

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051819

拍音型駐波與雙聲源肯特管的印證

學校名稱： 國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 蘇賢豪	羅焜哲
高二 徐漢庭	黃木全

關鍵詞： 駐波、拍音、肯特管

摘要

兩振幅相同，頻率非常接近的聲波，反方向進行干涉，所形成具有駐波與拍音雙重特性的合成波。我們稱之為「拍音型駐波」。我們使用三角函數的和差化積分析其數學性質，預測其行為，並使用程式模擬合成波波型。

為了觀察聲波，先進行普通肯特管的研究，對照文獻，了解保麗龍球的行為。最後擴充為雙聲源肯特管，使用 MATLAB 撰寫雙聲道聲波程式，準確控制 2 個聲源的音量、頻率與相位，頻率差可以達到 0.01Hz，成功驗證拍音型駐波的性質，並發現其可在介質中有效推動粒子，具有潛在的工程學應用價值。

壹、前言

一、研究動機

物理課中，老師介紹了駐波，也介紹了拍音，並補充了兩者的數學，僅利用了三角函數中的合差化積就可以由方程式看出駐波與拍音的物理意義，駐波是兩頻率相同行進波反向干涉，拍音是兩頻率相近行進波同向干涉。我們好奇，兩頻率相近的行進波反方向干涉產生的波形有何性質？為更深入研究拍音型駐波，我們設計了雙聲源肯特管。為確保兩個聲源相位和頻率的精確性，我們使用程式來產生聲波檔案。

後續我們計畫讓頻率、振幅逐步的變化，在肯特管內產生更多的波形，希望能夠達到更有效率推動並更精準操控粒子的目的。

二、研究目的

研究拍音型駐波方程式的意義，使用數學推導及數值方法分析方程式並預測其行為，最後以雙聲源肯特管進行印證。

1. 探討肯特管實驗中環境因素對實驗之誤差

(1) 探討溫度對於肯特管實驗之影響

(2) 探討空玻璃管震動對於肯特管實驗之影響

2. 探討雙聲源肯特管下聲波行為之分析

3. 探討單聲源開管及閉管之頻率對於響應程度之關係

4. 探討雙聲源肯特管下小球行為之分析

(1) 探討雙聲源丘陵建立時的小球分布

1、單聲源開管閉管以及雙聲源的丘陵大小

2、單聲源開管閉管以及雙聲源的丘陵位置

(2) 探討拍音型駐波下小球形成之丘陵崩解又建立的週期

(3) 探討丘陵建立時，條紋緩慢運動的原因

三、文獻回顧

(一) 肯特管中通常放置微小的保麗龍球，聲波的駐波產生時，保麗龍球由散亂狀態開始規律排列，一顆堆在另一顆之上，形成鉛直站立的條紋，條紋的頂端，排列成類似於駐波描述的波包包跡。

(二) 肯特管中的條紋結構

1. 傳統肯特管實驗其內部小球的排列擁有兩個容易觀測到的現象尺度，一是一排排鉛直站立的條紋，其間距為 l ，另一個則是這些條紋因為它們高度成規則變化，其最高點連成的所形成丘陵狀類似於波包的圖形，其長度通常約等於半波長。

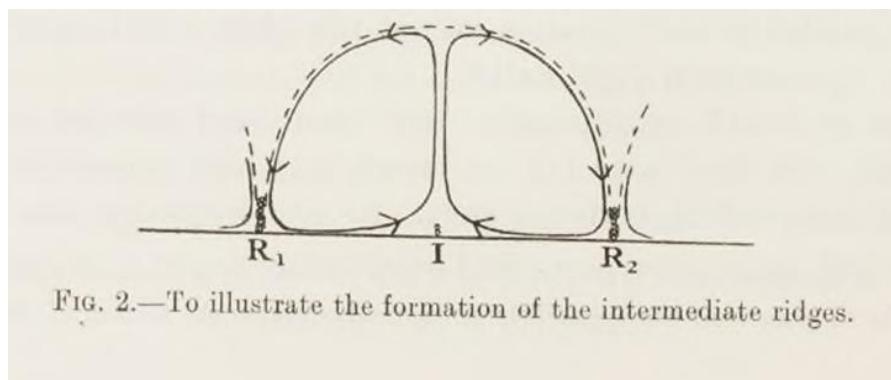
2. 在肯特管實驗中，當聲源功率超過一定臨界值時，管中的保麗龍球便會產生條紋。根據近代研究，尤其是 Kambe (2022) 的流體規範理論 (Fluid Gauge Theory, FGT)，條紋的形成可歸因於自發對稱性破缺 (Spontaneous Symmetry Breaking)。論文中認為，條紋的出現需要滿足以下條件：

(1) 最低速度臨界值：Andrade 的實驗發現，管內的微粒須達到一定的最小速度，才能夠形成條紋。

(2) 涡流場轉換 (Vortex-Free to Vortex Flow Transition)：聲管內空氣中塵粒的運動可以用節點與腹點之間空氣的整體環流以及周圍的渦流運動來解釋。根據 Kambe (2022)，當聲波振幅增加到一定的程度時，即管內的微粒達到一定的最小速度，將會產生渦流場。條紋之間的距離對應於渦流運動的平衡狀態。

3. Andrade 的論文中提及條紋現象對應渦流的運動平衡狀態，而非簡單靜態力作用。

4. 而關於渦流詳細是如何促使條紋產生的，Andrade (1931) 紿出一個解釋：圖一是肯特管中條紋產生的示意圖，當肯特管產生渦流時，R₁ 到 I 和 R₂ 到 I 之間的小球會因為空氣粒子的移動被帶離原本的位置並被集中至 I，在 I 處形成一個較小的條紋(次級條紋)，由於環流的關係，這類條紋並不穩定，其頂端的小球很容易又被帶離 I 而後前往 R₁ 或 R₂，並在 R₁ 和 R₂ 這類氣旋下沉處形成穩定的條紋。



(圖一) 由參考文獻二

5. 條紋間距(l)的物理意義則是 Kambe (2022) 提出了理論證明。因為前文所提之丘陵結構和條紋結構在單聲源時皆是由同一頻率的生波所驅動，因此可連接 $v = f\lambda$ 和 $C_g = fl$ 兩條式子(v 為聲音在空氣傳播的速率， l 是某一條紋的間距， C_g 是條紋間距中規範波的速度)，因為驅動頻率相同，即可得知 $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{C_g}{l}$ 。

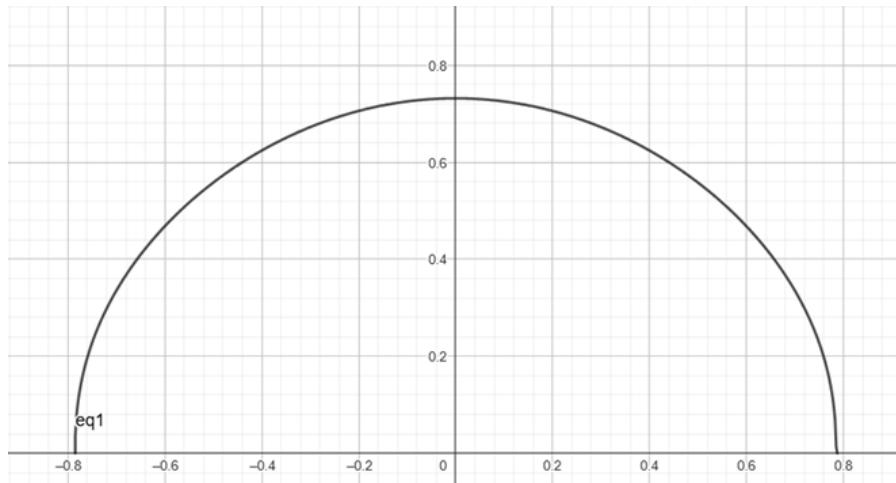
四、理論討論

(一) 條紋與條紋間距的討論

1. 在一般高中肯特管實驗中認為小球聚集處，也就是丘陵最高處，是共振合成位移波之波腹，壓力波之波節(此兩者差 $1/4$ 相位)。位移波波腹代表著此處為空氣粒子震動速度最快且最活耀的地方，因此此處的渦流中空氣粒子流動速度最快，再由文獻探討(5)單聲源下 $C_g \propto l$ 即可得知此處的條紋間距(l)會是最大的，而越接近位移波波節渦流中空氣粒子流動速度越慢條紋間距則越小。反之，亦可由條紋間距大致推得空氣粒子在渦流中的流速。

2. 肯特管中的條紋結構的位置並不一定完全固定。當條紋間渦流的流速不穩定(隨時間變動)時，條紋間距也會跟著不穩定，反映在結構上便可以觀察到條紋的前後擺盪。現實中兩個條紋間的渦流也不會是完美對稱，不只單純的對抗，在不穩定時也有一個機率融合或分裂，反映在條紋結構上即是條紋的融合和消失、分裂或生成，因此我們可以從肯特管條紋結構的分布大致推測管中渦流的分布情況。

3. 但 C_g 的計算非常困難，並不單純的正比於位移波波形，所以條紋間距的定量理論值無法簡單的推測出來。但 Andrade (1931) 進行多次實驗後給出了他在 $f=720$ 附近的經驗公式: $l = 0.422 \cos^{0.44} \left(\frac{x}{x_0} \pi \right)$ (圖二) 其中 x 是該條紋距離最近腹點的距離， x_0 是最近的兩波腹之間的距離(在單聲源中即為半波長 $\frac{\lambda}{2}$)



(圖二) 圖由作者以參考文獻二之數據用 GGB 自製

4. 一般的肯特管實驗大多都聚焦於共振頻率下的條紋，但條紋應渦流而生，並不是只有產生共振現象時才會有條紋現象。管中的空氣粒子只要聲波達到一定最小值，便會從只有單獨的整體環流變為環流和渦流共存，產生條紋，也就是只要輸入的聲波振幅有超過一定的閾值，即可以產生條紋現象。單聲源部分我們便好奇此類現象。

(二) 拍音型駐波可推動肯特管中粒子的分析

1. 普通駐波

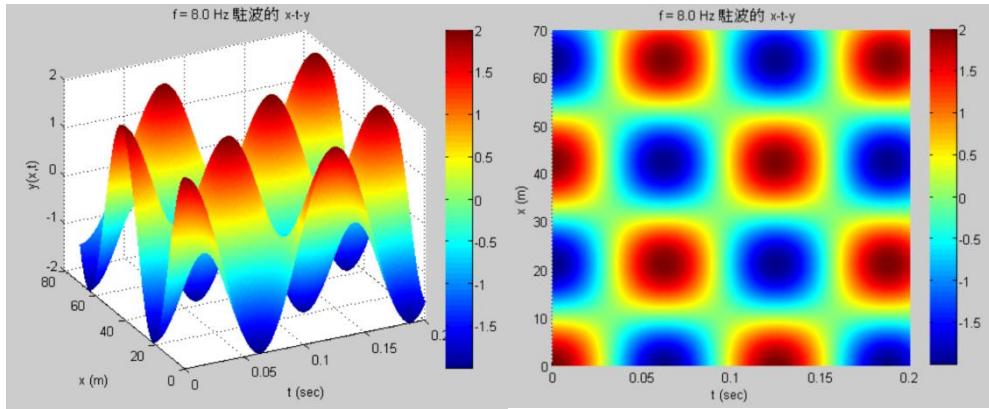
(1) 假設在同一介質中，二個振幅、頻率、波長都完全相同的二個波，相互反向而

行，二波的函數分別為： $y_1 = A \sin(kx - \omega t)$ 、 $y_2 = A \sin(kx + \omega t)$

交會時遵循波的重疊原理進行干涉，由合差化積公式 $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ ，合成波的波函數變為

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) = (2A \sin kx) \cos \omega t$$

(2) 駐波時間、空間、介質位移俯視圖



(圖三)圖由作者以 Matlab 自製

1、駐波合成波的位移 y 是一個雙變數函數，同時隨時間 t 、位置 x 而改變。

2、使用 MATLAB 撰寫程式，可以畫出以時間為 x 座標、管中位置為 y 座標，而合成波的位移為 z 座標的三度空間圖(左圖)和以時間為 x 座標、管中位置為 y 座標，以顏色表示合成波位移的俯視圖(右圖)

3、由圖形可以看出駐波隨時間、空間變動的特性。上圖以頻率 8Hz 為例。

2. 普通拍音 (同向拍音)

(1) 兩個同方向進行的聲波：

$$y_1 = A \sin(k_1 x - \omega_1 t), \quad y_2 = A \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

由和差化積公式可得

$$y = 2A \sin\left(\frac{(k_1 + k_2)x}{2} - \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right) \cos\left(\frac{(k_1 - k_2)x}{2} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right)$$

與 $y = 2A \sin(k_{carrier}x - \omega_{carrier}t) \cos(k_{envelope}x - \omega_{envelope}t)$ 比較：

可以看出快速震動的載波仍為行進波，角頻率 $\omega_{carrier} = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$ ，故 $f_{carrier} =$

$\frac{f_1+f_2}{2}$ ，拍音的整體意義為一個快速震動的載波，被慢速震動的包跡所調製，包跡仍

為行進波，角頻率 $\omega_{envelope} = \frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}$ ，故 $f_{envelope} = \frac{f_1-f_2}{2}$ 。當包跡函數歷經一週期

時，經正極大與負極大兩次極值，但人耳均覺音量變大，故音量變化頻率為

$2f_{envelope} = f_1 - f_2$ 。由於互相干涉的兩成份聲波的波速相同，即聲速 $v = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$

載波前進的速度為相速度 (phase velocity)

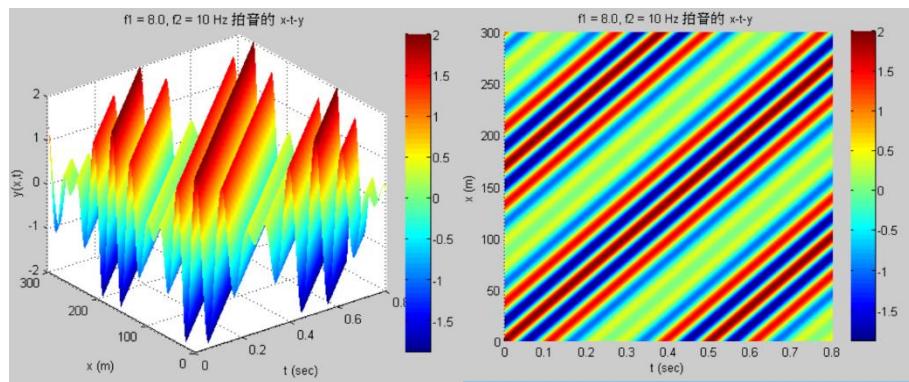
$$v_p = \frac{\omega_{envelope}}{k_{envelope}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} = \frac{k_1 v + k_2 v}{k_1 + k_2} = v$$

包絡線前進的速度為群速度 (group velocity)

$$v_g = \frac{\omega_{carrier}}{k_{carrier}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{k_1 v - k_2 v}{k_1 - k_2} = v$$

故拍音的相速度、群速度和兩成份波的波速均相同，即空氣中的聲速。

(2)普通拍音的時間、空間、介質位移俯視圖



(圖四) 圖由作者以 Matlab 自製

1、某特定位置（例如位置為零）的水平線，可以看出大概在 0、0.5 秒時，顏色快速變化，這就是 carrier waves 的震盪，可以感受到較大的音量。而在 0.25、0.75、等時刻附近為綠色，代表介質位移為零，即 envelope waves 為 0 的所在。

2、顏色呈現右上左下的分布，例如紅色是最高的波峰，隨時間增加，位置也線性增加。代表波峰在空間中隨時間等速度的移動，藍色的波谷也相同。

3、由於 x-t 圖的斜率相同，所以 carrier waves 與 envelope waves 的移動速度相同。

(三)無邊界條件的拍音型駐波的數學解釋

$y_1 = A \sin(k_1 x - \omega_1 t)$ 為向右行進波

$y_2 = A \sin(k_2 x + \omega_2 t)$ 為向左行進波

$$\text{可得 } y = y_1 + y_2 = 2A \sin\left(\frac{(k_1+k_2)x+(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right) \cos\left(\frac{(k_1-k_2)x-(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right)$$

1. 高頻載波的性質

(1) 角頻率與頻率: 式中 \cos 項為高頻載波項, 其角頻率為 $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, 頻率為 $f = \frac{f_1+f_2}{2}$

(2) 行進方向: 高頻載波的速度為 $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1-k_2}$, 若 $k_1 > k_2$, 波往右傳。若 $k_1 < k_2$,

波往左傳。由速度關係式可得知, 若 $k_1 > k_2$, 則 $\omega_1 > \omega_2$ 。即高頻載波的行進方向與兩成份波中, 頻率較高的成份波的行進方向相同。

$$(3) \text{ 波長} : \lambda = \frac{2\pi}{\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)} = \frac{4\pi}{k_1-k_2} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}$$

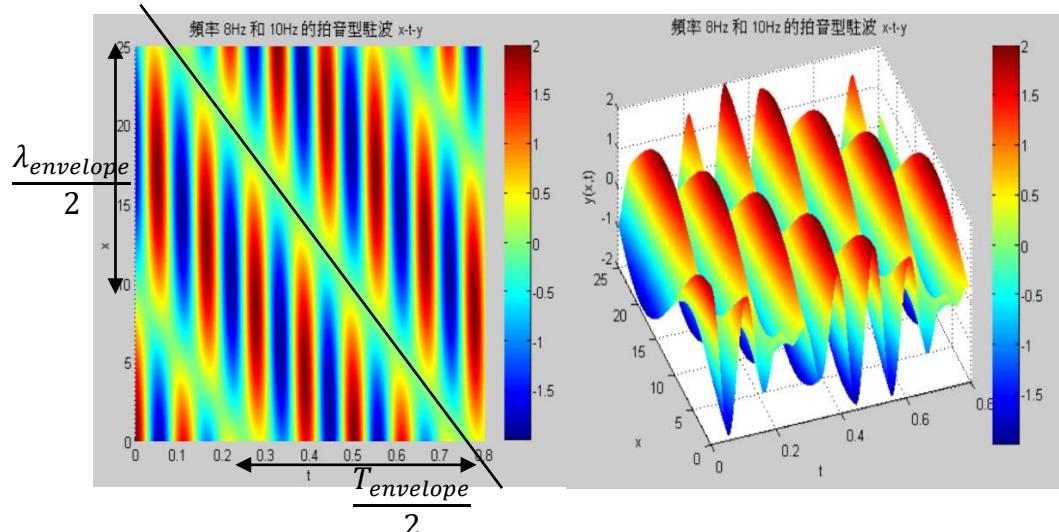
2. 低頻包絡波的性質

(1) 角頻率與頻率: 式中 \sin 項為低頻包絡波, 其角頻率為 $\omega = \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$, 頻率為 $f = \left|\frac{f_1-f_2}{2}\right|$

(2) 行進方向: 若 $\omega_2 > \omega_1$, 則低頻包絡波行進方向向左。反之則向右。即低頻包絡波的行進方向與兩成份波中頻率較高的成份波, 行進方向相同。

$$(3) \text{ 波長} : \lambda_{envelope} = \frac{2\pi}{\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)} = \frac{4\pi}{k_1+k_2} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_1}$$

$$\text{斜率} = v_{envelope}$$



(圖五) 圖由作者以 Matlab 自製

(4) 時間對波形的影響

1、上述方程式可化簡為 $y = \left[2A \sin\left(\frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}t + C_1\right) \right] \cos\left(\frac{-(\omega_1+\omega_2)}{2}t + C_2\right)$

2、由高頻載波的性質可知，在某個特定的位置，可測量到快速變動的高頻聲音，

頻率為 $\frac{(\omega_2+\omega_1)}{2}$ 。而這個聲音的振幅以中括號內的式子 $2A \sin\left(\frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}t + C_1\right)$ 調變

(modulate)。其振幅隨時間以低頻 $\frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}$ 變化，由於音量與振幅的正負無關，故

音量的變化角頻率為 $2 \times \frac{(\omega_2-\omega_1)}{2} = \omega_2 - \omega_1$ 。頻率為 $f_2 - f_1$ 。此現象與普通的拍音

是一致的。

3、以向右聲波頻率 $f_1 = 472$ ，向左聲波頻率 $f_2 = 472.5$ 為例， $f_2 - f_1 = 0.5(Hz)$ ，在

時間上每隔2秒各個位置的聲波振幅即由極大到極小再回到極大一次。

(5)空間對波形的影響

1、上述方程式可簡化為 $y = \left[2A \cos\left(\frac{(k_1-k_2)}{2}x + C_3\right) \right] \sin\left(\frac{(k_1+k_2)}{2}x + C_4\right)$

2、在某個特定的時間，在空間中沿 x 可測量到快速變動的波數變化，變化頻率為

$\frac{(k_1+k_2)}{2}$ ，代表波非常地密集，而這個波形的振幅以中括號內的式子

$2A \cos\left(\frac{(k_1-k_2)}{2}x + C_3\right)$ 描述。其振幅在空間中以低頻 $\frac{(k_1-k_2)}{2}$ 變化。

(四)含邊界條件之拍音型駐波波動方程式的電腦模擬

1.在肯特管實驗中，雙聲源分別激發頻率相近但不相同的聲波，使得管內聲波產生週期性變化，但單純的數學方程式疊加只能描述當管長無限長、沒有邊界效應和能量消耗的最終波形，雖然得以預測週期，但在丘陵位置的描述並不完全正確。為了更真實地呈現雙聲源現象，我們使用波動方程式進行電腦模擬，考慮：

(1)邊界效應(雙聲源激發與反射波)：兩側的聲源分別以接近但不相同的 f_1 與 f_2 激發聲波。同時管端點的反射產生反射波，在模擬中，由兩端強制注入。

(2)波動方程式(Laplace equation)：用中心差分法離散化一維波動方程進行時間與空間離散化，得到更新公式。

(3)阻尼係數 α (能量散失)：由於介質的黏性和波的傳播，波動往往伴隨著能量的耗

散。為了更真實地模擬這一現象，且以防當聲波注入時，管內的能量過度積累，因此需要一個阻尼係數來進行消耗，我們將它放在對時間的一次微分項 $\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}$ 。

(4)反射係數 β (能量散失):在單聲源實驗之 $y - x$ 看來，儘管閉管能量消耗沒有開管來的嚴重，但仍是需考慮的因素。

2.阻尼波動方程

(1)一般一維波動表達方程式為:

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

(2)考慮阻尼係數 α 補上衰減項:

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = C^2 \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

其中： $P(x,t)$ 表示位置 x 和時間 t 下的壓力場， c 為波速， α 為阻尼係數，單位為 s^{-1} ，描述系統能量衰減的係數。當 $\alpha = 0$ 時，方程式退化為理想情況下的無衰減波動方程。

3.中心差分離散化

(1)為了進行數值模擬，接下來需要將時間與空間離散化，設時間離散點 $t^n = n dt$ (其中 dt 為時間步長)，空間離散點 $x_i = i dx$ (其中 dx 為空間步長) 並用 P_i^n 表示 $p(x_i, t^n)$ 的數值近似值。根據中心差分法，我們便可以得到:

一階時間導數

$$\left. \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} \right|_{t=t^n} \approx \frac{P_i^{n+1} - P_i^{n-1}}{2 dt}$$

二階時間導數

$$\left. \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2} \right|_{t=t^n} \approx \frac{P_i^{n+1} - 2P_i^n + P_i^{n-1}}{dt^2}$$

二階空間導數

$$\left. \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{dx^2}$$

接下來將以上離散化後的導數代入阻尼波動更新方程式:

$$P_i^{n+1} = \frac{2}{2 + \alpha dt} \left[2P_i^n - \left(\frac{2 - \alpha dt}{2} \right) P_i^{n-1} + \left(\frac{c dt}{dx} \right)^2 (P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n) \right]$$

4.加上邊界條件輸入波形：

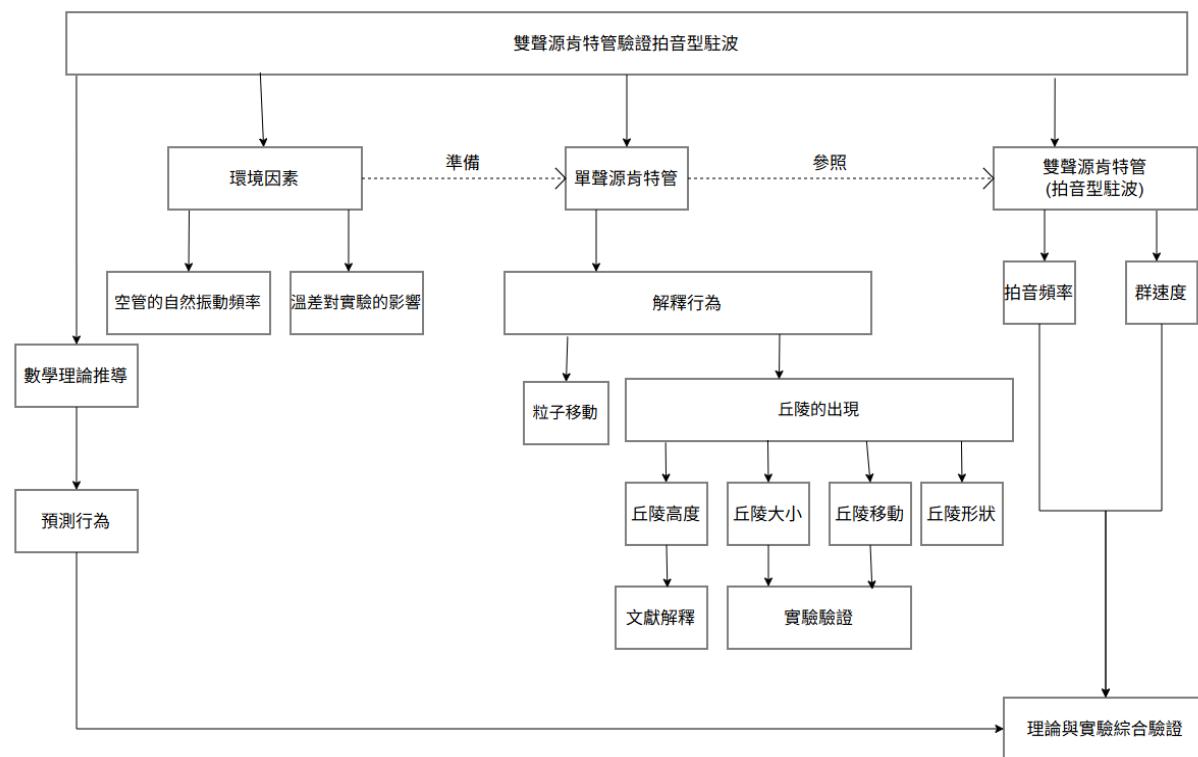
在本模擬中，玻璃管長度設定為 90 公分 (L=0.9 m)。初始條件為全域靜止，兩端強制條件設定為該端聲源輸入之聲波加上另一端的反射波，即為：

$$\text{左端 } (x = 0): p(0, t) = A \cos(2\pi f_1 t) + \beta A \cos(2\pi f_2 t)$$

$$\text{右端 } (y = L): p(L, t) = A \cos(2\pi f_2 t) + \beta A \cos(2\pi f_1 t)$$

以上兩式為波源由兩端注入，再搭配波動更新方程式使波形傳遞，便可使用迴圈進行的數值模擬。

(五)本實驗研究架構圖：



(圖六)由作者繪製

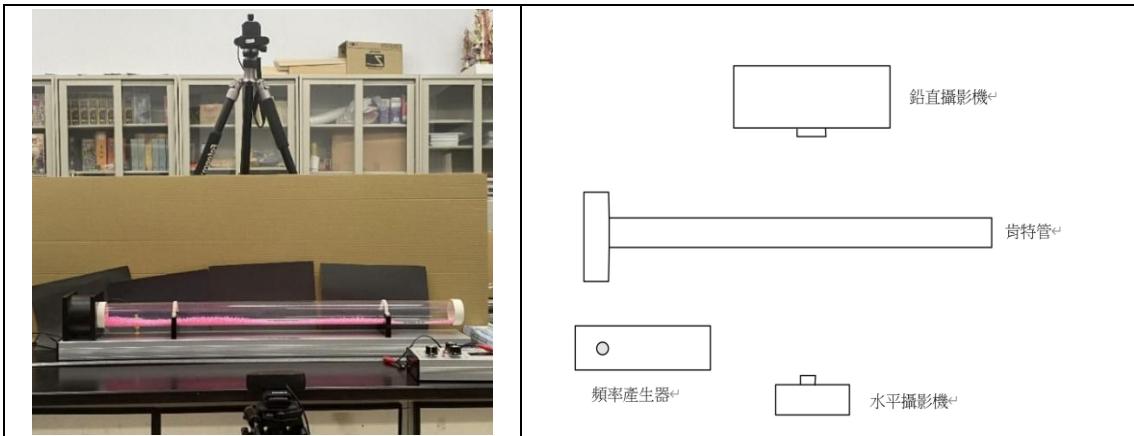
貳、研究設備與器材

一、實驗器材: (編號 1,2,3,4,6 圖由作者拍攝、5,7,8 為官方提供之圖示)

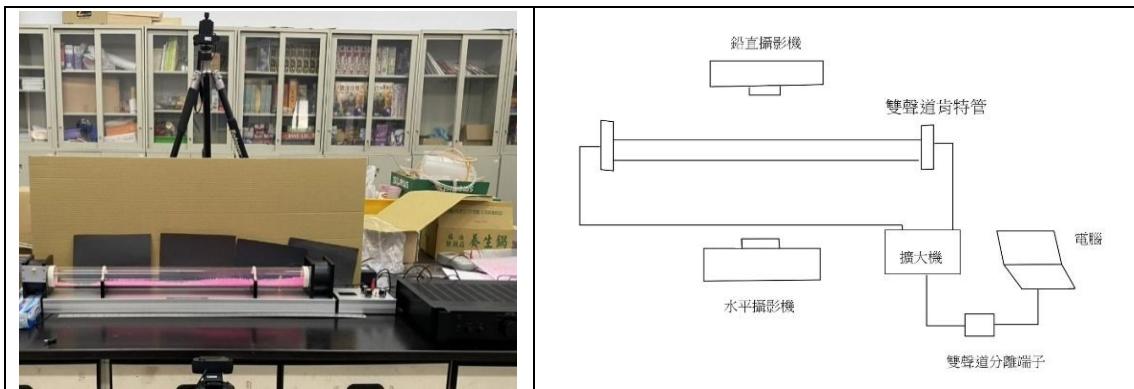
編號	設備名稱	圖示
1	玻璃管 (長 90.0 公分，內直徑 5.5 公分，外直徑 5.9 公分)	
2	單體喇叭x2	
3	頻率產生器	
4	擴大機 (Rotel，型號 RA-1080)	
5	網路攝影機 (Logitech webcam BCC 950)	
6	雙聲道分離端子	
7	軟體 MATLAB	
8	軟體 ImageJ	

二、實驗架設

(一)單聲源實驗



(二)雙聲源實驗



(圖七)由作者拍攝及繪製

參研究方法與結果

一、實驗現象名詞定義:

(一)條紋與條紋間距: 保麗龍球由散亂的狀態，開始有規律的排列，一顆堆在另一顆之上，形成一組組鉛直站立的條紋即為波紋。兩相近主波紋之距離即為波紋間距。

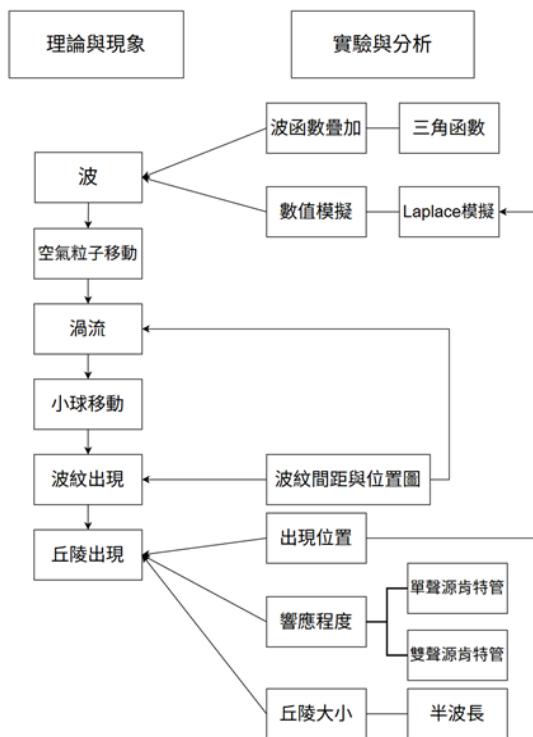
(二)響應與響應程度: 波紋產生時即為響應。同一瞬間玻璃管內最高波紋的高度即為響應程度。

(三)圓盤: 波紋碰到玻璃管頂端產生的現象，與一般波紋最大的差別在於會在管中移動。

(四)丘陵: 波紋由高到低組成的結構。丘陵長度即為最近兩個最低點的距離。

(五)崩解週期: 在拍音型駐波下同一個點波紋建立崩解所需的時長。

二、本實驗的**實驗架構圖**如下：



(圖八)由作者繪製

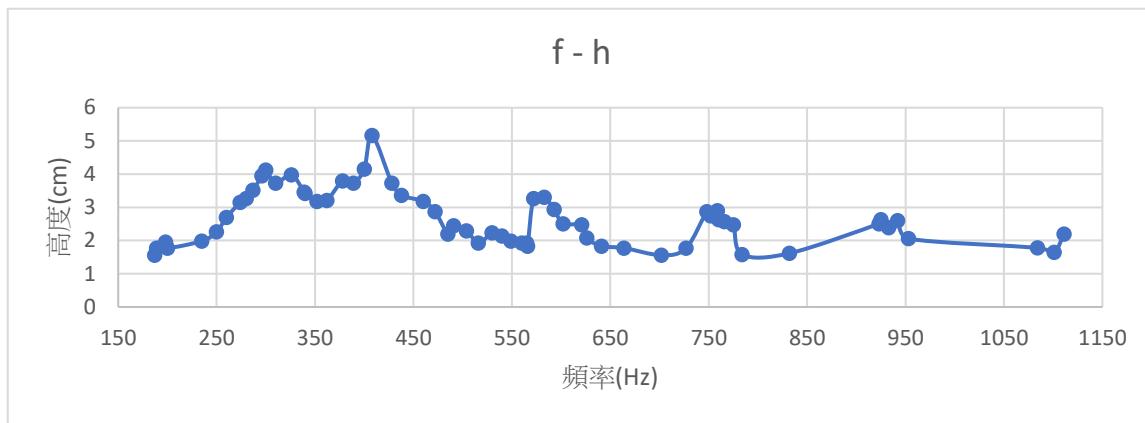
三、單聲源肯特管

(一)單聲源肯特管開管與閉管實驗（一般肯特管實驗）

1. 將肯特管一端封閉成為閉管或開管。使用音頻產生器產生固定振幅的訊號，並將單聲源的輸出頻率由低而高增加一小段後等待，使其有足夠的時間響應，讓丘陵結構和條紋結構至穩定態，記錄響應發生或小球運動特別劇烈的頻率、條紋高度的變化、圓盤等等現象，並以鉛直攝影機記錄條紋分佈，水平攝影機記錄丘陵形狀。
2. 將錄影檔中響應發生時的條紋分佈截圖，以 Image J 將條紋頂端分佈轉成數據並繪出 $x - y$ 圖與 $l(\text{條紋間距}) - x$ 圖，並把每一個頻率的條紋最大高度記錄下來，對頻率作圖成 $f - h$ 圖。(以 f 為操縱變因，小球分布為應變變因)

(二)單聲源肯特管開管與閉管實驗（一般肯特管實驗）

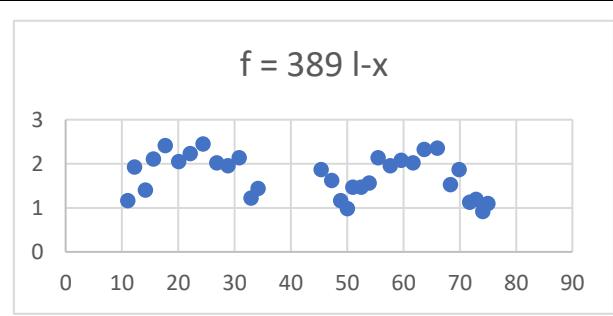
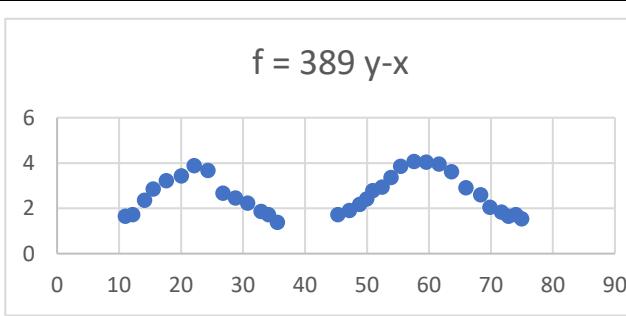
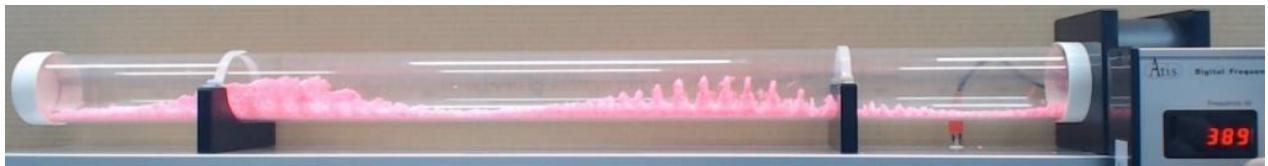
1. 單聲源閉管實驗：響應程度隨頻率變化圖及理論共振頻率與實驗現象對照表



(圖九)本圖由作者以實驗數據用 excel 自製，記錄響應程度(條紋最高高度)隨頻率的變化，可以由此得知，並非在大部分研究所討論的理論共振頻率才會產生響應。對於以上每一個頻率我們分析其丘陵及條紋的分布並作圖做為實驗結果，以下為實驗觀察表及兩個頻率的事例。

n	高中駐波理論共振頻率	特殊現象的頻率範圍邊界	實驗觀測到的現象	備註:丘陵高度(響應程度)
1	189Hz	187 Hz	從這個頻率開始出現條紋	低(條紋最高點難以取得)
		198 Hz	可明顯看出條紋間距	低(條紋最高點難以取得)
		296 Hz	產生圓盤現象	高
2	378Hz	389 Hz	小球運動激烈	中高
		408 Hz	有圓盤出現	中高
		460 Hz	條紋高度開始變低	中
		504 Hz	條紋高度越來越低	低
3	567Hz	566 Hz	條紋與副條紋無法分辨	中低
		583 Hz	條紋出現後又隨 f 增加逐漸消失	中高
4	756Hz	740 Hz	條紋出現	中
		759 Hz	條紋消失	低
5	944Hz	933Hz	條紋突然出現	中
		950Hz	條紋消失	低

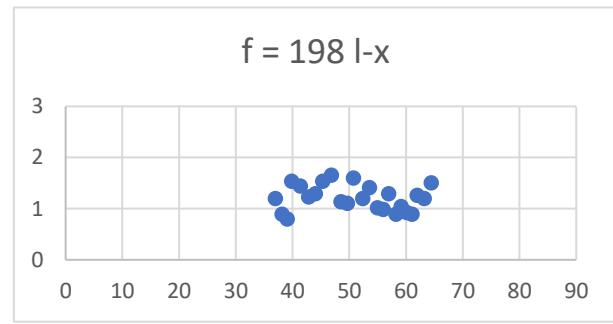
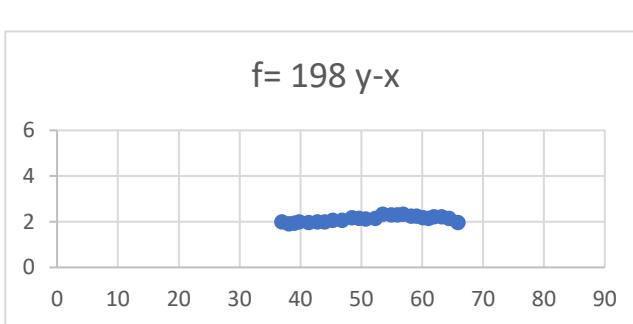
頻率 389 之實驗圖以及數據(圖由作者自行拍攝繪圖)



$y - x$ 圖(上左圖)代表條紋於管內的分布圖，得知丘陵的位置及大小，其結果與理論推測一致。

$l - x$ 圖(上右圖)是條紋間距對位置的作圖，由於條紋間距正比於渦流流速和粒子震動速度，所以在理論共振頻率時較能呈現理論的半弧形。

頻率 198 之實驗示意圖(圖由作者自行拍攝繪圖)



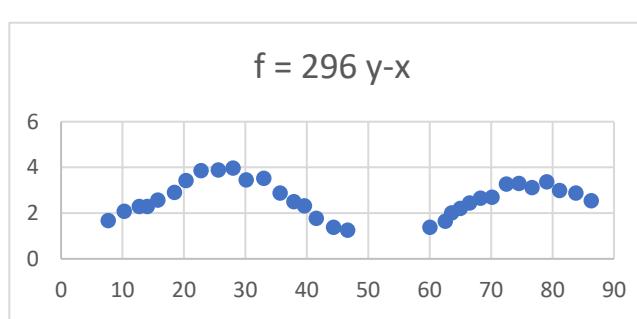
$y - x$ 圖(上左圖)代表條紋於管內的分布圖，可以明顯發現在這一個頻率響應不明顯，丘

$l - x$ 圖(上右圖)是條紋間距對位置的作圖，這一個頻率並非理論共振頻率，其條

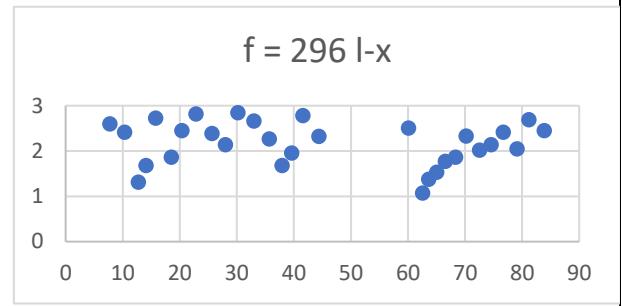
陵結構並不完整。

紋間距對位置的分布散亂。

頻率 296 之實驗圖以及數據(圖由作者自行拍攝繪圖)

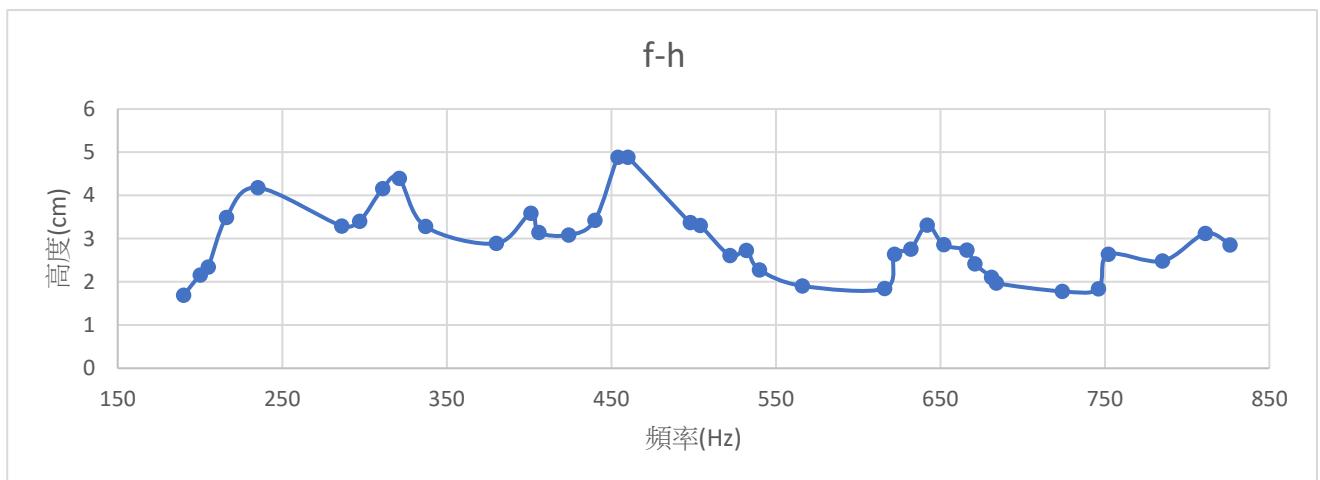


$y - x$ 圖(上左圖)代表條紋於管內的分布圖，可以觀察到這一頻率響應很好，丘陵結構完整。



$l - x$ 圖(上右圖)是條紋間距對位置的作圖，此頻率為非理論共振頻率，儘管丘陵建立，但條紋結構並不穩定，只有右側丘陵勉強可以看出圓弧分布的一半

(三)單聲源開管實驗: 響應程度隨頻率變化圖及理論共振頻率與實驗現象對照表



(圖十) 本圖由作者以實驗數據用 excel 自製，記錄開管時響應程度(條紋最高高度)隨頻率的變化。可以從此圖得知，並非在大部分研究所討論的理論共振頻率才會產生響應。對其上每一個頻率我們分析丘陵及條紋分布並作圖做為實驗結果，以下為實驗觀察表格及中取兩個頻

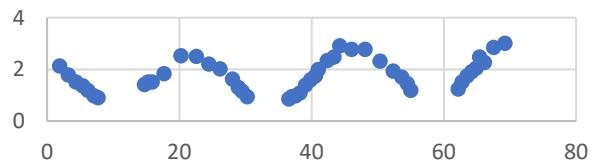
率作為事例，以下實驗照片由作者拍攝，數據點在 ImageJ 標記後以 excel 繪製。

n	高中駐波理論共振頻率	特殊現象的頻率範圍邊界	實驗觀測到的現象	備註:丘陵高度(響應程度)
1	94Hz	94 Hz	沒有條紋產生	無
		190 Hz	僅聲源附近處開始有條紋現象	極低
		216 Hz	管子開口處開始有較矮的條紋現象	聲源處中，開口處低
2	283Hz	298 Hz	響應程度開始增大	中
		311Hz	有圓盤出現	中高
		321Hz	有圓盤出現	中
		340Hz	聲源附近出現圓盤但不明顯移動	高
		380Hz	380:圓盤消失	低
		454Hz	有圓盤出現	高
3	472Hz	544Hz	響應程度變小至條紋幾乎消失	極低(幾乎消失)
		632Hz	條紋出現	中低
4	661Hz	622Hz	條紋變高	中低
		642Hz	條紋到達最高	中
		684Hz	響應程度變小至條紋消失	消失
5	850	752Hz	條紋出現	極低
		831Hz	條紋到達最高	中

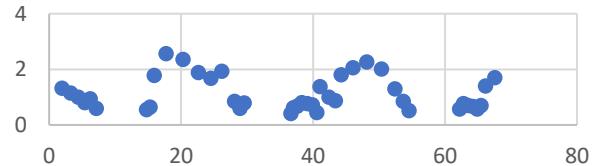
頻率 652 之實驗示意圖(圖由作者自行拍攝繪圖)



$f = 652 \text{ y-x}$



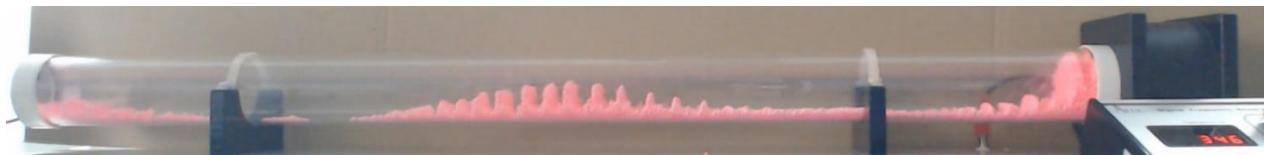
$f = 652 \text{ l-x}$



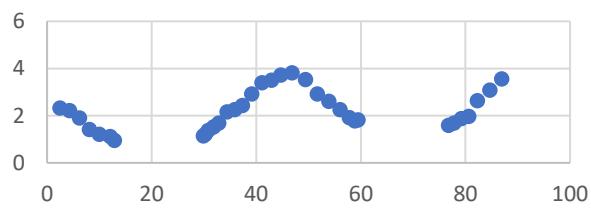
$y - x$ 圖代表條紋於管內的分布圖，此頻率為理論共振頻率，丘陵結構完整

$l - x$ 圖代表條紋間距對位置作圖，中間的兩個丘陵皆有中間高兩側低的條紋間距分布，也就代表著渦流結構排列較為整齊。

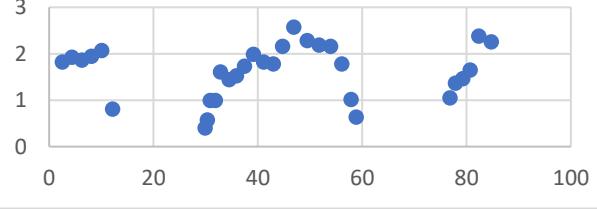
頻率 346 之實驗示意圖(圖由作者自行拍攝繪圖)



$f = 346 \text{ y-x}$



$f = 346 \text{ l-x}$



$y - x$ 圖代表條紋於管內的分布圖，此頻率為喇叭在四分之一波長時的理論共振頻率，其丘陵結構完整。這個現象在高頻率時幾乎看不到。

$l - x$ 圖代表條紋間距對位置作圖，中間的丘陵有很完美的類似於半圓弧的條紋間距分布，也就代表著渦流結構排列較為整齊且穩定。

四、雙聲源

(一) 實驗方法

1. 使用 MATLAB 撰寫程式產生波形後，輸出至雙聲道分離端子，再由兩條傳輸線輸入進放大器之中將功率提高，最後分別輸出至左右聲源充當雙聲源。

(1) 使兩聲源發出頻率相同但振幅不同的聲波，觀察肯特管內的現象。

(2) 使兩聲源發出振幅相同頻率接近但不同的聲波，觀察肯特管內的現象。

(3) 使左側聲源發出拍音，觀察拍音推動保麗龍球的情形。

(二) 實驗結果

1. 實驗結果發現同時使用兩聲源：響應的效果較單聲源的明顯，若同時以相同頻率激發，響應頻率大致與單聲源相同。

2. 使兩聲源發出頻率相同但振幅不同的聲波：電腦模擬的結果顯示，當兩邊的振幅不同時，駐波各點的位移接近平衡點時，將會有節點與腹點水平向振幅大的行進波方向位移的現象，我們稱為「蠕動的駐波」。原本我們期待這樣的合成波波形能夠推動保麗龍球，但實驗結果顯示，兩邊聲源波形振幅不同，保麗龍球響應的情況改變不大。因為真實狀況下波形振動速度極快，無法用此類波型移動來推動管中的粒子。

3. 振幅相同頻率接近但不同的聲波：這個實驗我們稱為「拍音型駐波」，條紋的反應非常明顯。響應以 $f = f_1 - f_2$ 週期性發生。以左聲道 472Hz、右聲道 472.5Hz 為例，條紋建立後，2 秒後崩解，並重複的建立與崩解。響應發生時，可以成功的使條紋往左邊移動，但條紋崩解後，在新一輪渦流產生時會被掃回到接近原本的地方。在本實驗

中 T 代表崩解週期，其理論值為 $T \approx \frac{T_{envelope}}{2} = \frac{1}{f_1 - f_2}$ ， L 是所測得的丘陵長度，其理論

值為 $\lambda_{envelope}/2$ ，實驗測得之包絡波波速 $v = \frac{L}{T}$ ，其理論值為 $v_{envelope} = \frac{\lambda_{envelope}}{T_{envelope}}$ ，

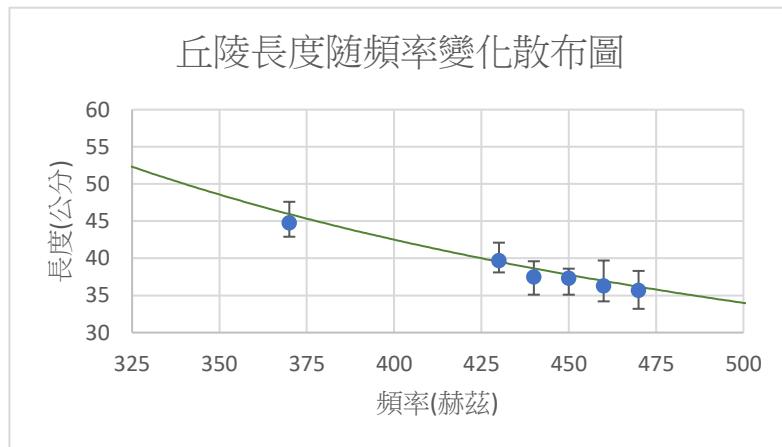
比較以上三項數據做為應變變因。

(1)第一個實驗中以**頻率**為操縱變因，造成包絡波波長變化，由 $\lambda = \frac{v}{f}$, $L \approx \frac{\lambda}{2} = \frac{2v}{f}$ 影

響丘陵長度(L)，分析誤差可發現其結果印證理論。

頻率(Hz)	370-370.5			430-430.5			440-440.5		
	T (sec)	L (cm)	v (cm/s)	T (sec)	L (cm)	v (cm/s)	T (sec)	L (cm)	v (cm/s)
平均	2.01	44.75	22.24	2.01	39.67	19.71	2.01	37.46	18.60
理論	2	45.9	22.95	2	39.51	19.76	2	38.61	19.31
誤差%	0.58	2.5	3.09	0.58	0.39	0.18	0.67	2.96	3.60

頻率(Hz)	450-450.5			460-460.5			470-470.5		
	T (sec)	L (cm)	v (cm/s)	T (sec)	L (cm)	v (cm/s)	T (sec)	L (cm)	v (cm/s)
平均	2.003	39.32	18.63	2.03	36.27	17.85	1.98	35.67	18.04
理論	2	37.75	18.86	2	36.94	18.47	2	36.15	18.08
誤差%	0.17	1.14	1.31	1.58	1.82	3.35	1.16	1.33	0.17



(圖十一) 作者以 excel 繪製

(2)第二個實驗中以**頻率差**為操縱變因，由固定點的包絡波周期 $T_{envelope} = \frac{2}{f_1 - f_2}$ 和崩

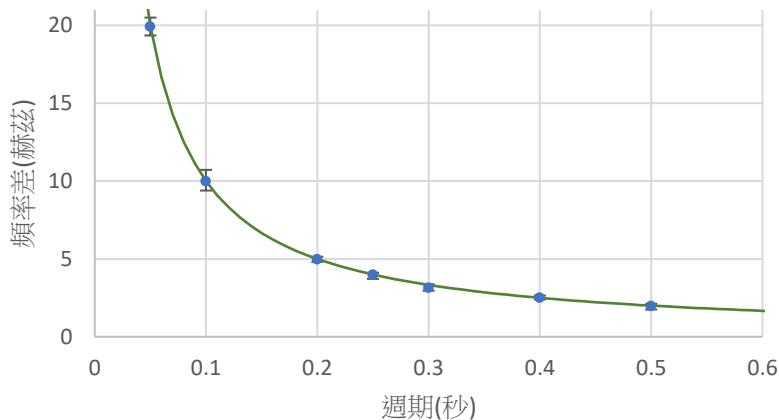
解週期 $T \approx \frac{T_{envelope}}{2}$ ，得知頻率差會影響到崩解週期($T \approx \frac{T_{envelope}}{2} = \frac{1}{f_1 - f_2}$)。分析誤

差可發現其結果印證理論。

頻率(Hz)	472-472.5			472-472.4			472-472.3		
	T (sec)	L (cm)	v (cm/s)	T	L	v	T	L	v
平均	1.98	35.67	18.04	2.50	34.71	13.90	3.14	36.38	11.57
理論	2	36.15	18.08	2.5	36.15	14.46	3	36.15	12.05
誤差%	1.16	1.34	0.17	0.06	3.96	3.90	4.77	0.64	3.94

頻率(Hz)	472-472.25			472-472.2			472-472.1			472-472.05		
	T (sec)	L (cm)	v (cm/s)	T	L	v	T	L	v	T	L	v
平均	3.98	36.06	9.05	4.97	36.60	7.36	9.98	37.2	37.3	19.91	35.58	1.79
理論	4	36.15	9.03	5	36.15	7.23	10	36.15	3.62	20	36.15	1.81
誤差%	0.46	0.23	0.22	0.53	1.24	1.78	0.21	2.90	3.12	0.45	1.56	1.12

崩解週期隨頻率差變化圖



(圖十二) 作者以 excel 繪製

4. 條紋的移動: 條紋的移動速度和拍音型駐波的相速度和群速度皆不相同，所以並不能以單純的波形運動進行解釋。能夠確定的是：

- (1) 在條紋建立時，其運動方向和包絡波前進位置一致，崩塌時則相反。
- (2) 其速率遠小於包絡波波速。
- (3) 在 $f_1 + f_2$ 接近時，條紋運動速度接近，但由於誤差很難畫上等號。
- (4) 當 $|f_1 - f_2|$ 越小，也就是崩解週期越大的時候，一次週期中移動的幅度越大。
- (5) 當小球移動的幅度在崩解時和建立時不對等，會出現粒子運輸現象，效率高低不一定。

肆、討論

一、傳統肯特管開管和閉管的實驗結果

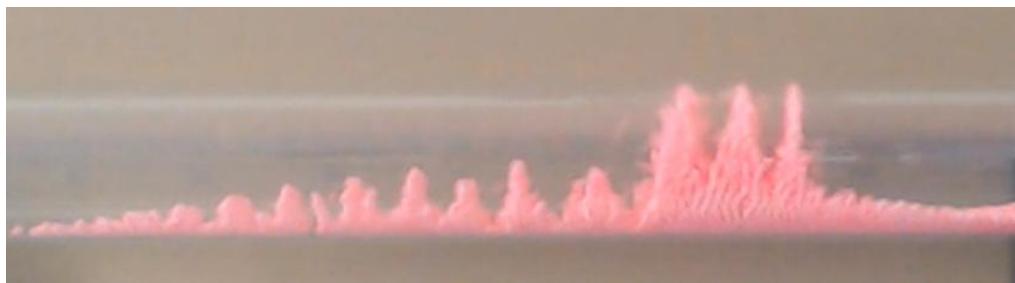
(一)駐波頻率是特定頻率，但以駐波頻率為主一定範圍內，都可能發生響應。

(二)響應程度(條紋高度 h)最大時候是在駐波頻率附近，且此類頻率最容易發生圓盤現象

影響到實驗，且由 $l-x$ 圖來看其渦流也較不穩定。

(三)當肯特管為閉管時，條紋由聲源至另一端的遞減之現象較不明顯，開管則較明顯，在頻率較低時(190Hz 前後) 開管甚至會出現聲源附近處有條紋產生，但另一端的合成波振幅卻不足以支撐它產生條紋。這是因為閉管為塑膠反射面，能夠使較多的能量留在管內，開管則否。這也代表反射係數 β 在雙聲源模擬中是需要被考慮的。

(四)當腹點的共振振幅過大使附近的條紋高度接近於玻璃管直徑時，小球會形成一至數個直徑等同於管徑的圓盤(如圖十三)，會嚴重影響實驗記錄。



(圖十三)圖由作者拍攝

(五)關於丘陵形狀及位置我們發現:

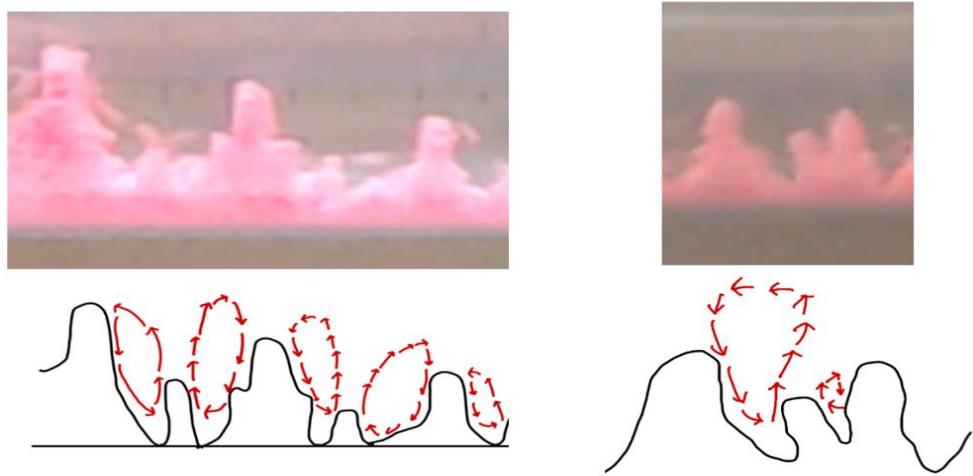
1.聲源處不一定是節點或腹點。

2.閉管處是位移波波節，開管處是位移波波腹

3.不管是在共振頻率還是在非共振頻率，只要有響應發生，丘陵底部的長度皆約等於半波長。

4.觀察較高頻率(450Hz 以上)可發現當較高響應發生時，可由波長及管長推斷出聲源處接近於波節，代表著聲源傾向於當波節。

(六)實驗中雖能觀察到主副條紋的現象，但並非每次都能清楚辨識。副條紋較主條紋薄，大約1至2顆保麗龍球，結構不穩定且易受渦流變化而被影響。副條紋的動作可理解為兩個渦流的抗衡，當兩者勢均力敵時則可在兩條主條紋之間觀察到穩定副條紋(如左圖)。反之，若一方渦流過小，反映在條紋間距上則是條紋間距過小，甚至有可能被併入主條紋中(如圖十四)



(圖十四)圖由作者拍攝與繪製

二、雙聲源肯特管實驗之討論

(一)同時使用兩個聲源，響應的效果非常明顯是單純的因為兩個波行疊加後的相長性干涉，響應頻率大致與單喇叭相同。若頻率相同，不管振幅一不一樣，其

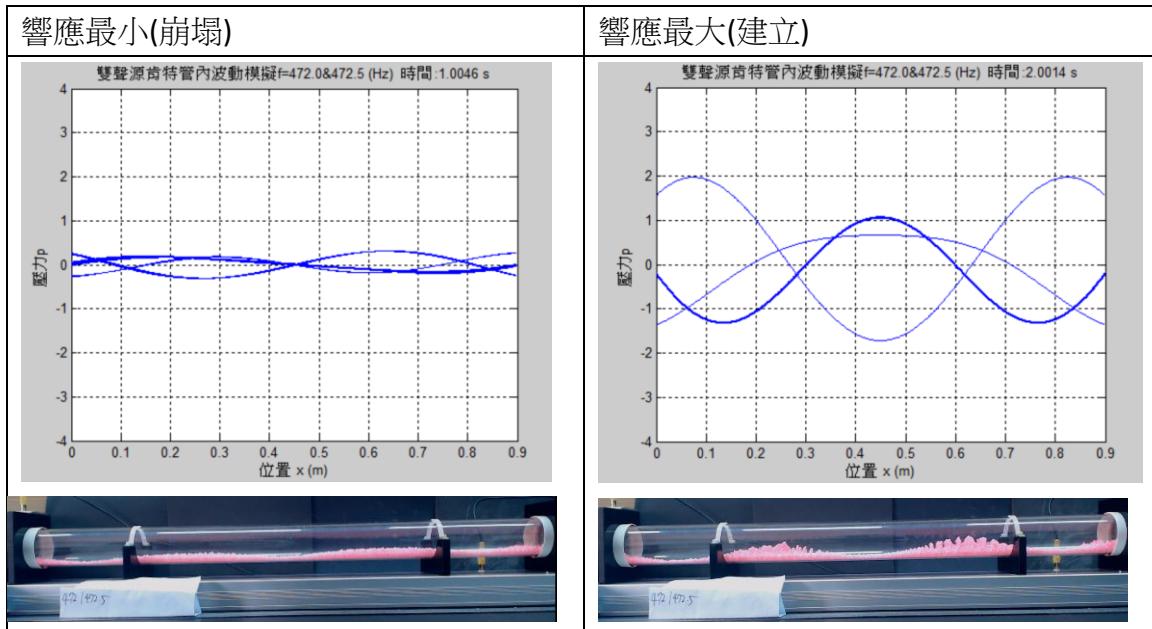
- 1.響應頻率($f-h$ 圖)
- 2.條紋結構($x-y$ 圖 和 $l-x$ 圖)

大致與單喇叭相同。

(二)數值模擬與實驗結果的比對

單純的數學解釋雖然能準確預測崩解週期和丘陵長度，但在預測丘陵具體位置時偏差，因為不像單聲源實驗有閉管以及開管處可以定位波形節點腹點的座標。數值模擬考慮波動方程式，並在邊界施加激發條件，引入阻尼項，同時加上反射係數，盡可能的還原出真實樣貌，所以可以推測出丘陵位置的所在，但也因數值解的不穩定性，導致其模擬結果難以完全量化。其結果和數學解釋在崩解週期上一致，但在丘陵位置上更準確，更能看出理論共振頻率時穩定性較高且能量較容易積累。

數值模擬使用的是聲學中的壓力波，其波節處對應位移波的波腹，波腹對應位移波波節，這點和之前使用的位移波形解釋相反。以 $f_1 = 472, f_2 = 472.5$ 為例其崩解週期為 2 秒，下右圖即為丘陵建立時的模擬結果和實驗圖片。可以看到在模擬圖中間壓力波波腹(位移波波節)的位置幾乎沒有小球。反之，壓力波波節(位移波波腹)則是小球聚集，丘陵最高處。在下左圖則可以看到丘陵崩解時模擬出的壓力波振幅較小且凌亂。



(圖十三) 上圖由作者以 matlab 模擬後截圖，下圖為作者拍攝

(三)條紋移動：拍音型駐波現象要區分成兩個層次的運動：

1. 丘陵的運動：丘陵是條紋高度的包絡，其本質是渦旋場能量的包絡，也代表了渦旋場能量超過臨界值的區域，可被視為一個移動的「驅動源」。其移動速度與包絡波速度一致。
2. 單一條紋的運動：條紋的本質是受聲場激發的「渦旋場」的呈現，是一個「建立-消亡」過程。在移動的丘陵前緣（能量開始超臨界處），新的條紋會不斷地被建立；丘陵後緣（能量低於臨界處），舊的條紋則會不斷地消亡。

條紋移動較慢即在同一丘陵參考系中條紋在以一個相對速度向後運動，我們猜測是因為丘陵前緣剛建立出的條紋間距較小，一個穩定的渦流陣列（丘陵）在每個位置皆具有一個由渦流

間相互排斥力決定的特徵間距 l 。當一個新條紋在最前端誕生時，它會「擠壓」緊隨其後的舊條紋，打破了原有的穩定間距。為了恢復平衡，這個被擠壓的舊條紋會被排斥力向後推。這個「向後推」的力並非只作用於第二個條紋。它會像骨牌一樣，一個接一個地向後傳遞。這個為了維持系統穩定間距而產生的鏈式排斥反應，在一個丘陵其宏觀效果就是：整個舊的條紋陣列，相對於不斷刷新的前沿「出生點」，整體向後傳遞。不過若是想量化此類理論便需要使用流體動力學且考慮條紋形成的障礙對流體的影響，現階段存在一定的難度。

伍、結論

一、環境因素

(一)溫度不會造成誤差

(二)空管震動不會造成誤差

二、單聲源

(一)丘陵大小為波長的一半

(二)關於丘陵的位置，閉管處為位移波波節，開管處為位移波波腹

(三)在理論共振頻率的時候，一樣可以發生響應，但是穩定度並不高，也就是條紋間距對位置圖較為混亂

三、雙聲源

(一)丘陵大小為包絡波波長的一半。

(二)理論上丘陵形將以群速度在肯特管中移動，但由於邊界條件，丘陵將崩解，崩解的頻率即兩聲波的頻率差，即丘陵會以包絡波週期的一半為建立與崩解的週期

(三)丘陵建立時喇叭並不一定是波節或波腹

(四)數學模型沒辦法預測丘陵建立的位置，但數值模擬可以

(五)條紋移動可能是丘陵內條紋推擠造成相對運動的結果

四、未來展望：

丘陵中的條紋在建立過程中，隨著丘陵同方向運動，但崩解過程與丘陵反方向運動，其原因與渦流有關，機制仍有待研究，但已確認拍音型駐波的此類特性可以推動粒子。雙聲

源肯特管藉由撰寫程式來提供不同的入射波形，使得肯特管內部駐波的型式有多種可能，後續我們打算使頻率逐步變化，透過這類拼接的方式探討粒子運輸的效率，或是在肯特管內產生更多的波形，研究能夠操控粒子方法。

若肯特管模擬成人體的氣管，內部的保麗龍球可模擬成痰液。而超聲波經長期的使用與研究，已證實對人體無不良的影響。若能以超聲波的駐波來集中氣管中的痰，甚至使用波形的改變來控制痰的移動。這理論的實驗裝置簡略容易取得，若真的研究成功，可望應用在生物醫學上。

陸、參考文獻資料

- 一、Andrade, E. N. D. C. (1931). On the circulations caused by the vibration of air in a tube. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 134(824), 445-470.
- 二、Andrade, E. N. D. C. (1932). On the groupings and general behaviour of solid particles under the influence of air vibrations in tubes. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 230(681-693), 413-445.
- 三、Macho-Stadler, E., & Elejalde-García, M. J. (2019, August). Experiments with Kundt's tube. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1287, No. 1, p. 012022). IOP Publishing.
- 四、Kambe, T. (2022). Gauge-Theoretic Study of Kundt Tube Experiment and Spontaneous Symmetry Transition, *Glob. J. Sci. Front. Res.-A*, 22(6), 61-86.
- 五、Barbieri, Alessio, and Enzo Vitillaro. "The damped wave equation with acoustic boundary conditions and non-locally reacting surfaces." *Semigroup Forum*. Vol. 105. No. 3. New York: Springer US, 2022.
- 六、Khrantsov, I. V., et al. "On numerical simulation of sound damping mechanisms in the cell of a sound-absorbing structure." *Acoustical Physics* 64 (2018): 511-517.

柒、附錄

一、誤差討論:

(一)溫差對於本實驗的影響

1.本實驗只能測得頻率，無法求聲音的速度。聲速採用與溫度相關的經驗公式

$v=331+0.6t$ ，配合頻率求得波長

2.合併聲速公式 $v = 331 + 0.6t$ 與 $v = f\lambda$ ，可得 $331 + 0.6t = f\lambda$ ，微分後得 $0.6\Delta t =$

$$f\Delta\lambda, \Delta\lambda = \frac{0.6\Delta t}{f}.$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\left(\frac{0.6\Delta t}{f}\right)}{\left(\frac{331 + 0.6t}{f}\right)} = \frac{0.6\Delta t}{331 + 0.6t}$$

當 $t=10^\circ\text{C}$ 時， $\Delta t = 1^\circ\text{C}$ 的溫差就會造成波長 0.17% 的誤差。

3.對於低頻率、長波長的狀況，以開管基音頻率 188.89 赫茲為例，波長為 1.8m，若溫度改變 1°C，我們所使用的波長會有 $1.8m \times 0.17\% = 0.31\text{cm}$ 的誤差。對於本實驗的影響並不大。

二、肯特管空管震動的影響

我們懷疑響應發生時的頻率可能因玻璃管本身發生共振而受影響，因此進行此實驗。空管發出的聲音頻率即其自然共振頻率。另外肯特管運作時，玻璃管兩端以塑膠束帶束縛於基座上，因此需要於束縛狀況時進行敲擊實驗。

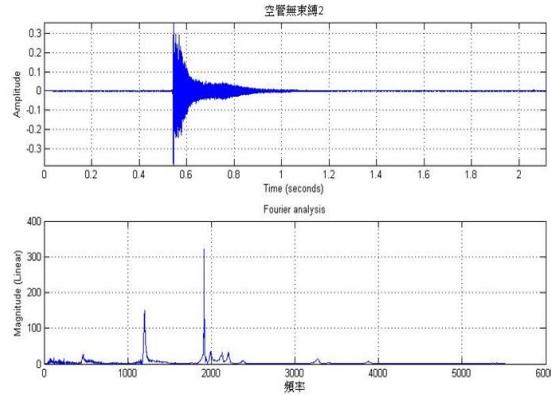
(一)實驗方法: 求得肯特管空管的自然頻率

1.分別在玻璃管被細繩吊起和被束縛在基座上時，敲擊肯特管，錄製兩種音檔。

2.以 MATLAB 撰寫 Fourier 分析程式分析音檔，求得肯特管空管的自然頻率。

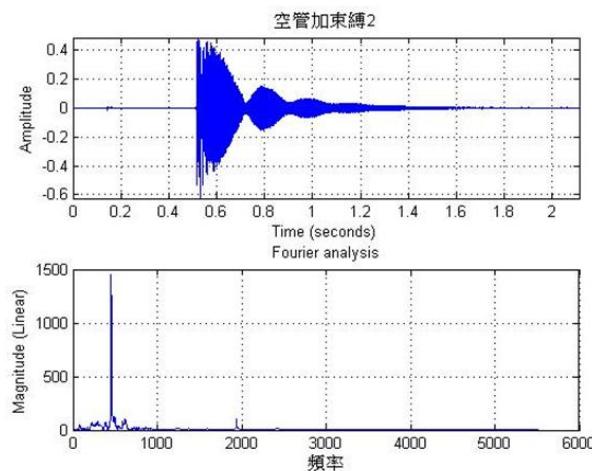
3.將肯特管空管的自然頻率與響應頻率做對照，判斷兩者之間的關係。

(二) 實驗結果:



(圖十四)由作者以 matlab 分析所得

實驗得知(圖----)空管無束縛的共振頻率約為 500Hz、1200Hz、1900Hz。以我們所做實驗進行對照，發現 500Hz 在實驗中並沒有產生響應。而 1200Hz、1900Hz 在實驗中無法以現有器材做出。因此可忽略。



(圖十五) 由作者以 matlab 分析所得

空管加束縛時(圖----)的共振頻率也約為 500Hz，在實驗中並沒有產生響應。因此，在此實驗中管子的震動可近乎忽略。

三、電腦數值模擬的 matlab 程式

```
clear; clc; close all;
% 參數設定
% 設定左右邊界激發頻率
f1 = 472;          %左頻率
f2 = 472.5;         %右頻率
```

```

alpha = 500; %衰減係數
beta = 0.7; %反射係數
dx = 0.0013;
Am = 4;
CS = 'S';%以 sin 還是 cos 計算 應以 sin 計算
omega1 = 2*pi*f1;
omega2 = 2*pi*f2;
L = 0.9;
c = 343;
x = 0:dx:L;
nx = length(x);
A = 1; % 振幅
dt = 1*dx/c; % 時間離散步 CFL 條件: dt <= dx/c
T_total = 10; % 模擬總時間
nt = ceil(T_total/dt);
%% 初始化波場
p = zeros(1, nx); p_old = zeros(1, nx); p_new = zeros(1, nx);
% 初始：全域靜止
t = 0;
if CS == 'S'
    p(1) = beta* A*sin(omega2*t)+A*sin(omega1*t); % 左邊界
    p(end) = A*sin(omega2*t)+beta*A*sin(omega1*t); % 右邊界
else
    p(1) = A*cos(omega1*t)+beta* A*cos(omega2*t); % 左邊界
    p(end) = A*cos(omega2*t)+beta* A*cos(omega1*t); % 右邊界
end
p_old = p; % 初始波場
for i = 2:nx-1
    % p_new(i) = p(i) + 0.5*(c*dt/dx)^2*(p(i+1) - 2*p(i) + p(i-1));
    %p_new(i) = 2*p(i) - p_old(i) + (c*dt/dx)^2*( p(i+1) - 2*p(i) + p(i-1));
    %
    p_new(i) = ( 2*p(i) - (1 - alpha*dt)*p_old(i) + (c*dt/dx)^2 * (p(i+1) - 2*p(i)
    + p(i-1)) ) / (1 + alpha*dt);
end
% 強制邊界條件
if CS == 'S'
    p_new(1) = beta*A*sin(omega2*t)+A*sin(omega1*t); % 左邊界
    p_new(end) = A*sin(omega2*t)+beta*A*sin(omega1*t); % 右邊界

```

```

else
    p_new(1) = A*cos(omega1*t)+beta* A*cos(omega2*t); % 左邊界
    p_new(end) = A*cos(omega2*t)+beta* A*cos(omega1*t); % 右邊界
end
p = p_new; % 更新波場
%% 動畫繪製
figure;
h = plot(x, p, 'LineWidth', 2); axis([0 L -Am*A Am*A]);
xlabel('位置 x (m)'); ylabel('壓力 p'); title('雙聲源肯特管內波動模擬'); grid on;
drawnow;
%% main : 利用中心差分公式更新波動方程
n = 2;
for nc = 2:nt
    n = n + 1;
    t = n*dt;
    for i = 2:nx-1
        p_new(i) = ( 2*p(i) - (1 - alpha*dt)*p_old(i) + (c*dt/dx)^2 * (p(i+1) -
        2*p(i) + p(i-1)) ) / (1 + alpha*dt);
    end      % 邊界

    if CS == 'S'
        p_new(1) = A*sin(omega1*t)+beta* A*sin(omega2*t); % 左
        p_new(end) = A*sin(omega2*t)+beta* A*sin(omega1*t); % 右
    else
        p_new(1) = A*cos(omega1*t)+beta* A*cos(omega2*t); % 左
        p_new(end) = A*cos(omega2*t)+beta* A*cos(omega1*t); % 右
    end
    % 更新
    p_old = p;
    p = p_new;
    % 更新圖形
    set(h, 'YData', p);
    title(sprintf('雙聲源肯特管內波動模擬 f=%f&%f (Hz) 時間:%.4f s',f1,f2, t));
    drawnow;
end

```

(圖十六、十七、十八) 由作者以 matlab 分析所得

【評語】051819

本研究從「駐波」與「拍音」出發，探討其組合情況下的干涉型態—拍音型駐波，結合理論推導、數值模擬與實驗設計，具高度創新性與物理深度。深入剖析拍音型駐波的本質，區分普通駐波、拍音波與拍音型駐波三者在行為上的異同，展現對聲學理論的掌握。實驗設計從單聲源開管/閉管逐步推進至雙聲源肯特管，涵蓋參數變因如頻率、振幅、邊界條件等，設計周到、變因控制良好，並搭配 MATALB 與 ImageJ 工具輔助觀測與分析，實驗操作能力出色。結論與未來展望驗證拍音型駐波能有效推動粒子，並進一步構想其在醫學應用(如超音波清除痰液)的可能性，展現跨領域思維與社會關懷。

作品海報

拍音型駐波與雙聲源肯特管的印證

摘要

兩振幅相同，頻率非常接近的聲波反方向進行干涉所形成的合成波，具有駐波與拍音的雙重特性。我們稱之為「拍音型駐波」。我們使用行進正弦波函數疊加分析其數學性質，預測其行為，並使用程式模擬有邊界效應時的合成波波型。

為了更加瞭解肯特管實驗的機制，我們先進行普通肯特管的研究、對照文獻，以了解保麗龍球的行為。最後擴充為雙聲源肯特管，使用MATLAB撰寫雙聲道聲波程式，準確控制兩個聲源的振幅、頻率與相位，頻率差可以達到0.01Hz，成功驗證拍音型駐波的性質，並發現拍音型駐波在肯特管中具有推動介質中粒子的能力。

壹、前言

一、研究動機

物理課中，老師介紹了駐波和拍音，並補充了兩者的行進波數學式，僅利用合差化積就可以由方程式看出駐波與拍音的物理意義，在了解到駐波是兩行進波反向干涉，拍音是兩行進波同向干涉後，我們便好奇，兩頻率相近的行進波反方向干涉產生的波形有何性質？為更深入研究拍音型駐波，我們設計了雙聲源肯特管。為確保兩聲源相位、振幅和頻率的精確性，本研究使用程式來產生聲波檔案，並由同一台電腦操控。未來可嘗試使頻率、振幅逐步的變化，在肯特管內產生更多的波形，希望能夠達到推動並操控粒子的目的。

二、研究目的

研究拍音型駐波方程式的物理意義，使用方程式推導及電腦數值方法分析方程式並預測其性質再以雙聲源肯特管進行印證。

1. 環境因素對肯特管實驗實驗之誤差
2. 探討單聲源頻率對於響應程度之關係
3. 探討雙聲源肯特管在拍音型駐波下小球行為之分析

四、拍音型駐波的波形討論

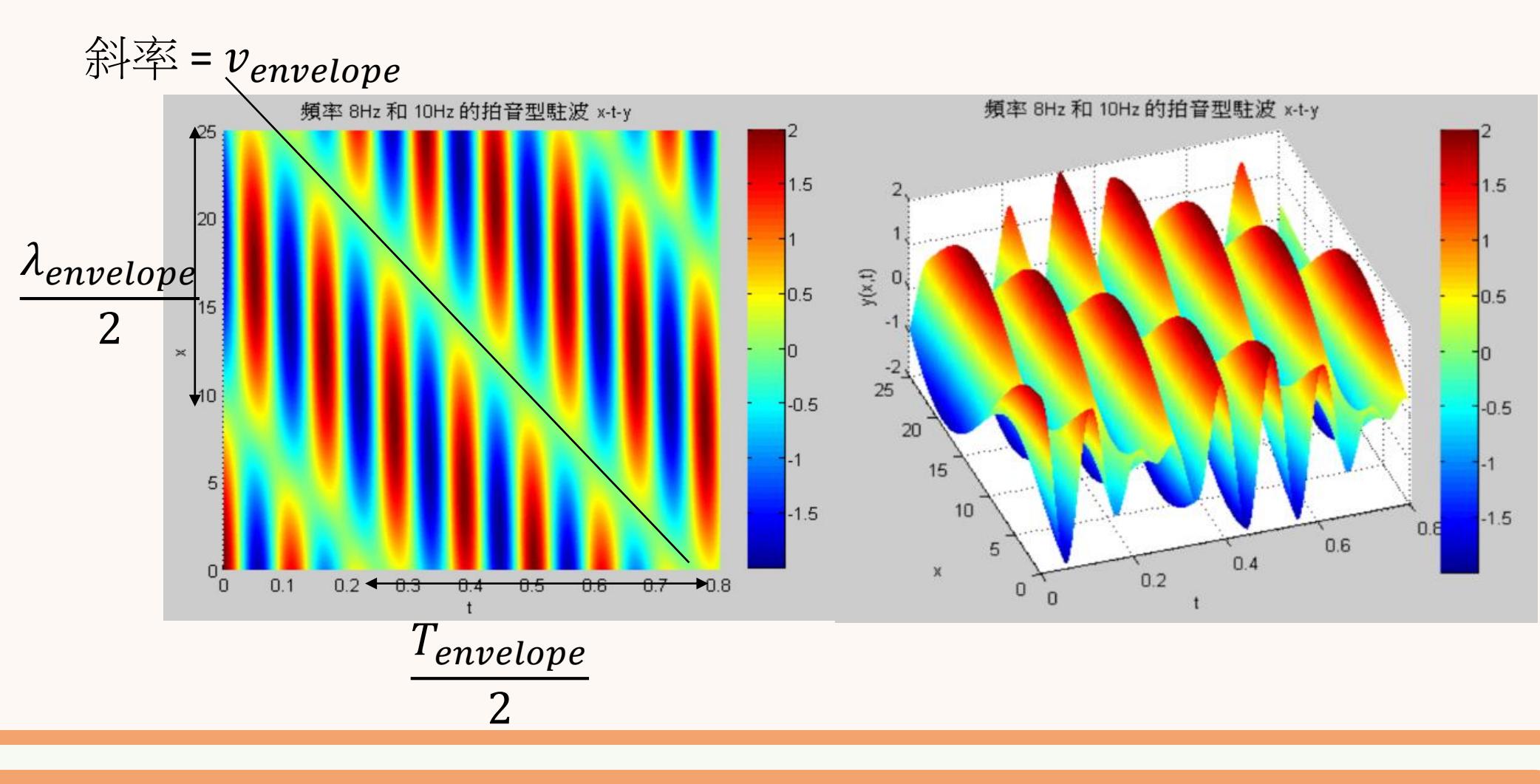
定義：拍音型駐波為兩頻率相近但反方向行進的疊加波

$$y_1 = A \sin(k_1 x - \omega_1 t), y_2 = A \sin(k_2 x + \omega_2 t), \omega_1 \approx \omega_2, \omega_1 < \omega_2$$
$$y = y_1 + y_2 = 2A \sin\left(\frac{(k_1 + k_2)x + (\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right) \cos\left(\frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right)$$

(1) \cos 項為高頻載波項，其角頻率 $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ，頻率 $f = \frac{f_1 + f_2}{2}$

(2) \sin 項為低頻包絡波，其角頻率 $\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ ，波長 $\lambda_{envelope} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1}$

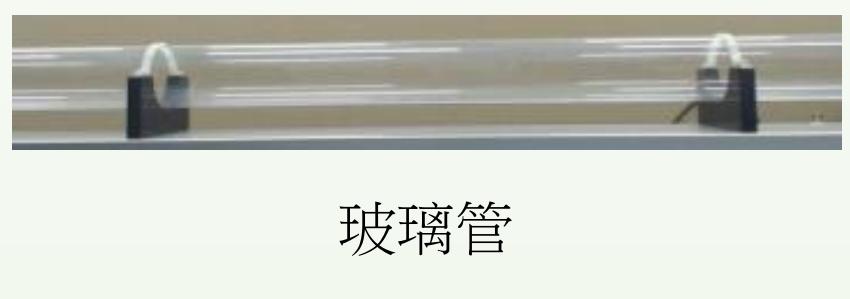
(3) 音量與振幅的正負無關，故音量的變化角頻率為 $2 \times \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2} = \omega_2 - \omega_1$ 。頻率為 $f_2 - f_1$ 。此現象與普通的拍音是一致的。



貳、研究設備



頻率產生器



玻璃管



擴大機



單體喇叭



雙聲道分離端子



網路攝影機



軟體 ImageJ



軟體 matlab

參、研究方法與結果

一、實驗理論架構及各子實驗目的

實驗目的：

一、求得肯特管空管的自然頻率

求得空管自然頻率後和響應頻率對照，判斷是否影響實驗。

二、單聲源肯特管開管與閉管實驗（一般肯特管實驗）

以Image J將條紋分佈轉成數據並繪出x-y圖與1(波紋間距)-x圖後，了解頻率如何影響到小球行為(尤其在非理論共振頻率時)。

三、雙聲源肯特管實驗

使兩聲源發出：

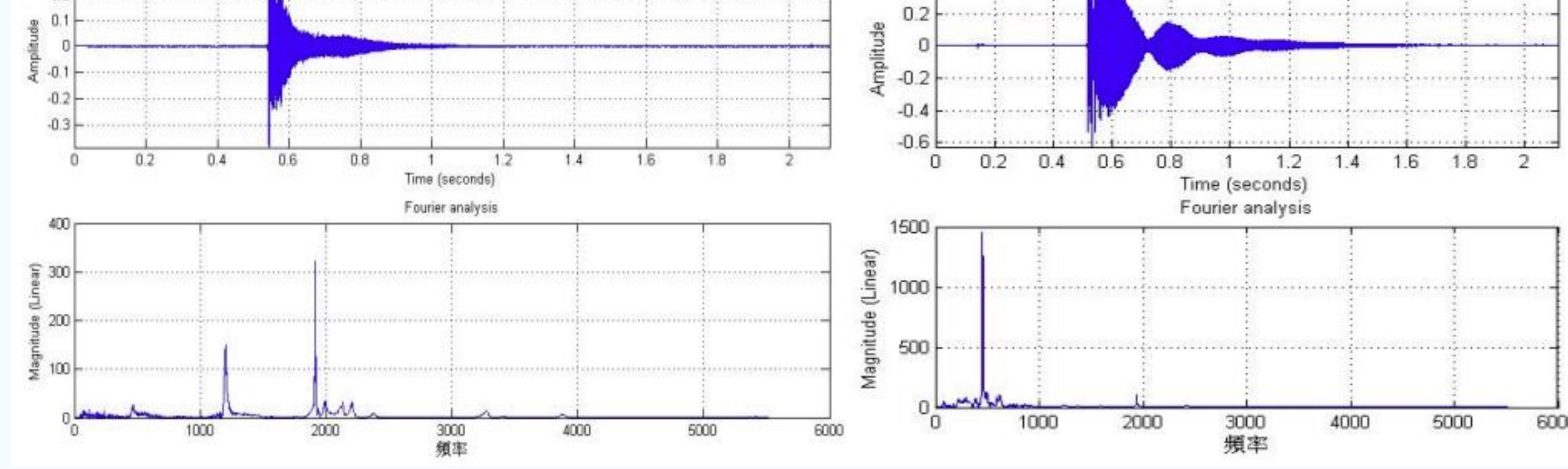
1. 頻率相同但振幅不同的聲波
2. 使單側喇叭發出拍音
3. 振幅相同、頻率不同但接近的聲波(拍音型駐波)

觀察合成波推動保麗龍球的情形

四、電腦數值模擬

藉由在基礎波動方程式中引入邊界與阻尼等條件，來預測並解釋實驗中觀察到的但理想數學公式無法描述的現象。

二、肯特管管身振動的誤差影響



實驗結果得知空管無束縛的共振頻率約為500Hz、1200Hz、1900Hz，空管加束縛時則約為500Hz。接下來再跟後續實驗進行對照，發現500Hz在實驗中並沒有產生響應。而1200Hz、1900Hz在實驗中無法以現有器材做出。以上即可證明，管子的震動可近乎忽略與此實驗。

三、文獻回顧

- 傳統肯特管實驗中保麗龍球排列會形成規律條紋與丘陵狀圖形，其現象與聲波駐波、渦流場等密切相關。
- 根據近期文獻（例如 Kambe, 2022），波紋的產生是源於聲源功率超過臨界值，管內空氣粒子達到一定速度時，產生的渦流與自發對稱性破缺現象。

討論：

肯特管中小球聚集處是位移波波腹（空氣粒子震動幅度最大處），相對應的波紋間距也最大。反之越接近波節處，空氣粒子流速越低，波紋間距越小。

五、電腦數值模擬

- 邊界效應：激發聲波和反射波，由兩端強制注入。
- 波動方程式：採用中心差分法離散得到更新公式。
- 阻尼係數 α ：設定一個阻尼係數來模擬能量消耗，放在對時間一次微分項。

$$\frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = C^2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}$$

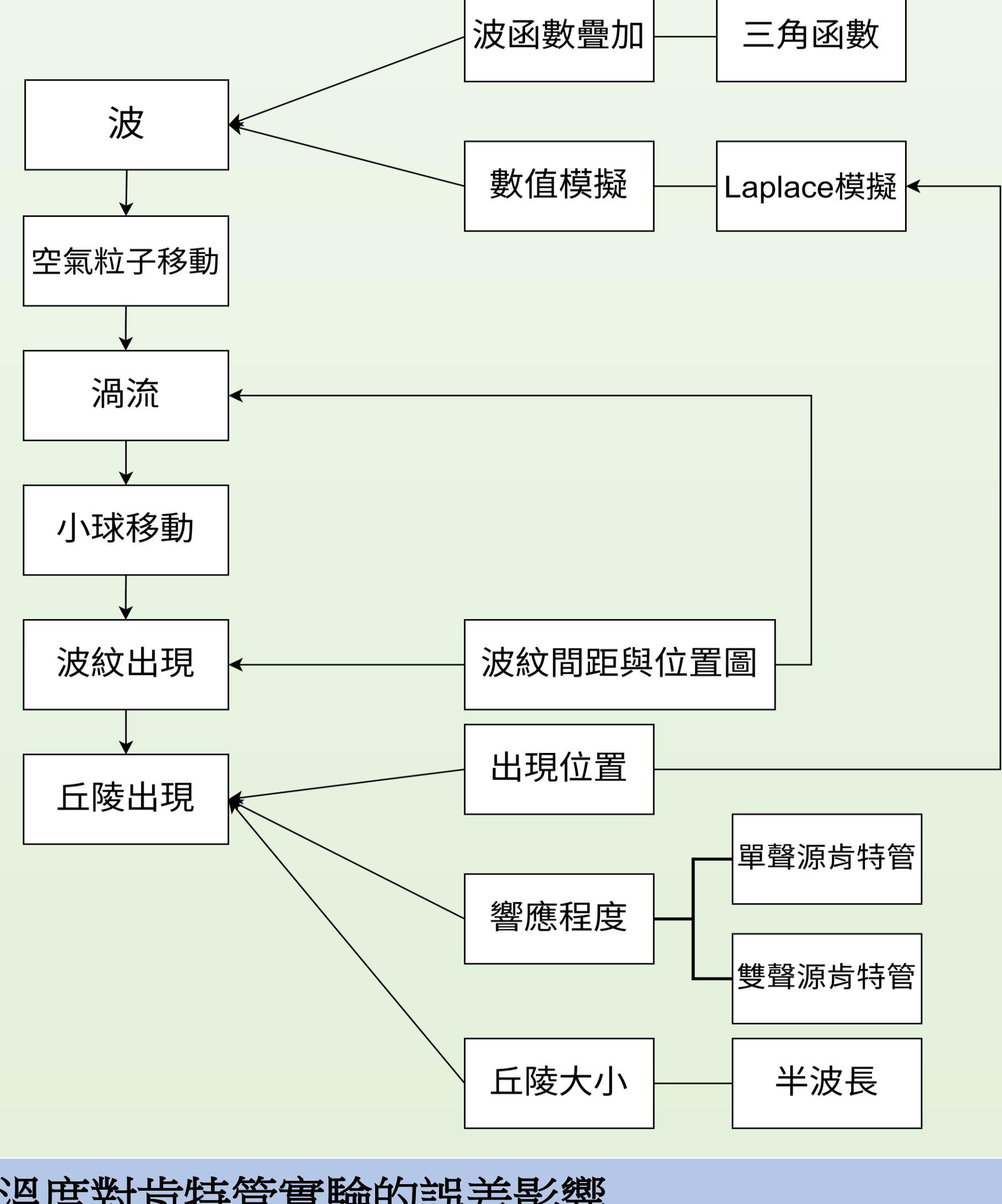
- 反射係數 β ：在單聲源實驗(尤其是開管)之 $y - x$ 看來，是需考慮的變因。

考慮以上四點可得到更新公式

$$P_i^{n+1} = \frac{2}{2 + \alpha dt} \left[2P_i^n - \left(\frac{2 - \alpha dt}{2} \right) P_i^{n-1} + \left(\frac{c dt}{dx} \right)^2 (P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n) \right]$$

理論與現象

實驗與分析



三、溫度對肯特管實驗的誤差影響

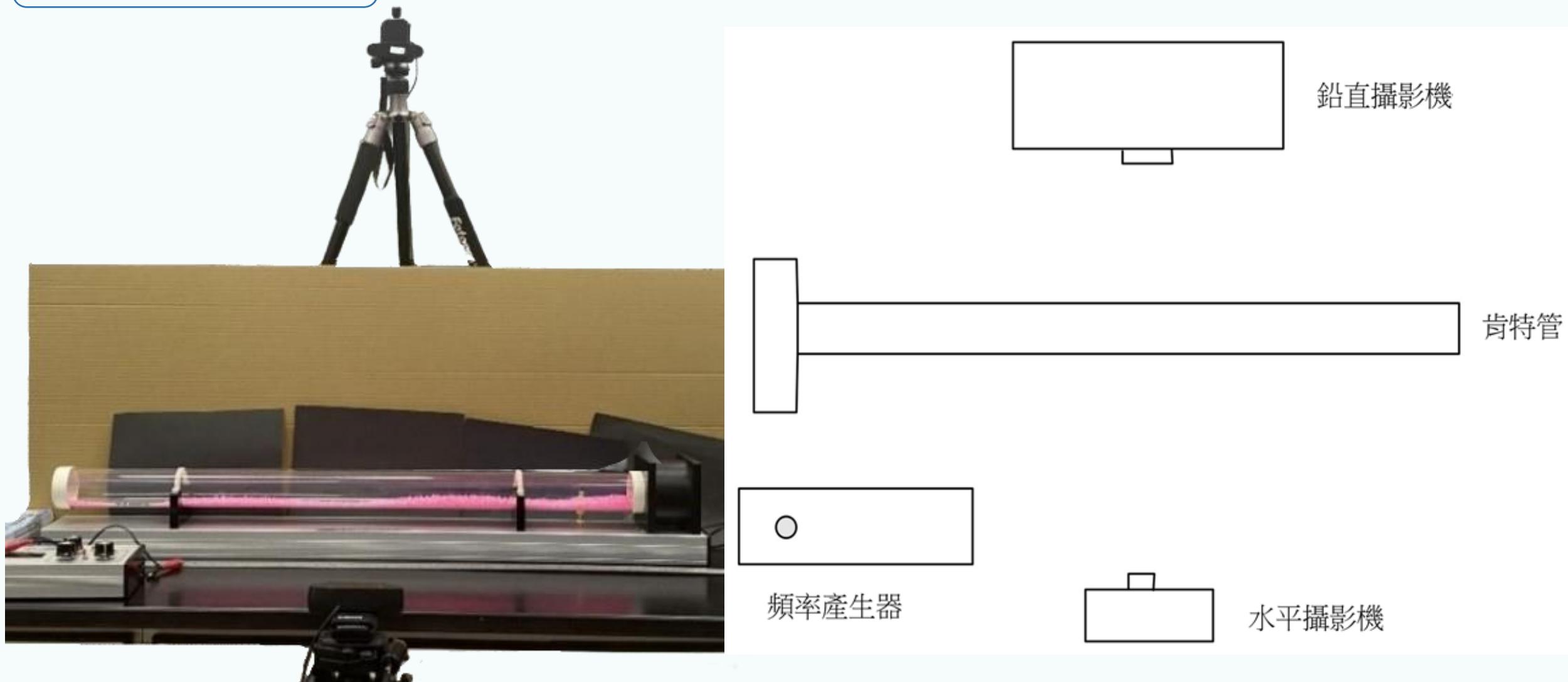
本實驗只能測得頻率，無法求聲音的速度。聲速採用與溫度相關的經驗公式 $v=331+0.6t$ ，配合頻率求得波長。合併聲速公式

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\left(\frac{0.64t}{f}\right)}{\left(\frac{331 + 0.6t}{f}\right)} = \frac{0.64t}{331 + 0.6t}$$

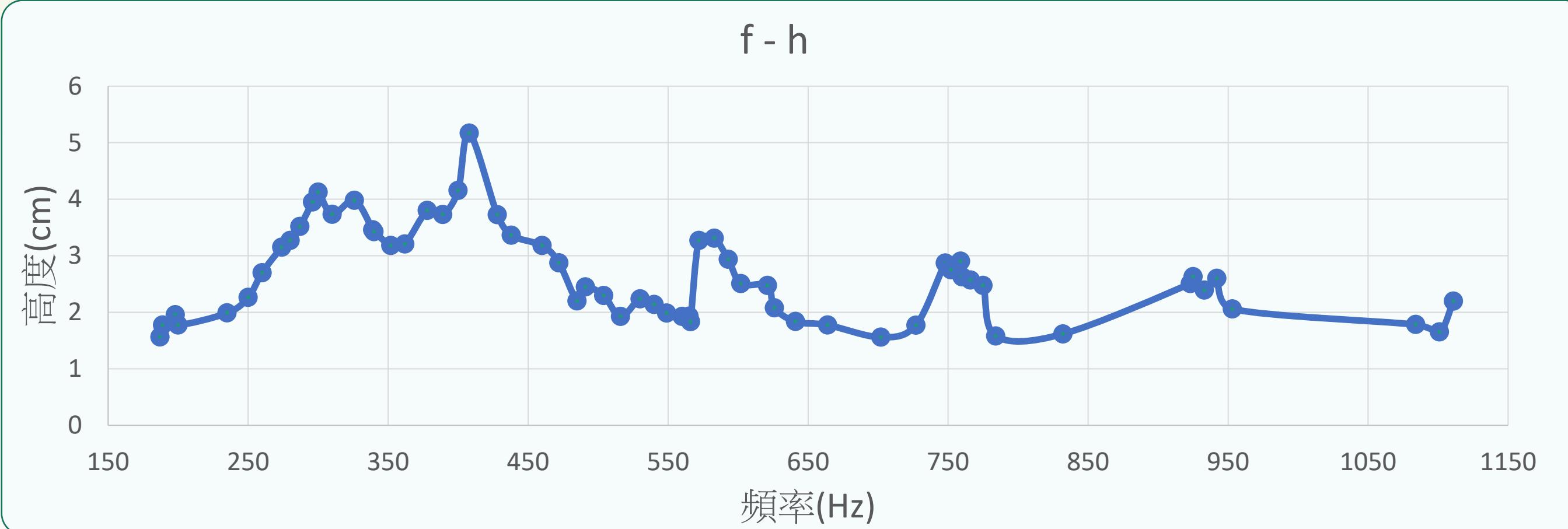
當 $t=10^{\circ}\text{C}$ 時， $\Delta t=1^{\circ}\text{C}$ 的溫差就會造成波長0.17%的誤差。對於低頻率、長波長的狀況，我們所使用的波長會有0.31cm的誤差。對於本實驗的影響並不大。

四、單聲源肯特管實驗

實驗架設



1. 單聲源閉管



記錄**閉管響應程度**隨**頻率**的**變化**，在**非理論共振頻率**也會**響應**

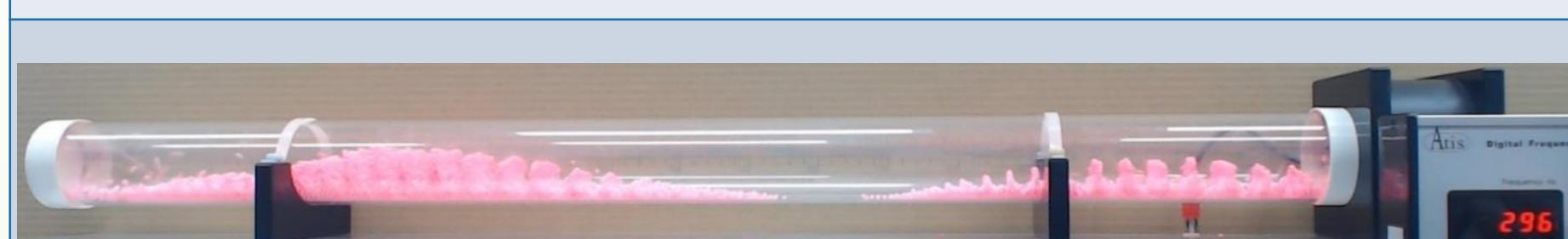
閉管中**頻率**389之**實驗圖**以及**數據**



y - x圖得知丘陵的位置及大小，其結果與理論推測一致。

l - x圖得知條紋間距正比於流速和震動速度，所以在**理論共振頻率**時較能呈現**理論的半弧形**。

閉管**頻率**296之**實驗圖**以及**數據**



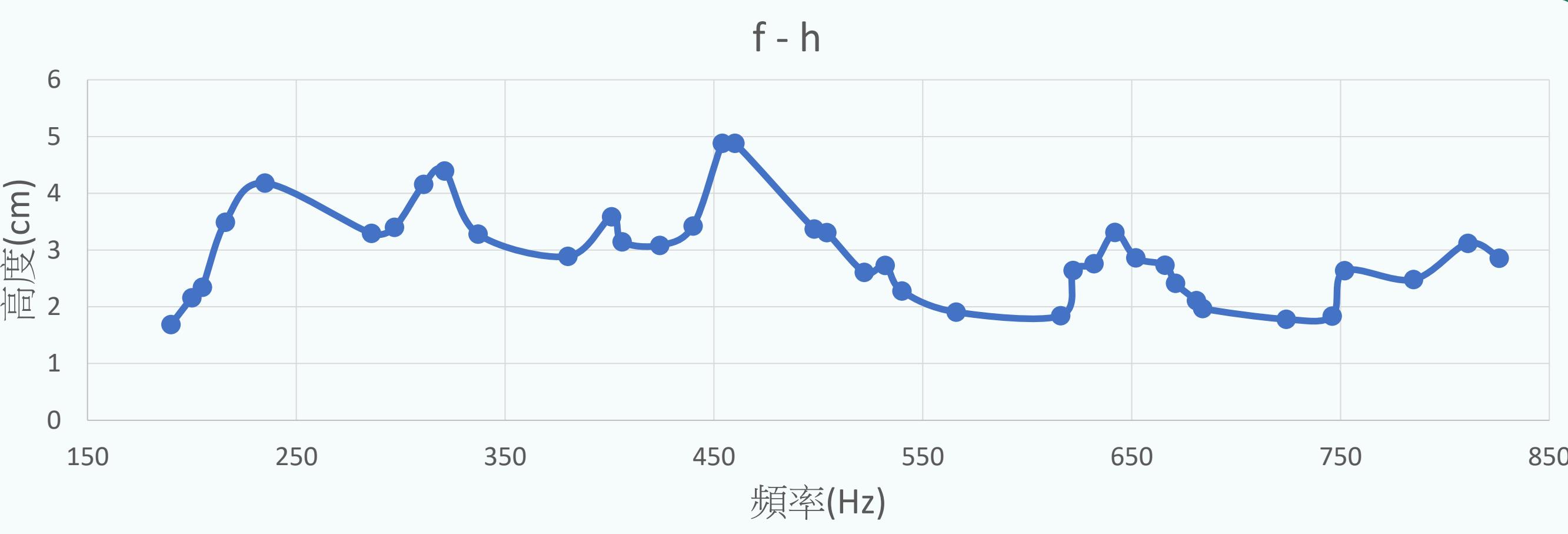
y - x圖可以觀察到**響應**很**強**，丘陵結構**完整**。

l - x圖下此**頻率**為**非理論共振頻率**，儘管丘陵建立，但條紋結構並不**穩定**，只有**右側**丘陵**勉強**可以**看出**圓弧**分布**的一半

實驗方法

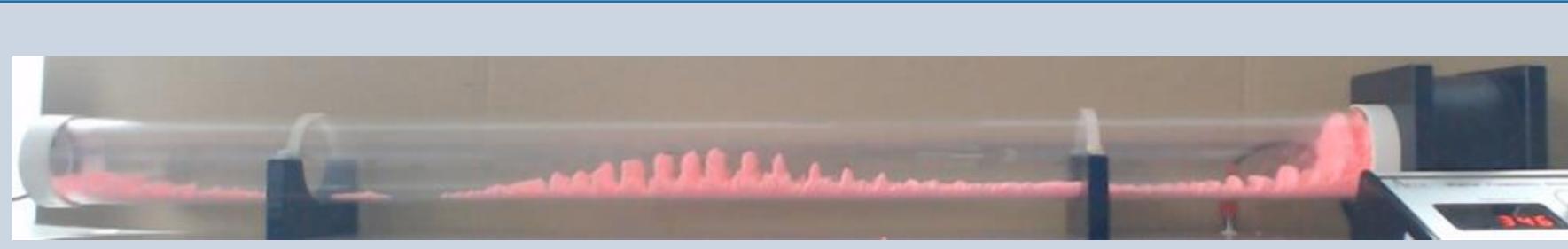
- 封閉肯特管一端形成閉管或開管，使用音頻產生器輸出固定振幅的聲波，逐步提升頻率至穩定態。觀察並記錄出現明顯響應的小球運動、條紋高度、圓盤變化等現象。以鉛直攝影機拍攝條紋分佈，水平攝影機記錄丘陵形狀。
- 從錄影中擷取響應發生時的條紋影像，利用ImageJ擷取條紋頂端位置，繪製條紋分佈圖（**x - y**圖）、條紋間距變化圖（**l - x**圖），並記錄各頻率下的最大條紋高度，繪製頻率與高度關係圖（**f - h**圖），探討頻率對小球分布的影響。

2. 單聲源開管



記錄**開管響應程度**隨**頻率**的**變化**。在**非理論共振頻率**也會**產生響應**。

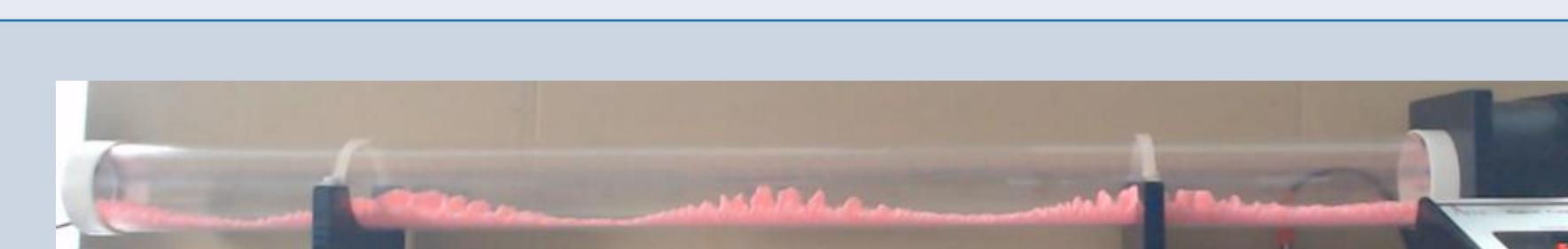
開管中**頻率**346之**實驗圖**以及**數據**



y - x圖下此**頻率**為喇叭在**四分之一**波長時的**理論共振頻率**，其丘陵結構**完整**。但此現象在**高頻率**時**幾乎**看不到。

l - x圖中間的丘陵很類似於半圓弧的條紋間距分布，代表著**渦流結構排列**整齊且**穩定**。

開管中**頻率**652之**實驗圖**以及**數據**

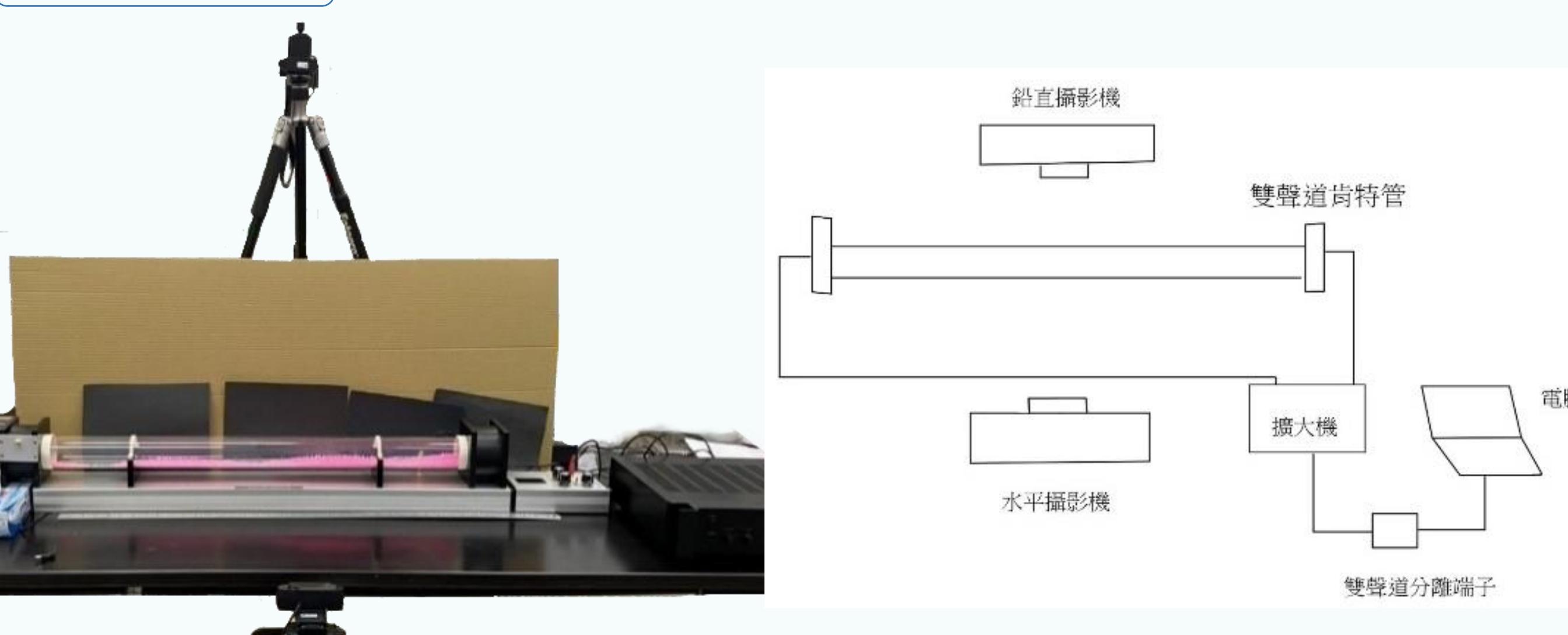


y - x圖下此**頻率**為**理論共振頻率**，丘陵結構**完整**。

l - x圖下中間的兩個丘陵皆有中間高兩側低的條紋間距分布，也就代表著**渦流結構排列**較為**整齊**。

五、雙聲源肯特管實驗

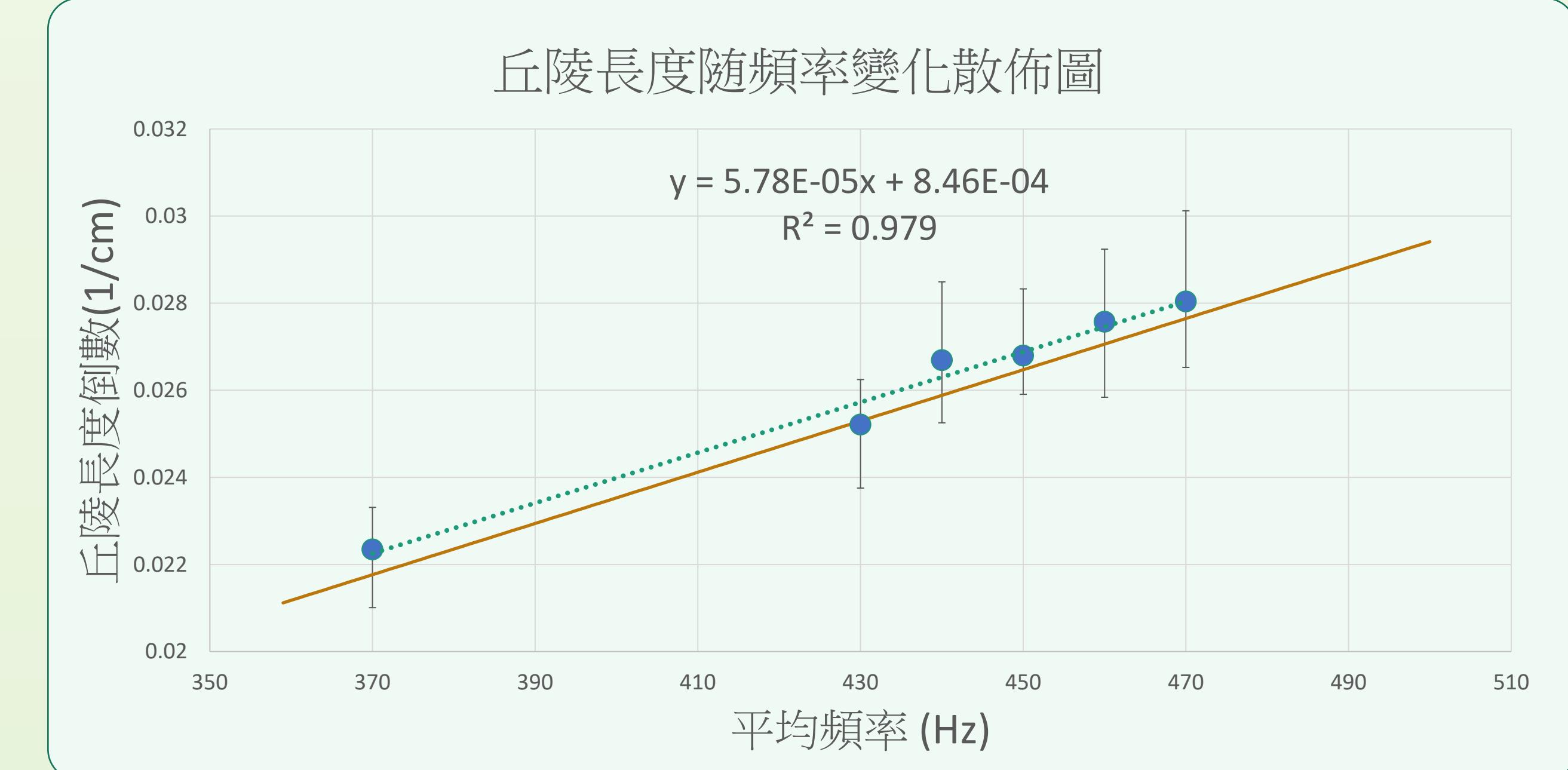
實驗架設



(1) 以**頻率**為操縱變因

由**頻率**會影響到丘陵長度 $L \approx \frac{\lambda}{2} = \frac{2v}{f}$ ，

分析其誤差印證理論



數據及誤差

頻率(Hz)	370 - 370.5			430 - 430.5			440 - 440.5		
	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)
平均	2.01	44.75	22.24	2.01	39.67	19.71	2.01	37.46	18.60
理論	2	45.9	22.95	2	39.51	19.76	2	38.61	19.31
誤差%	0.58	2.5	3.09	0.58	0.39	0.18	0.67	2.96	3.60
頻率(Hz)	450 - 450.5			460 - 460.5			470 - 470.5		
	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)
平均	2.003	39.32	18.63	2.03	36.27	17.85	1.98	35.67	18.04
理論	2	37.75	18.86	2	36.94	18.47	2	36.15	18.08
誤差%	0.17	1.14	1.31	1.58	1.82	3.35	1.16	1.33	0.17

實驗方法

使用 MATLAB 產生聲波，經雙聲道分離與放大器放大後，分別輸出至左右喇叭作為雙聲源：

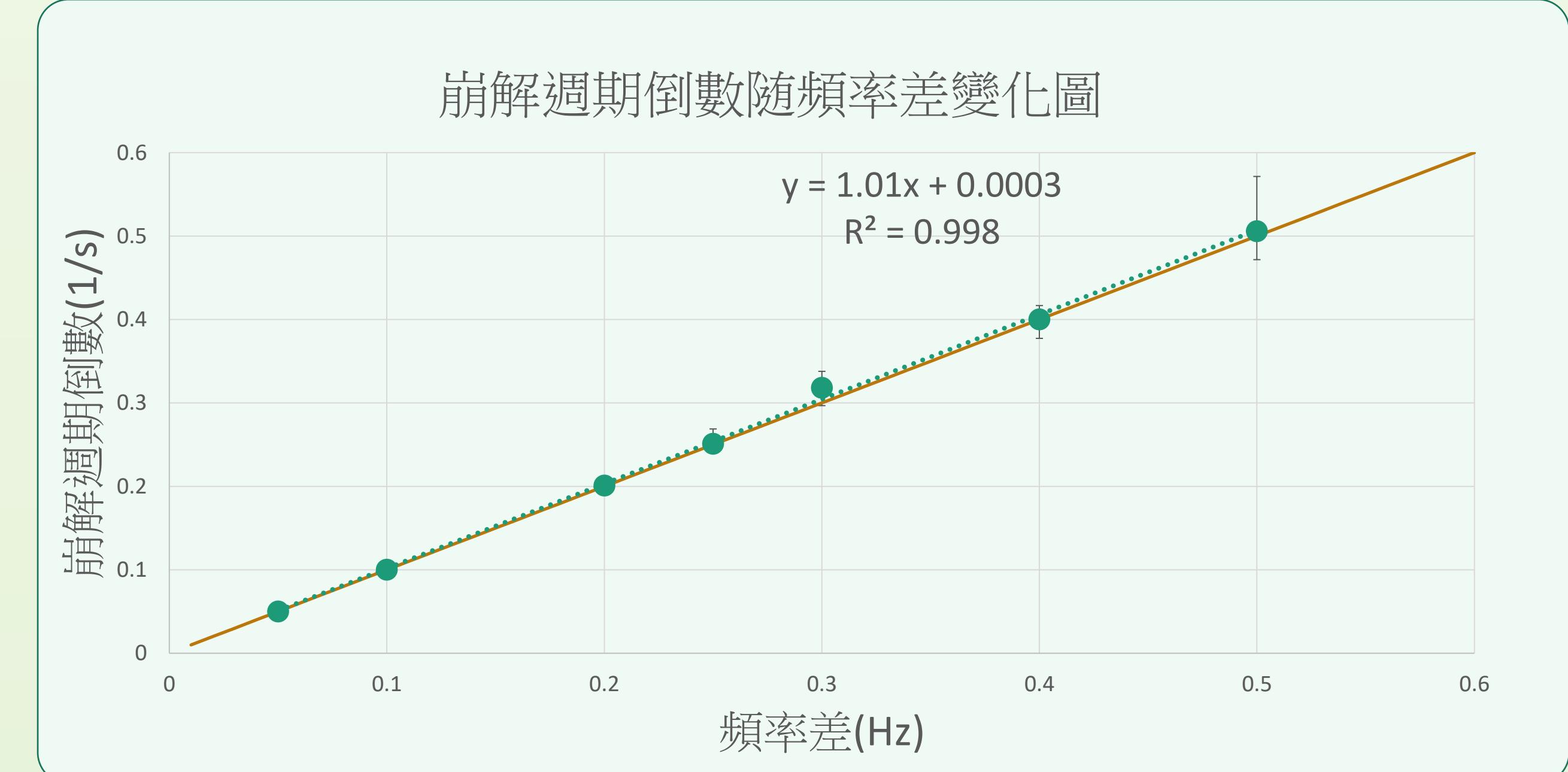
- 發出相同頻率、不同振幅的聲波，觀察干涉效果。
- 發出頻率接近但不同、振幅相同的聲波，觀察條紋變化。
- 左側聲源播放拍音，觀察其對保麗龍球的推動效果。

其中2. 實驗我們稱為「拍音型駐波」，條紋的反應非常明顯，也是我們的主要實驗。

(2) 以**頻率差**為操縱變因

由**頻率差**會影響到崩解週期($T \approx \frac{T_{envelope}}{2} = \frac{1}{f_1 - f_2}$)，

分析其誤差印證理論



數據及誤差

頻率(Hz)	472 - 472.5			472 - 472.4			472 - 472.3			472 - 472.25		
	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)
平均	1.98	35.67	18.04	2.50	34.71	13.90	3.14	36.38	11.57	3.98	36.06	9.05
理論	2	36.15	18.08	2.5	36.15	14.46	3	36.15	12.05	4	36.15	9.03
誤差%	1.16	1.34	0.17	0.06	3.96	3.90	4.77	0.64	3.94	0.46	0.23	0.22
頻率(Hz)	472 - 472.2			472 - 472.1			472 - 472.05			472 - 472.25		
	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)	T(sec)	L(cm)	v(cm/s)
平均	4.97	36.60	7.36	9.98	37.2	37.3	19.91	35.58	1.79			
理論	5	36.15	7.23	10	36.15	3.62	20	36.15	1.81			
誤差%	0.53	1.24	1.78	0.21	2.90	3.12	0.45	1.56	1.12			

1. 現象觀察

波紋的移動速度和拍音形駐波的相速度和群速度皆不相同，並不能以單純的波形運動進行解釋。我們觀察到的現象包含：

1. 在波紋建立時，其運動方向和包絡波前進位置一致，崩塌時則相反。
2. 其速率遠小於包絡波波速。
3. 當 $|f_1 - f_2|$ 越小，也就是崩解週期越大的時候，一次週期中移動的幅度越大。
4. 當小球移動的幅度在崩解時和建立時不對等，會出現粒子運動現象，效率高低不定。

2. 成因推測

條紋移動速度較慢，代表在丘陵參考系中條紋相對向後運動。我們推測原因為：

1. 丘陵前緣新生成的條紋，其間距小於穩定渦流陣列所需的間距 l ，造成與其後條紋的「擠壓」效應。
2. 條紋間的排斥力驅使舊條紋向後推移，並透過類骨牌效應，造成整個條紋陣列相對向後傳遞。
3. 此鏈式排斥反應使條紋陣列維持穩定間距，但若要進一步量化此理論，需引入流體動力學並考慮條紋對流場的干擾，目前仍具挑戰性。

肆、討論

一、單聲源肯特管實驗之討論

(一) 駐波頻率附近響應最強，易產生圓盤現象干擾實驗，且渦流在 $l-x$ 圖中表現較不穩定。

(二) 閉管中，由於塑膠反射面保留較多能量，使條紋遞減現象不如開管明顯；特別在低頻時，開管聲源附近仍有條紋，但遠端振幅不足以支撐條紋產生，顯示雙聲源模擬中反射係數 β 應被考慮。

(三) f 越大發生響應時響應程度越小，但行為不變。符合基爾霍夫-亥姆霍茲理論(衰減係數 $\alpha \propto \sqrt{f}$)。

(四) 腹點振幅過大時，小球可能形成與管徑相當的圓盤，干擾記錄。

(五) 丘陵形狀與位置觀察：

1. 聲源位置不固定為節點或腹點。
2. 高頻下，聲源附近傾向形成波節，推測聲源傾向為波節。
3. 閉管處為波節，開管處為波腹。

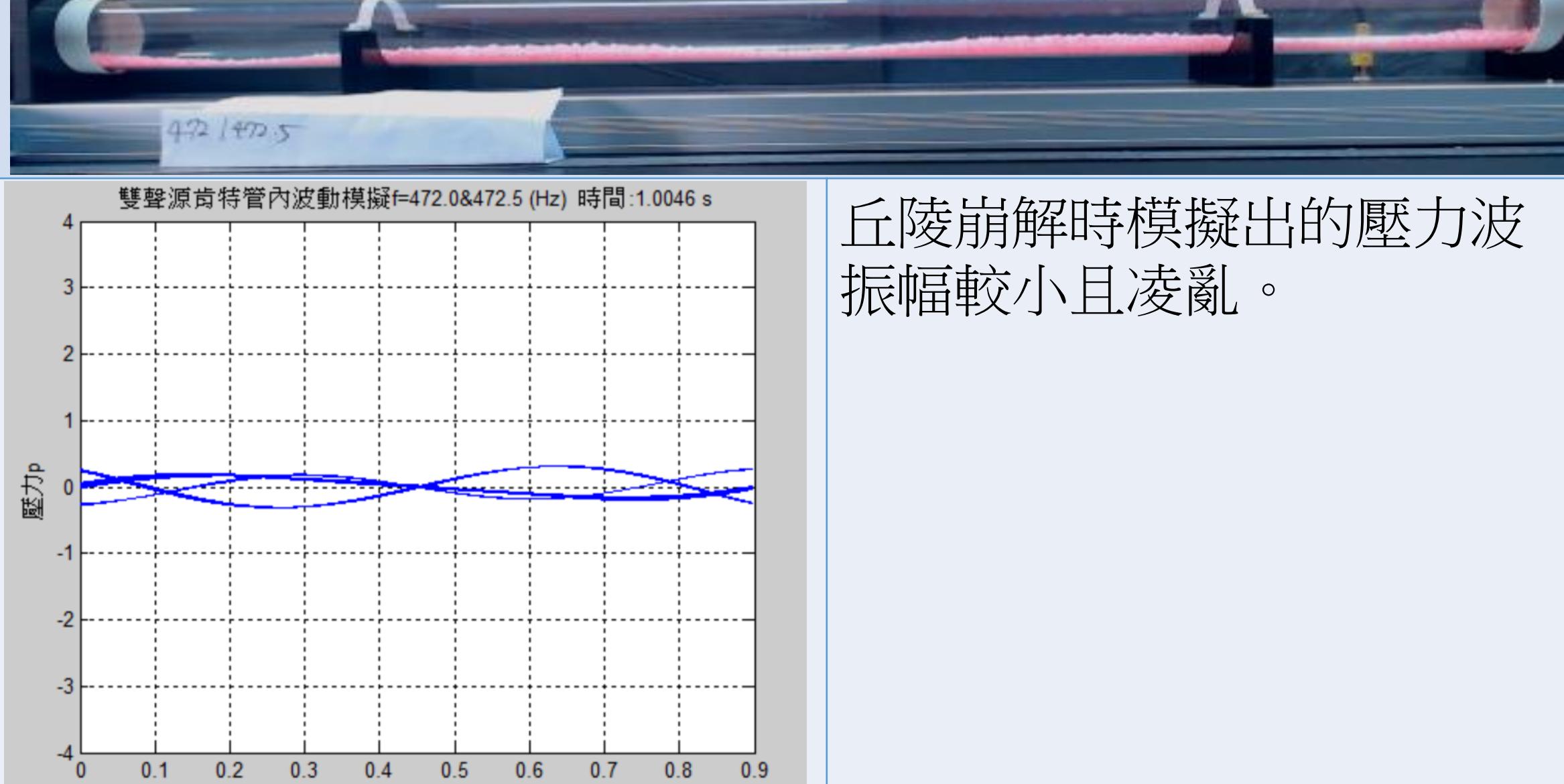
二、數值模擬與實驗結果的比對

理想的數學公式過於簡化，真實的物理實驗又過於複雜，因此需要數值模擬這個工具來搭橋一座橋樑，使理論預測能與實驗結果對應起來。數學解雖能準確預測崩解週期與丘陵間距，但因缺乏邊界條件，難以準確預測丘陵位置。數值模擬考慮波動方程、邊界激發、阻尼與反射係數，兩者在崩解週期上結果一致，但模擬更能揭示拍音型駐波下的穩定性與壓力波情形。

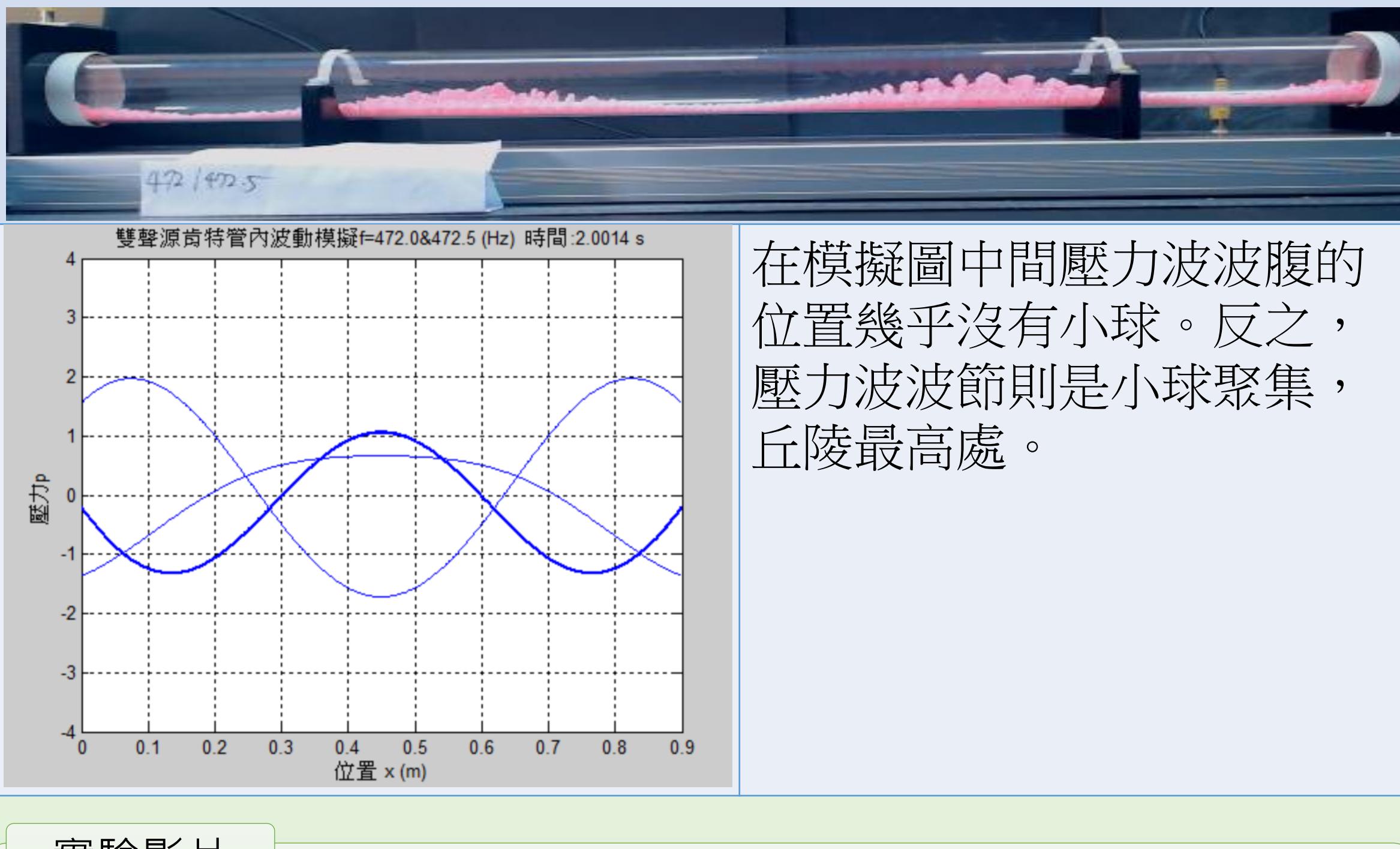
數值模擬使用的是聲學中的壓力波，其波節處對應位移波的波腹，波腹對應位移波波節，這點和之前使用的位移波形解釋相反。

以 $f_1=472, f_2=472.5$ 為例，其崩解週期為 2 秒：

響應最小(崩塌)



響應最大(建立)



實驗影片

單聲源	單聲源閉管389Hz	單聲源閉管296Hz	動畫	拍音型駐波模擬動畫600-601
雙生源	377-376實驗影片	472-472.5實驗影片	472-472.5模擬影片	472-475模擬影片

伍、結論

一、環境因素

(一) 濕度不會造成誤差

(二) 空管震動不會造成誤差

二、單聲源

(一) 丘陵大小為波長的一半

(二) 丘陵的位置受肯特管開口影響，閉管處為位移波波節，開管處為位移波波腹

(三) 即使非理論共振頻率下一樣可以發生響應，但穩定度不高，波紋間距對位置圖較為混亂

三、雙聲源

(一) 丘陵大小為包絡波波長的一半

(二) 理論上丘陵形將以群速度在肯特管中移動，但由於邊界條件，丘陵有崩解現象，崩解的頻率為兩聲波的頻率差，即丘陵會以包絡波週期的一半為建立與崩解的週期

(三) 數學模型沒辦法預測丘陵建立的位置，但數值模擬可以

(四) 丘陵中保麗龍球的條紋在建立過程中，隨著丘陵同方向運動，但崩解過程與丘陵反方向運動，其原因與渦流有關，詳細機制有待研究。但表示拍音型駐波可用來推動介質中粒子。

未來展望

雙聲源肯特管藉由撰寫程式來提供不同的入射波形，使得肯特管內部駐波的型式有多種可能性。

若肯特管模擬成人體的氣管，內部的保麗龍球可模擬成痰液。而超聲波經長期的使用與研究，已證實對人體無不良的影響。若能以超聲波的駐波來集中氣管中的痰，甚至使用波形的改變來控制痰的移動。對於某些病人。本研究目前成功的能將響應後，形成條紋的保麗龍球以條紋的形式往左推動一些距離且這理論的實驗裝置簡略容易取得，若真的研究成功，可望應用在生物醫學上。

陸、參考文獻

1. Andrade, E. N. D. C. (1931). On the circulations caused by the vibration of air in a tube. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 134(824), 445-470.
2. Andrade, E. N. D. C. (1932). On the groupings and general behaviour of solid particles under the influence of air vibrations in tubes. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 230(681-693), 413-445.
3. Macho-Stadler, E., & Elejalde-García, M. J. (2019, August). Experiments with Kundt's tube. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1287, No. 1, p. 012022). IOP Publishing.
4. Kambe, T. (2022). Gauge-Theoretic Study of Kundt Tube Experiment and Spontaneous Symmetry Transition, Glob. J. Sci. Front. Res.-A, 22(6), 61-86.
5. Barbieri, Alessio, and Enzo Vitillaro. "The damped wave equation with acoustic boundary conditions and non-locally reacting surfaces." Semigroup Forum. Vol. 105. No. 3. New York: Springer US, 2022.
6. Khramtsov, I. V., et al. "On numerical simulation of sound damping mechanisms in the cell of a sound-absorbing structure." Acoustical Physics 64 (2018): 511-517.

照片來源

第一頁	拍音形駐波時間、空間、介質位移示意圖	以Matlab製作
實驗裝置		作者自行實物拍攝
軟體圖標		各官網截圖
實驗理論架構圖		作者在Draw.io上繪製
肯特管管身自然共振頻率頻譜圖		作者由MATLAB分析和製作
第二頁	實驗架設照片	作者自行實物拍攝
實驗架設示意圖		作者以Word製作
單聲源 $f - h, y - x, l - x$ 圖		作者拍攝後以ImageJ標記，再於Excel中繪製
肯特管實驗照片		作者自行實物拍攝
雙聲源數據散佈圖		作者拍攝後以ImageJ標記，再於Excel中繪製
第三頁	肯特管實驗照片	作者自行實物拍攝
電腦模擬結果		作者於MATLAB執行和截圖