)	0
12345	543	3→4→1→2→1,2	5	5	9	直	2	(0,0)	(1,3)	(0,0)	0
14569	1023	1→3→1,3 →2,4→1,2,4	4	5	9	直	1	(0,0)	(1,4)	(0,0)	0
						斜	0	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0
24569	640	1→3→4→2→2,4	4	5	9	直	1	(1,4)	(0,0)	(0,0)	0
						斜	0	(0,0)	(1,2)	(0,0)	4
12359	1023	1→2→1,2→3→4	5	5	9	直	1	(0,0)	(0,0)	(1,3)	0
						斜	0	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0
12379	1023	1→4→3 →2,3→1,2,3	4	5	9	直	2	(0,0)	(1,3)	(0,0)	0
						斜	0	(1,3)	(2,2)	(0,0)	0
12349	219	3→1→1,2 →1,2,3→1,2,3,4	4	5	9	直	5	(0,0)	(0,0)	(0,0)	0
						斜	0	(0,0)	(0,0)	(1,4)	0

表 9　**C5 起始混散狀態到完成指向同一的結果**

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍				$(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$特徵				
鐘面組合	組合數	立柱順序	指 0123	→指 0	鐘面數	圖形類別	mC_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n	W_n
23567	543	3→4→3,4→1→1,4	4	5	9	直	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
						斜	(2,3)	(0,0)	(0,0)	0	0
12356	543	2→3→1→2,3→1,2,3	4	5	8	直	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
						斜	(1,3)	(2,1)	(0,0)	0	0
56789	219	1→4→2→2,3→1,2,3,4	4	5	9	直	(0,0)	(0,0)	(1,4)	0	0
						斜	(0,0)	(0,0)	(0,0)	0	4
25679	1023	1→3→4→2→2,3	4	5	9	直	(1,4)	(1,2)	(0,0)	0	0
						斜	(0,0)	(1,3)	(0,0)	4	0
45679-1	1023	3→4→1→1,4→1,3,4	4	5	8	直	(0,0)	(1,2)	(1,3)	0	0
45679-2	1023	3→1→4→1,4→1,2,4	4	5	9	斜	(2,3)	(1,2)	(0,0)	0	0
13569-1	543	1→4→2→1,2→1,2,3	4	5	9	直	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
13569-2	543	1→3→2→1,2→1,3	4	5	8	斜	(2,3)	(1,2)	(0,0)	0	0
12569-1	1023	1→2→3→4→1,2	4	5	9	直	(1,4)	(1,2)	(0,0)	0	0
12569-2	1023	1→2→1,2→3→4	4	4	9	斜	(0,0)	(1,3)	(0,0)	4	0
23579-1	543	2→3→1→4→1,4	5	5	9	直	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
23579-2	543	1→3→2→2,4→2,3	4	5	9	斜	(2,3)	(0,0)	(0,0)	0	0

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍			$(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$特徵					
鐘面組合	組合數	立柱順序	指 0123	→指 0	圖形類別 鐘面數		mC_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n	W_n
12579	640	1→4→1,4→2,3→1,2,3,4	4	5	9	直	(0,0)	(1,2)	(1,3)	0	0
						斜	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0	0
13579	543	2→3→2,3→1,4→1,3,4	4	5	9	直	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
						斜	(2,3)	(0,0)	(0,0)	0	0

【發現】C5 與 NC5 在排除對稱後，幾乎只有 1 種「最佳立柱順序」，就是在歐拉圖上由範圍「大→小」的立柱順序。因為角鐘面只受一個立柱控制，角鐘面旁的立柱必須先動。

【特例】我發現 5 個鐘面以上的 C/NC 有些組合會出現兩種立柱順序，我把這些狀態以歐拉圖表現為「大→小」與「小→大」範圍。

例如 NC5-2 是不連續 5 鐘面，我把立柱與鐘面關係以歐拉圖表現，再分為 1,5,2 與 6,7 鐘面指向 0 兩個階段如下：

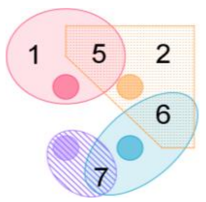


圖 21 **原鐘面配置**

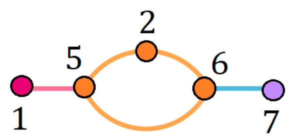


圖 22 **歐拉圖**

1,5,2 鐘面+1,2 立柱 → 6,7 鐘面+3,4 立柱

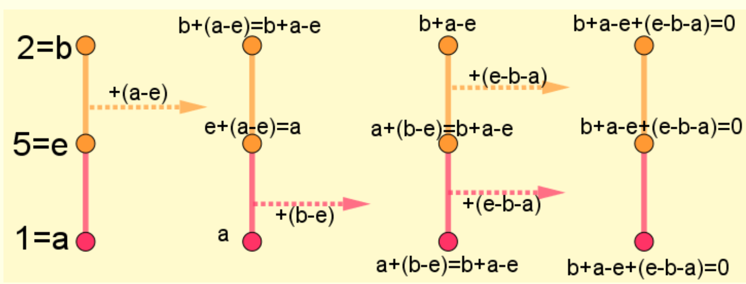


圖 23 **第 1 階段計算**

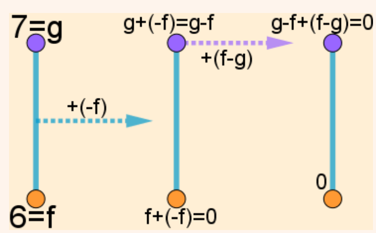


圖 24 **第 2 階段計算**

「大→小」的方法會造成階段性的指向 0，所以指向同一時就指向 0 了。「小→大」的方法利用階段性的指向同一，因此最後會多一個轉動把鐘面全部指向 0。**每個階段的鐘面都是連動範圍間的差集**。

（一）6 鐘面組合

6 鐘面的組合會出現 **3+3** 鐘面的形式，前 3 鐘面的組合一定是角鐘(C)+邊鐘+角鐘=2C+E，後 3 鐘面組合同樣是 C((1,1,0,0))的 6 個組合。這種組合在 NC6 較常出現，C6 由於沒有不同的「連通部分」而較少出現，只出現在 125689 的組合。C6 還有 3 個影響範圍鐘面數=8 的圖，和 C((1,1,1,0))的 3 個唯一圖相同。7 鐘面以上的影響範圍全部為 9，故不列出。

表 10　**C6 與 NC6 起始混散狀態到完成指向同一結果**

始混散狀態		完成指向	指向同一/影響範圍			(***V***, ***E***)特徵						
鐘面組合	**組合數**	立柱順序	指 0123	→指 0	鐘面數	圖形類別	$\overline{K_n}$	mC_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n	W_n
125678	1407	1→2→1,2 →3→4→3,4	6	6	9	直	1	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
						斜	0	(2,3)	(1,3)	(0,0)	0	0
135678	1099	2→4→1→1,2 →1,2,4→1,3	5	6	9	直	0	(0,0)	(2,3)	(0,0)	0	0
						斜	0	(2,3)	(2,2)	(0,0)	0	0
124567	4095	1→2→1,2 →3→4→3,4	6	6	9	直	0	(0,0)	(1,4) (1,2)	(0,0)	0	0
						斜	0	(1,3)	(1,3) (1,2)	(0,0)	0	0
123456	1407	1→3→2→1,2 →1,2,3→4	6	6	9	直	1	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
						斜	1	(1,3)	(2,2)	(0,0)	0	0
123457	1134	1→2→1,2 →3→4→3,4	6	6	9	直	0	(0,0)	(2,3)	(0,0)	0	0
124569	4095	**1→2→1,2 →3→4→3,4**	6	6	9	直	1	(1,4)	(1,2)	(0,0)	0	0
						斜	0	(1,5)	(1,2) (1,3)	(0,0)	0	0
134569	1407	2→4→3→2,3 →1,3→1,3,4	5	6	9	直	1	(0,0)	(1,5)	(0,0)	0	0
						斜	0	(2,3)	(1,2)	(0,0)	0	0
123459	1407	**1→2→1,2 →3→4→3,4**	6	6	9	直	2	(0,0)	(0,0)	(1,3)	0	0
						斜	0	(1,4)	(3,2)	(0,0)	0	0
123568	4095	3→2→2,3 →1→4→1,2,3	5	6	9	直	0	(0,0)	(1,6)	(0,0)	0	0
						斜	0	(2,3)	(1,2)	(0,0)	0	0
156789	1407	4→2→4,2 →1→1,2→1,2,4	5	6	**8**	直	0	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0	0
						斜	0	(0,0)	(1,2)	(0,0)	0	5
125689	1407	**1→2→1,2 →3→4→3,4**	6	6	9	直	0	(1,6)	(1,2)	(0,0)	0	0
						斜	0	(2,3)	(0,0)	(1,5)	0	0
145689	4095	4→2→4,2→1 →1,2→1,2,4	5	6	**8**	直	0	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0	0
						斜	0	(1,6) (1,3)	(1,2)	(0,0)	0	0
135689	4095	2→4→3→1 →1,2→1,2,3	5	6	9	直	0	(1,4)	(1,3)	(0,0)	0	0
						斜	0	(1,6)	(1,2)	(1,3)	0	0
345689	1407	3→1→2 →1,2→3,4 →1,2,3,4	5	6	9	直	0	(0,0)	(1,5) (1,2)	(0,0)	0	0
						斜	0	(1,6)	(0,0)	(1,3)	0	0
123579	4095	1→2→3→1,2 →1,2,4→1,2,3	5	6	9	直	0	(0,0)	(1,5) (1,2)	(0,0)	0	0
						斜	0	(1,2)	(1,4) (1,3)	(0,0)	0	0
123569	1407	1→3→13 →2→12→1,2,3	5	6	**8**	直	0	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0	0
						斜	0	(1,6)	(1,2)	(1,3)	0	0

(二)7、8 鐘面組合

7 個鐘面的組合有 3+1+3 鐘面的形式，前 3 個鐘面的組合一定是角鐘(C)+邊鐘+角鐘，即 2C+E 狀態，後 3 個鐘面組合同樣是 C((1,1,0,0))組合；中間的鐘面是邊鐘或中心鐘，由前 3 鐘面對齊至後 3 鐘面。

表 11　**C7、NC7 及 C8 起始混散狀態到完成指向同一結果**

始混散狀態		完成指向	指向同一		(𝑽, 𝑬)特徵						
鐘面組合	組合數	立柱順序	指 0123	→指 0	圖形類別	$\overline{K_n}$	mC_n	mP_n	$K_{m,n}$	mK_n	W_n
1235678	8319	1→2→1,2→3 →4→3,4→1,2,3	6	7	直	0	(0,0)	(1,7)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(1,4)	(1,7)	(0,0)	(0,0)	0
1234567	8319	1→2→1,2→3→4 →3,4→1,2,3	6	7	直	0	(0,0)	(1,7)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(2,3)	(2,2)	(0,0)	(0,0)	0
1256789	8703	1→2→1,2→3→4 →3,4→1,2,3	6	7	直	0	(1,6)	(2,2)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(0,0)	(1,3)	(0,0)	(0,0)	6
1356789	4539	2→3→4→1→1,2 →1,2,4→1,3	6	7	直	0	(2,4)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(0,0)	(2,2)	(0,0)	(2,4)	0
1235679	16383	2→3→2,3→1→4 →1,4→1,2,3	6	7	直	0	(1,6)	(2,2)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(2,3)	(1,2)	(1,6)	(0,0)	0
1345679	16383	3→4→3,4→1→2 →1,2→1,3,4	6	7	直	0	(1,5)	(1,3) (1,2)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(1,3)	(1,2) (1,3)	(1,6)	(0,0)	0
1234579	4539	1→2→1,2→3 →4→3,4→1,2,3	6	7	直	0	(0,0)	(3,3)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(0,0)	(2,3)	(1,6)	(0,0)	0
1234569	8703	1→2→1,2→3→4 →3,4→1,2,3	7	7	直	1	(1,4)	(2,2)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(1,3)	(2,2)	(1,6)	(0,0)	0
12356789	33279	1→2→3→4→3,4 →1,2→1,2,4→1,2,3	7	8	直	0	(1,8)	(1,3)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(0,0)	(1,4)	(0,0)	(0,0)	7
12345679	33279	1→2→1,2→3→4 →3,4→1,2,4→1,2,3,4	7	8	直	0	(1,6)	(3,2)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(2,3)	(2,2)	(1,7)	(0,0)	0
12345678	10095	1→2→3→4→3,4 →1,2,3→1,2,4→1,2,3,4	7	8	直	0	(1,8)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	0
					斜	0	(4,3)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	0

記錄過程中，最難的是組合數的計算，尤其是 2^{+}個對稱軸時。計算組合數要針對各種對稱類型考量，因為對稱軸會造成看似不同其實是相同的狀態。以 NC3-567 為例，有兩種情況，**對稱**：5 鐘和 7 鐘相同，6 鐘有 4 種選擇，5 與 7 鐘也有 4 種選擇，共$4 \times 4 = 16$種；**不對稱**：5 鐘和 7 鐘不同，共$4 \times 4 \times 3 = 48$種組合。鐘面不對稱，翻轉會產生不同圖，要刪除一半，有$48 \div 2 = 24$種唯一組合。全部共$16 + 24 = 40$種組合，一種為完成狀態，起始狀態組合數$40 - 1 = 39$個。如果鐘面配置完全**沒有對稱性**，如 NC3235，組合數不受對稱影響，共4^{n}種，起始狀態組合數共$4^{n} - 1$個(n 表示鐘面數)。

二、 n 鐘面同步轉化為圖—3~8 個鐘面組合

相鄰 2 鐘面由 1 個立柱控制，相對 2 鐘面雖然要以 2、3 個立柱控制，但其圖特徵皆相同，故不考慮 2 鐘面配置與立柱的關係。n 鐘面同步轉的過程轉化為歐拉圖結果如下。

(一) 3 鐘面組合同步轉結果：1 ≤ 3鐘面同步轉 ≤ 3

以 NC3-5 為例，1,2,7 號鐘面連動正反、面，立柱影響的鐘面數有(0,0,1,1)、(1,0,0,1)。

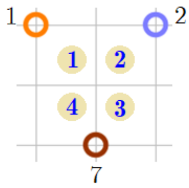


圖 25 **正面範圍**

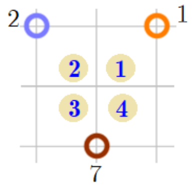


圖 26 **反面範圍**

表 12 **NC3 同步轉 2 步示意**

連動範圍	(0,0,1,1)	(1,0,0,1)
正面	7	1,7
反面	1,2	2,7

圖 27 **歐拉圖**

③④以 7 反為準

①④將全部鐘面指向 0

正面以實線表示；

反面以虛線表示

小結 連續鐘面 1≤C3 同步轉≤ 3, 不連續鐘面也需要考慮同步轉，1 ≤NC3 同步轉 ≤ 2。

(二) 4 鐘面組合同步轉結果：0 ≤ 4鐘面同步轉 ≤ 4

1. 沒有基準：以 NC4-17 為例，這種 4 鐘面組合沒有基準，同步轉無法減少步數。

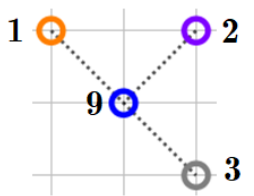


圖 28 **NC4-17 正面**

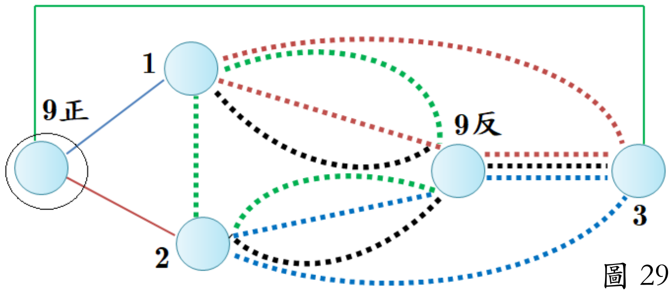


圖 29 **歐拉圖**

2. 有基準：以 C4-4 為例，這種 4 鐘面組合有基準，同步轉能減少步數。

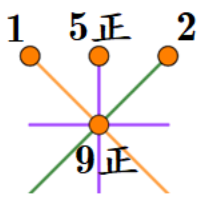


圖 30 **C4-4 正面**

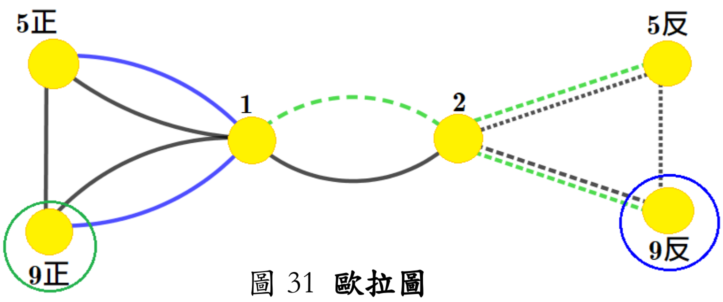
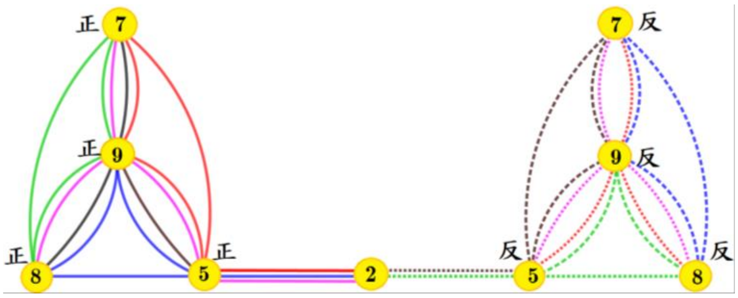


圖 31 **歐拉圖**

C4-4 立柱③④以 5 正為基準，①②以 5 反為基準。C4-4 又與 NC4-9 、NC4-15 同構，**過程一樣**，併為唯一圖，換言之**同步轉結果一樣**。不連續 4 鐘面過程同構得到的唯一結果另有 NC4-3-2≅NC4-5≅NC4-7 (3ST)，NC4-6≅NC4-8 (3ST)，4-3≅NC4-13(3ST+1NST)。

小結 連續鐘面 1≤C4 同步轉≤ 4 不連續鐘面0 ≤NC4 同步轉 ≤ 4。

5、6、7、8 鐘面組合同步轉結果：



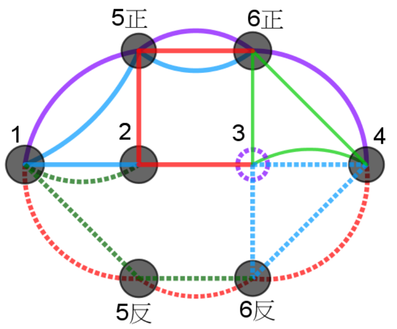


圖 32 **C5-1 同步轉的歐拉圖**　　　　圖 33　**NC6-4 同步轉的歐拉圖**

同步轉數量範圍：$0 \le 5$鐘面 ≤ 4、$3 \le C5 \le 4$、$0 \le NC5 \le 4$；$3 \le 6$鐘面 ≤ 5、$4 \le C6 \le 5$、$3 \le NC6 \le 5$；$5 \le 7$鐘面 ≤ 6、$5 \le C7 \le 6$、$NC7 = 5$；8鐘面 $= 6$。

以 V 指歐拉圖的點數，就是互相獨立鐘面數。1 個鐘面 C1：$1\le V \le 2$；2 個鐘面 C/NC 2：$2\le V \le 4$；3 個鐘面 C/NC 3：$3\le V \le 6$；4 個鐘面 C/NC 4：$4\le V \le 8$；5 個鐘面 C/NC5：$6\le V \le 10$；6 個鐘面 C/NC6：$8\le V \le 11$；7 個鐘面 C/NC7：$10\le V \le 12$；8 個鐘面 C/NC8：$12\le V \le 13$；9 個鐘面 C9：V=14。換言之，**C/NCn ($1\le n\le 4$)：$n\le V \le 2n$；C/NCn ($5\le V \le 9$)：$2n-4\le V \le n+5$**。

在 V=C+2E+2M 且 n=C+E+M。兩式相減得 V-n =E+M。將不等式兩邊減 n，得 $1\le n\le 4$ 時，$0\le E+M\le n$, $n\le 4$。因 $E+M\le 5$，$n < 5$，故 E+M 最大值即為總鐘面數 n。

當 $5\le n\le 9$ 時，$n-4\le E+M\le 5$，「$E+M\le 5$」的限制是上界，而 E+M 的下界是最多角鐘的狀態，即總鐘面數 n 減掉 4 個角鐘。

如果鐘面配置剛好有**一個對稱軸**，對稱軸上有 A 個鐘，不在對稱軸上有 2B 個鐘(兩邊對稱，不再對稱軸上的鐘必為偶數)，則對稱時有$4^A \times 4^B \times 1^B = 4^{A+B}$種組合，不對稱時有分成左右兩邊「完全不同」、「1 個鐘相同」、…、「$B-1$個鐘相同」等共B個組合，其中「n 個鐘相同」的類別會有$4^A \times 4^B \times 3^{B-n} \times 1^n \times C_n^B = 4^{A+B}3^{B-n}C_n^B$種組合，刪除一半的後有$\frac{4^{A+B}3^{B-n}C_n^B}{2}$種。對稱與不對稱共有$4^{A+B} + 4^{A+B}\sum_{n=0}^{B-1}\frac{3^{B-n}C_n^B}{2}$種組合。

【引理】

$$f(B) = \sum_{n=0}^{B-1} 3^{B-n}C_n^B = 4^B - 1$$

$$f(x+1) = 3^{x+1} + 3^x C_1^{x+1} + 3^{x-1}C_2^{x+1} + \cdots + 3^2 C_{x-1}^{x+1} + 3^1 C_x^{x+1}$$

$$f(x) = 3^x C_0^x + 3^{x-1}C_1^x + \cdots + 3^2 C_{x-2}^x + 3^1 C_{x-1}^x$$

$$f(x+1) - f(x)$$

$$= 3^{x+1} + 3^x(C_1^{x+1} - C_0^x) + 3^{x-1}(C_2^{x+1} - C_1^x) + \cdots + 3^2(C_{x-1}^{x+1} - C_{x-2}^x) + 3^1(C_x^{x+1} - C_{x-1}^x)$$

$$= 3^{x+1} + 3^x(C_{\mathbf{0}+1}^{x+1} - C_{\mathbf{0}}^x) + 3^{x-1}(C_{\mathbf{1}+1}^{x+1} - C_{\mathbf{1}}^x) + \cdots + 3^2(C_{\mathbf{x-2}+1}^{x+1} - C_{\mathbf{x-2}}^x) + 3^1(C_{\mathbf{x-1}+1}^{x+1} - C_{\mathbf{x-1}}^x)$$

又因

$$C_{n+1}^{x+1}-C_n^x=\frac{(x+1)!}{(n+1)!\left((x+1)-(n+1)\right)!}-\frac{x!}{n!\,(x-n)!}$$
$$=\frac{x!\,(x+1)}{(n+1)!\,(x-n)!}-\frac{x!\,(n+1)}{(n+1)!\,(x-n)!}=\frac{x!\,(x-n)}{(n+1)!\,(x-n)!}$$
$$=\frac{x!}{(n+1)!\left(x-(n+1)\right)!}=C_{n+1}^x$$

故

$$f(x+1)-f(x)$$
$$=3^{x+1}+3^xC_1^x+3^{x-1}C_2^x+\cdots+3^2C_{x-1}^x+3^1C_x^x$$
$$=3(\boldsymbol{3^x}+\boldsymbol{3^{x-1}C_1^x}+\boldsymbol{3^{x-2}C_2^x}+\cdots+\boldsymbol{3^1C_{x-1}^x}+1)$$
$$=3(\boldsymbol{f(x)}+1)$$

$f(x+1)-f(x)=3f(x)+3$，得到**遞迴$\boldsymbol{f(x+1)=4f(x)+3}$**

$$f(x)=4f(x-1)+3\quad(x\geq 2)$$
$$=4(f(x-1)+1)-1=4(4(f(x-2)+1)-1+1)-1$$
$$=4^2(f(x-2)+1)-1=4^2(4(f(x-3)+1)-1+1)-1$$
$$=4^3(f(x-3)+1)-1=4^3(4(f(x-4)+1)-1+1)-1\cdots$$
$$=4^{x-1}(f(1)+1)-1=4^x-1\quad(x\geq 2)$$

當$x=1$時，引理也成立。故對所有正整數 B，

$$\sum_{n=0}^{B-1}3^{B-n}C_n^B=4^B-1\ \blacksquare$$

即二項式定理展開$4^B-1=(3+1)^B-1$後所得結果。

【定理】有一對稱軸，且對稱軸上有 A 個鐘，不在對稱軸上有 2B 個鐘，組合數為 $\boldsymbol{\frac{4^{A+2B}+4^{A+B}}{2}}$個，起始狀態數有$\boldsymbol{\frac{4^{A+2B}+4^{A+B}}{2}-1}$個。

【證明】組合數$=$ 對稱圖 $+\frac{\text{非對稱圖}}{2}=4^{A+B}+4^{A+B}\sum_{n=0}^{B-1}\frac{3^{B-n}C_n^B}{2}=4^{A+B}+\frac{4^{A+B}(4^B-1)}{2}$

$$=4^{A+B}\left(1+\frac{4^B-1}{2}\right)=4^{A+B}\left(\frac{4^B+1}{2}\right)=\frac{4^{A+2B}+4^{A+B}}{2}$$

起始狀態數$=$ 組合數 $-1=\frac{4^{A+2B}+4^{A+B}}{2}-1$

【推論】有一個對稱軸，且對稱軸上有 A 個鐘，全部共有 N 個鐘，組合數為

$\boldsymbol{\frac{4^N+2^{N+A}}{2}}$個，起始狀態數有$\boldsymbol{\frac{4^N+2^{N+A}}{2}-1}$。

【證明】$N = A + 2B$

$$組合數 = \frac{4^{A+2B}+4^{A+B}}{2} = \frac{4^{N}+4^{N-B}}{2} = \frac{4^{N}+4^{N-\frac{N-A}{2}}}{2} = \frac{4^{N}+4^{\frac{2N-(N-A)}{2}}}{2} = \frac{4^{N}+4^{\frac{N+A}{2}}}{2} = \frac{4^{N}+2^{N+A}}{2}$$

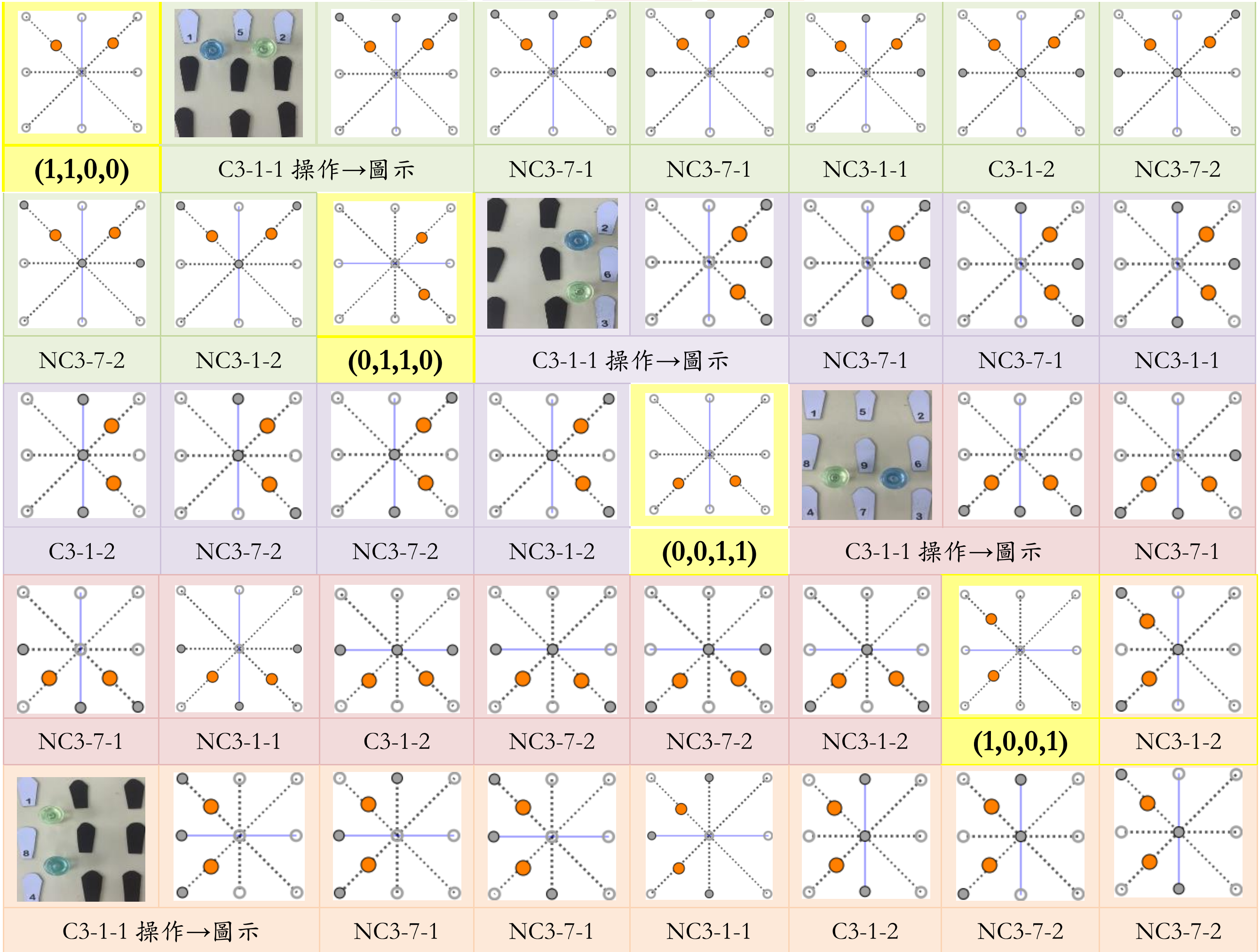
$$起始狀態數 = 組合數 - 1 = \frac{4^{N}+2^{N+A}}{2} - 1$$

二、 立柱可完成的**最大鐘面組合數—*C(p)***

我分析立柱組合必定可以完成的**最大**鐘面組合，結果如下。

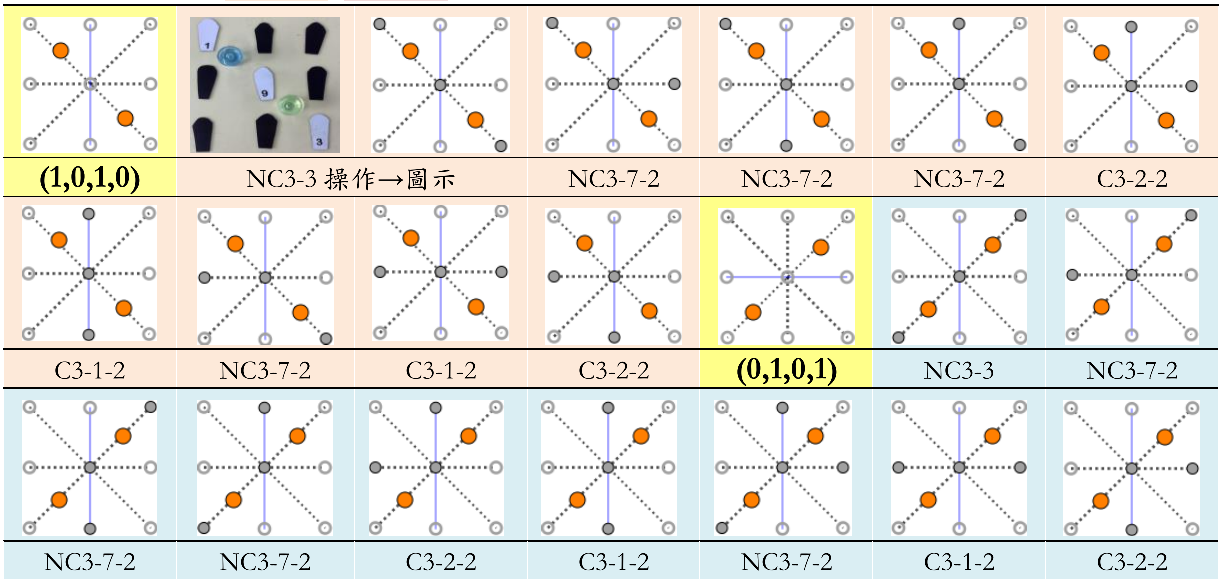
（一） 2 相鄰立柱：(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,0,0,1)

●=立柱●=鐘面



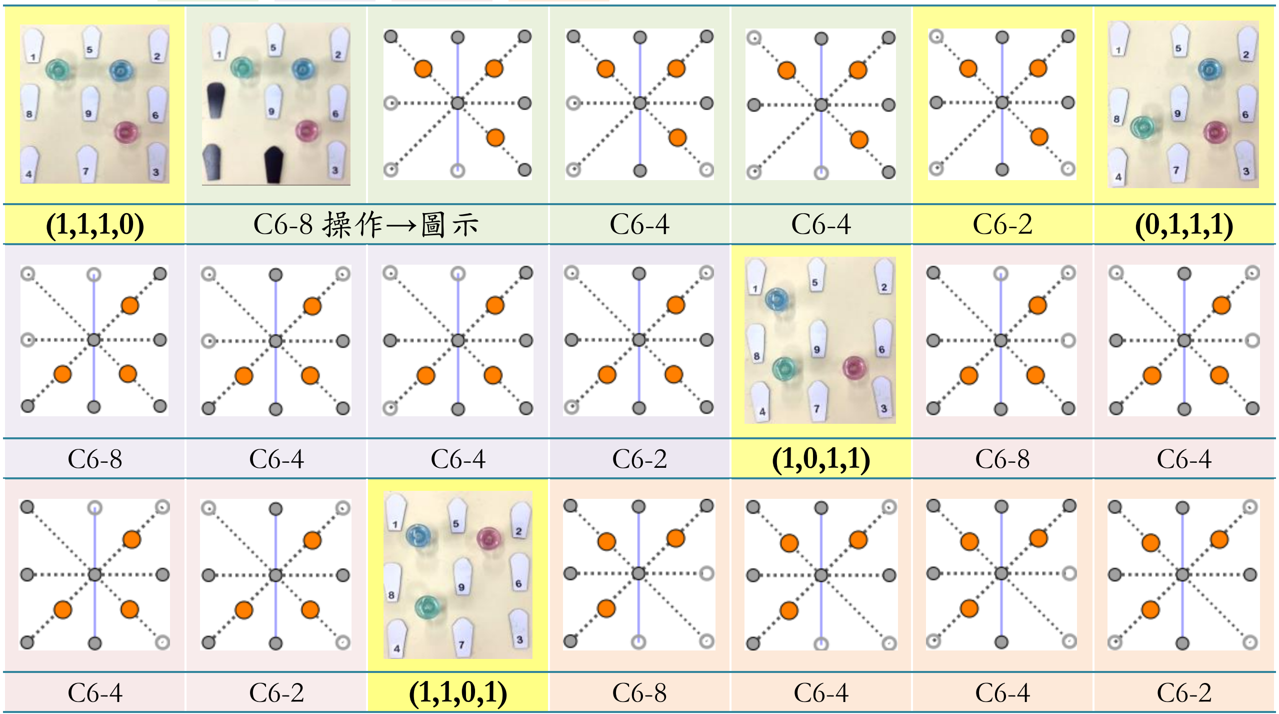
對稱圖為相同時，4 個不對稱的圖會**兩兩成對**，互為鏡像，因此只有 2 個是唯一圖，共有$4+\frac{8-4}{2} = 4+2 = 6$個唯一圖。我歸類分析發現，兩相鄰立柱可以影響的鐘面組合有 8 種，4 種對稱，4 種不對稱。考慮對稱唯一圖後，組合剩下 6 種，明顯對稱的有 **C3-1-1, C3-1-2, NC3-1-2, NC3-1-1**；不具對稱性的只有 2 個，**NC3-7-1, NC3-7-2**。

2 相對立柱：(1,0,1,0), (0,1,0,1) ●=立柱●=鐘面



因為兩立柱相交的範圍只有中心鐘，因此全部 18 張圖皆有中心鐘。剩下兩個差集，有「邊+邊」、「角+邊」、「角+角」，有出現的連方有 4 個，分別為 NC3-3, NC3-7-2, C3-2-2 及 C3-1-2。當有 2 個立柱時，2 立柱斜放影響的連方數較多，因為此時兩個差集較大，有 3 個元素；但 2 立柱直放時，差集只有 2 個元素。

3 個立柱：(1,1,1,0), (0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,1) ●=立柱●=鐘面



三個立柱可以影響的鐘面組合有 4 種，2 種對稱，2 種不對稱。考慮對稱唯一圖後，組合剩下 3 種，對稱的有 **C6-8, C6-2**；不對稱的只有 **C6-4**。

考慮對稱圖為相同時，2 個不對稱的圖會成對，互為鏡像，因此只有 2 個是唯一圖，有$2+(4-2)/2=2+1=3$個唯一圖，和「2 立柱—相鄰」是相同的，可以由對稱圖數(S)及總圖數$(C(p))$得出唯一圖數量：$S+\frac{C(p)-S}{2}=\frac{C(p)+S}{2}$。這是因為相鄰 2 立柱及 3 個立柱的組合都有一條對稱軸，並有「對稱」與「無對稱」兩種類型的圖的緣故。

陸、 結論

一、 立柱與連動範圍

(一) 立柱唯一性：考慮鐘面重疊範圍時，$\mathbf{2 \le n \le 8}$用鐘面**集合**的**交**、**差集**計算；

$\boldsymbol{n = 9}$可以透過**阿達瑪矩陣積**得到連動範圍。

(二) 對稱性：考慮「**雙重對稱**」特性，先以對稱軸刪除部分立柱狀態，再以立柱本身的對稱去除重複的立柱，得到共 **5 種唯一立柱組合**。

(三) 鐘面**圖**分析**：環**的範圍$\mathbf{3 \le C_n \le 8}$；**輪**的範圍$\mathbf{4 \le W_n \le 7}$。

二、 組合數與起始狀態數

(一) 無對稱軸時，鐘面有 n 個的組合，組合數為4^n個，起始狀態數有$4^n - 1$。

(二) 一個對稱軸，對稱軸上有 a 個鐘，全部共有 n 個鐘的鐘面組合，

組合數為 $\frac{4^n+2^{n+a}}{2}$ 個，**起始狀態數**有$\frac{4^n+2^{n+a}}{2} - 1$ 個。

(三) 若對稱圖數為 S，總圖數為$C(p)$，則唯一圖數量為$\frac{C(p)+S}{2}$。

三、 n 鐘面同步轉

$1 \le$ **3鐘面** ≤ 3 有 $1 \le \mathrm{C3} \le 3$、$1 \le \mathrm{NC3} \le 2$；$0 \le$ **4鐘面** ≤ 4 有 $1 \le \mathrm{C4} \le 4$ 、$0 \le \mathrm{NC4} \le 4$；$0 \le$ **5鐘面** ≤ 4 有 $3 \le \mathrm{C5} \le 4$、$0 \le \mathrm{NC5} \le 4$；$3 \le$ **6鐘面** ≤ 5 有 $4 \le \mathrm{C6} \le 5$、$3 \le \mathrm{NC6} \le 5$；$5 \le$ **7鐘面** ≤ 6有$5 \le \mathrm{C7} \le 6$、$\mathrm{NC7} = 5$。**8鐘面** $= 6$。

四、 全部鐘面同步轉

(一) ST 步驟 1~3 和 ST 步驟 4~6 利用正面角鐘連動及反面立柱，分別完成位於兩面右下和左上的2×2區塊，藉由中心鐘面整合，兩個區塊成為(1,0,1,0)的連動範圍。

(二) 只有(1,0,1,0)的立柱符合對稱及包含所有邊鐘的限制，因此是全部鐘面 ST 中，ST1~6 透過**對稱性**建構出的唯一立柱。

(三) 鐘面同步轉在考慮立柱唯一性與鐘面對稱性，彼此獨立的鐘面僅有 14 個，指向 0 的最少步數一定是 7 步。

柒、未來研究建議

本研究將 9 個鐘面採 4 個指向以阿達瑪矩陣積、交集、差集和歐拉圖來研究，可以做為未來不同指向研究的參考工具。

捌、 參考文獻

[1]王俊欽、社培基等(1985 年)。魔術方塊解法的數學理論。第 25 屆國中組數學科作品。

[2]黃靜怡、游又臻等(2007 年)。魔術「方塊」變「平面」。第 47 屆國小組數學科作品。

[3]蘇元惠、廖宜翔等(2011 年)。神奇的魔術方塊-餘數的應用與探討。第 51 屆國小組數學科作品。

[4]劉韋杉、楊佳渝、陳韋綸(2014 年)。簡析魔術方塊 2—魔術方塊公式解之分析。第 54 屆國中組數學科作品。

[5]張鎮華(2017)。演算法觀點的圖論。臺北市：臺大出版中心。

[6] Anonymous. Rubik's Clock has now been solved! https://cube20.org/clock/

[7] Dénes, J. & Mullen, G. L. (1995). Rubik's Clock and Its Solution. *Mathematics Magazine, 68(5),* 378-381.

[8] Million, E.(2007.) The Hadamard product. http://buzzard.ups.edu/courses/2007spring/projects/million-paper.pdf

[9] Peil, Timothy. Readings for Session 5 – (Continued) Complement and Set Difference. https://web.mnstate.edu/peil/MDEV102/U1/S6/Complement3.htm

【評語】080401

此作品探討魯比克鐘的遊戲,主要的研究內容分別是找出所有異構鐘面組合及圖連通特性、立柱數量對鐘面連動範圍的影響及可影響的鐘面數量、n 同步轉的條件為何以及同一指向 0 的最少次數。作品中對於理論的探討內容豐富,但較欠缺與實際操作的連結,如果能針對這部分的內容進行加強,則作品更顯完整。

作品海報

方圓之間 魔錶 3 探秘

研究動機　學期初在一個魔方比賽場合遇到友隊給我的**魔錶**(Rubik's Clock)，我猜想這個玩具的轉法可以用矩陣表現，就著手探究。

研究目的

一. 找出所有異構鐘面組合及圖連通特性。

二. 立柱數量對鐘面連動範圍的影響及可影響的鐘面數量。

三. 研究n同步轉的條件為何以及同一指向0的最少次數。

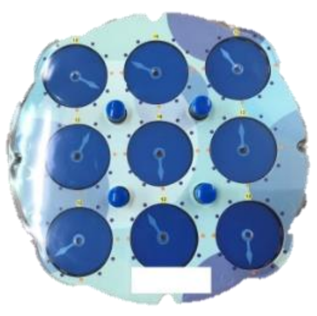


*圖1 魯比克錶

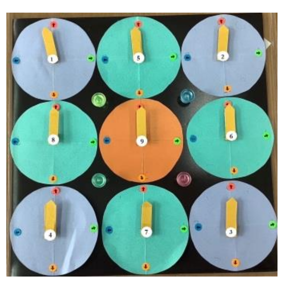


圖2-1 自製鐘面

圖2-2-1 鐘面(正)

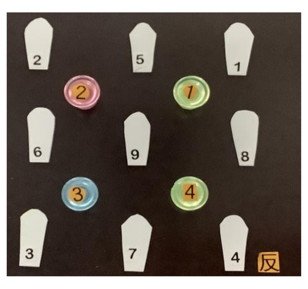


圖2-2-2 鐘面(反)

研究設備及器材

3x3魔錶、USL方塊、磁鐵版和強力磁鐵自製鐘面、筆記本、筆、平板(拍照用*)、電腦(繪圖和處理資料*)、微軟Excel及GeoGebra程式。 ＊資料來源：本研究使用照片和圖片皆研究者自行拍攝、繪製。

名詞釋義　研究過程及方法　文獻分析(略)

1. 鐘面結構：RCK上下兩面各有9個小鐘，指針與一般時鐘相同皆有12個方向。本研究以「**mod 4**」將鐘面訂為4個指向(0,1,2,3)，12點鐘↑0，3點鐘→1，6點鐘↓2，9點鐘←3。
2. 立柱：共4個，圍繞立柱的鐘面會同步旋轉。
3. 鐘面編號有3種，角鐘面C、邊鐘面E和中心鐘面M。
4. 遊戲規則：任意打散鐘面後，旋轉四個角的旋鈕，把指針的混亂狀態調整至全體指向12點鐘。
5. 找出**最少步數**：從指針混亂狀態到全部鐘面皆指向0/12時。

所有非完成狀態的其他狀態都可以當作起始狀態

我的研究重點在於**析出異構n鐘面**，以G= (V, E)表示連通與不連通，**探討連通性與立柱的關係**，進一步解出魔錶**指向同一性最少步數及鐘面組合數**。

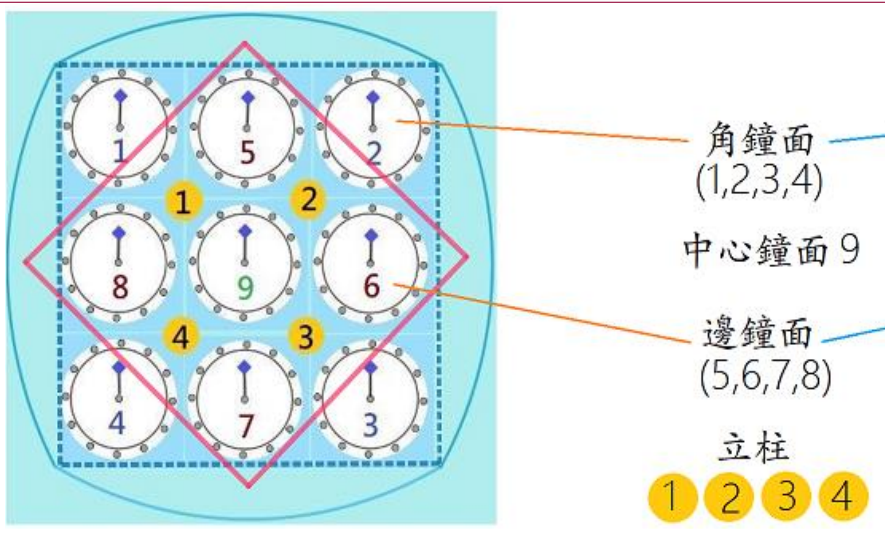


圖3-1

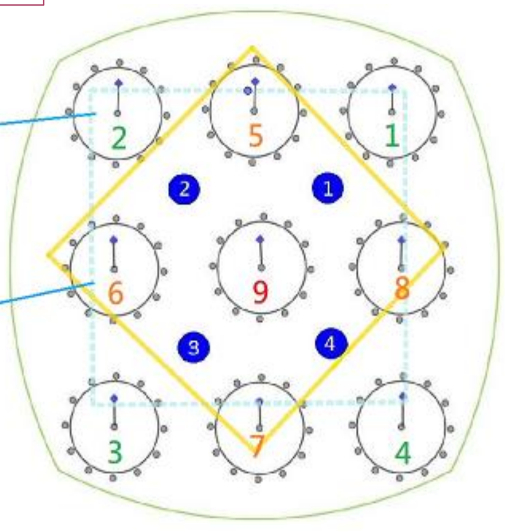


圖3-2

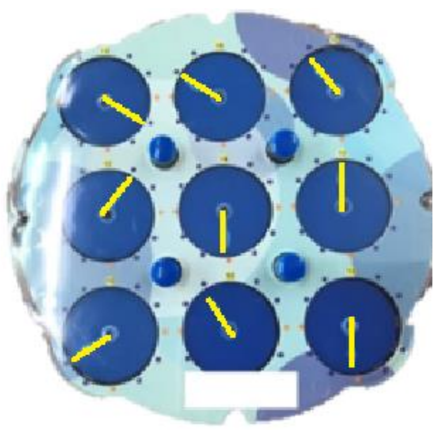


圖3-3

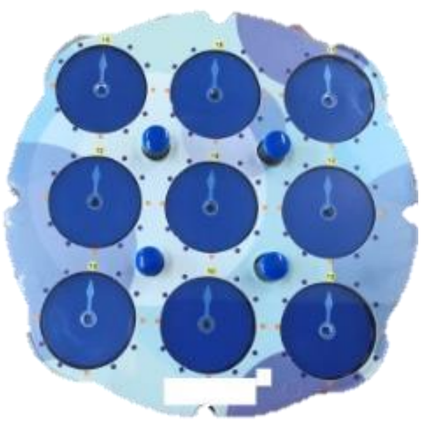


圖3-4

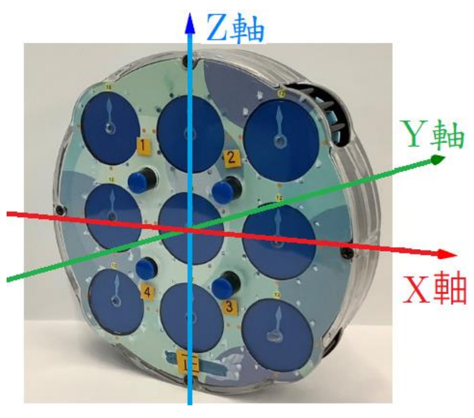


圖4

(一) 對稱軸：包含將RCK翻面的*Flip*：以**x軸**為旋轉軸的***x-Flip***、以**z軸**為旋轉軸的***z-Flip***兩種，及以**y軸**為旋轉軸但**不翻面**的***y-turn***。

(二) 立柱狀態：以*p(pins)*表示，1/0表示有/無，以4元組(4-tuples)表現，(1,1,1,1)表示正面有4個立柱。

(三) *C(p)*是*p*可完成的最大鐘面組合數。

(四) *I(influence)*：指連動範圍，和立柱一起連動的鐘面。

(五) *A(Area)*是影響範圍，轉動過程中全部被改變的鐘面。

(六) *ST*：同步轉(Simultaneous Turns)，正面轉動的同時，反面同步進行　獨立的轉動。

(七) 阿達瑪矩陣積(Hadamard product of matrix)：兩矩陣A和B的阿達瑪矩陣積$A \odot B = C$，將A和B同位置的元素相乘，第i列第j行的元素$c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$。

(八) 集合(set)：由元素(elements)組成的集合體，本研究中的元素為鐘面編號數字。

(九) 簡單圖(graph)有點(vertices)和邊(edges)、是有序對$G = (V, E)$。

(十) 歐拉圖(Eulerian diagram)：點表示鐘面，邊表示立柱控制的連動鐘面範圍。以此形成的無向圖，該圖存在行跡包含的所有邊。

K_n：n點完全圖，點彼此相連；

$\overline{K_n}$：有n個孤立點，沒有邊。

P_n：P是路徑(path)，有n個點，n-1條邊。

C_n：表示n點圈(cycle)，有「起點和終點相同」的n點路徑。

W_n：表示n+1點輪，將C_n的全部頂點都連接到一個新點/完全點後產生的圖。

$K_{m,n}$：完全二分圖，有兩個大小為m, n的點集，兩點相鄰若且唯若屬於不同點集。

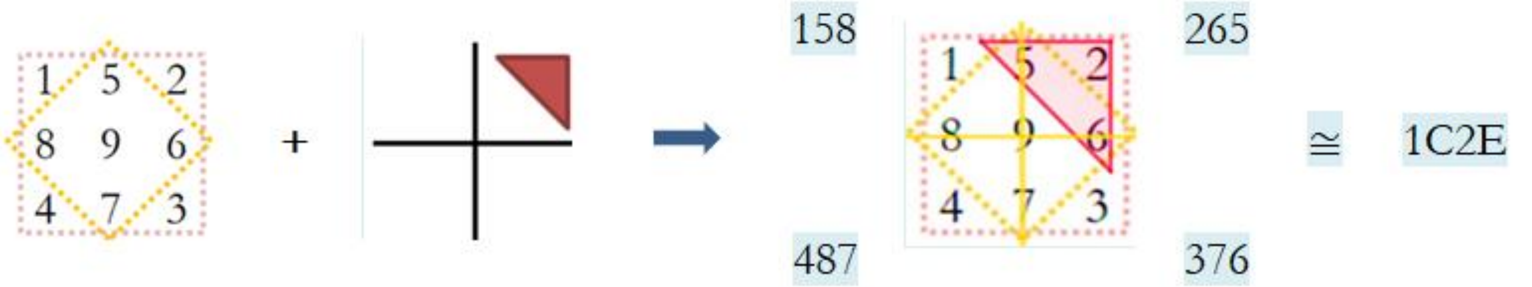
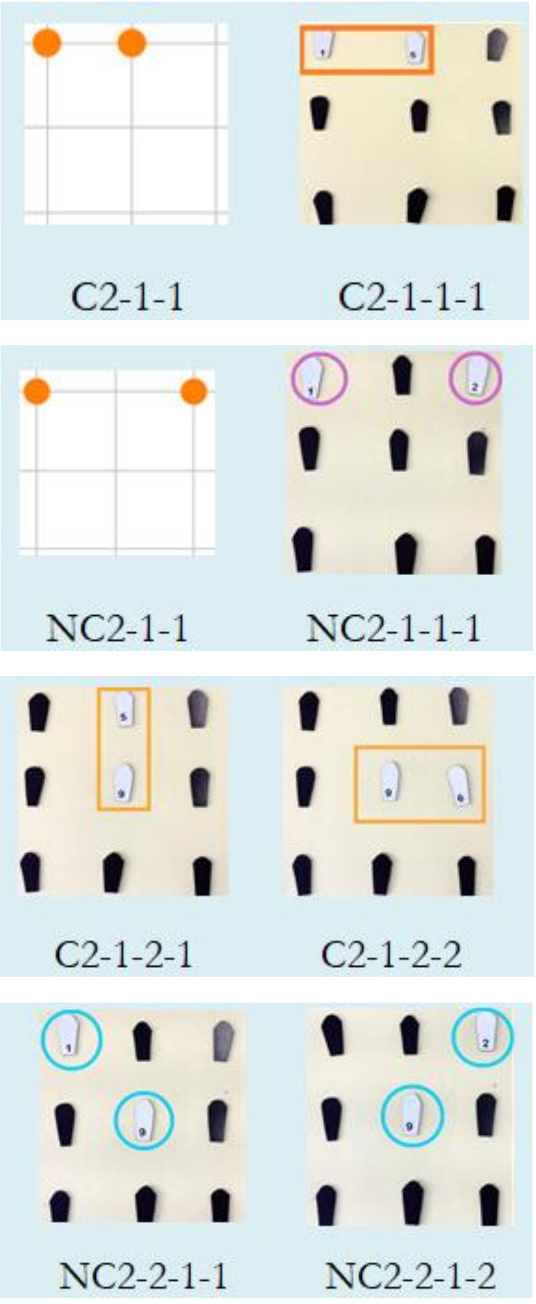
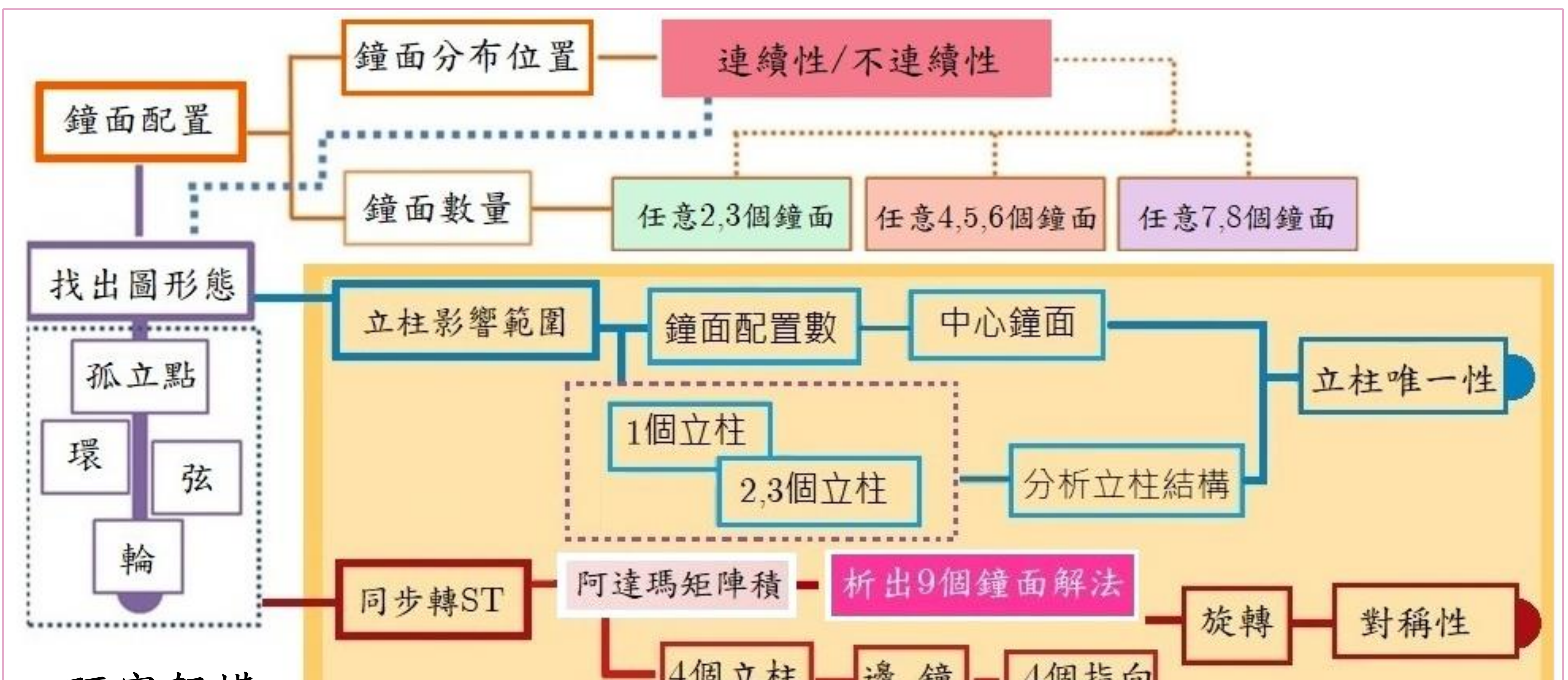


圖5　**檢視異構的方法**

鐘面配置



最小環點配置鐘面=3



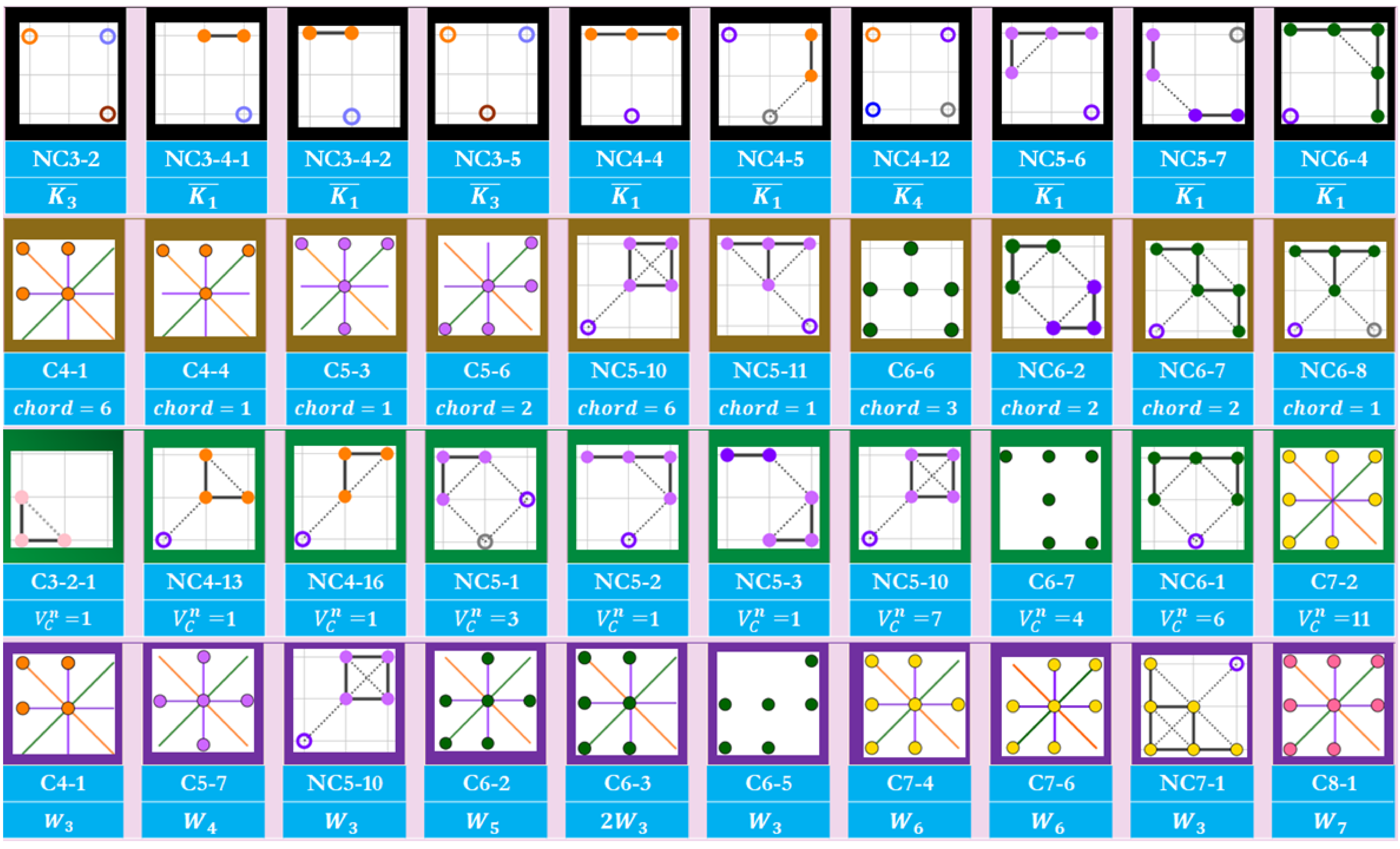
研究架構

圖異構判斷

實線 —— 縱橫邊　虛線 …… 斜邊

弦 ⇨ 環 $3 \le V_C^m \le 8$ ⇨ 輪 $4 \le W_n \le 7$

孤立點　弦　環　輪



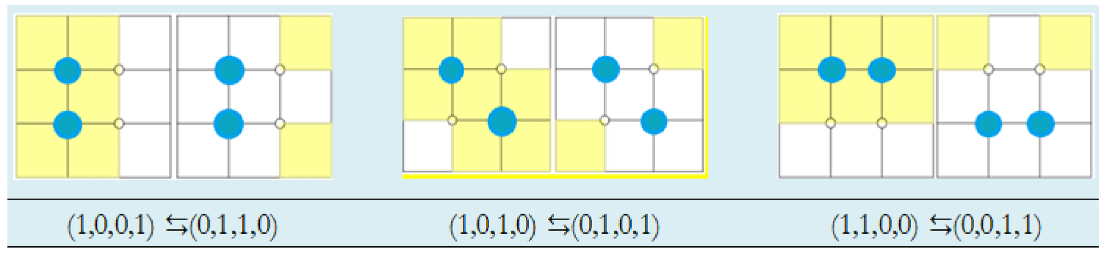


圖10-1~3

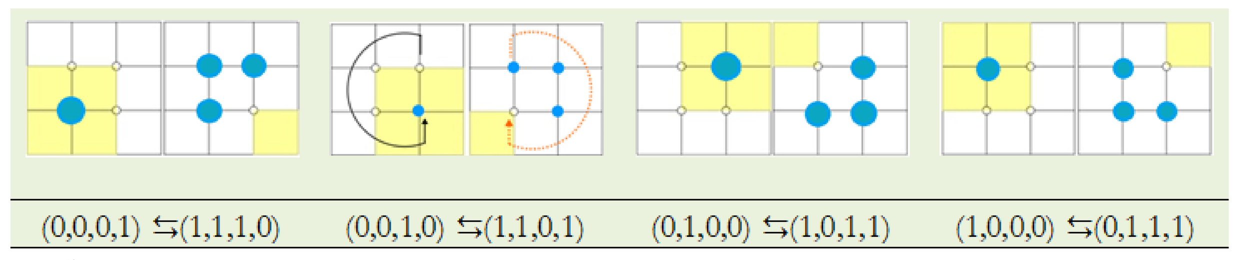


圖9

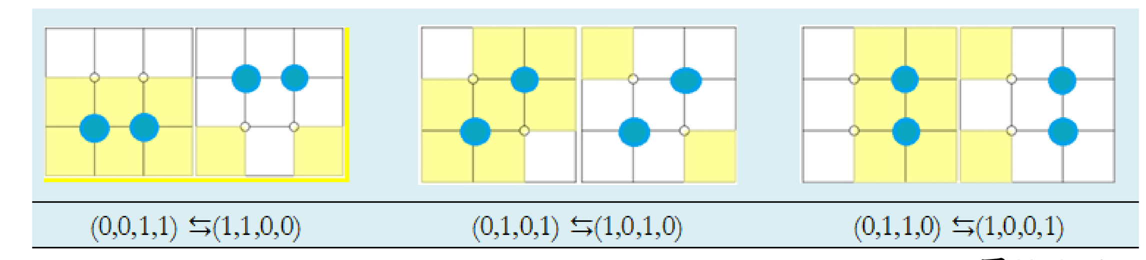


圖10-4~6

立柱連動範圍

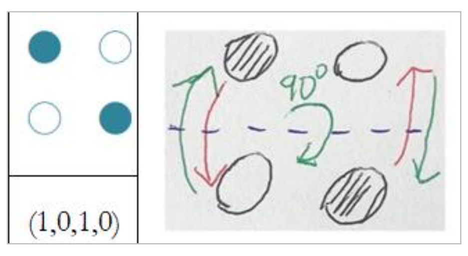


圖7 變換方式(依序變換)

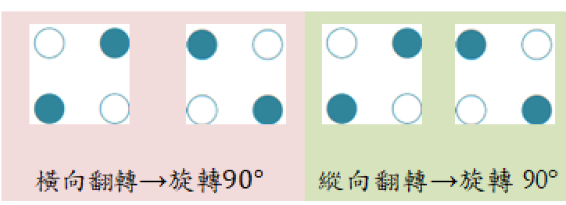


圖8 縱橫翻轉(依序變換)

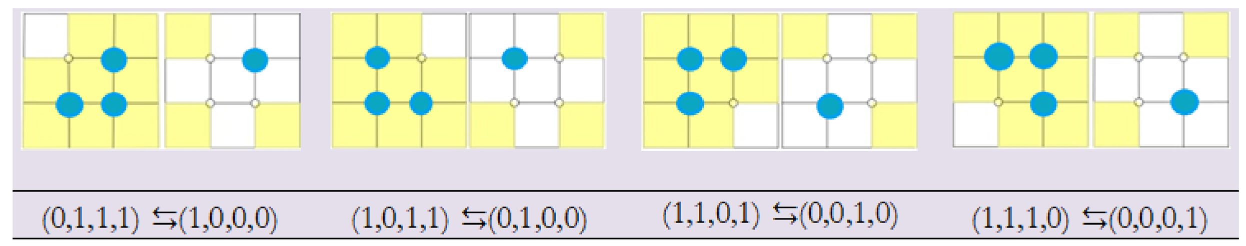


圖11

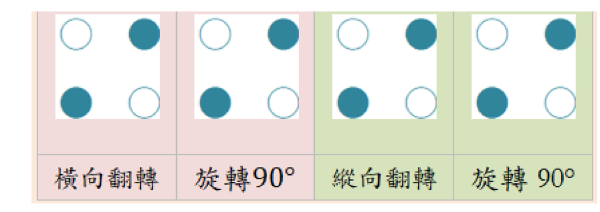


圖8 縱橫翻轉(分開變換)

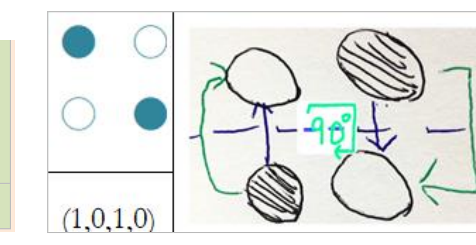


圖7 變換方式(分開變換)

連動範圍的交集與差集

立柱唯一性

阿達瑪矩陣積計算交集

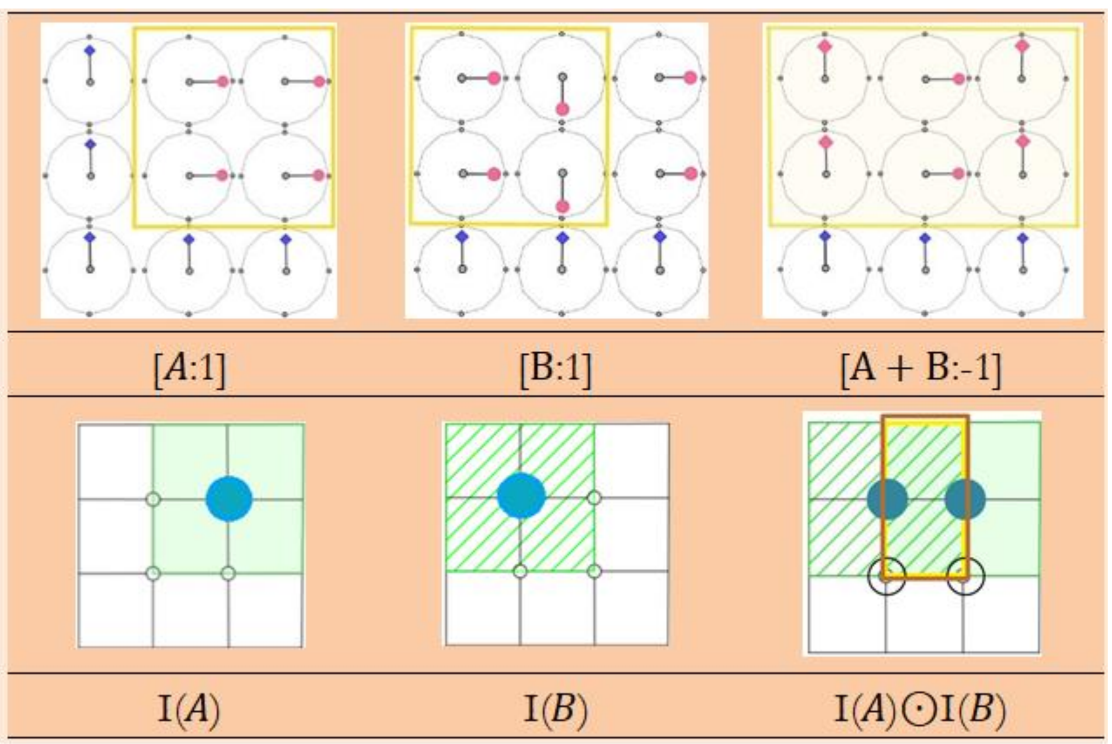


圖13之1~6

$$I(A)\odot I(B)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0\times1&1\times1&1\times0\\0\times1&1\times1&1\times0\\0\times0&0\times0&0\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

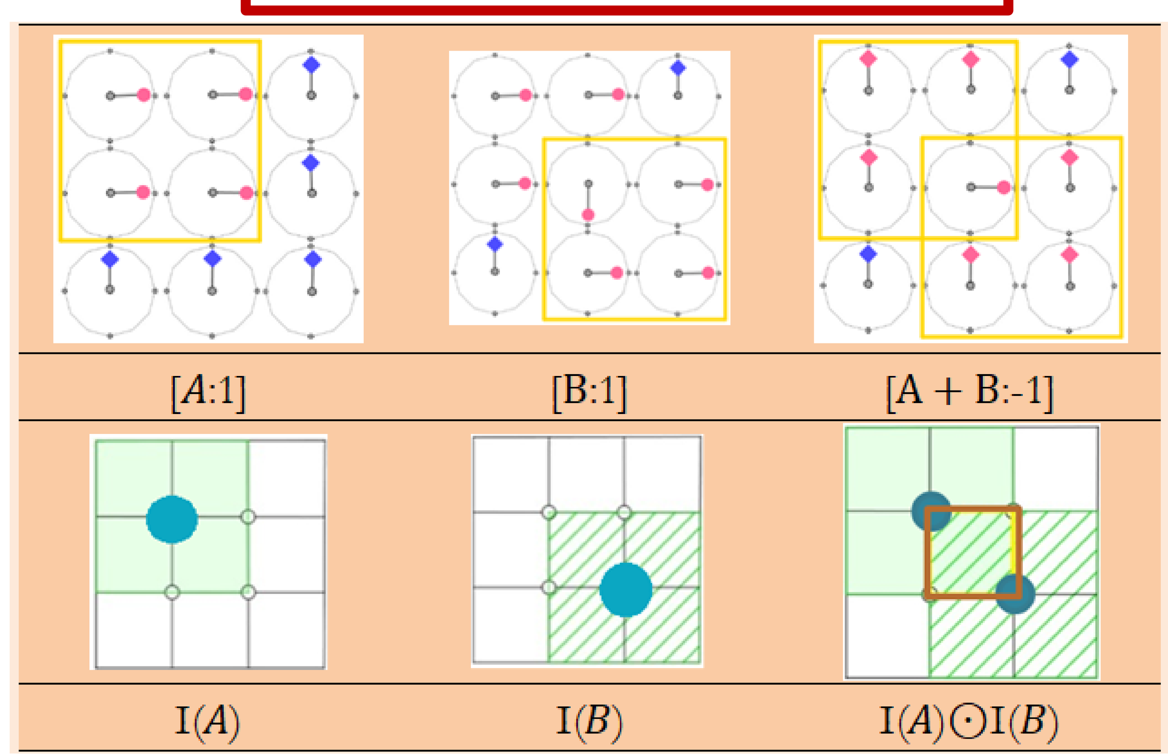


圖14之1~6

$$I(A)\odot I(B)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\times0&1\times0&0\times0\\1\times0&1\times1&0\times1\\0\times0&0\times1&0\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

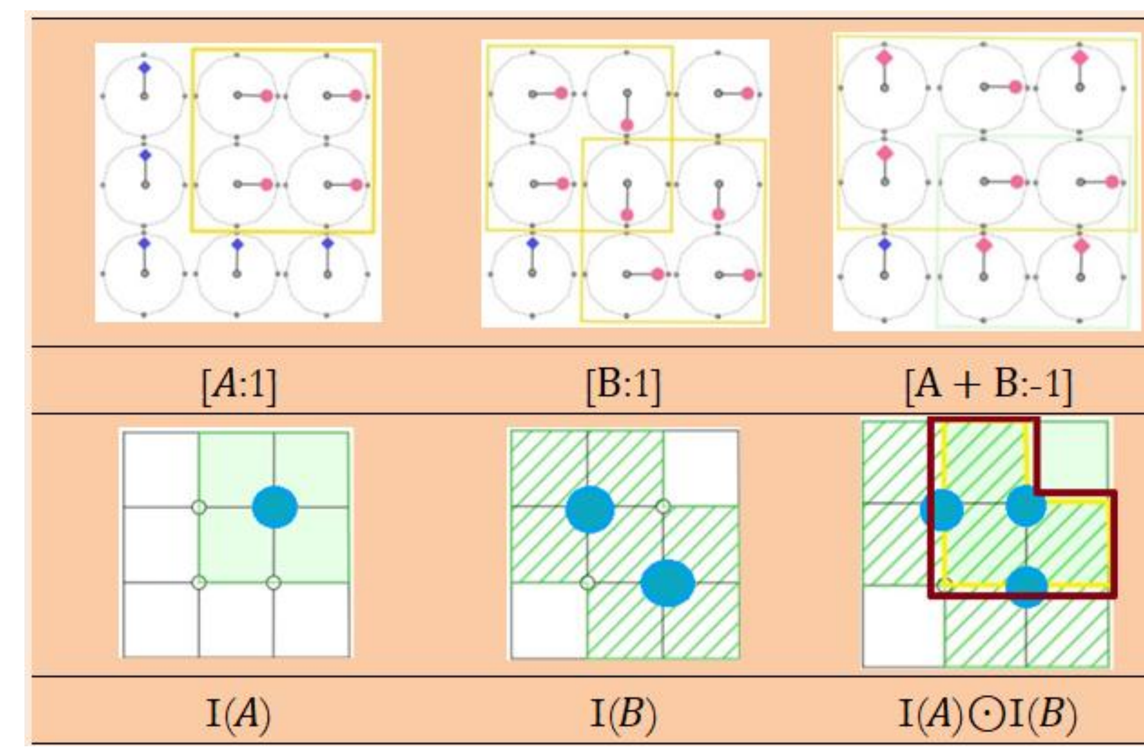


圖15之1~6

$$I(A)\odot I(B)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0\times1&1\times1&1\times0\\0\times1&1\times1&1\times1\\0\times0&0\times1&0\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

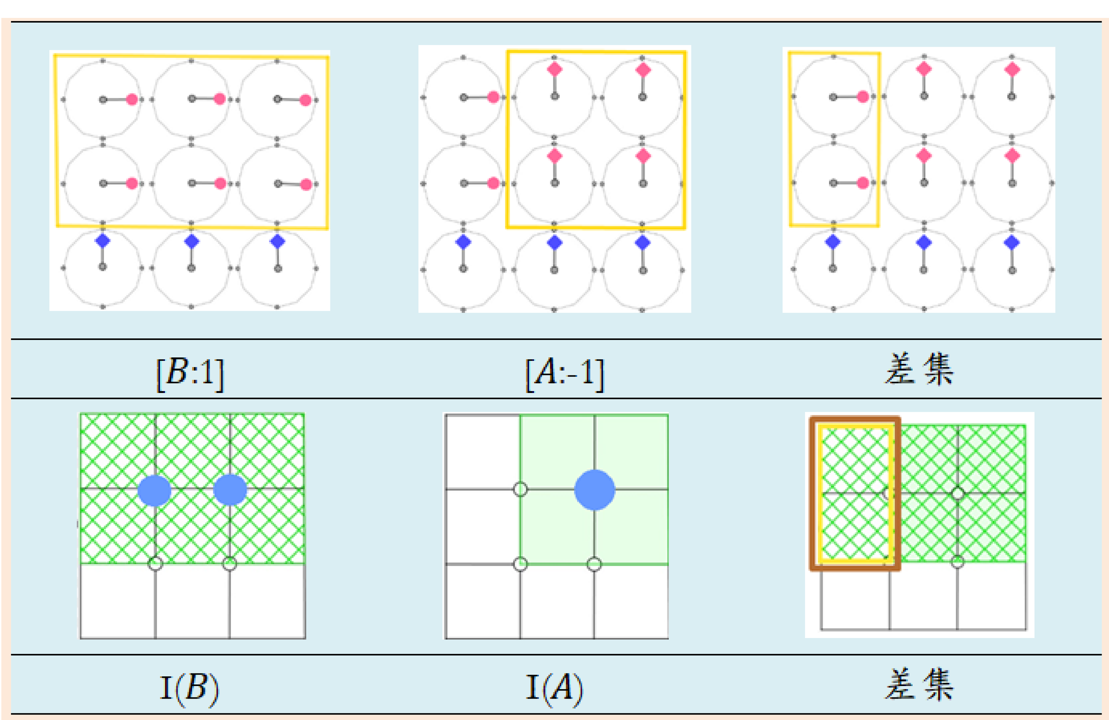


圖16之1~6

$$I(B)-I(A)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1-0&1-1&1-1\\1-0&1-1&1-1\\0-0&0-0&0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

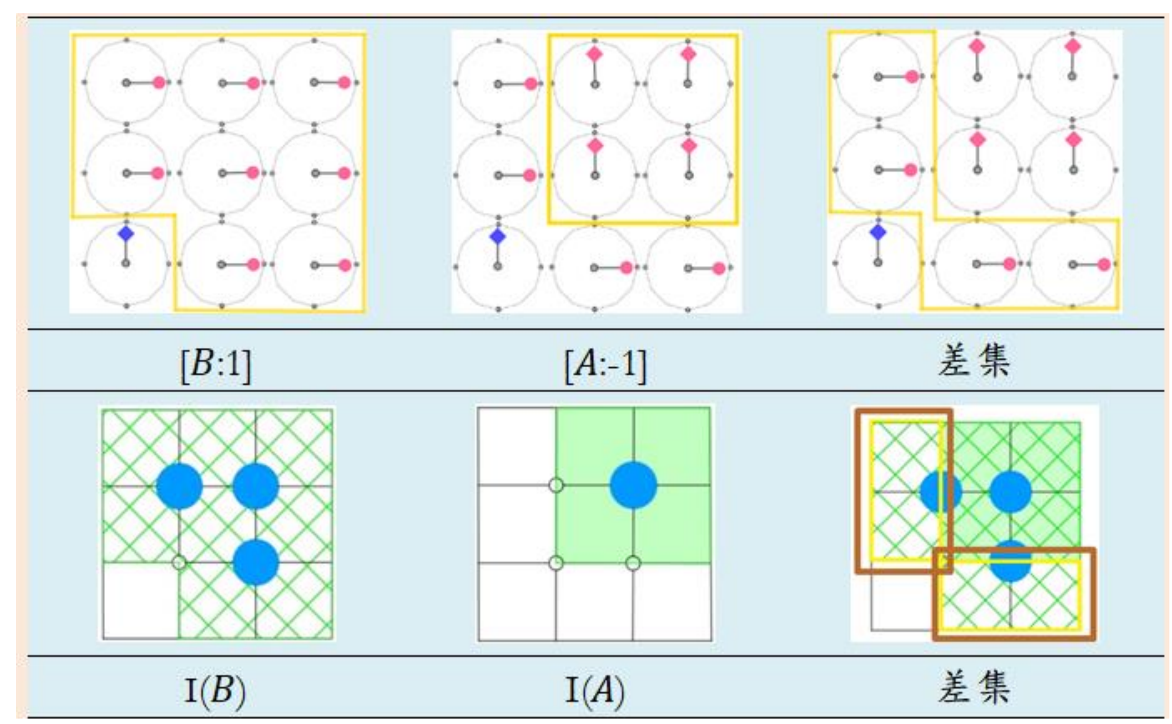


圖17之1~6

$$I(B)-I(A)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1-0&1-1&1-1\\1-0&1-1&1-1\\0-0&1-0&1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

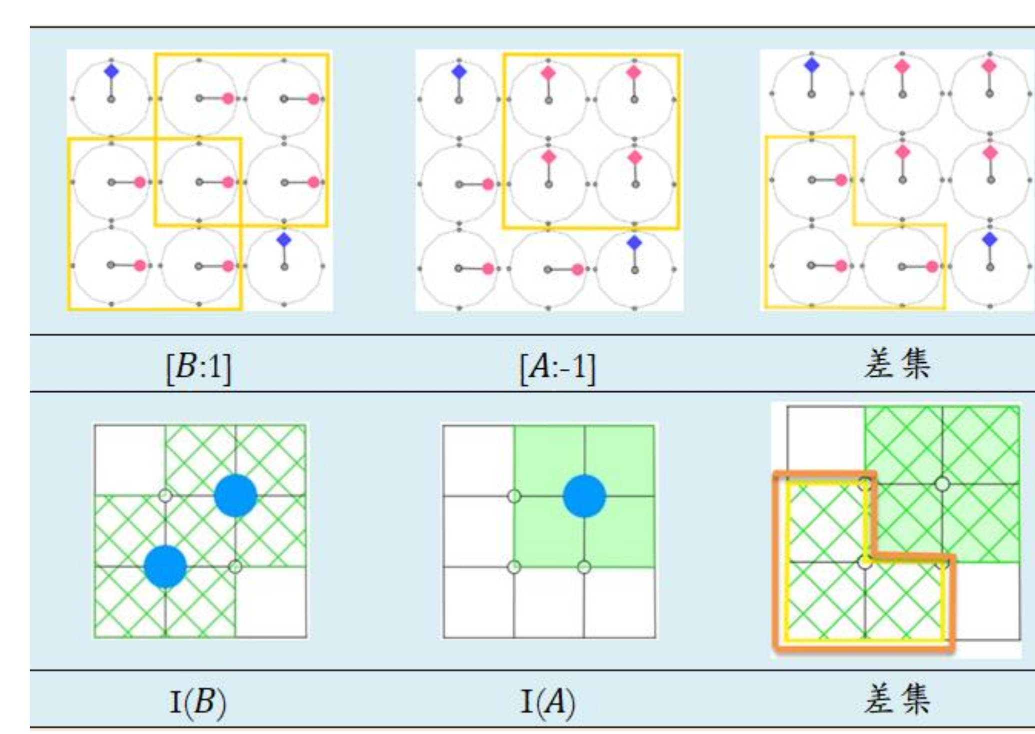


圖18之1~6

$$I(B)-I(A)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0-0&1-1&1-1\\1-0&1-1&1-1\\1-0&1-0&0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

最少步數解—同步轉

ST 1 正面(1,0,1,1) $g-f-d-m=-3$			數值 mod 4			鐘面狀態		
a+g-f-d-m=0+(-3)	e+g-f-d-m=1+(-3)	b+(n-ℓ)=3+(-1)	1	2	2	→	↓	↓
h+g-f-d-m=2+(-3)	i+g-f-d-m=1+(-3)	f+g-f-d-m=3+(-3)	3	2	0	←	↓	↑
d+g-f-d-m=1+(-3)	g+g-f-d-m=1+(-3)	c+g-f-d-m=2+(-3)	2	2	3	↓	↓	←
反面(1,0,0,0) $n-\ell=-1$			數值 mod 4			鐘面狀態		
-b-(n-ℓ)=1-(-1)	j-(n-ℓ)=1-(-1)	-a-(g-f-d-m)=0-(-3)	2	2	3	↓	↓	←
k-(n-ℓ)=0-(-1)	n-(n-ℓ)=2-(-1)	m=0	1	3	0	→	←	↑
-c-(g-f-d-m)=2-(-3)	ℓ=3	-d-(g-f-d-m)=3-(-3)	1	3	2	→	←	↓

ST 2 正面(1,0,0,1) $f-g=3-1=2$			數值 mod 4			鐘面狀態		
a+g-f-d-m+(f-g)=1+2	e+g-f-d-m+(f-g)=2+2	b+n-l+(ℓ-m)=2+3	3	0	1	←	↑	→
h+g-f-d-m+(f-g)=3+2	i+g-f-d-m+(f-g)=2+2	g-d-m=0	1	0	0	→	↑	↑
g-f-m+(f-g)=2+2	2g-f-d-m+(f-g)=2+2	c+g-f-d-m+(ℓ-m)=3+3	0	0	2	↑	↑	↓
反面(1,0,0,1) $\ell-m=3-0=3$			數值 mod 4			鐘面狀態		
ℓ-n-b-(ℓ-m)=2-3	ℓ-n+j-(ℓ-m)=2-3	f+d+m-g-a-(f-g)=3-2	3	3	1	←	←	→
ℓ-n+k-(ℓ-m)=1-3	ℓ-(ℓ-m) =3-3	m=0	2	0	0	↓	↑	↑
f+d+m-g-c-(ℓ-m)=1-3	ℓ-(ℓ-m) =3-3	f+m-g-(f-g) =2-2	2	0	0	↓	↑	↑

ST 3 正面(1,0,0,0) $g-i=1-1=0$			數值 mod 4			鐘面狀態		
a-d-m+(g-i)=3+0	e-d-m+(g-i)=0+0	b+n-m+(f-c+m-ℓ)=1+2	3	0	3	←	↑	←
h-d-m+(g-i)=1+0	i-d-m+(g-i) =0+0	g-d-m=0	1	0	0	→	↑	↑
-m+(f-c+m-ℓ)=0+2	g-d-m=0	c+g-f-d-2m+ℓ+(f-c+m-ℓ)=2+2	2	0	0	↓	↑	↑
反面(1,0,1,1) $f-c+m-\ell=3-2+0-3\equiv2$			數值 mod 4			鐘面狀態		
m-n-b -(f-c+m-ℓ)=3-2	j+m-n-(f-c+m-ℓ)=3-2	d+m-a-(g-i)=1-0	1	1	1	→	→	→
k+m-n-(f-c+m-ℓ)=2-2	m-(f-c+m-ℓ)=0-2	m-(f-c+m-ℓ)=0-2	0	2	2	↑	↓	↓
f+d+2m-g-c-ℓ-(f-c+m-ℓ)=2-2	m-(f-c+m-ℓ)=0-2	m-(f-c+m-ℓ)=0-2	0	2	2	↑	↓	↓

正面 c-f+l⟹A=2			數值 mod 4			鐘面狀態		
A=2	A=2	-B=0	2	2	0	↓	↓	↑
A=2	A=2	k-n+c-f+ℓ=0	2	2	0	↓	↓	↑
d+m-a+i-g=1	j-n+c-f+ℓ=1	c-f+ℓ-n-b=1	1	1	1	→	→	→
反面 g-d-m⟹B=0			數值 mod 4			鐘面狀態		
B=0	B=0	-A=2	0	0	2	↑	↑	↓
B=0	B=0	h-d-m+g-i=1	0	0	1	↑	↑	→
b+n-c+f-ℓ=3	e-d-m+g-i=0	a-d-m+g-i=3	3	0	3	←	↑	←

x-Flip

ST 4 正面(1,0,1,1) $j-k+a-h=1-0+0-2\equiv3$			數值 mod 4			鐘面狀態		
A+(j-k+a-h)=2+3	A+(j-k+a-h)=2+3	-B+(i-e)=0+0	1	1	0	→	→	↑
A+(j-k+a-h)=2+3	A+(j-k+a-h)=2+3	k-n+c-f+l+(j-k+a-h) =0+3	1	1	3	→	→	←
d+m-a+i-g+(j-k+a-h) =1+3	j-n+c-f+l+(j-k+a-h) =1+3	c-f+l-n-b+(j-k+a-h) =1+3	0	0	0	↑	↑	↑
反面(1,0,0,0) $i-e=1-1=0$			數值 mod 4			鐘面狀態		
B-(i-e)=0-0	B-(i-e)=0-0	-A-(j-k+a-h)=2-3	0	0	3	↑	↑	←
B-(i-e)=0-0	B-(i-e)=0-0	h-d-m+g-i=1	0	0	1	↑	↑	→
b+n-c+f-l-(j-k+a-h)=3-3	e-d-m+g-i=0	a-d-m+g-i-(j-k+a-h)=3-3	0	0	0	↑	↑	↑

起始混散狀態 ⟶ 指向同一

ST 5 正面(1,0,0,1) $k-j=0-1\equiv3$			數值 mod 4			鐘面狀態		
A+j-k+a-h+(k-j)=1+3	A+j-k+a-h+(k-j)=1+3	i-e-B+(e-h)=0+3	0	0	3	↑	↑	←
A+j-k+a-h+(k-j)=1+3	A+j-k+a-h+(k-j)=1+3	A+j+a-h-n=3	0	0	3	↑	↑	←
d+m+i-g+j-k-h+(k-j) =0+3	2j-n+A-k+a-h+(k-j) =0+3	A-n-b+j-k+a-h+(e-h) =0+3	3	3	3	←	←	←
反面(1,0,0,1) $e-h=1-2\equiv3$			數值 mod 4			鐘面狀態		
B+e-i-(e-h)=0-3	B+e-i-(e-h)=0-3	k-a+h-j-A-(k-j)=3-3	1	1	0	→	→	↑
B+e-i-(e-h)=0-3	B+e-i-(e-h)=0-3	h+B-i=1	1	1	1	→	→	→
b+n-A-j+k-a+h-(e-h)=0-3	B+e-i-(e-h)=0-3	B-i-j+k+h-(k-j)=0-3	1	1	1	→	→	→

ST 6 正面(1,0,0,0) $j-n=1-2\equiv3$			數值 mod 4			鐘面狀態		
(j-n)+A+a-h=0+3	(j-n)+A+a-h=0+3	i-B-h+(k+b+h-e)=3	3	3	3	←	←	←
(j-n)+A+a-h=0+3	(j-n)+A+a-h=0+3	j-n+A+a-h=3	3	3	3	←	←	←
i-B-h+(k+b+h-e) =3	j-n+A+a-h=3	A-n-b+j-k+a-2h+e + (k+b+h-e) =3	3	3	3	←	←	←
反面(1,0,1,1) $k+b+h-e=0+3+2-1\equiv0$			數值 mod 4			鐘面狀態		
B-i+h-(k+b+h-e)=1-0	B-i+h-(k+b+h-e)=1-0	h-A-a-(j-n)=0+1	1	1	1	→	→	→
B-i+h-(k+b+h-e)=1-0	B-i+h-(k+b+h-e)=1-0	B-i+h-(k+b+h-e)=1-0	1	1	1	→	→	→
b+n-A-j+k-a+2h-e -(k+b+h-e)=1-0	B-i+h-(k+b+h-e) =1-0	B-i+h-(k+b+h-e) =1-0	1	1	1	→	→	→

ST 7 正面(1,0,1,0) $n-j-A-a+h=2-1-2-0+2=1$			數值 mod 4			鐘面狀態		
j-n+A+a-h+ (n-j-A-a+h)=3+1	j-n+A+a-h+ (n-j-A-a+h)=3+1	i-B+k+b-e+ (i-B+k+b-e)=3+1	0	0	0	↑	↑	↑
j-n+A+a-h+ (n-j-A-a+h)=3+1	j-n+A+a-h+ (n-j-A-a+h)=3+1	j-n+A+a-h+ (n-j-A-a+h)=3+1	0	0	0	↑	↑	↑
j-n+A+a-h+ (n-j-A-a+h)=3+1	j-n+A+a-h+ (n-j-A-a+h)=3+1	j-n+A+a-h+ (n-j-A-a+h)=3+1	0	0	0	↑	↑	↑
反面(1,0,1,0) $-i-k-b+e=0-1-0-3+1\equiv1$			數值 mod 4			鐘面狀態		
B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	n-A-j-a+h- (n-j-A-a+h)=1-1	0	0	0	↑	↑	↑
B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	0	0	0	↑	↑	↑
B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	B-i-k-b+e- (i-B+k+b-e)=1-1	0	0	0	↑	↑	↑

表3 *NC3*　　直　斜

始混散狀態		完成指向	指向同一最少步			圖(V,E)特徵			
鐘面配置		組合數	立柱順序	指123-指0- 鐘面數			直 $\overline{K_n}$	直 P_n	斜 $\overline{K_n}$	斜 P_n
NC3-2	123	39	1→2→3	3	3	8	3	0	3	0
NC3-4-1	235	63	1→2→3	3	3	8	1	2	1	2
NC3-4-2	157	63	4→2→1	3	3	8	1	2	1	2
NC3-5	127	39	1→1,2→1,2,3,4	2	3	9	3	0	3	0

表4 *C3*

C3-2-1	158	39	1→2→4	2	3	8	3	0	0	3

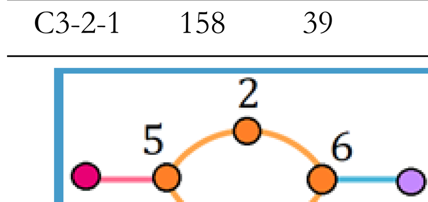


圖 22 立柱影響的歐拉圖

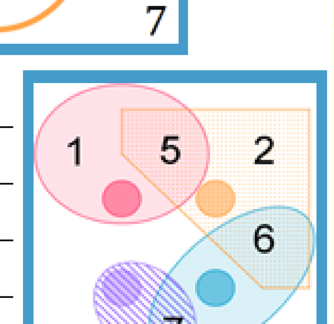


圖 21 原 NC5-2 正面配置

表5 *NC4*

鐘面配置		組合數	立柱順序	指0123指0 鐘面數			類別	$\overline{K_n}$	C_n	mP_n	$K_{m,n}$
NC4-4	1257-1	159	1→2→1,2→3	4	4	8	斜	1	0	(1,3)	(0,0)
NC4-5	1267-1	255	1→2→3→4	4	4	9	直	2	0	(1,2)	(0,0)
NC4-12	1234	54	1→2→3→4	3	3	9	直	4	0	(0,0)	(0,0)
NC4-13	5694-1	159	4→1→3→1,3	3	4	8	斜	0	3	(1,2)	(0,0)
NC4-16	2459-1	255	2→4→1,4→2,4	3	4	8	斜	0	3	(1,2)	(0,0)

表6 *C4*

C4-1	2569	159	2→3→1→4	4	4	9	直	4	(0,0)	(0,0)	0
C4-4	5679-1	159	4→1→3→2,3	3	4	9	斜	4	(1,2)	(0,0)	0

表7 *NC5*

鐘面配置	組合數		立柱順序	指0123 →指0		鐘面數	圖形類別	$\overline{K_n}$	mC_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n
NC5-1	15678	543	1→2→3→4→3,4	5	5	9	斜	0	(1,5)	(1,1)	(0,0)	0
NC5-2	12567	1023	1→2→1,2→4→3	5	5	9	斜	0	(1,3)	(2,1)	(0,0)	0
NC5-10	24569	639	1→3→4→2→2,4	4	5	9	斜	0	(0,0)	(1,2)	(0,0)	4

1,5,2 鐘面+1,2 立柱 ⟶ 6,7 鐘面+3,4 立柱

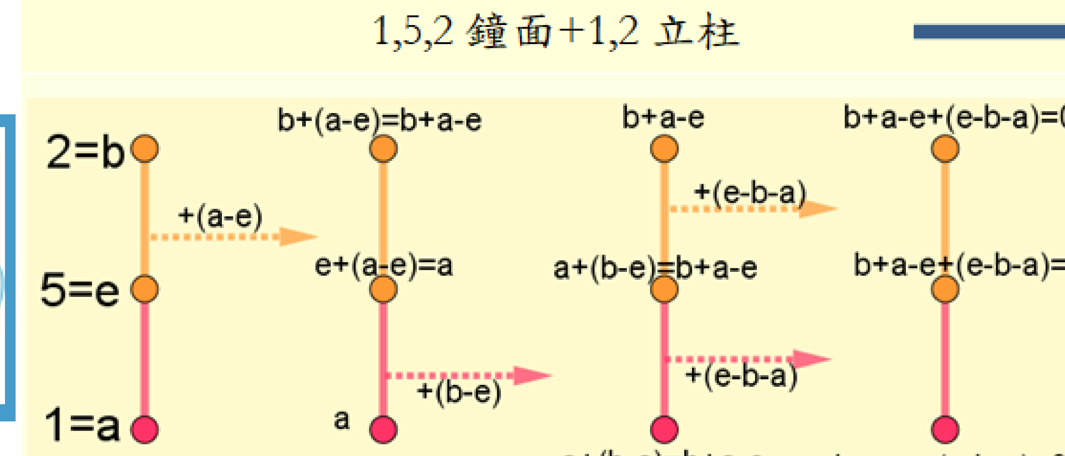


圖 23 第 1 階段 3 步解

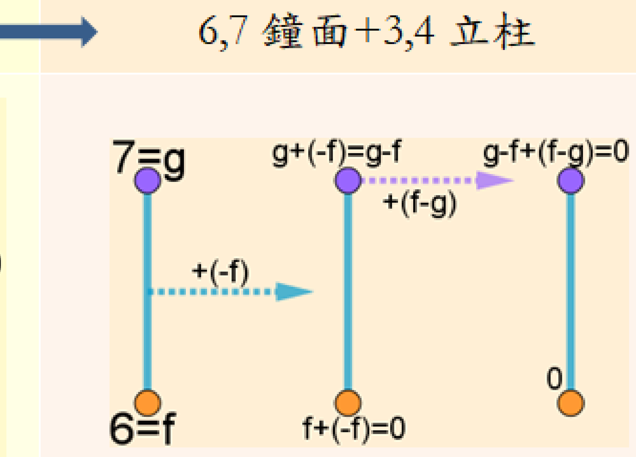


圖 24 第 2 階段 2 步解

鐘面組合數

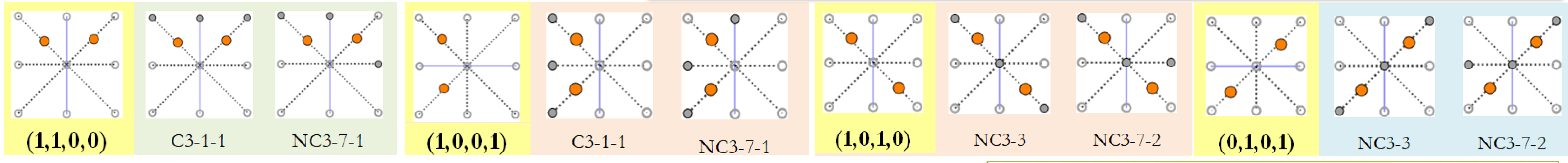
NC124567=4095
C 1256789=8703
C 12356789=33279
C 123456789=35919

表8　*C5*

鐘面組合	組合數	立柱順序	指0123 →指0		鐘面數	圖形類別	mC_n	mP_n	$K_{m,n}$	K_n	W_n
C5-3 12579	639	1→4→1,4→2,3→1,2,3,4	4	5	9	直	(0,0)	(1,2)	(1,3)	0	0
						斜	(1,4)	(2,2)	(0,0)	0	0
C5-6 13569-1	543	1→4→2→1,2→1,2,3	4	5	9	斜	(2,3)	(1,2)	(0,0)	0	0
C5-7 56789	219	1→4→2→2,3→1,2,3,4	4	5	9	直	(0,0)	(0,0)	(1,4)	0	0
						斜	(0,0)	(0,0)	(0,0)	0	4

$C(p)$必定可以完成的最大鐘面組合

$C(2)$



n個鐘相同 $4^A\times 4^B\times 3^{B-n}\times 1^n\times C_n^B=4^{A+B}3^{B-n}C_n^B\rightarrow\frac{1}{2}\rightarrow 4^{A+B}+4^{A+B}\sum_{n=0}^{B-1}\frac{3^{B-n}C_n^B}{2}$

【引理】 $f(B)=\sum_{n=0}^{B-1}3^{B-n}C_n^B=4^B-1$

【定理】 有一對稱軸，且對稱軸上有A個鐘，不在對稱軸上有2B個鐘，組合數為$\frac{4^{A+2B}+4^{A+B}}{2}$個，起始狀態數有$\frac{4^{A+2B}+4^{A+B}}{2}-1$個。

$$C_{n+1}^{x+1}-C_n^x$$
$$=\frac{(x+1)!}{(n+1)!\,((x+1)-(n+1))!}-\frac{x!}{n!\,(x-n)!}$$
$$=\frac{x!\,(x+1)}{(n+1)!\,(x-n)!}-\frac{x!\,(n+1)}{(n+1)!\,(x-n)!}$$
$$=\frac{x!\,(x-n)}{(n+1)!\,(x-n)!}$$
$$=\frac{x!}{(n+1)!\,(x-(n+1))!}=C_{n+1}^x$$

【證明】

組合數＝對稱圖＋$\frac{非對稱圖}{2}$

$$=4^{A+B}+4^{A+B}\sum_{n=0}^{B-1}\frac{3^{B-n}C_n^B}{2}$$
$$=4^{A+B}+\frac{4^{A+B}(4^B-1)}{2}=4^{A+B}\left(1+\frac{4^B-1}{2}\right)$$
$$=4^{A+B}\left(\frac{4^B+1}{2}\right)=\frac{4^{A+2B}+4^{A+B}}{2}$$

$$f(x+1)-f(x)$$
$$=3^{x+1}+3^xC_1^x+3^{x-1}C_2^x+\cdots+3^2C_{x-1}^x+3^1C_x^x$$
$$=3(\mathbf{3^x+3^{x-1}C_1^x+3^{x-2}C_2^x}+\cdots+\mathbf{3^1C_{x-1}^x}+1)$$
$$=3(\boldsymbol{f(x)}+1)$$

$f(x+1)-f(x)=3f(x)+3$，得**遞迴$\boldsymbol{f(x+1)=4f(x)+3}$**

$$f(x)=4f(x-1)+3\quad(x\geq 2)$$
$$=4(f(x-1)+1)-1=4(4(f(x-2)+1)-1+1)-1$$
$$=4^2\,(f(x-2)+1)-1=4^2(4(f(x-3)+1)-1+1)-1$$
$$=4^3\,(f(x-3)+1)-1=4^3(4(f(x-4)+1)-1+1)-1\cdots$$
$$=4^{x-1}(f(1)+1)-1=4^x-1\quad(x\geq 2)$$

當$x=1$時，引理也成立。故對所有正整數B，

$$\sum_{n=0}^{B-1}3^{B-n}C_n^B=4^B-1\ \blacksquare$$

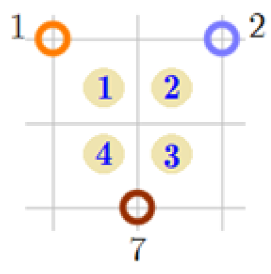


圖 25 NC3-5 正面範圍

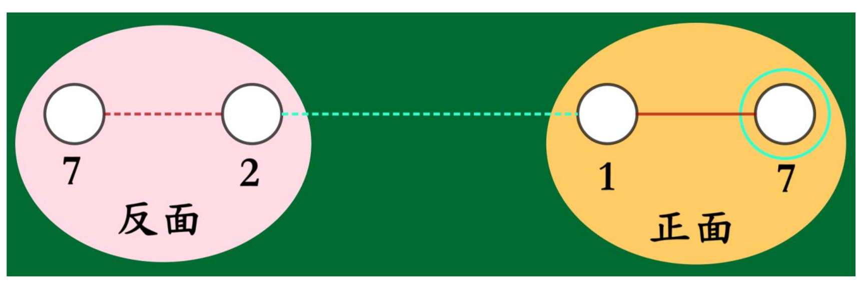


圖 27 NC3-5 雙面歐拉圖

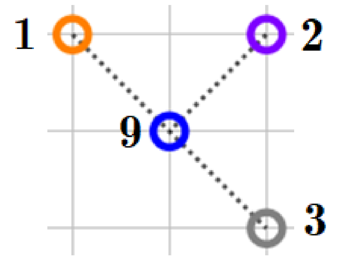


圖 28 NC4-17 正面範圍

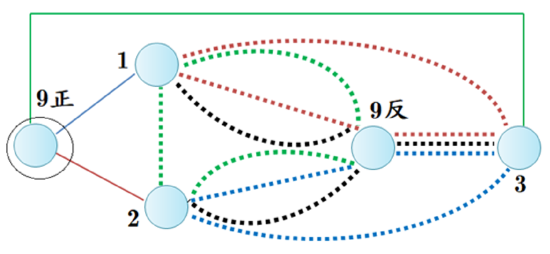


圖 29 NC4-17 雙面歐拉圖

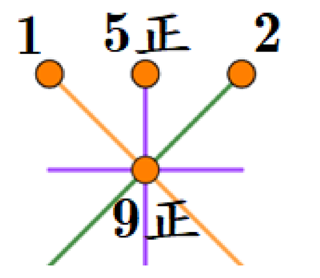


圖 30 C4-4 正面範圍

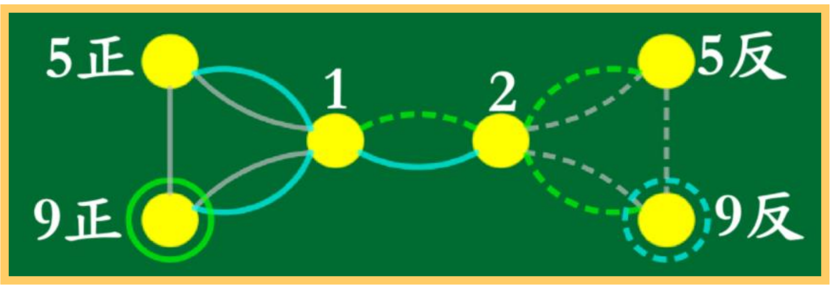


圖 31 C4-4 雙面歐拉圖

起始狀態＝組合數 -1 ＝ $\frac{4^{A+2B}+4^{A+B}}{2}-1$

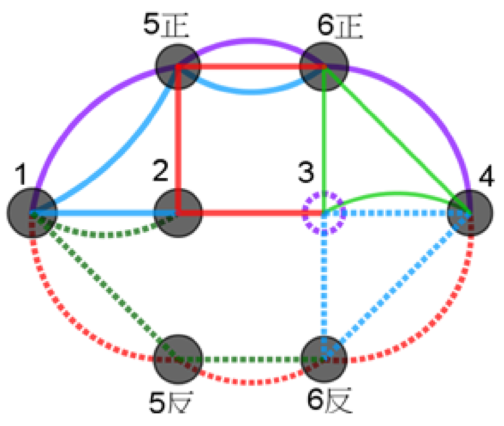


圖 33 NC6-4 同步轉的歐拉圖

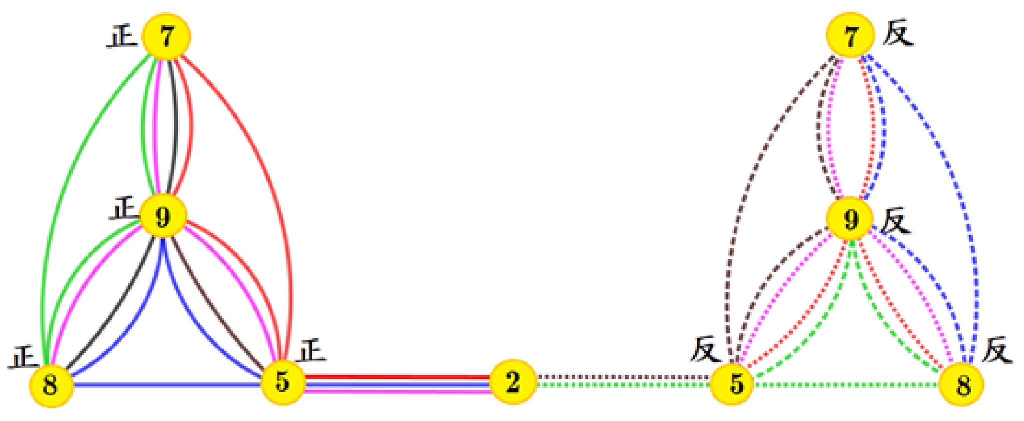


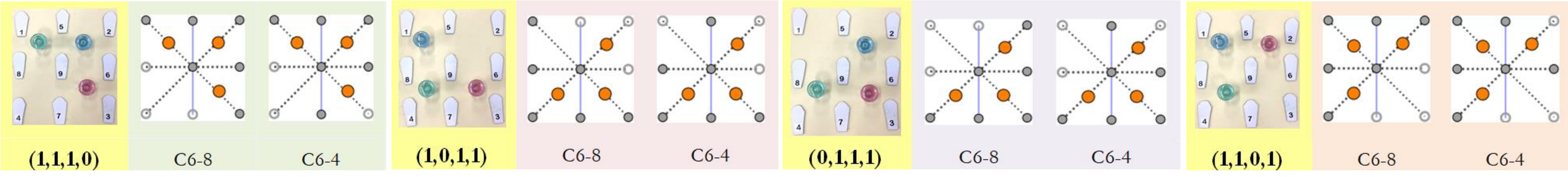
圖 32 C5-1 同步轉的歐拉圖

【推論】

有一個對稱軸，且對稱軸上有A個鐘，全部共有N個鐘，組合數為$\frac{4^N+2^{N+A}}{2}$個，起始狀態數有$\frac{4^N+2^{N+A}}{2}-1$。

【證明】 $N=A+2B$ 組合數＝$\frac{4^{A+2B}+4^{A+B}}{2}=\frac{4^N+4^{N-B}}{2}=\frac{4^N+4^{N-\frac{N-A}{2}}}{2}=\frac{4^N+4^{\frac{2N-(N-A)}{2}}}{2}=\frac{4^N+4^{\frac{N+A}{2}}}{2}=\frac{4^N+2^{N+A}}{2}$

$C(3)$



(S)及$\boldsymbol{C(p)}$→唯一圖數量：$\mathbf{S}+\frac{\mathbf{C(p)-S}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{C(p)+S}}{\mathbf{2}}$ 相鄰2立柱 3個立柱 ⇨ 1 條對稱軸 ⇨ 對稱、無對稱

成對互為鏡像：$\mathbf{2}+\frac{\mathbf{4-2}}{\mathbf{2}}=2+1=3$個唯一圖

結論 一、立柱與連動範圍

立柱唯一性 考慮鐘面重疊範圍時，$\boldsymbol{2\leq n\leq 8}$用鐘面**集合的交、差集**計算；$\boldsymbol{n=9}$可以**阿達瑪矩陣積**得到連動範圍。

對稱性 考慮「**雙重對稱**」特性，先以對稱軸刪除部分立柱狀態，再以立柱本身的對稱去除重複的立柱，得到共**5種唯一立柱組合**。

鐘面圖 環的範圍 $\boldsymbol{3\leq C_n\leq 8}$ 輪的範圍 $\boldsymbol{4\leq W_n\leq 7}$

二、組合數與起始狀態

對稱軸=0，鐘面有n個的組合，組合數為4^n個，起始狀態數有4^n-1。

對稱軸= 1，軸上有a個鐘，全部共有n個鐘的鐘面組合，

組合數為 $\frac{4^n+2^{n+a}}{2}$ 個，**起始狀態數** $\frac{4^n+2^{n+a}}{2}-1$ 個。

若對稱圖數為S，總圖數為$C(p)$，則唯一圖數量為$\frac{C(p)+S}{2}$。

三、n鐘面同步轉

$1\leq$ **3鐘面** ≤ 3 有 $1\leq$ C3 ≤ 3、$1\leq$ NC3 ≤ 2；
$0\leq$ **4鐘面** ≤ 4 有 $1\leq$ C4 ≤ 4、$0\leq$ NC4 ≤ 4；
$0\leq$ **5鐘面** ≤ 4 有 $3\leq$ C5 ≤ 4、$0\leq$ NC5 ≤ 4；
$3\leq$ **6鐘面** ≤ 5 有 $4\leq$ C6 ≤ 5、$3\leq$ NC6 ≤ 5；
$5\leq$ **7鐘面** ≤ 6有 $5\leq$ C7 ≤ 6、NC7 $=5$；
8鐘面 $=6$；**9鐘面** $=7$。

四、全部鐘面同步

ST步驟1~3和ST步驟4~6利用正面角鐘連動及反面立柱，分別完成位於兩面右下和左上的2x2區塊，藉由中心鐘面整合，兩個區塊成為(1,0,1,0)的連動範圍。

只有**(1,0,1,0)**立柱符合對稱且包含所有邊鐘的限制，是全部鐘面ST中，ST1~6透過**對稱性**建構出的唯一立柱。

鐘面同步轉在考慮立柱唯一性與鐘面對稱性，彼此獨立鐘面僅有**14個**，指向0的最少步數一定是**7步**。

參考文獻(略)