

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051817

「鋸」我所知

學校名稱： 國立彰化高級中學

作者： 高二 黃彥叡 高二 謝豐丞 高二 楊嘉偉	指導老師： 姚靜穎
---	------------------

關鍵詞： 震動、聲音變化、金屬薄片

摘要

我們主要研究鋸琴（伐木鋸）發聲的原理，探討演奏過程中可以用來調整的因素，如施力大小、方式、形狀...等，研究這些不同變因與發出聲音的關係；並討論使用不同引發聲音的工具（塑膠槌和弓弦）與擾動位置對聲音的影響。此外，還有對參考文獻中所描述鋸琴彎曲形狀之J形、S形與甜蜜點的定義加以分析，參考金屬薄片振盪狀態的理論及其拓樸區域模態對聲音的關係，理解演奏時鋸子彎曲形狀和甜蜜點在實驗中的角色，歸納出彈奏鋸琴時可使用的規律。

壹、研究動機





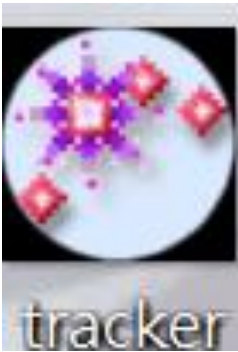

當我們第一次見到鋸琴演奏時，便被它那獨特的聲音吸引，更驚訝於演奏時所需的特殊技巧。這種看似與音樂毫不相關的工具，竟能發出如此富有表現力的音色，令人不禁對其背後的機制產生濃厚的好奇心。究竟是什麼樣的物理原理，能使一把看似跟音樂毫無相關的鋸子跟音樂緊密結合起來，成為發出悅耳聲音的樂器。

貳、研究目的

- 一、演奏姿勢的研究與實驗裝置的設計
- 二、甜蜜點位置的量化研究
- 三、鋸子形狀於 J 形和 S 形時與聲音的關係
- 四、探討施加力量值的改變與聲頻關係
- 五、探討鋸子彎曲形狀的幅度與聲頻關係
- 六、探討產生聲頻的基音與泛音

參、研究設備及器材

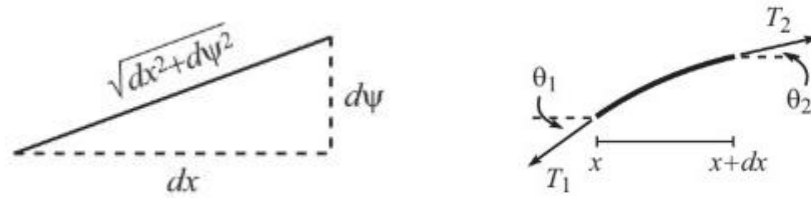
<p>伐木鋸</p> 	<p>弓弦</p> 	<p>架子</p> 	<p>橡皮槌</p> 
<p>橡皮球</p> 	<p>測力計</p> 	<p>聲音感測器</p> 	<p>PASCO</p> 

筆電 	三腳架 	MATLAB 	phyphox 
Tracker 	手機 	研究設備及器材的圖片皆由作者親自拍攝或製作	

肆、實驗原理

在實驗理論的設定中，一開始我們希望以一般樂器的發音機制來討論，因此以高中所學的駐波出發，以求實驗結果能其相呼應的解釋；但鋸琴演奏時，鋸片的樣態太過於特殊，無法明確的定義駐波的腹點和節點的位置，進而轉換到討論二維薄板彈性震動理論，冀望能理解聲譜與形狀的相應關係。然而二維薄板震動的公式裡沒有幅度較大的形狀彎曲變量可以討論。最後，我們找到了2022年的論文< Geometric control of topological dynamics in a singing saw> (Suraj Shankara , Petur Brydeb, and L. Mahadevan , 2022) 中，有加入鋸片彎曲的修正量，以及我們的實驗結果與此論文中提及的局域模態 (localized mode) 或稱為 拓撲局域模態 (topologically localized mode) 有關，經分析實驗數據後，發現與論文中的公式有所對應。因此以下列出了實驗中引用理論公式的發展與修正。

一、一維繩波的駐波頻率



(由參考資料七) 考慮一條無限細、完全彈性且具有張力 T 和線密度為 μ 的弦，弦上相鄰的兩個點，縱向方向一小段位移為 dx ，橫向方向相距一小段位移 $d\psi$ 。假設 $d\psi$ 很小（事實上為 $d\psi/dx$ 很小），則可近似弦上的點只在橫向運動，無縱向運動。針對從 x 到 $x+dx$ 這段小區間內的弦討論（忽略重力影響）。設弦在此區間前後兩端的張力分別為 T_1 和 T_2 ，然而 $d\psi/dx$ 很小，故取 $\sin \theta$ 近似於 θ ， $\cos \theta$ 近似於 1，因此兩端縱向力量值 $T_1 \cos \theta_1 \approx T_1$ 和 $T_2 \cos \theta_2 \approx T_2$ ，並依據近乎無縱向運動的假設，由縱向加速度為零得 $T_1 = T_2 = T$

橫向分量張力分別為： $T_1 \sin \theta \approx T_1 \frac{d\psi(x)}{dx}$ 和 $T_2 \sin \theta_2 \approx T_2 \frac{d\psi(x+dx)}{dx}$ （其中使用近似值 $\sin \theta \approx \theta \approx \frac{d\psi}{dx}$ ）

橫向力的淨變化量為：

$$\begin{aligned} F_{net} &\approx T_2 \psi'(x+dx) - T_1 \psi'(x) \approx T dx \left(\frac{\psi'(x+dx) - \psi'(x)}{dx} \right) \\ &= T dx \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} \end{aligned}$$

由於這段小弦的質量為 μdx ，橫向加速度為 $\frac{d^2 \psi(x)}{dt^2}$ ，則可由牛頓第二定律來建立橫

向運動的方程式： $F_{net} = ma = (\mu dx) \frac{d^2 \psi(x)}{dt^2} = T dx \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2}$ ，

即 $\frac{d^2 \psi(x)}{dt^2} = \frac{T}{\mu} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2}$ (1)

這就是一維波動方程。

考慮自然振動的情況下，此波動方程式得解可寫成 $\psi(x, t) = A e^{i(kx \pm \omega t)}$

代回上述公式(1)，可得 $\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ，而 $\frac{\omega}{k} = \frac{(2\pi/T)}{(2\pi/\lambda)} = \frac{\lambda}{T} = c$ ，其中 c 是波速

(phase velocity)。

二、二維金屬薄板振動

考慮彈性的金屬薄板撓曲變形可使用到 Kirchhoff - Love plate theory 來描述。當薄板上發生進行自由振動時，此時板的運動可以用以下方程式表示（參考資料八）：

$$\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 ,$$

其中 $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ 。以上方程式中 $w(x, y, t)$ 表示板上任一點 $w(x, y)$

在時間 t 時的垂直方向的位移， $\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ 用以表示板的彎曲剛度（Flexural rigidity），

反映板本身的彎曲抵抗能力。其中 E 是板的楊氏模數（Young's modulus）， h 為板的厚度， ν 為材料的泊松比（Poisson's ratio）， ρ 為板的密度。

方程式中的第一項可以理解為薄板內部由於彎曲產生的恢復力，試圖讓板回到原本平坦的狀態，而第二項可理解為板的慣性力（質量乘上加速度），板會因為慣性繼續上下移動。兩項相加為零，表示在沒有外力的情況下，板內恢復力與板的慣性互相平衡，因此會持續振動。

考慮自然振動的情況下，可將此方程式的解寫為 $w(x, y, t) = W(x, y) e^{i \omega t}$ 代回上述公式，可得

$$\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 W(x, y) - \rho h \omega^2 W(x, y) = 0 ,$$

其中 ω 為自然振動的角頻率 ($2\pi f$)，而 $W(x, y)$ 代表板的空間振動模態（振動的形狀）。計算出上述方程式，可找出薄板自然的振動頻率和對應的各項振動樣態。

三、金屬薄板的彎曲形變修正量

然而鋸琴彈奏時，不僅使用的材料為薄金屬鋼板，在發音過程中必須彎曲鋸子才能產生優美的琴聲，在參考資料三中，提及有必要加入薄板的彎曲形變修正量進行討論，論文特別提到，鋸琴所產生的聲音是來自板子本身的幾何形狀與拓撲特性有關。論文中使用的公式為

$$\rho h \partial_t^2 f = -\kappa \nabla^4 f + b_{ij} P_{ij} \nabla^2 \chi ,$$

$$\frac{1}{Y h} \nabla^4 \chi = -P_{ij} \nabla^2 (b_{ij} f)$$

，其中 $\kappa = \frac{Y h^3}{12(1-\nu^2)}$ ， Y 是板的楊氏模數， χ 是艾里應力函數（Airy stress function）， h 是板厚度， $b_{ij} = \partial_i \partial_j X_0$ 為曲率張量（curvature tensor，描述板的彎曲狀態），而 X 是表示經過變形後的殼在三維歐式空間中的位置函數， X_0 為初始的位置函數）。 f 為板的垂直位移函數（板的撓曲變形）， $P_{ij} = \delta_{ij} - \{\partial_i \partial_j / \nabla^2\}$ 為一個投影算符。

上述公式表示，板的內部應力場（以 Airy stress function 表示）與板的幾何（曲率）和板的撓曲變形有緊密的耦合關係。

我們引用論文中一段介面局域模態（Interface localized mode）中的一段計算，考慮一個簡單的曲率張量線性曲率分布 $b(x) = b' x$ ，其中 b' 為一個常數曲率梯度（curvature gradient），將此系統對時間以及橫向（ y 方向）進行傅立葉變換後，假設沿 x 方向的變化相對緩慢（滿足 $\partial_x^2 \ll q_y^2$ and $P_{xx} \simeq 1$ ），則在梯度的主要項展開可得到

$$-\rho h \omega^2 f(x) = 2 \kappa q_y^2 \partial_x^2 f(x) - \left[\kappa q_y^4 + Y h (b')^2 x^2 \right] f(x)$$

此振動系統的最低能階（最低局域模態）解，即為簡諧振子的基態解，其對應的模態頻率為

$$\omega_0(q_y)^2 = |q_y| \frac{\kappa}{\rho h} \left[|b'| \sqrt{\frac{2 Y h}{\kappa}} + |q_y|^3 \right] \sim c^2 h |q_y b'| \quad \text{其中 } (q_y \rightarrow 0)$$

在上式中，當 $q_y \rightarrow 0$ 時的極限只是近似，因為當 $q_y \rightarrow 0$ 時體頻率間隙消失，將無法形成局域模態。然而，仍可清楚看到，拓撲局域模態（topologically localized mode）具有一個受到殼體的曲率分布所控制的頻譜方程式。

在我們的實驗中，我們將比較鋸琴聲譜頻率和手指施力量值與形狀變化關係，比較論文中的拓撲局域模態的性質，以及與曲率梯度(b')的關係。

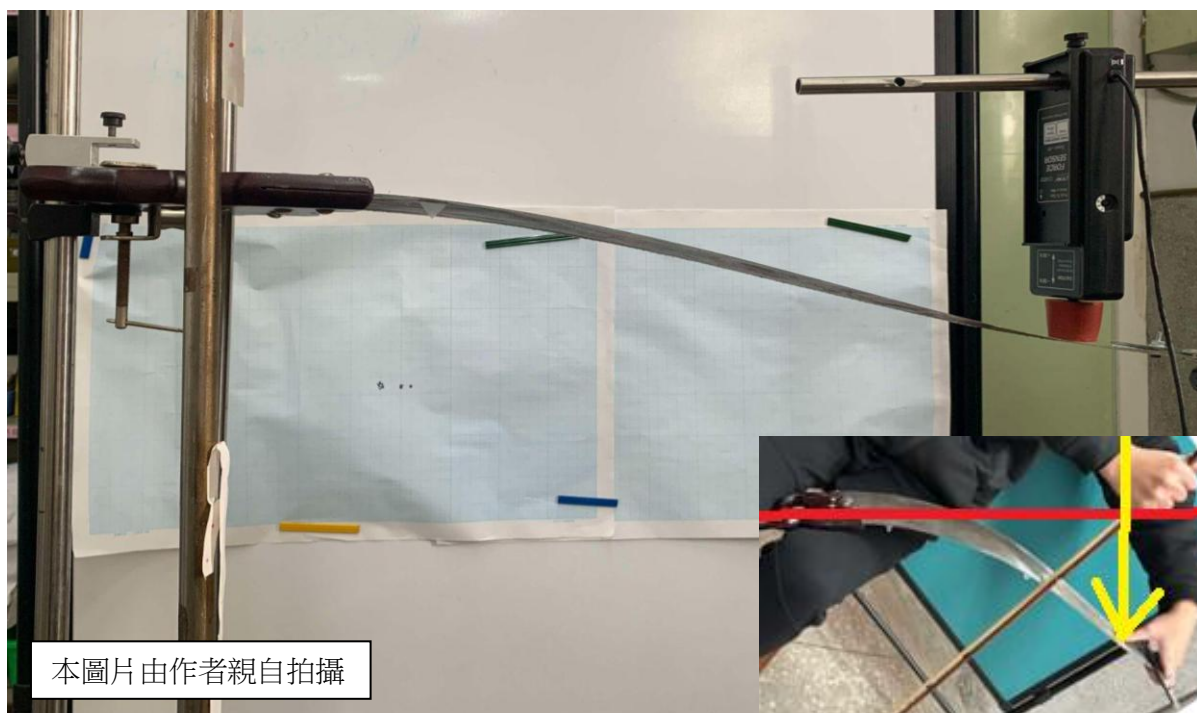
伍、研究過程或方法

一、起源與實驗裝置設計

首先，鋸琴相傳最早源自於十七世紀的義大利，一位伐木工人在休息時，隨手拔弄鋼鋸，發現可以發聲，於是他懷著好奇心開始敲打，開啟了第一次的鋸琴演奏。而之後隨著時代的變化鋸琴逐漸演化成了用弓弦去拉，而鋸琴的演奏姿勢為，將鋸子夾在兩腿間，左手握住鋸端將鋸身彎曲成「S」形狀，右手拿弓，如圖所示。



此圖片中，施力的方向大致是如此，於是我們為了可復現性，設計了下圖的裝置，在表演時，木把是由表演者雙腳將其固定，而我們則使用架子將其固定住，另一端用四指支撐的部位，我們用一個小平台將其支撐住，用小平台正向力模擬四指的力，而大拇指下壓的部位，則由測力計來施壓，這樣不僅模擬出大拇指的力，還能時刻紀錄數據，方便後續研究。



本圖片由作者親自拍攝

(手施的力由測力計所施)
(腿施的力則由右圖所施)

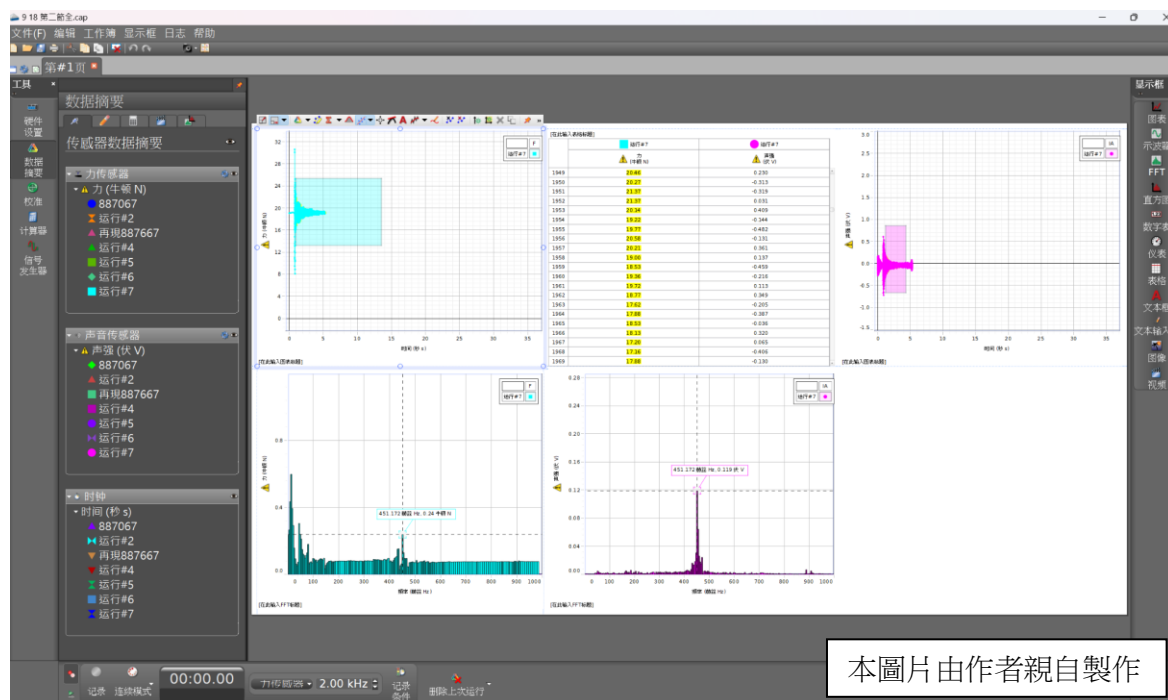


本圖片由作者親自拍攝

二、測聲音的實驗步驟

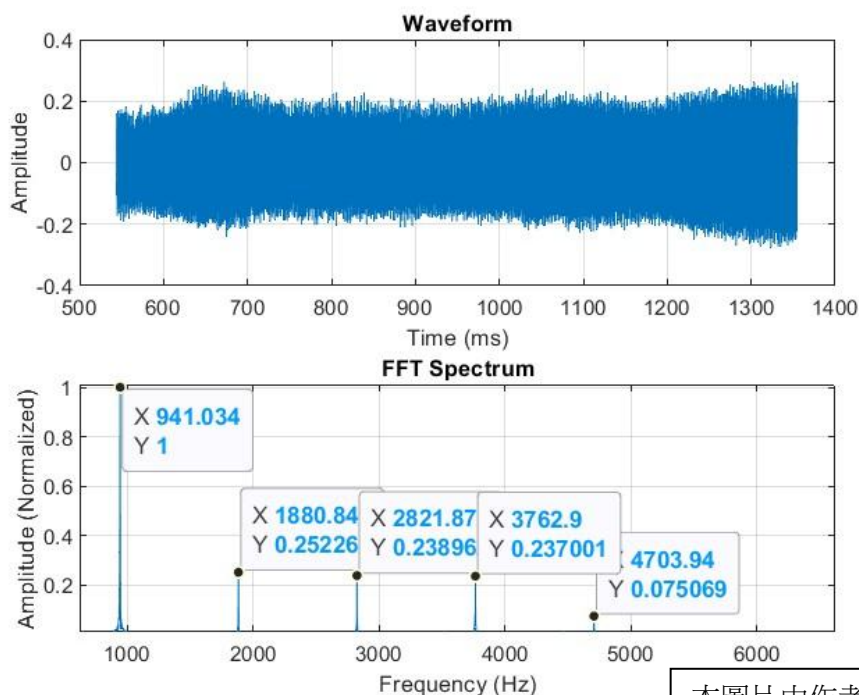
- (一) 將鋸子固定在架子上
- (二) 將測力計壓在固定一端的另一端，紀錄測力計離端點的距離與力的大小
- (三) 用橡皮槌敲打鋸子確認是否有聲音，若無聲音則調整高度或測力計 (如果是弓弦，可以使用松香粉增加摩擦力，使鋸子振動發出聲音)

(四) 確認有聲音後，用PASCO測聲音與力



(此圖為PASCO介面)

(五) 將測到的聲強數據取出，用MATLAB做傅立葉分析，即可得到音頻
(採樣頻率為10000，數據點為8192個)



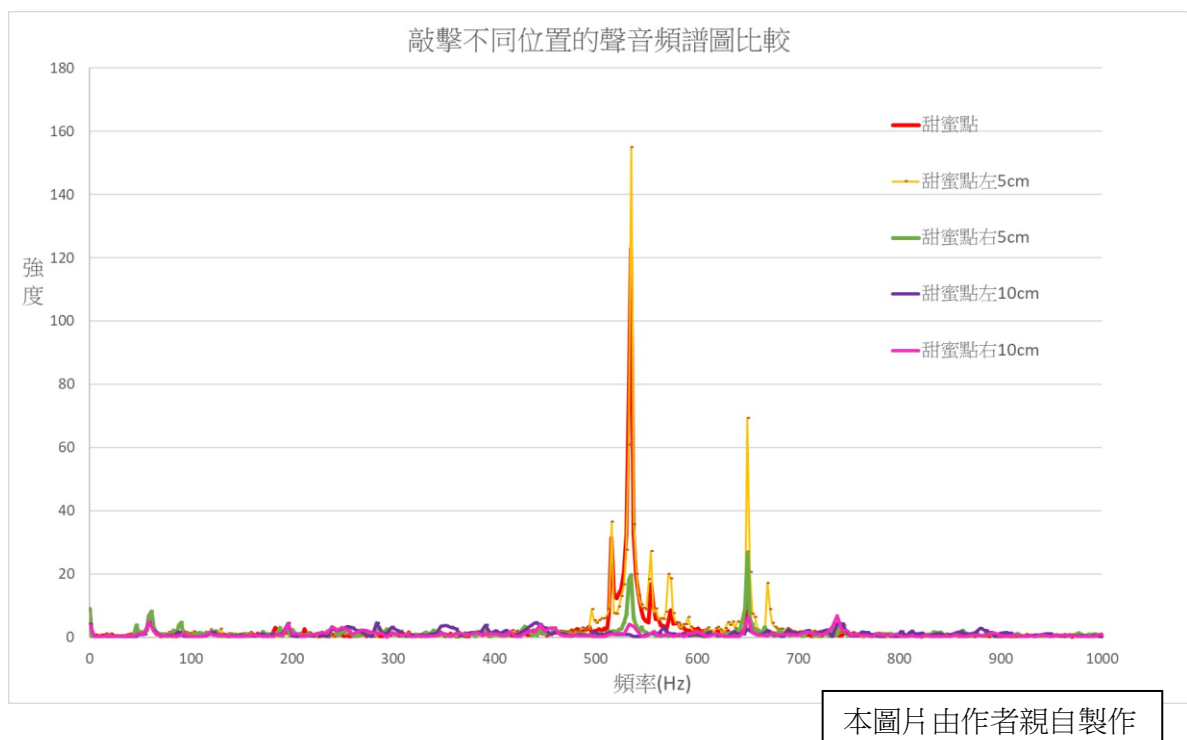
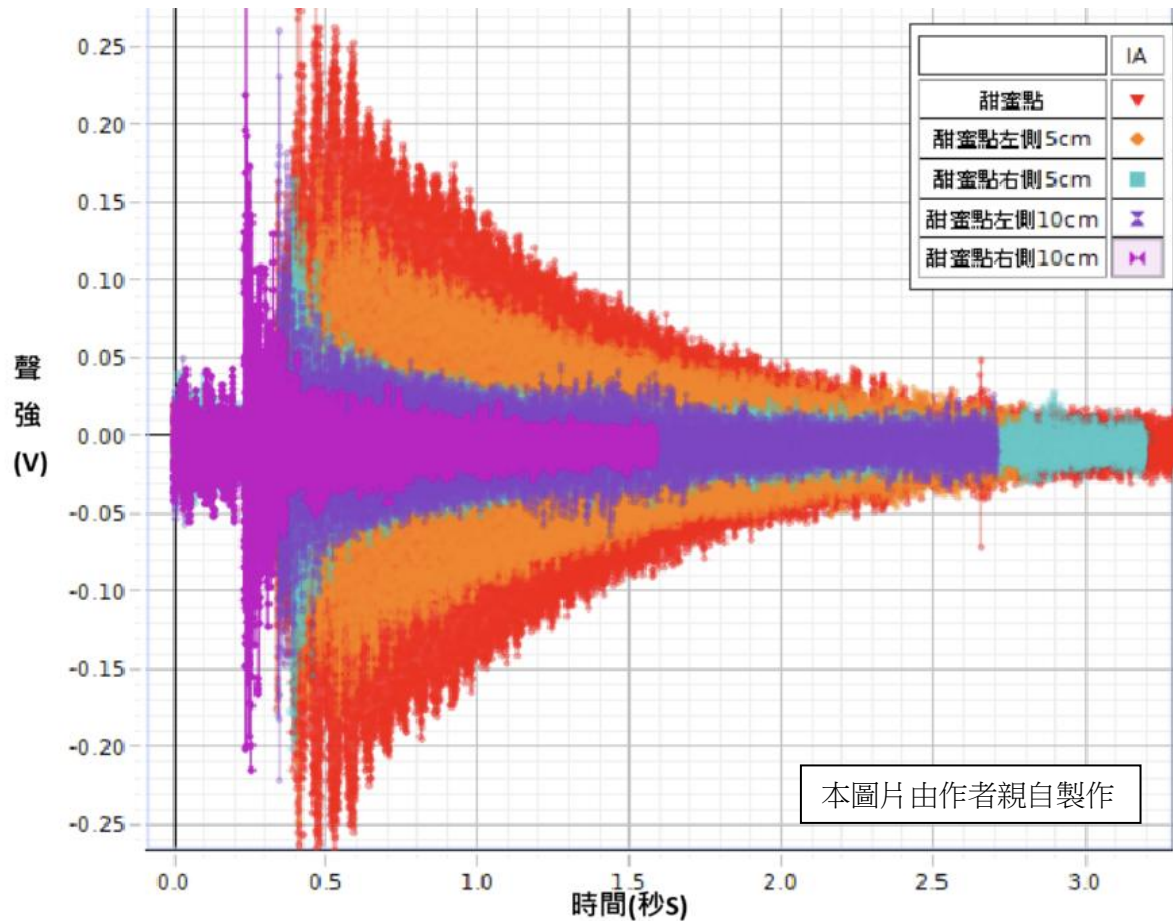
(此圖為MATLAB做FFT的結果)

(六) 改變變因重複實驗步驟，整理數據

(七) 數據分析

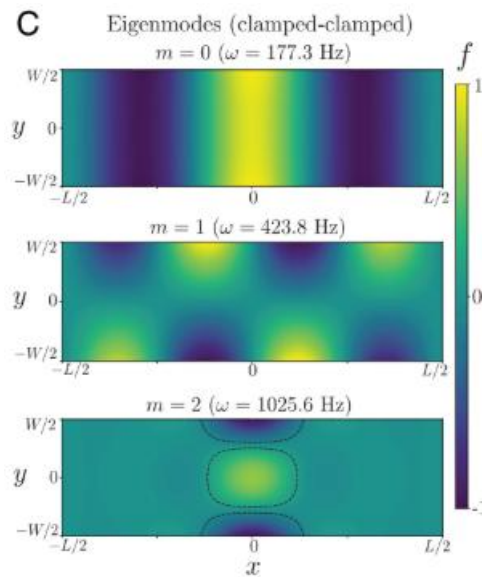
三、找甜蜜點位置的量化研究

我們一開始透過敲擊位置的聲音大小和是否清晰來找出甜蜜點大致的位置，我們可以發現，甜蜜點的聲強最大，距離甜蜜點較近的時候，可以產生如同甜蜜點的音頻，而遠離甜蜜點，就會無法發出相同且清晰的聲音。



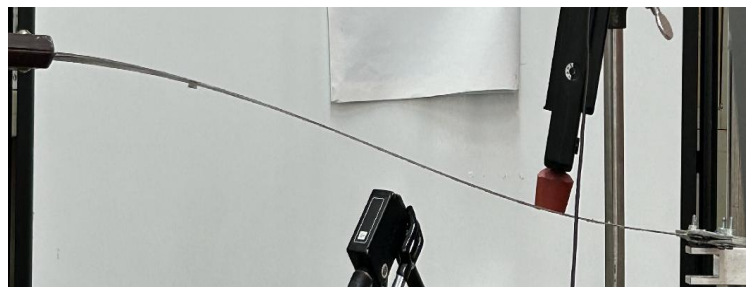
敲擊的位置是連續的位置變化，聲音響度都是明顯的減弱。引用參考資料三論文中的圖（右圖），在 $m = 2$ 時，才是拓撲局域模態，鋸片只在甜蜜點附近會形成振盪，實驗結果與論點吻合。

因為敲擊的位置與甜蜜點有關，為簡化分析，我們決定以三次函數的反曲點的位置與先前找到甜蜜點的位置作比較，證實了在此位置敲擊聲響為最大，與甜蜜點性質相同，我們找甜蜜點的步驟如下：

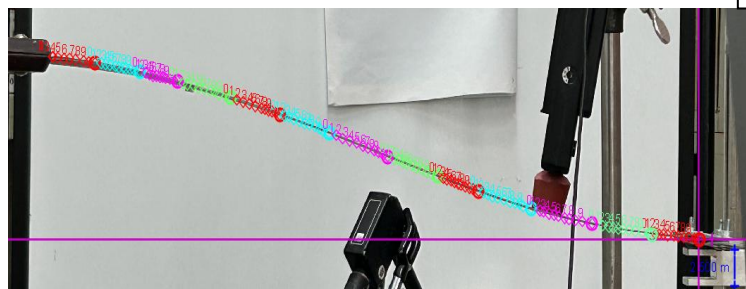


出處詳參考資料十

(一) 確認可以發出聲音後，用手機拍下鋸子的側面圖



(二) 用Tracker在鋸子上找點座標

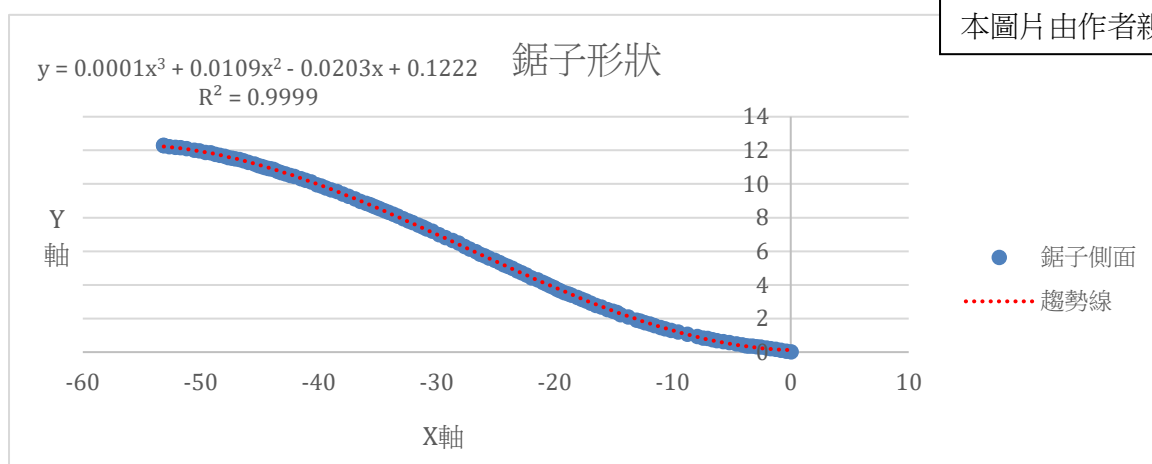


本圖片由作者親自拍攝

(三) 將點輸入Excel作圖並找趨勢線與三次函數方程式

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
-53.1306	12.28195	-43.8275	10.85794	-33.2831	8.08307	-21.9508	4.417691	-11.5327	1.579335
-53.1405	12.28768	-43.497	10.74299	-32.8259	7.930679	-21.4347	4.288675	-11.034	1.45915
-53.1405	12.28768	-43.1953	10.67114	-32.3891	7.808766	-21.0105	4.141228	-10.648	1.388035
-52.663	12.22493	-42.8073	10.59929	-32.0335	7.707173	-20.7058	4.049794	-10.1298	1.286441
-52.1384	12.17932	-42.4062	10.51116	-31.5458	7.554782	-20.3703	3.933881	-9.53298	1.192286
-51.7213	12.15866	-42.0405	10.44005	-31.1902	7.443029	-20.0657	3.836447	-8.75832	1.062934
-51.2052	12.09416	-41.502	10.30798	-30.8448	7.321116	-19.7813	3.724693	-7.89477	0.930862
-50.5533	12.00826	-41.0956	10.21654	-30.3572	7.189044	-19.5317	3.643594	-7.42744	0.829268

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
-50.1199	11.96264	-40.6486	10.12511	-29.7984	6.985856	-19.192	3.541824	-7.04138	0.80895
-49.6068	11.88282	-40.1508	9.952397	-29.2498	6.813147	-18.8466	3.460549	-6.62485	0.737834
-49.1506	11.8486	-39.7851	9.871122	-28.6596	6.643221	-18.5641	3.385562	-6.23879	0.676878
-48.7515	11.75737	-39.3889	9.769528	-28.1436	6.481951	-18.0803	3.256546	-5.72066	0.626081
-48.3866	11.71176	-38.9317	9.647615	-27.6243	6.274699	-17.6986	3.145608	-5.19237	0.575284
-47.976	11.64333	-38.4542	9.546021	-27.1773	6.122308	-17.3532	3.033855	-4.60313	0.483849
-47.6567	11.57491	-37.9666	9.393631	-26.6795	5.969918	-16.9265	2.901783	-4.11548	0.433052
-47.3488	11.5407	-37.4586	9.271718	-26.3137	5.827686	-16.4999	2.772735	-3.81151	0.375957
-47.0637	11.49508	-36.9201	9.109168	-25.9378	5.726092	-16.0483	2.675973	-3.57703	0.361937
-46.7102	11.44947	-36.4731	8.966936	-25.5619	5.59402	-15.5245	2.525886	-3.24177	0.351777
-46.3681	11.36964	-35.9652	8.845024	-25.0794	5.449821	-15.0775	2.424292	-2.89635	0.321299
-45.9461	11.28982	-35.6604	8.763749	-24.6601	5.320805	-14.7259	2.353432	-2.54077	0.290821
-45.4317	11.19104	-35.3454	8.682474	-24.3053	5.191789	-14.4033	2.224416	-2.05312	0.240024
-45.1208	11.08785	-35.0915	8.601199	-23.9505	5.095026	-13.7567	2.089032	-1.68739	0.199386
-44.8189	11.02977	-34.8171	8.530083	-23.5809	4.974298	-13.0487	1.901876	-1.26069	0.158749
-44.5748	10.9729	-34.4311	8.40817	-23.1643	4.832066	-12.7261	1.837367	-0.834	0.107952
-44.2874	10.92979	-34.0783	8.320431	-22.7884	4.710154	-12.3547	1.743613	-0.37683	0.057155
-44.0771	10.90076	-33.6793	8.204982	-22.4023	4.578962	-11.9077	1.672497	0.041539	0.004733



(四) 接著將方程式微分兩次求極值找反曲點，即可得到甜蜜點座標

$y = 0.0001x^3 + 0.0109x^2 - 0.0203x + 0.1222$	
$y' = 0.0003x^2 - 0.0218x$	
$y'' = 0.0006x - 0.0218$	
$y'' = 0$	
	x= 36.33333
	y= 10.45

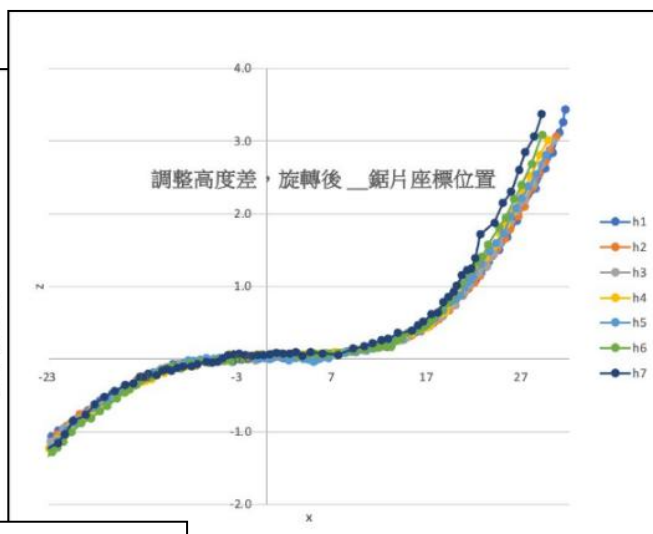
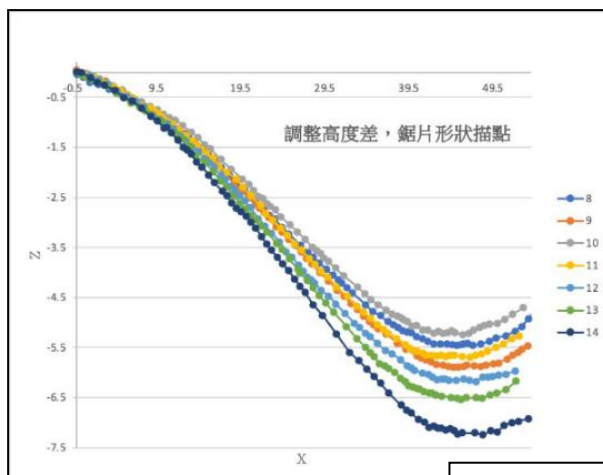
本圖片由作者親自製作

四、求曲率梯度(b')

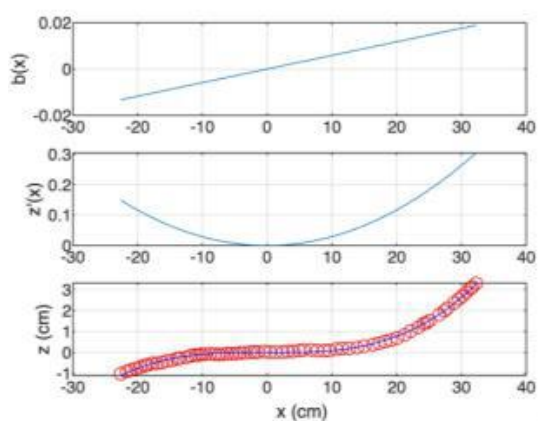
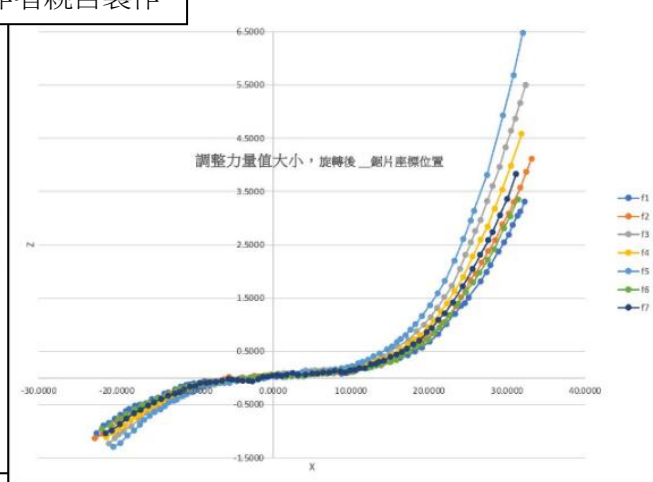
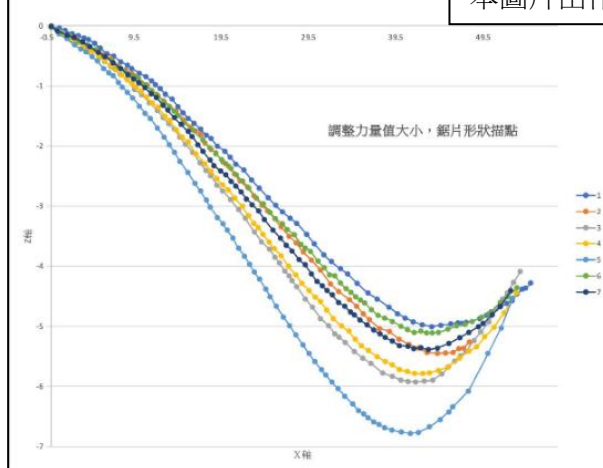
(一) 利用前面找甜蜜點的數據點

(二) 用MATLAB將點座標平移並旋轉來進行三次函數擬合，利用二階微分求一次項，得(b')

(三) 以excel繪製座標圖表



本圖片由作者親自製作



將鋸子側面的數據點平移使至甜蜜點當作原點，
取甜蜜點位置的斜率為0，接著將數據點擬合好三次函數進行二階微分求曲率梯度(b')

本圖片由作者親自製作

五、擬定各項操縱變因

經過我們確立了鋸琴演奏姿勢並找出可發聲位置的方法後，我們進一步探討出以下四個可能影響鋸琴聲音的變因。

- (一) 測力計力大小
- (二) 測力計放置距離
- (三) 鋸子的相對高度
- (四) 敲與拉的差別

陸、研究結果

一、甜蜜點的探討

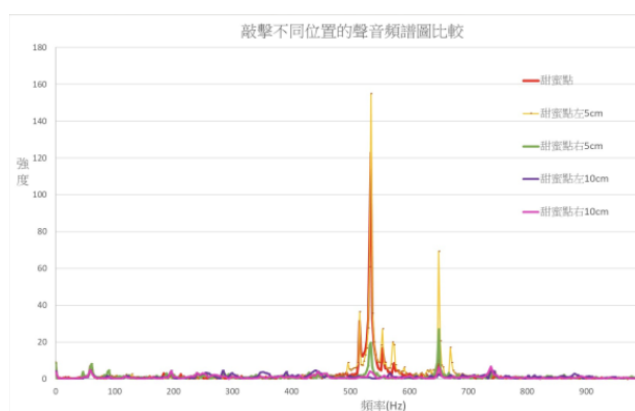
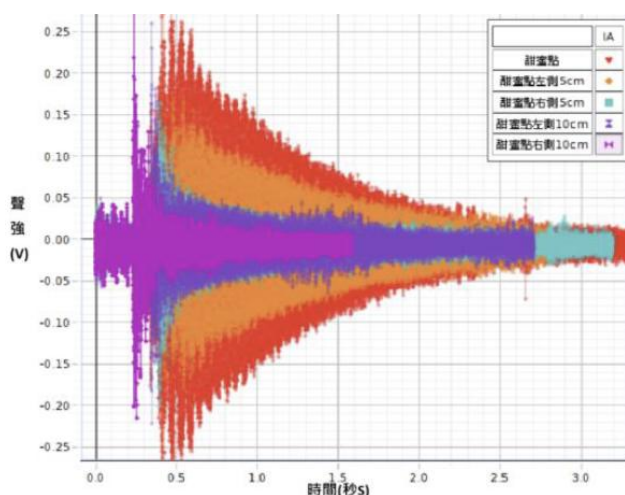
我們先研究之前其他報告中所提到的事情來決定我們的研究方向，再前文(研究過程或方法 三、找甜蜜點)中。甜蜜點在資料四中(並非轉動力學中的甜蜜點)，定義為位於高曲線和低曲線之間的中間位置。這可以通過找到高曲線的頂點（峰值）和低曲線的底部（谷底）來完成，這可以通過使用錘子來輕鬆找到。於是我們認為甜蜜點可近似為三次函數的反曲點，而由Tracker描點數據運算出位置後，我們敲擊反曲點確實為聲音最大的位置，與資料四相同。

同時因為的敲擊在甜蜜點處的聲強最大(圖1、2，紅色數據)且彎曲角度最小，所以我們認為這個位置受應力最小，最不易彎曲，可能此處振盪震盪的幅度最大，則我們嘗試以此處作為腹點來做之後的討論。

我們認為這個點即為參考論文中的拓撲局域模態（topologically localized mode）的位置，敲擊在甜蜜點上的聲音的確較清晰和持久，(圖2頻譜圖中的紅色高峰表示清晰)和持久，如果敲擊在甜蜜點外較短的那一節鋸子，則無法產生聲音（圖2頻譜圖中的粉色短促而快速消散）。

(▼圖1)

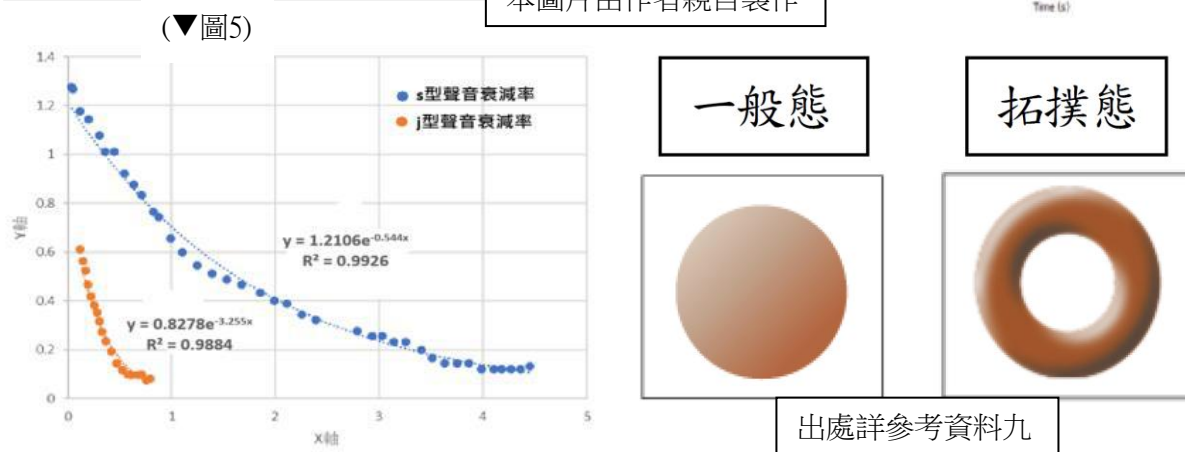
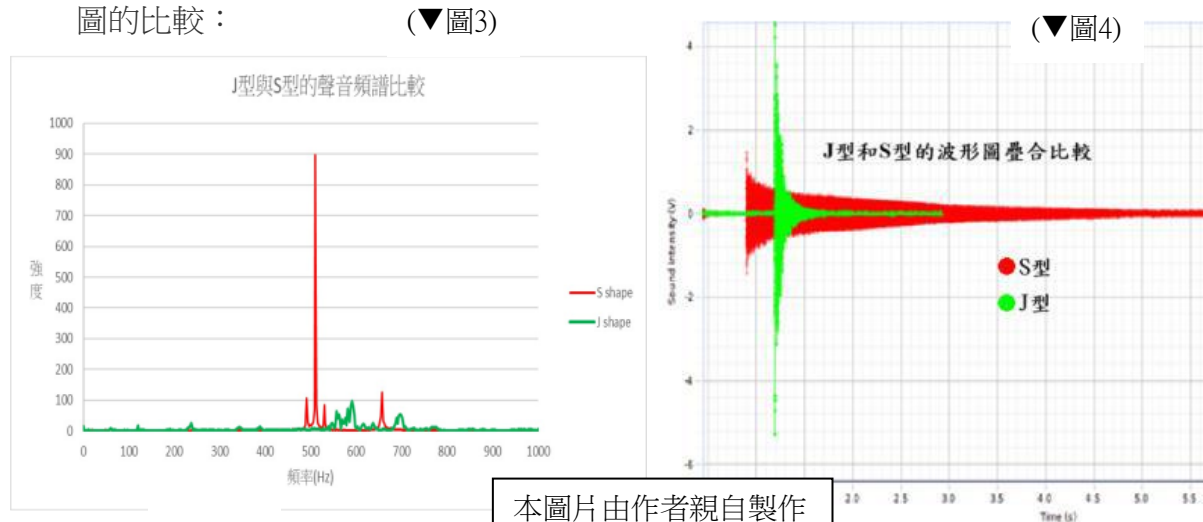
(▼圖2)



本圖片由作者親自製作

二、甜蜜點的必要性，以及拓撲模態之 J 形 S 形的探討

為了探討拓撲模態，我們分別在 J 形 S 形不同形狀上以塑膠槌敲擊，進行波形和 FFT 圖的比較：



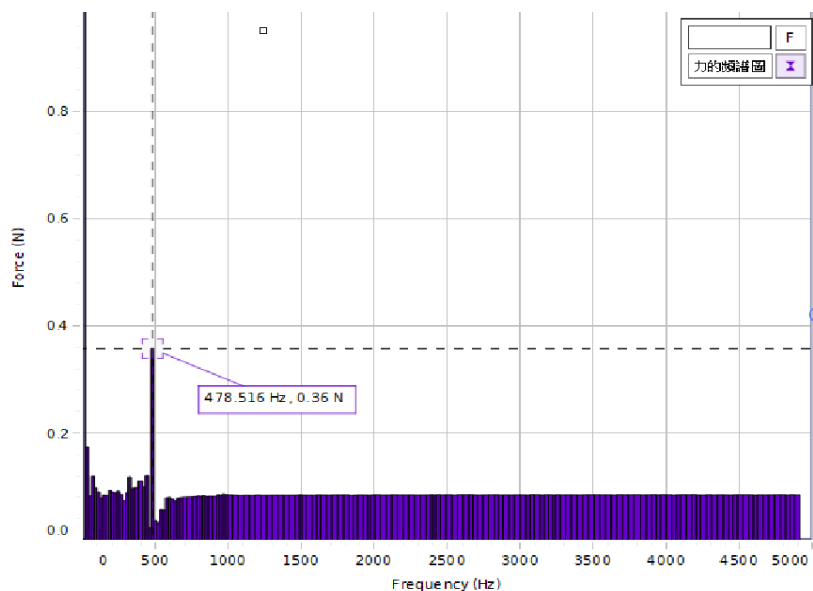
可以從上圖(圖4、5)發現橡皮槌敲擊 J 形的鋸琴時，產生的波形較為急促且短，(圖3)聲音強度不特別高，也難以計算其主要頻率；而橡皮槌敲擊 S 形的鋸琴時，聲音維持得較為長久(圖5)，並且主頻率的聲音強度明顯(圖3)。

這現象形成的原因在於拓撲學中，曲率張量分布 $b(x)$ 在 J 形中只會大於 0 (或小於 0)，而在 S 形中 $b(x)$ 有正負交替(有些位置大於 0，有些位置小於 0)，因此 S 形會有拓撲局域模態的出現而有甜蜜點，而 J 形為一般態沒有甜蜜點。

二、力和聲音的關係

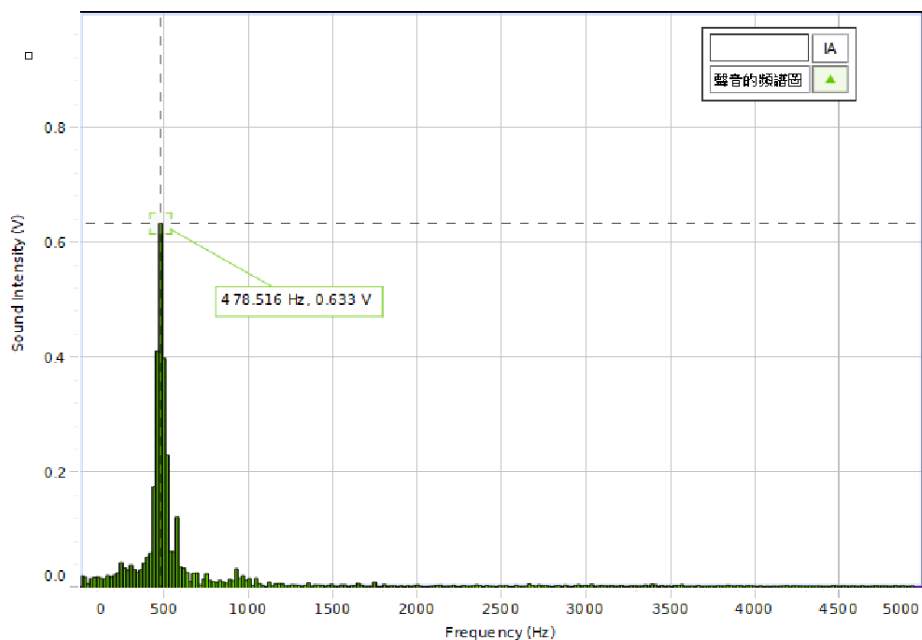
(一) 測力計數值隨著鋸琴發出聲音而振盪

當我們量測鋸琴所發出聲音時，也同時紀錄下測力計數值隨時間的變化，一併將兩項物理量隨時間的變化的數據做快速傅立葉分析。



(▲圖6，此圖為力的頻譜圖)

本圖片由作者親自製作



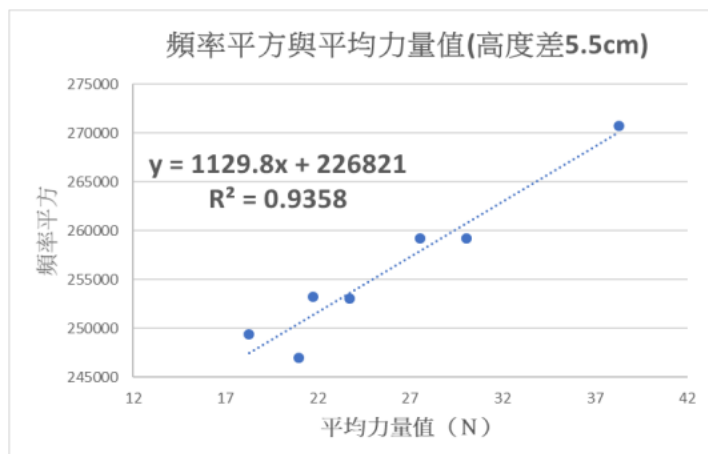
(▲圖7，此圖為聲強的頻譜圖)

本圖片由作者親自製作

測力計數值振盪的主要頻率會和聲音的基頻的聲音一致。以上兩者的主要頻率皆顯示478.516Hz，可以推測是因為基音聲強為最大，亦即振盪幅度最大的緣故，以致鋸片和測力計會近乎同步震盪的結果。

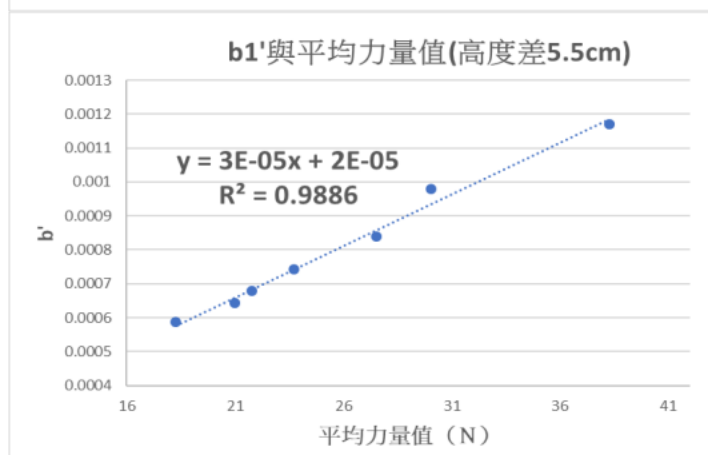
(二) 測力計的平均數值與測力計的位置

安裝測力計的目的在於模仿演奏者為了彎曲鋸片而使用到手中大拇指對鋸板某處施加壓力的量化研究，因此我們安排測量其施加力的平均力值與主要聲頻的關係



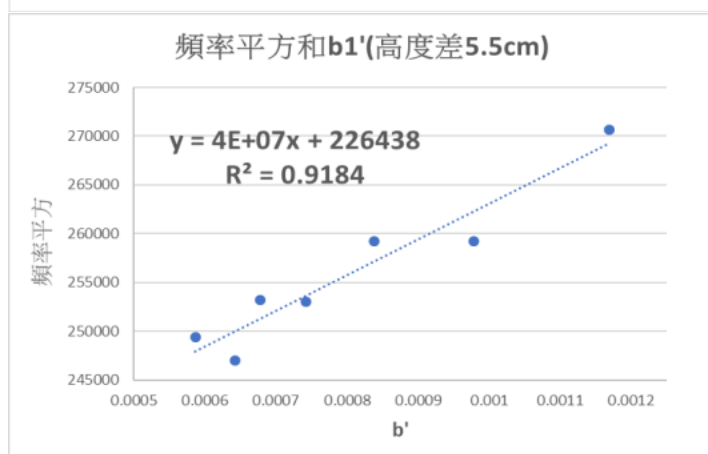
(◀圖8)

本圖片由作者親自製作



(◀圖9)

本圖片由作者親自製作



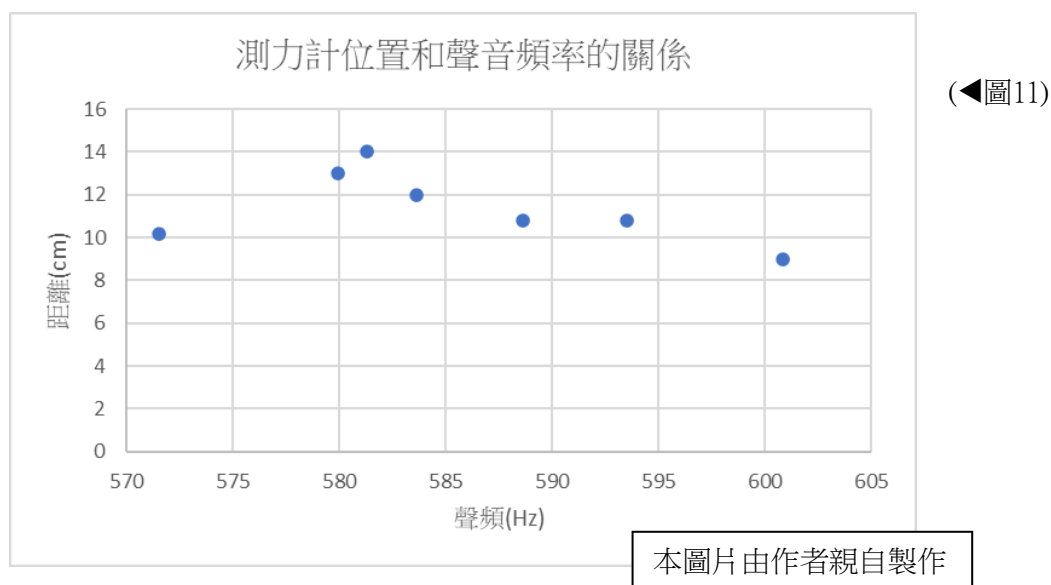
(◀圖10)

本圖片由作者親自製作

由數據圖表(圖8、9、10)中，力的量值與主要音頻的數據以線性擬合，相關係數達0.9358，可看出測力計平均力的量值、曲率梯度 (b')與產生的主要音頻彼此之間有高度的正相關。

(三) 測力計的位置

我們也有做有關施力點位置變化對音頻造成的關係，其中我們以鋸子的尾端為原點，並改變測力計與原點之間的距離來看位置的變化



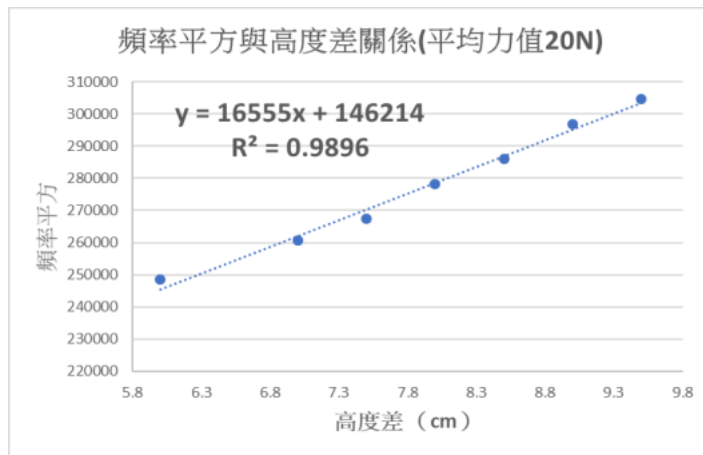
由數據圖表(圖11)關係得知，施力點位置變化對音頻並沒有明確相關。

三、形狀和聲音的關係

由於演奏者除了改變施力大小外，還會改變鋸子做左右兩端的相對高度差(圖12)與拉弦位置來取得不同演奏的音調，所以我們嘗試從只調控一側的高度來看看會產生什麼變化，而改變高度的同時，曲率梯度 (b') 亦產生了變化

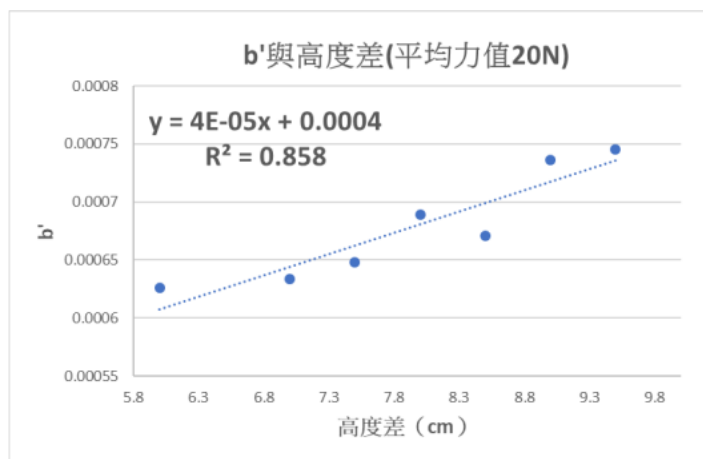
因此我們改變高度，研究高度差、曲率梯度 (b') 與主要聲頻彼此之間的關係





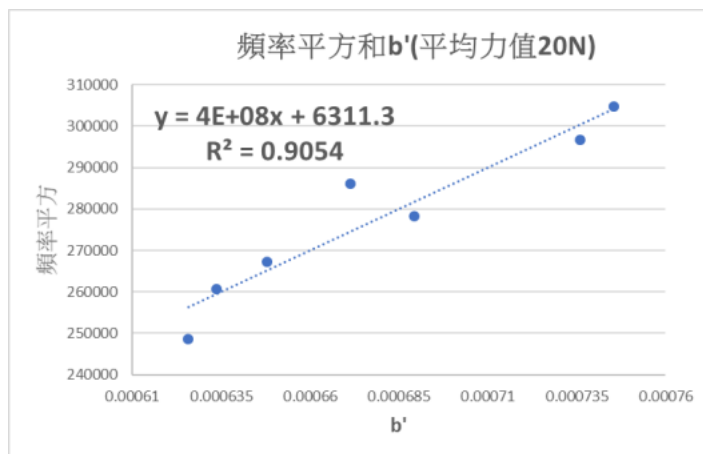
(◀圖13)

本圖片由作者親自製作



(◀圖14)

本圖片由作者親自製作



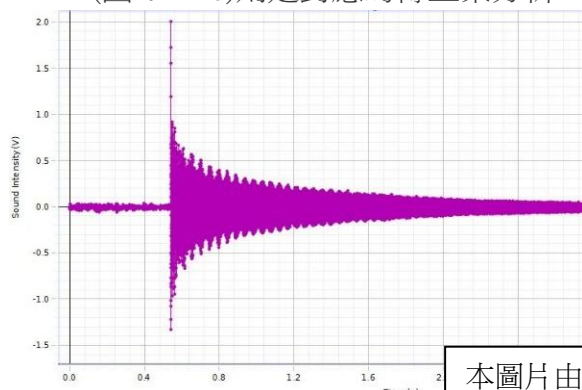
(◀圖15)

本圖片由作者親自製作

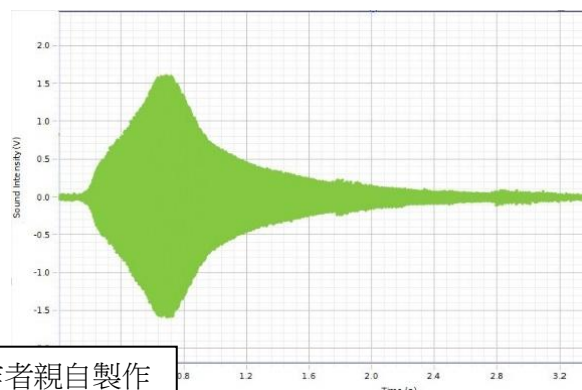
我們發現隨著高度的差越大，聲音頻率也會越高，相對高度差與主要音頻的數據以線性擬合，相關係數達0.9896，可看出高度差、曲率梯度 (b') 與主要音頻彼此之間有高度的正相關，此實驗結果同樣也與參考論文三的論點一致。

四、不同施力工具的影響

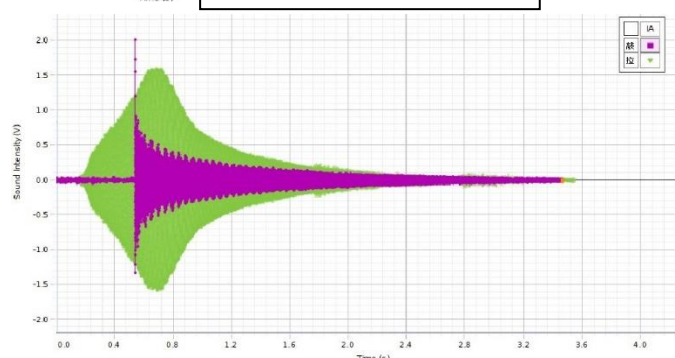
還有，使鋸琴產生聲音的工具也會產生區別，(圖16)是當我們使用塑膠球去敲擊時，會產生的聲音圖形，(圖17)是當我們使用弓弦去拉時，會產生的聲音圖形，(圖19、20)則是對應的傅立葉分析。



(▲圖16)



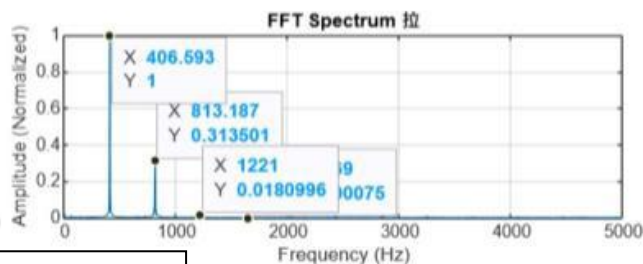
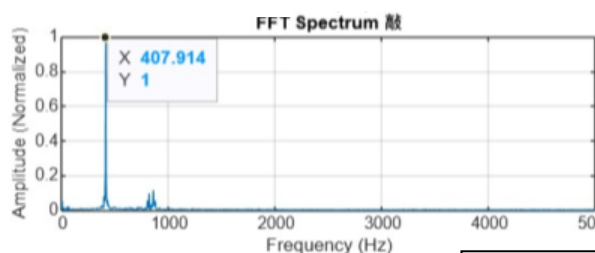
(▲圖17)



(◀圖18)

(▼圖19)

(▼圖20)



本圖片由作者親自製作

透過兩者比對分析可以看見，接觸時間越長，能產生的泛音(原本基礎頻率的倍頻)就越多，拉弦期間提供了較長的驅動歷程(能量來源)，延長了金屬板振動的時，並使得泛音(高頻的佔比)佔分比變多以及頻譜相對強度增強，而所謂空靈(高頻且長久)的聲音，推測由此而來，當然也有可能是聲音散射的原因。

柒、討論

一、 甜蜜點的定義討論

由於甜蜜點在彎曲鋸片中為曲率正負交界處，因此我們可以將甜蜜點視為鋸片彎曲形狀的反曲點，在甜蜜點的位置所受應力最小且彎曲幅度最小，此處振盪的幅度可為最大，因此甜蜜點可以視作鋸子內震盪時的腹點

二、S形與J形

S形鋸子有甜蜜點而有拓撲態，且甜蜜點是鋸子內聲音的腹點，如果要發出聲音需彈奏在甜蜜點附近；J形鋸子沒有甜蜜點而為一般態發不出聲音，只要是沒有甜蜜點的形狀就不會發出一般演奏鋸琴時會有的聲音，因此拓撲態為主要發聲機制

三、力量、相對高度與曲率梯度(b')

彈奏鋸琴的方式就是利用力和高度差的變化，產生不同聲音，實驗中記錄在不同測力計值和相對高度下鋸子發出的頻率變化，會發現力量與相對高度會對聲音頻率平方成正相關，加入曲率梯度(b')討論後，力量與相對高度會對曲率梯度(b')成正相關，而且曲率梯度(b')對聲音頻率平方亦成高度的正相關，因此可以得知力量與相對高度是可以改變曲率梯度(b')而影響聲音頻率

四、敲與拉

在固定的力和高度後，接著在同個地方用不同的方式擾動鋸琴，以弓弦拉鋸琴的甜蜜點的方式所產生的聲音有較多的泛音，相反地，以橡皮球撞擊鋸琴的甜蜜點產生的聲音只有一個主要頻率，因為拉比敲接觸鋸子的時間長，所以拉所給予鋸琴的能量也較多，更容易產生出泛音。

捌、結論

鋸琴產生的聲音，其中的頻率與波長並非高中課程中所學的反比關係，因為在拓撲態中，彎曲鋸子等行為不會改變其邊界條件，影響波長，而是需要以參考論文的公式來討論，無法以一維駐波直觀的定量討論各物理量與頻率的關係，2022 年的論文中將一般二維薄板震動加入彎曲形變的修正量而產生新的公式，由公式得知鋸琴發出聲音的模式是一個拓撲局域模態（topologically localized mode），根據理論中的公式，拓撲局域模態會受到曲率梯度(b')的控制當鋸琴呈現J 形時沒有甜蜜點，是一般態，S 形時有甜蜜點，是拓撲態，於是後續的實驗皆是以S 形做為討論對象，若要改變曲率梯度(b')且同時保持鋸琴呈現S 形，可以藉由改變施力或高度使鋸子產生不同的形狀進而影響曲率梯度(b')的同時維持甜蜜點的存在，而力量與相對高度對曲率梯度(b')和頻率平方有高度正相關，曲率梯度(b')與頻率平方亦有高度正相關，我們所做的實驗結果與參考論文中的論點可提供為拓撲局域模態（topologically localized mode）的實驗證據。

本圖片由作者親自拍攝



玖、參考資料及其他

- 一、陳恒諺、龔怡禎、楊清禾、洪一汝（2008）。*墾丁風鈴季的狂想曲——調音風鈴的製作與研究*。屏東縣：明正國民中學。
https://drive.google.com/file/d/1TjpsgQs56-QEdc3rQ_Yu1KLA5lz3wbw1/view
- 二、Scott, J. F. M., & Woodhouse, J. (1992). Vibration of an elastic strip with varying curvature. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 339(1650), 587 – 625.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1992.0052>
- 三、Leah Burrows. (2022, April 21). *The Physics of a Singing Saw*. Harvard John A. Paulson School of Engineering and Applied Sciences.
<https://seas.harvard.edu/news/2022/04/physics-singing-saw>
- 四、Meehan, J., & Heywood, K. (2014). *Musical saw case study (PHYS 406 final project)*. University of Illinois at Urbana-Champaign.
https://courses.physics.illinois.edu/phys406/sp2017/Student_Projects/Spring14/John_Meehan_Kyle_Heywood_Physics_406_Final_Report_Sp14.pdf
- 五、Stuckenbruck, E. E. (2016). *The singing blade: The history, acoustics, and techniques of the musical saw* (Senior project). Bard College, Bard Digital Commons.
https://drive.google.com/file/d/1Dmuu2Id_FvwjyP1-tGopQvPMa8VZOhl3/view
- 六、鄭穎祺（2022）。*膜音傳腦—金屬球彈跳聲*。高雄市：高雄高級中學。
https://drive.google.com/file/d/1n05Y_9UaMDqFgRy1TB265iXqI2iOapn8/view
- 七、David Morin (December 11, 2023). . Chapter 4 Transverse waves on a string.
<https://davidmorin.physics.fas.harvard.edu/>
- 八、Wikipedia contributors. (December 11, 2023). *Kirchhoff – Love plate theory*. Wikipedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff%E2%80%93Love_plate_theory
- 九、Hasan, M. Z., & Kane, C. L. (2010). Colloquium: Topological insulators. *Reviews of Modern Physics*, 82(4), 3045 – 3067.
<https://arxiv.org/pdf/1002.3895>
- 十、Suraj Shankar, Petur Bryde, L. Mahadevan(2021)Geometric control of topological dynamics in a singing saw

拾、未來展望

樂器的聲音在我們的日常生活中隨處可聞，而其中，鋸子的聲音因其獨特的頻率與震動特性，不僅在木工、工業製造等領域扮演重要角色，還在音樂與聲音設計方面展現出特殊的應用潛力。鋸子的聲音來源於其與不同材料的接觸與切割過程，這使得其頻譜特性具有豐富的變化性。然而，現有的研究多關注於鋸子噪音的控制與工業安全，較少探討其聲學特性、震動模式及其在藝術與創意領域的可能性。因此，本研究希望透過詳細分析鋸子聲音的頻率成分、震動模式以及其與各類材料的交互作用，進一步挖掘其聲學特質，並探討其在聲音設計、音樂創作甚至新興藝術表現形式中的潛在應用價值。期望本研究能為相關領域提供新的視角，激發更多關於鋸子聲音的創新應用與實驗探索。

【評語】 051817

此研究探討鋸琴（伐木鋸）發聲的原理，演奏過程中可以用來調整的因素，如施力大小、方式、形狀...等，研究不同變因與發出聲音的關係。並討論使用不同引發聲音的工具（塑膠槌和弓弦）與擾動位置對聲音的影響。此外，鋸琴彎曲形狀之J形、S形與甜蜜點的定義加以分析，並金屬薄片振盪狀態的理論及其拓撲區域模態對聲音的關係，理解演奏時鋸子彎曲形狀和甜蜜點在實驗中的角色，歸納出彈奏鋸琴時可使用的規律。學生表達佳、理論論述佳、實驗過程與結果佳、討論與結論尚可。

作品海報



「鋸」我所知

摘要

我們主要研究鋸琴發聲的原理，探討演奏時施力大小、方式、形狀與聲音的關係，以及不同器材與位置的影響。此外，還有對其他文獻中 S 型、J 型與甜蜜點的定義加以分析，來研究金屬薄片振盪狀態的變化及其對聲音的影響，並理解甜蜜點在實驗中的角色，最後找出符合此現象的公式

壹、研究動機

當我們第一次見到鋸琴演奏時，便被它那獨特的聲音吸引，更驚訝於演奏時所需的特殊技巧。令人不禁對其背後的機制產生濃厚的好奇心。究竟是什麼樣的物理原理，能使一把看似跟音樂毫無相關的鋸子跟音樂緊密結合起來，成為發出悅耳聲音的樂器。

貳、研究目的

- 一、演奏姿勢的研究與實驗裝置的設計
- 二、甜蜜點位置的量化研究
- 三、鋸子形狀於 J 形和 S 形時與聲音的關係
- 四、探討施加力量值的改變與聲頻關係
- 五、探討鋸子彎曲形狀的幅度與聲頻關係
- 六、探討產生聲頻的基音與泛音

參、研究設備及器材

- 一、伐木鋸
- 二、弓弦
- 三、架子
- 四、橡皮球
- 五、橡皮槌
- 六、測力計
- 七、聲音感測器
- 八、PASCO
- 九、三腳架
- 十、MATLAB
- 十一、phyphox
- 十二、Tracker
- 十三、筆電

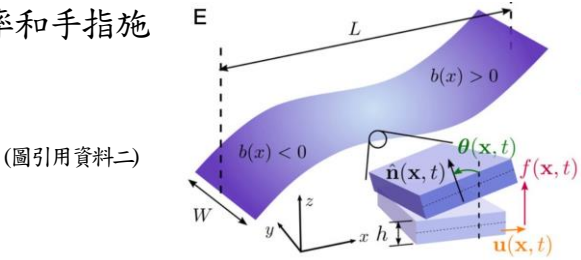
肆、原理討論

在 2022 年的論文（Suraj Shankara 等著作）中加入薄板的彎曲形變修正量，說明鋸琴所產生的聲音是來自板子本身的幾何形狀與拓撲特性討論金屬震盪時有關 $\rho h \partial_t^2 f = -\kappa \nabla^4 f + b_{ij} P_{ij} \nabla^2 \chi$ ， $\frac{1}{Yh} \nabla^4 \chi = -P_{ij} \nabla^2 (b_{ij} f)$ 。其中 $\kappa = \frac{Y h^3}{12 (1 - \nu^2)}$ ，Y 是薄板的楊氏模數， χ 是艾里應力函數（Airy stress function）， h 是板厚度， $b_{ij} = \partial_i \partial_j X_0$ 為曲率張量（curvature tensor，描述板的彎曲狀態，而 X 是表示經過變形後的殼在三維歐式空間中的位置函數， X_0 為初始的位置函數）。 f 為板的垂直位移函數（板的撓曲變形）： $P_{ij} = \delta_{ij} - \{\partial_i \partial_j / \nabla^2\}$ 為一個投影算符。我們引用論文中一個簡單的曲率張量線性曲率分布 $b(x) = b' x$ ，其中 b' 為一常數的曲率梯度（curvature gradient），將此系統對 y 方向取傅立葉變換後，得到最低能階（最低局域模態）的解，其對應的模態頻率為 $\omega_0(q_y)^2 = |q_y| \frac{\kappa}{\rho h} \left[|b'| \sqrt{\frac{2 Y h}{\kappa}} + |q_y|^3 \right] \sim c^2 h |q_y b'|$ 可知其拓撲局域模態的產生（topologically localized mode）（有正負變化的 $b(x)$ 才有拓撲態）受到曲率分布所控制。在我們的實驗中，我們將比較鋸琴聲譜頻率和手指施力量值與形狀變化關係，以及與曲率梯度 b' 的關係。

伍、研究過程或方法

一、測聲音的實驗步驟

- (一) 將鋸子固定在架子上
- (二) 將測力計壓在固定一端的另一端，紀錄測力計離端點的距離與力的大小
- (三) 用橡皮槌敲打鋸子確認是否有聲音，若沒有聲音則調整高度或測力計（如果是弓弦，或使用松香粉增加摩擦力，使鋸子振動發出聲音）
- (四) 確認有聲音後，用 PASCO 測聲音與力
- (五) 將測到的聲強數據取出，用 MATLAB 做傅立葉立析，即可得到頻率

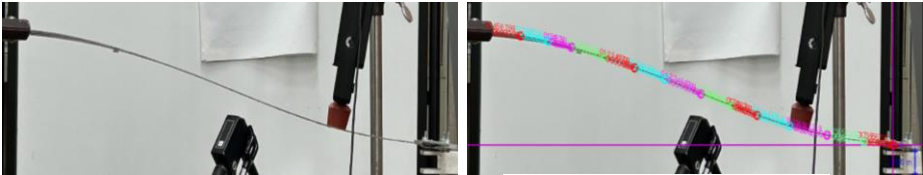


(圖引用資料二)

二、找甜蜜點位置的量化研究

- (一) 確認可以發出聲音後，用手機拍下鋸子的側面圖
- (二) 用 Tracker 在鋸子上找點座標
- (三) 將點輸入 Excel 作圖
- (四) 找趨勢線與三次函數方程式即可得到甜蜜點座標
- (五) 接著將方程式微分兩次求極值找反曲點

三、求曲率梯度(b')



(以下圖表由作者自行繪製)

(以上照片為作者自行拍攝)

(一) 拍攝鋸子側面圖

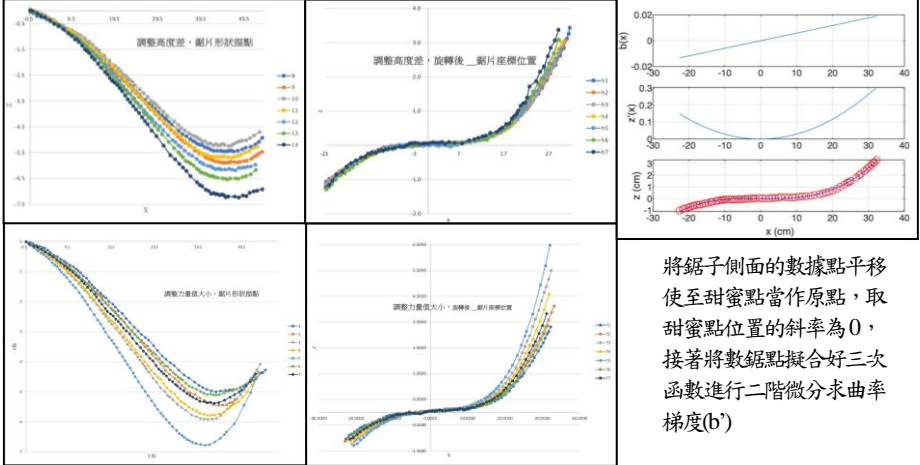
(二) 用 Tracker 點出點座標

(三) 用 MATLAB 將點座標平移並

旋轉來進行三次函數擬合，

利用二階微分求一次項，得 b'

(四) 以 excel 繪製座標圖表

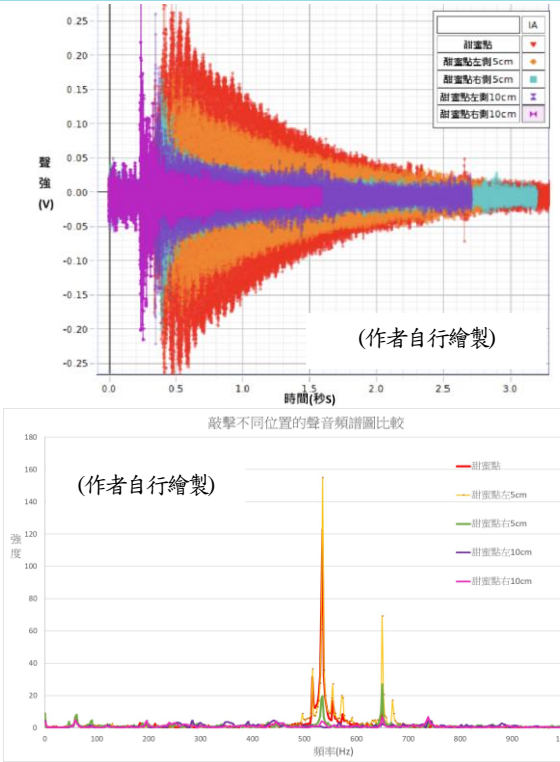


陸、研究結果

一、 甜蜜點的探討

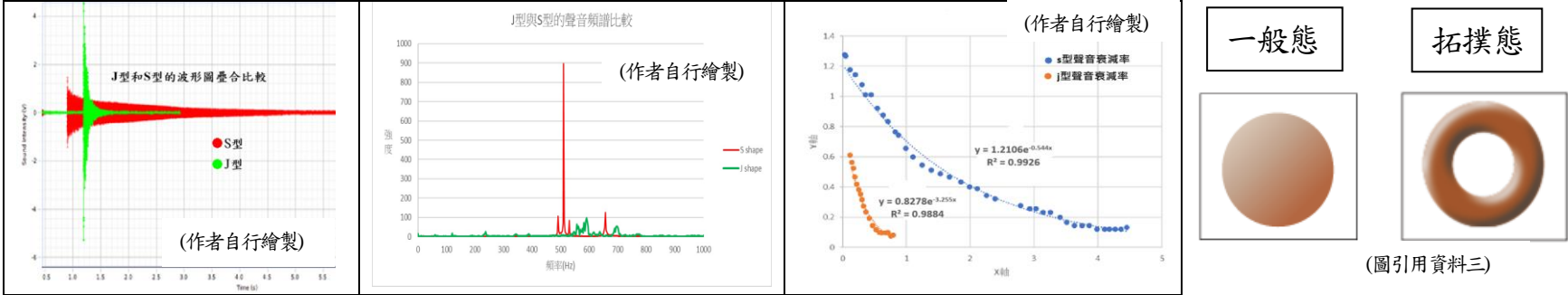
我們定義甜蜜點可近似為三次函數的反曲點，Tracker 描出的點數據使用 MATLAB 運算出位置後，敲擊反曲點處測量確實為聲音最大的位置，與文獻一相同。同時因為的敲擊在甜蜜點處的聲強最大(圖 1、2，紅色數據)且彎曲角度最小，所以我們認為這個位置受應力最小，最不易彎曲，可能此處振盪震盪的幅度最大，則我們嘗試以此處作為腹點來做之後的討論。(圖 1►)

我們認為這個點即為論文中的拓撲局域模態 (topologically localized mode) 的位置，敲擊在甜蜜點上的聲音的確較清晰(圖 2 頻譜圖中的紅色高峰表示清晰)和持久，如果敲擊在甜蜜點外較短的那一節鋸子，則無法產生聲音 (圖 2 頻譜圖中的粉色短促而快速消散)。(圖 2►)



二、 甜蜜點的必要性， 以及拓撲模態之 J 型 S 型的探討

分別在 J 型 S 型不同形狀上以塑膠槌敲擊，進行波形和 FFT 圖的比較：

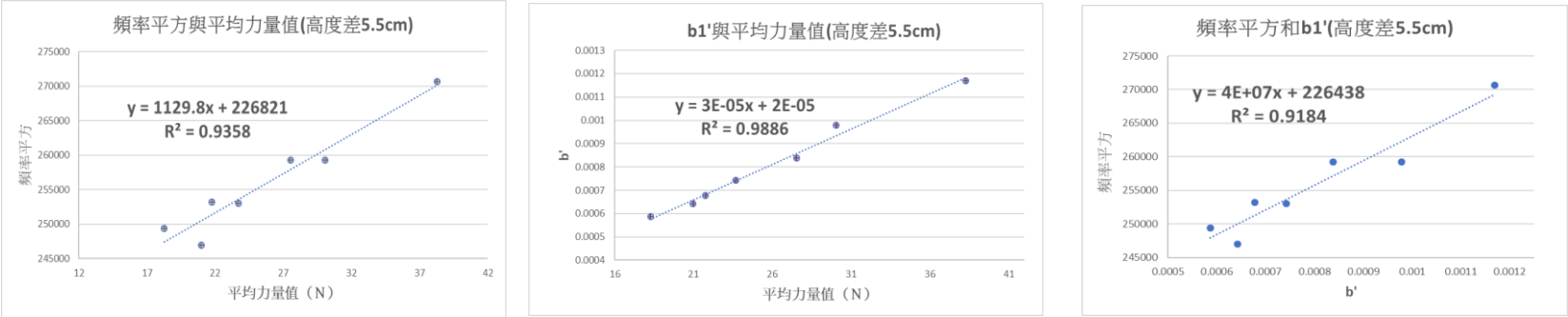


可以從上圖發現橡皮槌敲擊 J 型的鋸琴時，產生的波形較為急促且短，聲音強度不特別高，也難以計算其主要頻率； 而橡皮槌敲擊 S 型的鋸琴時，聲音維持得較為長久，並且主頻率的聲音強度明顯。這現象形成的原因在於拓撲學中，曲率張量分布 $b(x)$ 在 J 型中只會大於 0 (或小於 0)，而在 S 型中 $b(x)$ 有正負交替 (有些位置大於 0，有些位置小於 0)，因此 S 型會有拓撲局域模態 (topologically localized mode) 的出現而有甜蜜點，而 J 型為一般態沒有甜蜜點。

三、 力、形狀和聲音的關係

使用測力計的目的在於模仿演奏者為了彎曲鋸片而使用到手中大拇指對鋸板某處施加壓力的量化研究，彎曲鋸片的同時，曲率梯度 (b') 亦產生了變化

因此我們改變其施加力，研究平均力量值、曲率梯度 (b') 與主要聲頻 (基頻) 彼此之間的關係 (以下圖表由作者自行繪製)



由(圖 3、4、5)中在固定高度差 5.5cm 下改變力量，可看出測力計平均力量值、曲率梯度 (b') 與產生的主要音頻彼此之間有高度的正相關

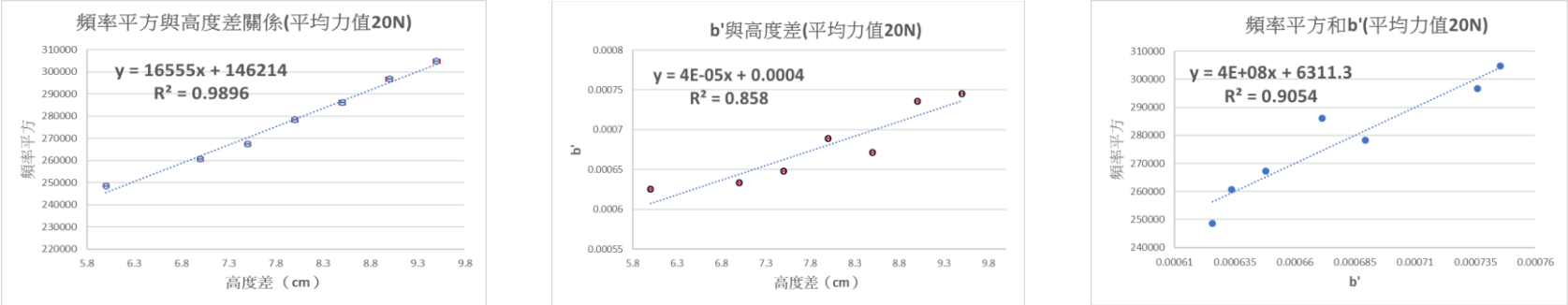
四、 相對高度、形狀和聲音的關係

由於演奏者除了改變施力大小外，還會改變鋸子左右兩端的高度差(圖 6)演奏出的不同的音調，所以我們嘗試固定測力計量值並調控一側的高度，而改變高度的同時，曲率梯度 (b') 亦產生了變化

因此我們改變高度，研究高度差、曲率梯度 (b') 與主要聲頻彼此之間的關係



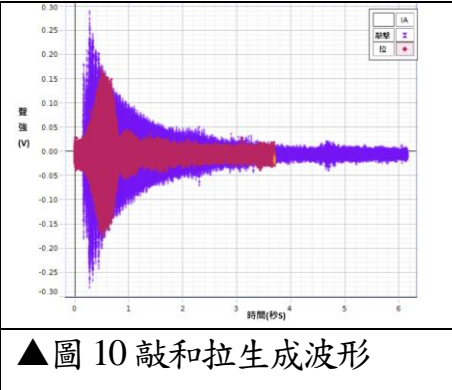
(以下圖表由作者自行繪製)



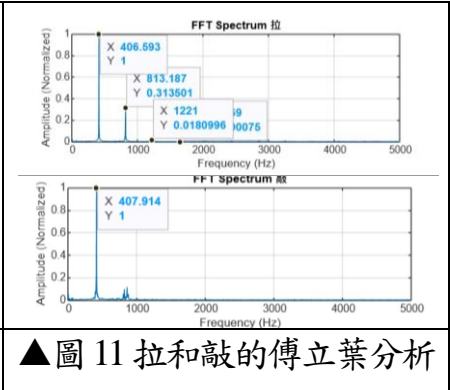
由(圖 7、8、9)中在固定平均力值 20N 下改變高度，可看出高度差、曲率梯度 (b') 與主要音頻彼此之間有高度的正相關

五、 不同施力工具的影響

(以下圖表由作者自行繪製)



▲圖 10 敲和拉生成波形



▲圖 11 拉和敲的傅立葉分析

透過兩者不同工具的比對分析可以看見，接觸時間越長，能產生的泛音(原本基礎頻率的倍頻)就越多，拉弦期間提供了較長的驅動歷程（能量來源），延長了金屬板振動的時間，並使得泛音(高頻的佔比)佔分比變多以及頻譜相對強度增強

柒、討論

一、 甜蜜點的定義討論

由於甜蜜點在彎曲鋸片中為曲率正負交界處，因此我們可以將甜蜜點視為鋸片彎曲形狀的反曲點，在甜蜜點的位置所受應力最小且彎曲幅度最小，此處振盪的幅度可為最大，因此甜蜜點可以視作鋸子內震盪時的腹點

二、 S 型與J 型

S 型鋸子有甜蜜點而有拓撲態，且甜蜜點是鋸子內聲音的腹點，如果要發出聲音需彈奏在甜蜜點附近；J 型鋸子沒有甜蜜點而為一般態發不出聲音，只要是沒有甜蜜點的形狀就不會發出一般演奏鋸琴時會有的聲音，因此拓撲態為主要發聲機制

三、 力量、相對高度與曲率梯度(b')

彈奏鋸琴的方式就是利用力和高度差的變化，產生不同聲音，實驗中記錄在不同測力計值和相對高度下鋸子發出的頻率變化，會發現力量與相對高度會對聲音頻率平方成正相關，加入曲率梯度(b')討論後，力量與相對高度會對曲率梯度(b')成正相關，而且曲率梯度(b')對聲音頻率平方亦成高度的正相關，因此可以得知力量與相對高度是可以改變曲率梯度(b')而影響聲音頻率

四、 敲與拉

在固定的力和高度後，接著在同個地方用不同的方式擾動鋸琴，以弓弦拉鋸琴的甜蜜點的方式所產生的聲音有較多的泛音，相反地，以橡皮球撞擊鋸琴的甜蜜點產生的聲音只有一個主要頻率，因為拉比敲接觸鋸子的時間長，所以拉所給予鋸琴的能量也較多，更容易產生出泛音。

捌、結論

鋸琴產生的聲音，其中的頻率與波長並非高中課程中所學的反比關係，而是需要以參考論文的公式來討論，無法以一維駐波直觀地定量討論各物理量與頻率的關係

2022 年的論文中將一般二維薄板震動加入彎曲型變的修正量而產生新的公式，由公式得知鋸琴發出聲音的模式是一個拓撲局域模態（topologically localized mode），根據理論中的公式，拓撲局域模態會受到曲率梯度(b')的控制

當鋸琴呈現J 型時沒有甜蜜點，是一般態，S 型時有甜蜜點，是拓撲態，於是後續的實驗皆是以 S 型做為討論對象，若要改變曲率梯度(b')且同時保持鋸琴呈現 S 型，可以藉由改變施力或高度使鋸子產生不同的形狀進而影響曲率梯度(b')並維持甜蜜點的存在

力量與相對高度對曲率梯度(b')和頻率平方有高度正相關，而曲率梯度(b')與頻率平方亦有高度正相關，我們所做的實驗結果與參考論文中的論點可提供為拓撲局域模態（topologically localized mode）的實驗證據

玖、主要參考資料

一、Meehan, J., & Heywood, K. (2014). *Musical saw case study (PHYS 406 final project)*. University of Illinois at Urbana-Champaign.
[https://courses.physics.illinois.edu/phys406/sp2017/Student Projects/Spring14/John Meehan Kyle Heywood Physics 406 Final Report Spl4.pdf](https://courses.physics.illinois.edu/phys406/sp2017/Student%20Projects/Spring14/John%20Meehan%20Kyle%20Heywood%20Physics%20406%20Final%20Report%20Spl4.pdf)

二、Leah Burrows. (2022, April 21). The Physics of a Singing Saw. Harvard John A. Paulson School of Engineering and Applied Sciences.
<https://seas.harvard.edu/news/2022/04/physics-singing-saw>

三、Hasan, M. Z., & Kane, C. L. (2010). Colloquium: Topological insulators. *Reviews of Modern Physics*, 82(4), 3045 – 3067.
<https://arxiv.org/abs/1002.3895>

拾、未來展望

鋸子的聲音因其獨特的頻率與震動特性，不僅在傳統用途中展現實用價值，也在音樂創作與聲音設計領域中展現出特殊的潛力。我們認為，無論是應用於小尺度的聲學諧振器，抑或是大尺度的樂器設計，此一原理皆具有進一步發展的可能性。未來，我們期望結合更多聲音研究方法，例如克拉尼圖形，以深入探討聲音在拓撲態系統中的潛在應用。



作者自行拍攝