

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051815

橢球形柔性氣壓致動器的分析與建模

學校名稱： 高雄市立高雄女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 許家榛	陳鈞彥
	莊孟勳

關鍵詞： 氣動肌肉、應力-應變非線性關係、橢球

摘要

本研究透過實驗探討橢球形氣球與圓柱形氣球在受力狀態下長軸與短軸伸長量的差異。基於圓柱形氣球所建立的理論與公式，本研究針對橢球形氣球的形狀進行修正，以更精確描述其變形行為。因此設計了兩組實驗。實驗一施加不同負載，測量長短軸的伸長量，分析負載對氣球變形的影響，並與理想圓柱體做比較。實驗二在氣球外包覆編織網，觀察編織網對氣球在不同負載下伸長量的作用。通過比較兩組實驗結果，研究負載與編織網對氣球長短軸伸長的影響，進一步推導出相關的數學關係式。此關係式能有效描述氣球在不同形狀下的變形行為，為氣壓驅動柔性致動器提供更完善的模型，能提升實際應用中的控制精度與效能，促進其在機械、醫療器械等領域的發展與應用。

壹、研究動機

氣壓驅動柔性致動器（又稱氣動肌肉，Pneumatic Artificial Muscle, PAM）是一種具備高功率重量比、柔順運動特性的仿生致動器。而實際運作時，氣壓驅動柔性致動器的形狀接近橢球，導致其長軸與短軸的應力分布不均，影響變形行為與輸出效能。此外，外層纖維束縛網的網格直徑與纖維角度也可能影響應力集中與氣壓驅動柔性致動器的整體耐用性。

目前許多氣壓驅動柔性致動器的經典理論模型，大多數都是假設肌肉結構接近圓柱形，但未提及若為橢球時，這些因素將會如何影響氣壓驅動柔性致動器。因此，若能進一步研究橢球其長軸與短軸的應力分布，並分析不同網格直徑對氣壓驅動柔性致動器的影響，將能認知到圓柱形與橢球氣壓驅動柔性致動器有何不同或相同。

貳、研究目的

- 一、探討負載質量對橢球氣球與理想圓柱體之長度關係
- 二、探討氣壓驅動柔性致動器的數學模型
- 三、探討外包裏編織網對其橢球氣球之長短軸長度影響

參、研究設備及器材

設備照片 (照片皆來自作者自行拍攝)				
設備名稱	球壓計	熱熔膠槍	磅碼	編織網

設備照片 (照片皆來自作者自行拍攝)				
設備名稱	電子秤	氣球	打氣筒	尺

表一、實驗器材(來源: 作者自行製做)

肆、研究過程與方法

一、文獻探討

(一)理想PAM的數學模型與推導

參考了2022年Bhaben Kalita, Alexander Leonessa and Santosh K. Dwivedy的論文<A Review on the Development of Pneumatic Artificial Muscle Actuators: Force Model and Application>, 提及PAM(氣動人工肌肉)膨脹會到達一定程度，其收縮具有一定的上限，PAM對於每個負載都有一個平衡長度[1]。

其論文中也說明了建模的基本組成成分是PAM執行器的壓力和長度與沿其整個軸施加的力之間的關係。肌肉力主要被認為是工作壓力、材料特性、肌肉尺寸的函數。其最常見且應用廣泛的幾何模型，即Chou和Hannaford模型[2]，PAM被視為一個圓柱體(見下圖一)，並忽略了摩擦力和內層橡膠管壁的厚度與彈性。其中根據1996年的Chou, C.P.; H

annaford. B. *Measurement and modeling of McKibben pneumatic artificial muscles*. IEEE Trans. Robot. Autom. 90 – 102.推導出Chou和Hannaford模型[2]。

為了在不考慮幾何結構的情況下找到作為壓力和致動器長度的函數的張力，首先引入基於能量守恆的理論方法。當氣體推動內氣囊表面時，輸入功 (W_{in}) 在 McKibben 肌肉中完成。

$$dW_{in} = \int_{S_i} (p - p_0) dl_i \cdot ds_i = (p - p_0) \int_{S_i} dl_i \cdot ds_i = P' dV \quad (1)$$

P 內部氣壓 P_0 環境氣壓 P' 相對氣壓 S_i 總內表面積 ds_i 面積向量

dl_i 內表面積位移 dV 體積變化

當致動器因體積變化而縮短時，輸出功率即產生。

$$dW_{out} = -FdL \quad (2)$$

F 軸向張力 dL 軸向位移

根據能量守恆，若系統是無損且無能量儲存，則輸入功等於輸出功。

$$dW_{out} = dW_{in} \quad (3)$$

因此根據(1)、(2)得到

$$-FdL = P' dV \quad (4)$$

因此力經整理可表示為

$$F = -P' \frac{dV}{dL} \quad (5)$$

為估計 dV/dL ，假設外圍螺紋的延伸性非常低，因此致動器體積僅取決於其長度。此外致動器的中間部分被建模為零壁厚的完美圓柱體(見圖一)

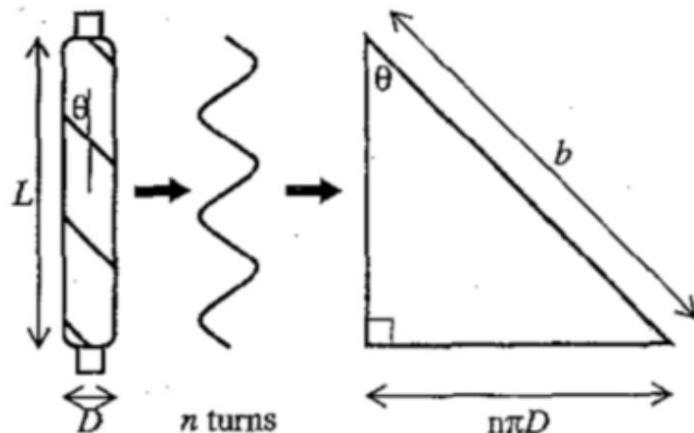
其中 L 為圓柱體長度， θ 為編織網與圓柱體長軸之間的夾角， D 為圓柱體的直徑， n 為螺紋圈數， b 為螺紋長度。

$$L = b \cos \theta \quad (6)$$

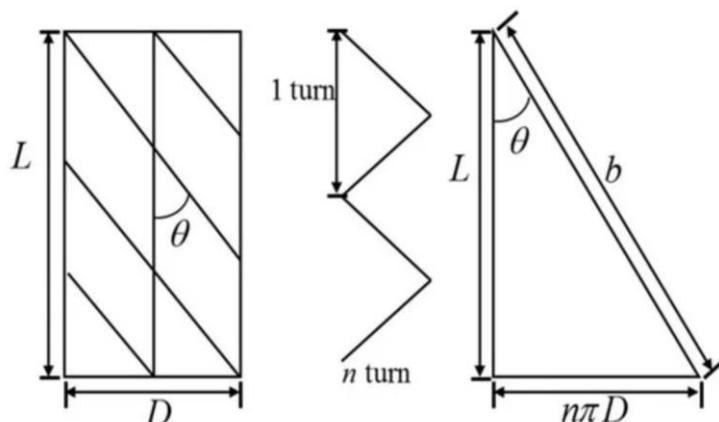
$$D = \frac{b \sin \theta}{n\pi} \quad (7)$$

後根據(5)， F 可以表示為 P' 和 θ 的函數。

$$F = -P' \frac{dV}{dL} = -P' \frac{dV/d\theta}{dL/d\theta} = \frac{P' b^2 (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{4\pi n^2} = \frac{P' b^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{4\pi n^2} = \frac{P b^2 \left(\frac{3L^2}{b^2} - 1 \right)}{4n^2 \pi} \quad (8)$$



圖一、執行器簡化為理想圓柱體(取自<Measurement and modeling of McKibben pneumatic artificial muscles>)



圖二、PAM的簡化幾何模型(取自<A Review on the Development of Pneumatic Artificial Muscle Actuators: Force Model and Application>)

(二)可壓超彈性材料模型(理想圓柱體)

現今最主要的講述彈性材料變形的模型為Mooney-Rivlin模型[3]，但其基本假設為氣球受到拉力變形之體積不會改變，但在研究目的的實驗中，其變形過程常常伴隨明顯的體積變化，因此模型必須要具有描述體積改變的能力。

(三)應力與曲率

Cook and Young, 1995, "Advanced Mechanics of Materials," Macmillan Publishing Company: New York.以佐證應力大小與曲率半徑成反比[2]，這本書包含材料力學中的各種應力分析。其中梁的彎曲應力分析(Beam Bending Stress Analysis)章節中提及：

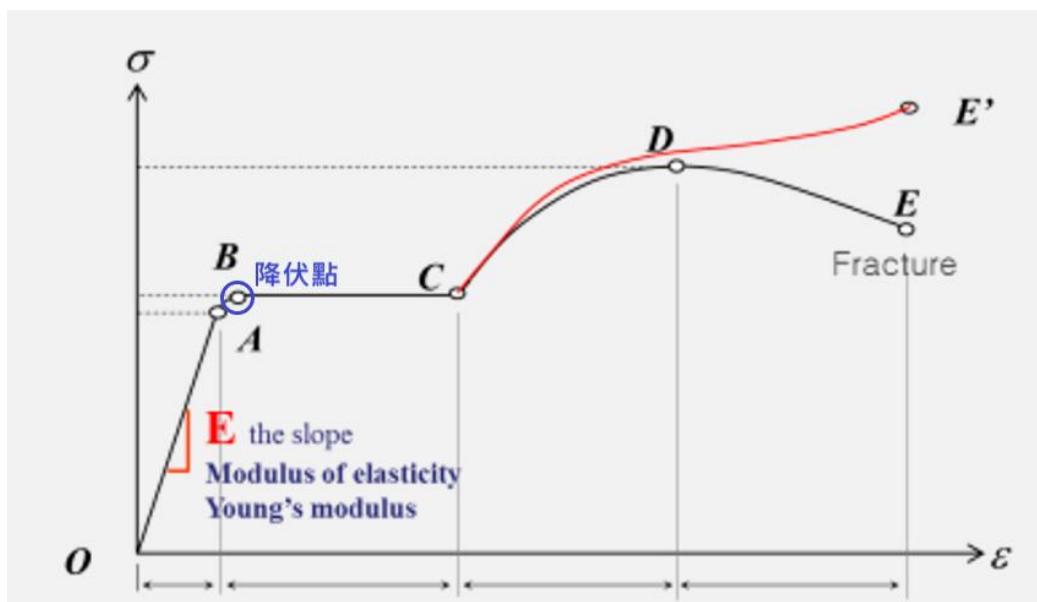
$$\frac{l}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

M 彎矩 ρ 局部的彎曲半徑 E楊氏模數 I截面的截面二次軸矩

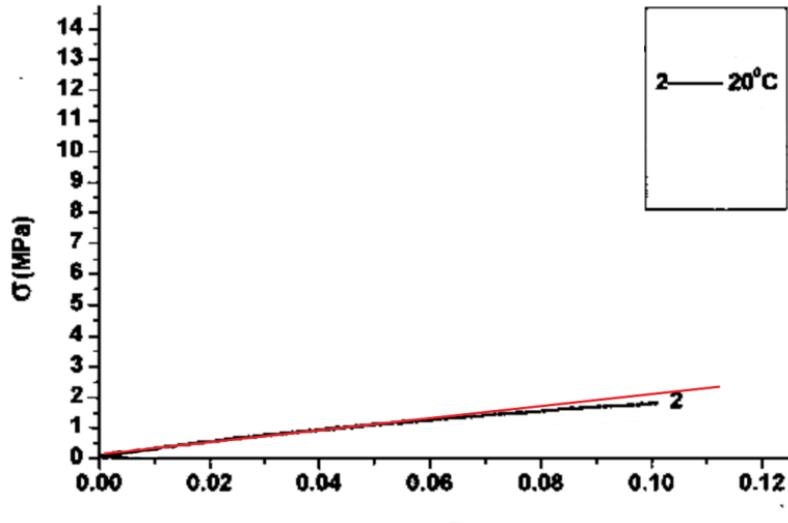
(四)氣球永久形變

一材料都會有自己的應力-應變曲線，而不是某種材料其降伏點都明顯可觀測到，見圖三就可發現鋼的降伏點十分明顯。

定義氣球的最大負載質量之界線。參考自2007年王寶珍、胡時勝、周相榮的研究<不同溫度下橡膠的動態力學性能及本構模型研究>，其實驗數據表明在20度下的環境其應力-應變曲線(見下圖三)，可以看出其曲線趨近線性[5]，因此猜測其降伏點為不明顯或還未到其降伏點，而在降伏點之前的彈性量都可回復成最初之長度，材料不會產生任何永久變形因此負載質量可免於因超過降伏點而造成的永久性形變導致數據的不準確。



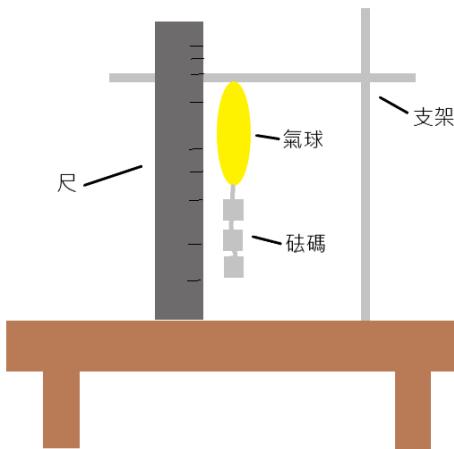
圖三、鋼的典型應力-應變關係(來源: 國立交通大學 機械工程學系 鄭文雅 教授，本作品以創用 CC BY-NC-SA 臺灣3.0版授權釋出)



(b) $\dot{\epsilon} \approx 5 \times 10^2 (1/s)$

圖四、20度下、應變率約為 $5 \times 10^2 (1/s)$ 橡膠應力-應變關係圖(來源: 王寶珍、胡時勝、周相榮的研究<不同溫度下橡膠的動態力學性能及本構模型研究>)

二、實驗裝置設置圖



圖五、實驗設置圖(來源: 作者自行繪製)

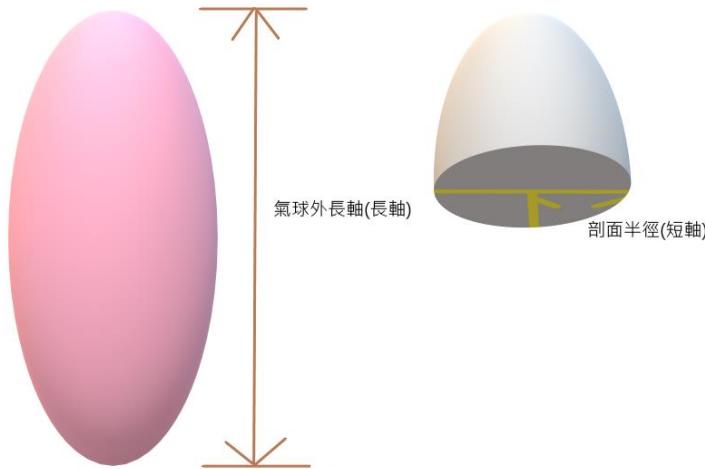
三、實驗一: 探討負載質量對橢球氣球與理想圓柱體之長度關係

(一) 實驗理論

在理想圓柱體中，拉力會沿著軸向方向均勻分布，但對於橢球氣球來說，拉力會從球極擴散，使短軸周圍那圈受到更多擴張力。長軸和短軸的曲率半徑不同，這表示在這兩個方向上所承受的應力會不同。Cook and Young, 1995, "Advanced Mechanics of Material

s," Macmillan Publishing Company: New York.以佐證應力大小與曲率半徑成反比[2]，這本書包含材料力學中的各種應力分析。其中梁的彎曲應力分析(Beam Bending Stress Analysis)章節中提及：

$$\frac{I}{\rho} = \frac{M}{EI}$$



圖六、設定氣球長軸與短軸(來源：作者自行繪製)

應力可表示為：

$$\sigma_z = \frac{F}{2\pi R_0 t}$$

(二) 實驗步驟

1. 實驗前將氣球接上球壓計以確保其內壓。
2. 在還未負載前先記錄氣球負載前長軸與短軸量值。
3. 氣球下方接負載物(砝碼)並記錄其長度。
4. 計算理想圓柱體汽球與橢球汽球的體積。

(三) 數據分析

1. 將不同負載情況下的膨脹長度與負載質量紀錄。
2. 將長軸與短軸在負載前後及不同負載下的長度輸入Excel。
3. 圖表加上趨勢線與方程式，再根據7次的實驗數據得出不確定度，加入至圖表中的誤差線。

四、實驗二：探討氣壓驅動柔性致動器的數學模型

(一) 實驗步驟

- 先透過理論建構一個橢球的模型，紀錄實驗一之數據與結果
- 結合理論與數據建造一個適合橢圓型氣球的模型

五、實驗三: 探討外包裏編織網對其橢球氣球之長短軸長度影響

(一) 實驗理論

以下為Chou和Hannford模型可發現其編織網具有提供張力的作用。

$$F = \frac{Pb^2 \left(\frac{3L^2}{b^2} - 1 \right)}{4n^2\pi} = \frac{P(3L^2 - b^2)}{4n^2\pi} = \frac{Pb^2(3\cos^2\theta - 1)}{4\pi n^2}$$

(二) 實驗步驟

- 紀錄尚未產生張力前的編織網之網格長度。
- 製作原始長軸為14.4cm、短軸為4.4cm且外包裏編織螺紋長度為2cm的氣球。
- 將氣球垂掛至支架，並在下方逐漸遞加負重質量。
- 紀錄氣球負重後之長短軸長度。

(三) 數據分析

- 將不同負載下所造成的長軸長度與其負載質量輸入Excel。
- 將在受到相同負載情況下，但外無包裹編織網之長度數據輸入Excel。
- 圖表加上趨勢線與方程式，再根據7次的實驗數據得出不確定度，加入至圖表中的誤差線。

伍、研究結果

一、實驗一: 探討負載質量對橢球氣球與理想圓柱體之長度關係

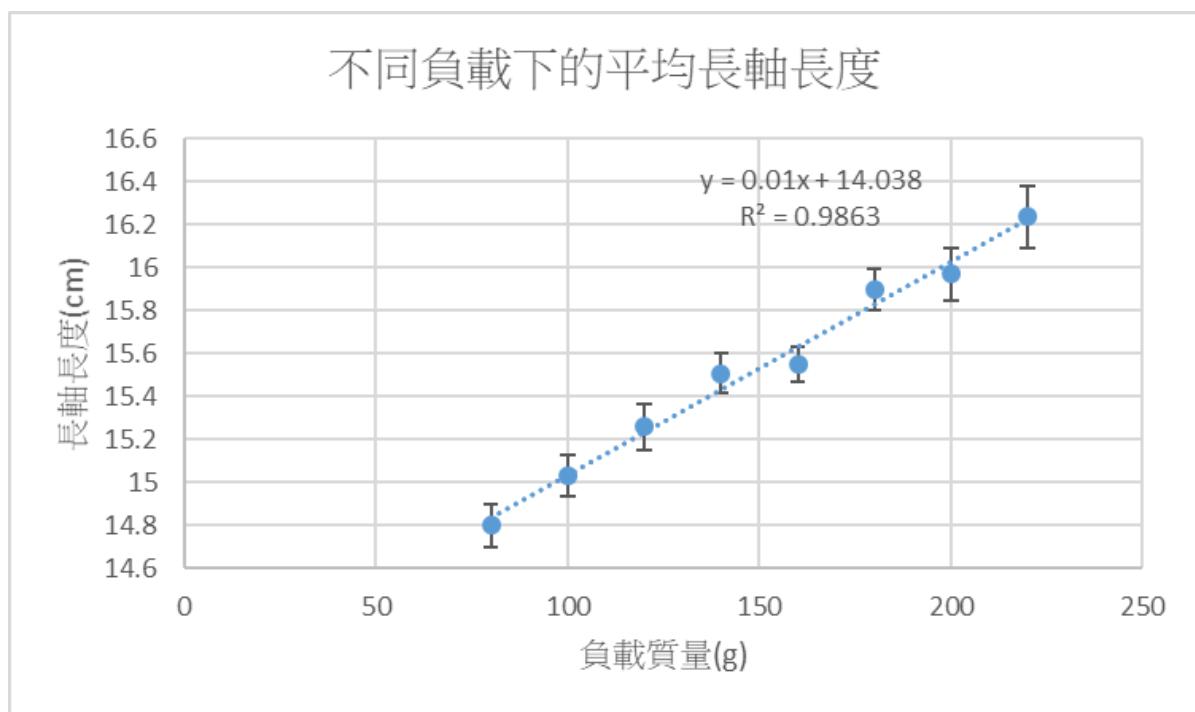
使用初始長軸長度為14.4cm、短軸長度為4.4cm的氣球。

質量(g)	80g	100g	120g	140g	160g	180g	200g	220g
第一次	14.4cm	14.6cm	14.8cm	15.2cm	15.7cm	15.7cm	15.7cm	16.1cm
第二次	15.0cm	15.3cm	15.5cm	15.8cm	15.9cm	16.2cm	16.4cm	16.8cm

第三次	15.2cm	15.3cm	15.6cm	15.7cm	15.8cm	16.1cm	16.3cm	16.5cm
第四次	14.8cm	15.1cm	15.4cm	15.8cm	16.0cm	16.2cm	16.2cm	16.6cm
第五次	14.7cm	15.0cm	15.2cm	15.3cm	15.5cm	15.6cm	15.6cm	15.9cm
第六次	15.0cm	14.8cm	15.0cm	15.4cm	15.6cm	15.7cm	15.8cm	15.9cm
第七次	14.7cm	14.7cm	15.3cm	15.4cm	15.4cm	15.8cm	15.8cm	15.9cm
平均值	14.8cm	15.0cm	15.3cm	15.5cm	15.6cm	15.9cm	16.0cm	16.2cm

表二、負載質量與橢球氣球長軸長度之數據(無網)

(來源: 作者自行製做)

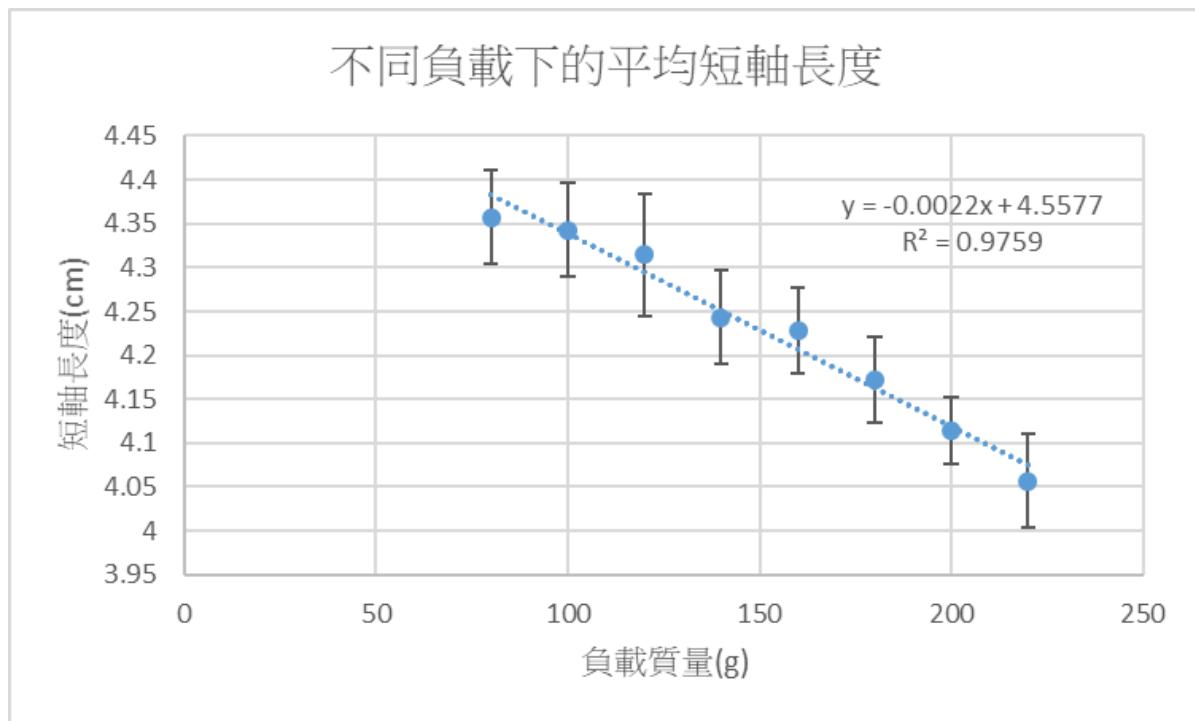


圖七、不同負載下的平均長軸長度(無網) (來源: 作者自行繪製)

質量(g)	80g	100g	120g	140g	160g	180g	200g	220g
第一次	4.4cm	4.4cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm	4.2cm	4.1cm	4.1cm
第二次	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.3cm	4.2cm	4.2cm	4.2cm	4.1cm
第三次	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.3cm	4.3cm	4.2cm	4.1cm	4.1cm
第四次	4.4cm	4.3cm	4.3cm	4.2cm	4.2cm	4.1cm	4.1cm	4.0cm
第五次	4.3cm	4.3cm	4.3cm	4.2cm	4.2cm	4.2cm	4.1cm	4.0cm
第六次	4.3cm	4.3cm	4.3cm	4.2cm	4.2cm	4.1cm	4.1cm	4.0cm
第七次	4.3cm	4.3cm	4.2cm	4.2cm	4.2cm	4.2cm	4.1cm	4.1cm
平均值	4.36cm	4.34cm	4.31cm	4.24cm	4.23cm	4.17cm	4.11cm	4.06cm

表三、負載質量與橢球氣球短軸長度之數據(無網)

(來源: 作者自行製做)



圖八、不同負載下的平均短軸長度(無網) (來源: 作者自行繪製)

三、實驗三: 探討外包裏編織網對其橢球氣球之長短軸長度影響

此為外包裏螺紋長度1.5cm之網子以及初始長軸長度為14.4cm、短軸長度為4.4cm的氣球。

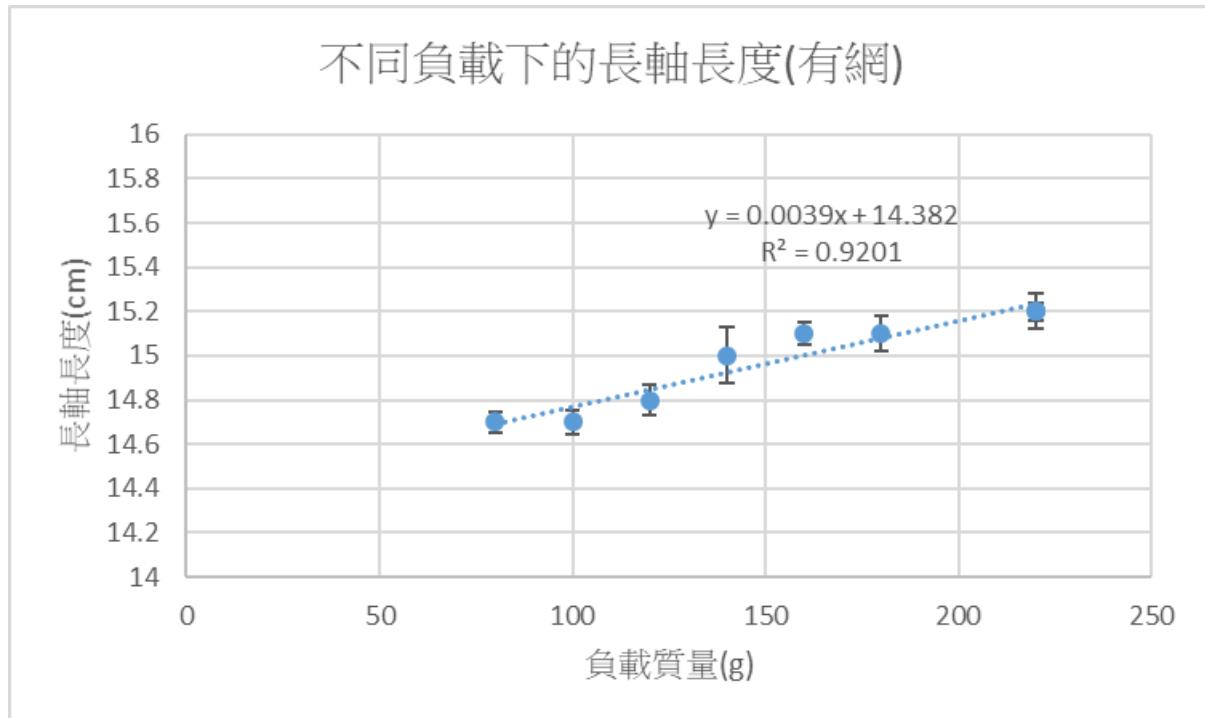
質量(g)	80g	100g	120g	140g	160g	180g	200g	220g
第一次	14.7cm	14.7cm	14.7cm	15.1cm	15.1cm	15.2cm	15.2cm	15.3cm
第二次	14.7cm	14.8cm	14.9cm	15.1cm	15.1cm	15.1cm	15.2cm	15.3cm
第三次	14.7cm	14.7cm	14.8cm	14.8cm	15.0cm	15.1cm	15.1cm	15.1cm
第四次	14.6cm	14.7cm	14.8cm	14.8cm	15.0cm	15.0cm	15.2cm	15.2cm
第五次	14.7cm	14.8cm	14.8cm	15.0cm	15.1cm	15.2cm	15.2cm	15.3cm
第六次	14.7cm	14.8cm	14.9cm	14.9cm	15.1cm	15.1cm	15.2cm	15.3cm
第七次	14.6cm	14.7cm	14.8cm	15.0cm	15.0cm	15.0cm	15.2cm	15.2cm
平均值	14.7cm	14.7cm	14.8cm	15.0cm	15.1cm	15.1cm	15.2cm	15.2cm

表四、負載質量與橢球氣球長軸長度之數據(有網)
(來源: 作者自行製做)

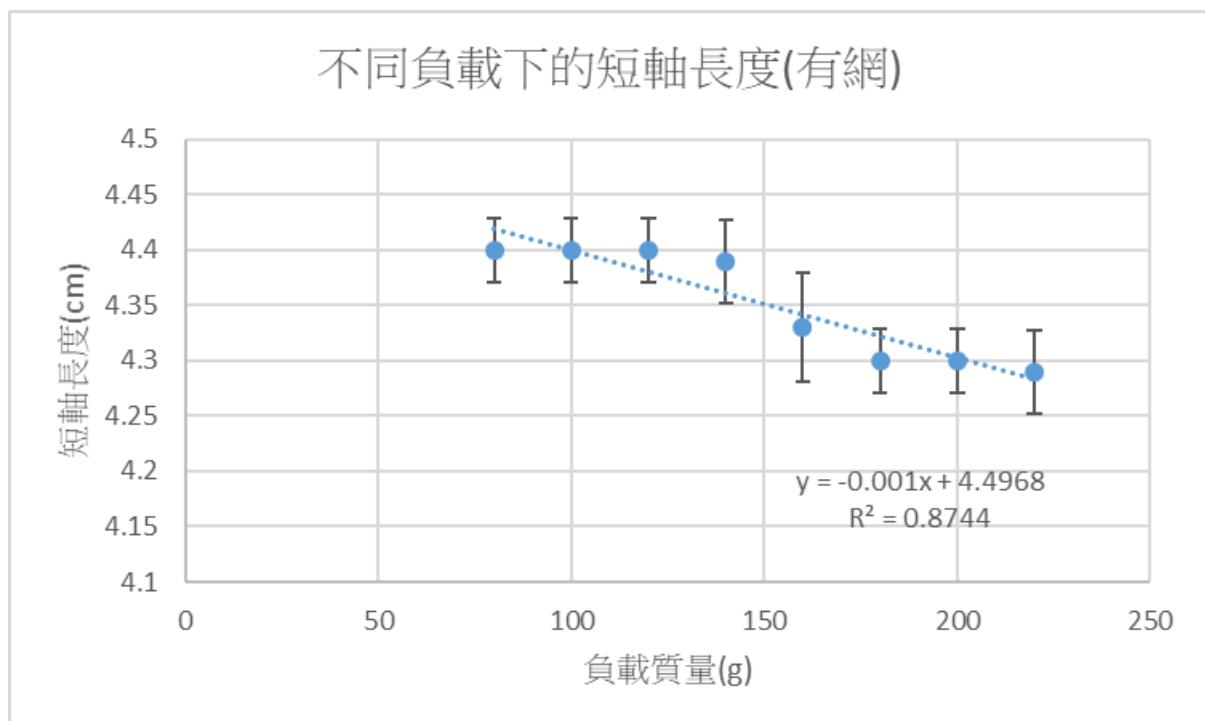
質量(g)	80g	100g	120g	140g	160g	180g	200g	220g
第一次	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm
第二次	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm
第三次	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm
第四次	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm	4.2cm
第五次	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm

第六次	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.4cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm
第七次	4.4cm	4.4cmc	4.4cm	4.4cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm	4.3cm
平均值	4.40cm	4.40cm	4.40cm	4.39cm	4.33cm	4.30cm	4.30cm	4.29cm

表五、負載質量與橢球氣球的短軸長度(有網)
(來源: 作者自行製做)



圖九、不同負載下的長軸長度(有網) (來源: 作者自行繪製)



圖十、不同負載下的短軸長度(有網) (來源: 作者自行繪製)

陸、討論

一、實驗一: 探討負載質量對橢球氣球與理想圓柱體之長度關係
接著計算圓柱體受力時的理想長度與半徑變化。

$$\sigma_z = \frac{F}{2\pi R_0 t}$$

σ_z 軸向應力 R_0 圓柱體半徑 t 膜的厚度 F 軸向拉力

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F}{2\pi R_0 t} / \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

根據實驗將負載質量為20公克，圓柱體半徑為2.2公分，膜的厚度為0.05公分，原長14.4公分，長度變化量為0.2公分(見圖)代入得到 $E \sim 20.4N/cm^2$ ，並得到變形後長度。

$$L = L_0(1 + \varepsilon)$$

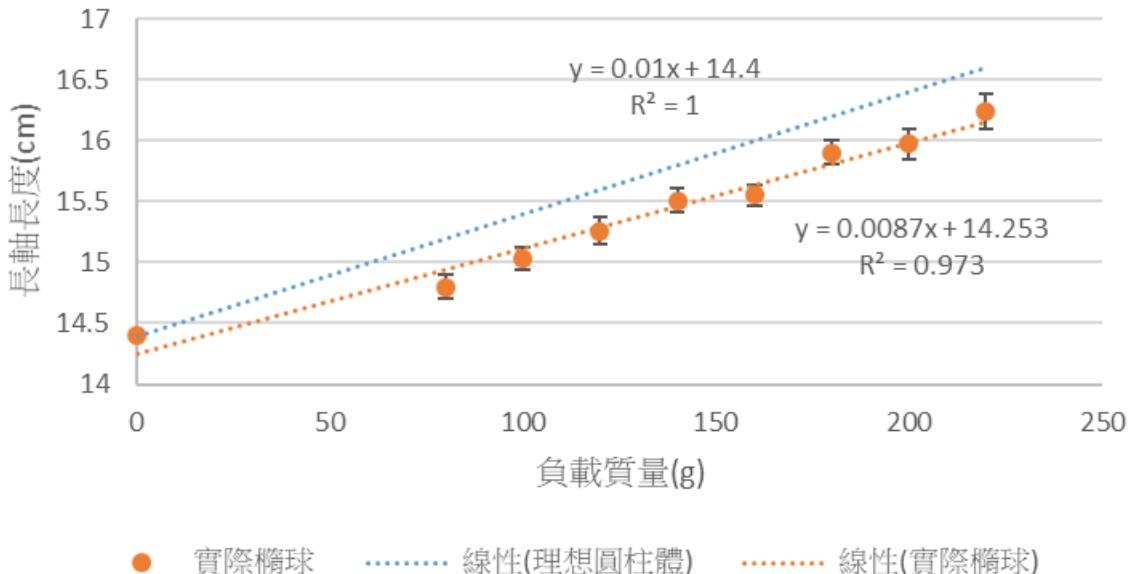
質量(g)	80	100	120	140	160	180	200	220
長軸長度(cm^3)	15.2	15.4	15.6	15.8	16.0	16.2	16.4	16.6

表六、理想圓柱體長度變化(來源: 作者自行製做)

質量(g)	80	100	120	140	160	180	200	220
平均長軸長度(cm^3)	14.8	15.0	15.3	15.5	15.6	15.9	16.0	16.2

表七、橢球長度變化(來源: 作者自行製做)

理想圓柱體與實際橢球長軸長度變化



圖十一、圓柱體與橢球的長軸長度變化(來源: 作者自行繪製)

(一)由圖十一可知，氣球受力而伸長時，比起理想圓柱體氣球，橢球的長度變化較小。由於圓柱形的氣球在受拉時，沿著軸向的截面大小與幾何分布都固定，因此拉力幾乎平均作用在整個橫截面上。而橢球形則具有表面具有曲率差異，力的傳遞方向不完全與軸向一致，部分拉力會被轉向到圓周，讓拉伸效果變小。

而圖中的方程式表示分別為圓柱體的 $y=0.01x+14.4$ 和橢球的 $y=0.0087x+14.253$ ，但實驗時使用的氣球初始長度皆為14.4公分，因此猜測在未實驗之質量與長度的關係應與80公克後的斜率不同，為不完全線性增長，導致整體線性回歸時出現一個不合預期且較小的截距（14.253公分），即使實際上初始長度是14.4公分。

透過此實驗修正橢球氣球長軸長度變化量:

$$L = L_0 \left(1 + \frac{F}{2\pi R_0 E t} \cdot f_{shape} \right)$$

其中 f_{shape} 與橢球的曲率有關。圓柱體軸向的曲率為0，因此會承受所有負載質量，而橢球軸向具有曲率，能更有效地分散外力，降低局部張力，因此整體伸長變化小於等半徑的圓柱體。因此 f_{shape} 的涵義為:

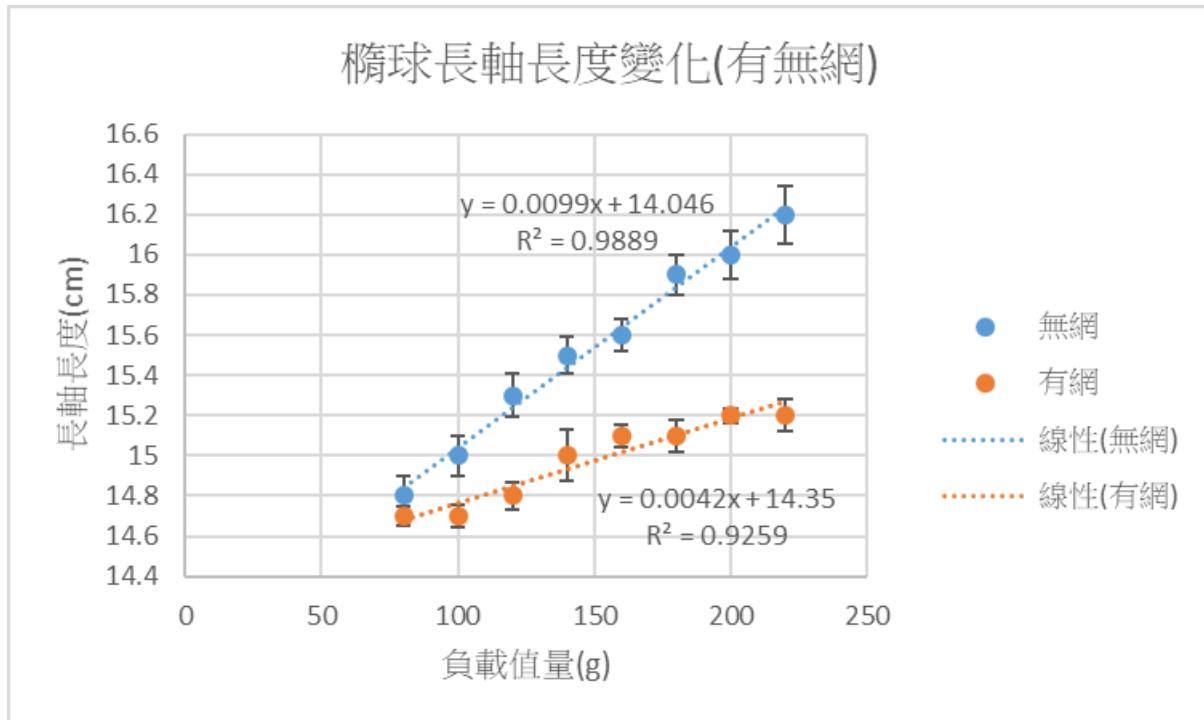
$$f_{shape} = 1 - \kappa_{軸向}$$

以此實驗中，橢球的軸向曲率為:

$$\kappa = \frac{l}{a} \approx 0.139 \Rightarrow f_{shape} \approx 0.861$$

此為無網時，理想橢球長度變化推導，但Chou和Hannaford模型為有包裹編織網之公式，因此參考先前的實驗數據，將長度線性回歸(見圖十二):

$$L = L_0 \left(1 + \frac{F}{2\pi R_0 Et} \cdot 1 - \kappa_{\text{軸向}} \cdot \frac{42}{99} \right) \approx L_0 \left(1 + \frac{F}{2\pi R_0 Et} \cdot 0.365 \right)$$



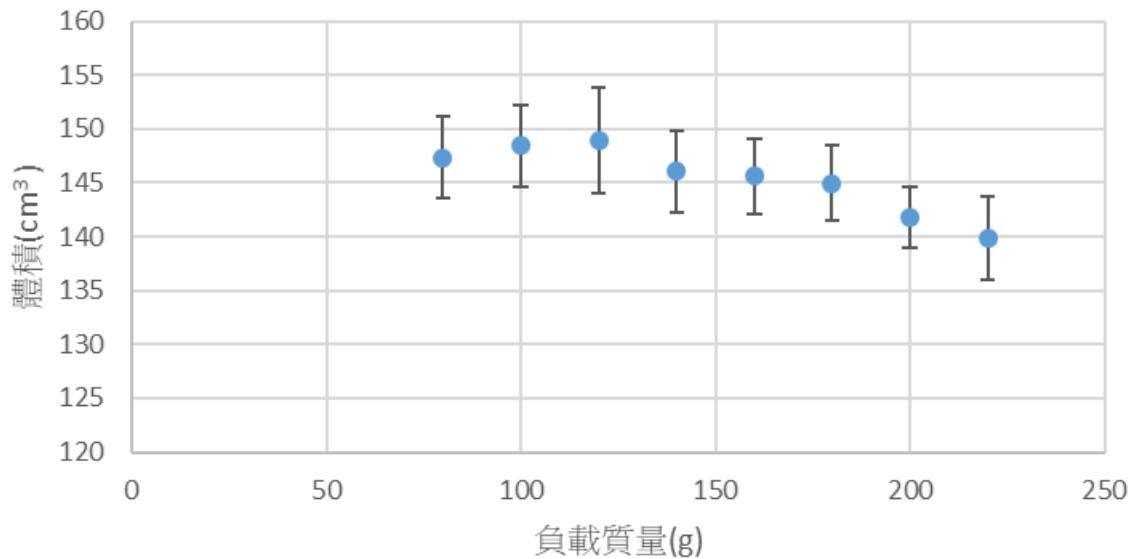
圖十二、有無網橢球的長軸長度變化(來源: 作者自行繪製)

(二)且由圖十三可知，橢球氣球在受到軸向張力時，體積並不會一致，甚至會在負載120公克出現體積最大值。

質量(g)	80	100	120	140	160	180	200	220
平均體積(cm³)	147.35	144.11	148.95	146.04	145.6	144.98	141.77	139.87

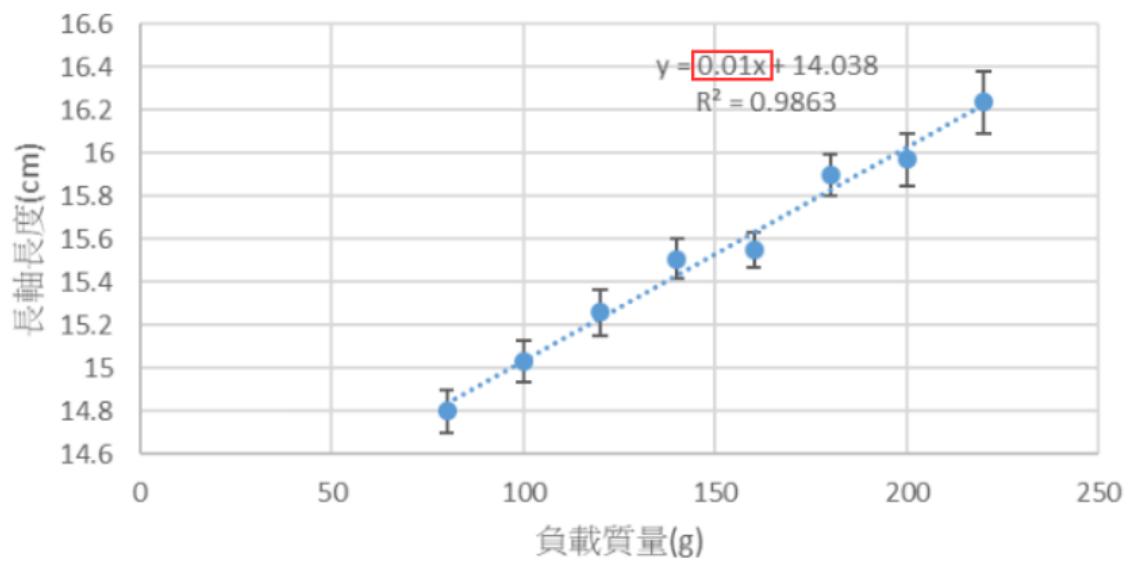
表八、不同負載質量下所造成的橢球平均體積

負載質量與橢球體積



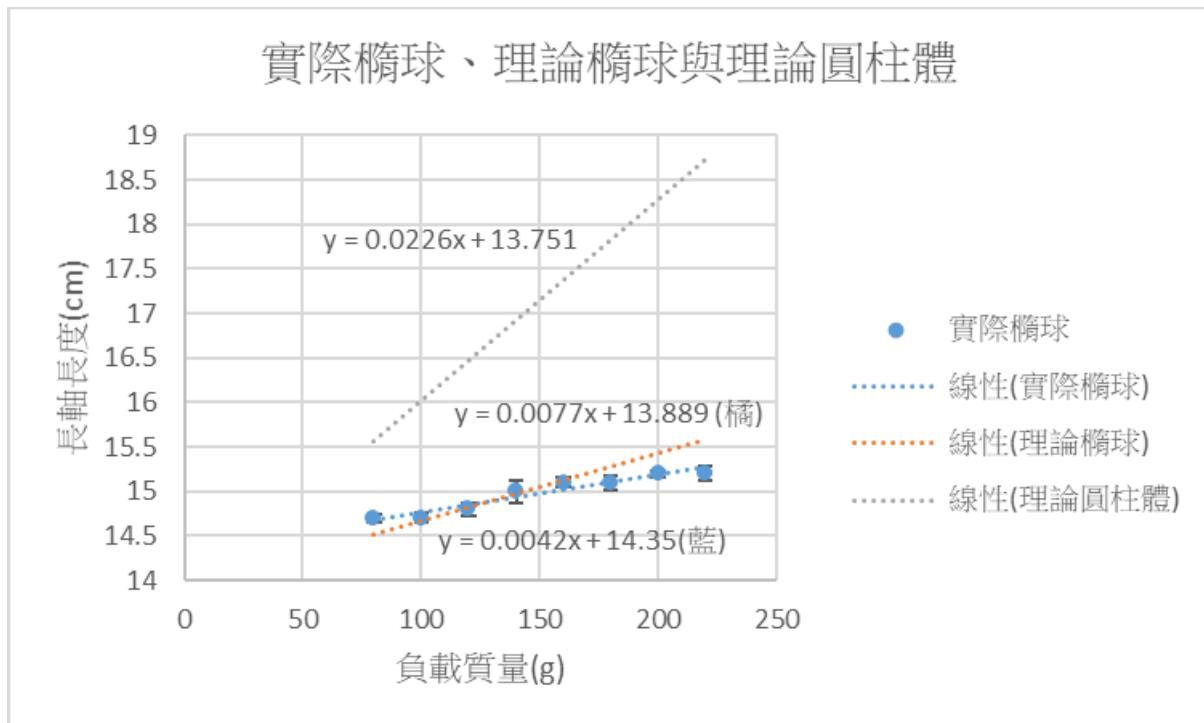
圖十三、不同負載質量下所造成的橢球平均體積(來源: 作者自行繪製)

不同負載下的平均長軸長度



圖十四、單位負載質量造成的長度變化量(來源: 作者自行繪製)

二、實驗二: 探討氣壓驅動柔性致動器的數學模型



圖十五、實際橢球、理論橢球與理論圓柱體比較(來源: 作者自行繪製)

可發現比起原先模型中假設之圓柱體，現考慮之橢球形條件後之模型更符合實際橢球形變。

根據原先假設氣囊形狀為圓柱體之Chou& Hannaford模型:

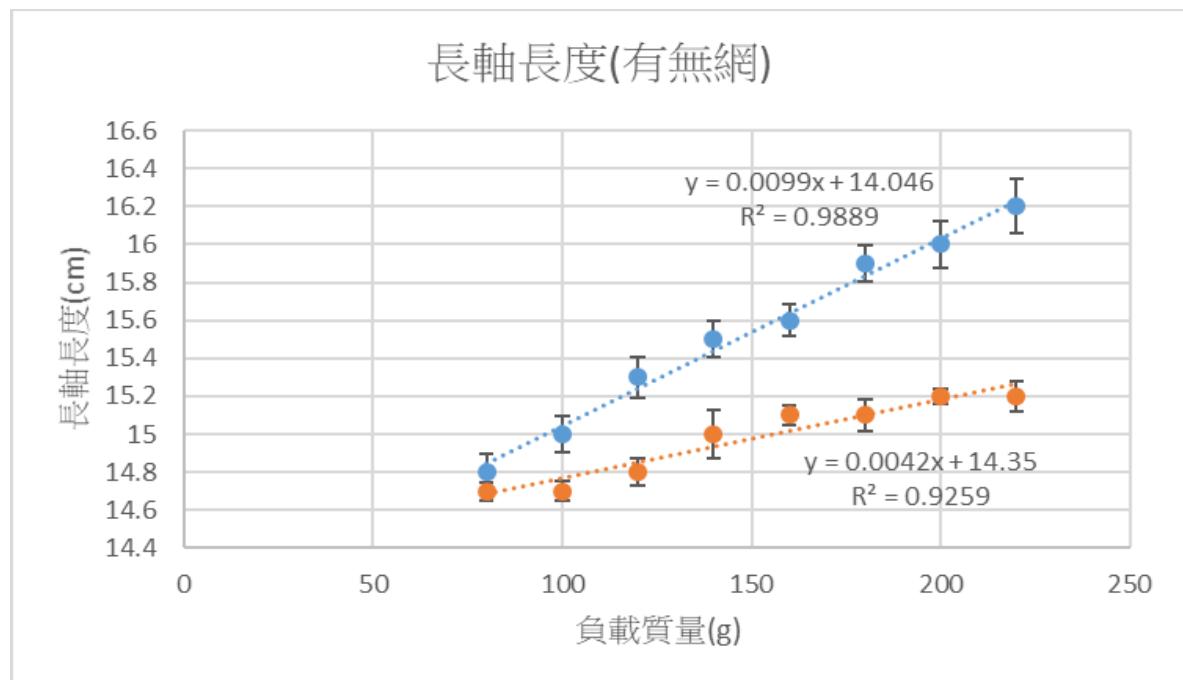
$$F = \frac{Pb^2 \left(\frac{3L^2}{b^2} - 1 \right)}{4n^2\pi} = \frac{P \left(3L^2 - b^2 \right)}{4n^2\pi} = \frac{P \left(3(L_0(1 + \frac{F}{2\pi R_0 Et}))^2 - b^2 \right)}{4n^2\pi}$$

經加入考慮橢球形狀及有包裹編織網而導致其長度變化量影響:

$$F = \frac{P}{4n^2\pi} \left(3(L_0(1 + \frac{F}{2\pi R_0 Et} \cdot 0.365))^2 - b^2 \right)$$

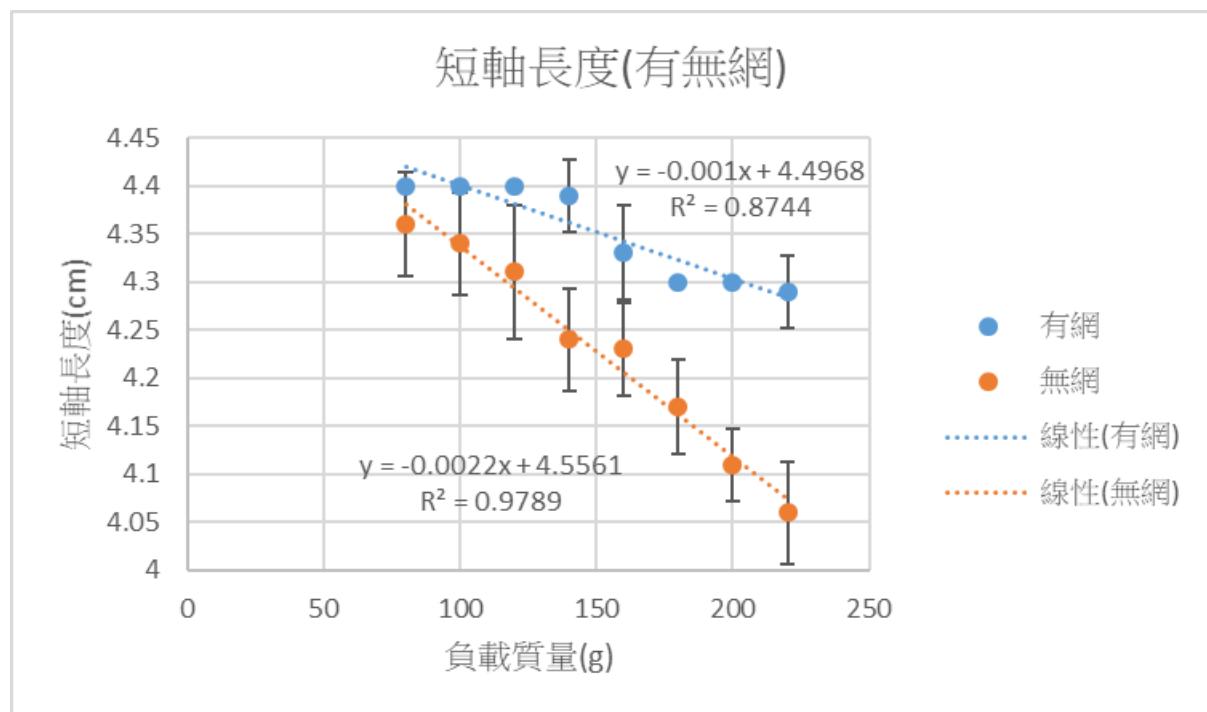
此公式即為本研究者經實驗修改後，可適用於橢球形氣壓驅動柔性致動器之應力對其長軸長度與體積變化之數學模型。憑藉此模型就能預測更符合現實狀況之氣囊拉伸長度與體積變化、應變能密度，以此提高耐久性與抗負載能力，且氣壓驅動的機械手臂需精準計算氣壓與形變，以適應不同用途的壓力需求。

三、實驗三: 探討外包裏編織網對其橢求氣球之長短軸長度影響



圖十六、有無網的長軸長度(來源: 作者自行繪製)

可以發現當外包裏編織網時，長軸長度的變化量將會比無包裹網子還要小，可猜測應是編織網的邊界限制(無彈性)，使長軸長度無法如無網時伸長，並且網子應也提供額外張力，使長軸方向受到的張力不如無網時是完全的張力。因此使長軸變化量較小。



圖十七、有無網的短軸長度(來源: 作者自行繪製)

可發現當外包裏編織網時，短軸長度的變化量將會比無包裹網子還要小，猜測應是編織網的邊界限制(無彈性)，使短軸長度無法如無網時伸長，因此使短軸變化量較小。

柒、結論

- 一、形狀不同會導致其伸長量不同，為曲率影響其應力分布。
- 二、當外包裏編織時，會限制使短軸的長度變化，變形主要發生在長軸方向。
- 三、不論是否有在氣球外包裏編織網，其長軸伸長變化都呈線性增長。
- 四、橢球氣球與圓柱體之模型主要為體積及應力分布影響。

五、得到橢球氣球之數學模型:
$$F = \frac{P}{4n^2\pi} \left(3(L_0(1 + \frac{F}{2\pi R_0 Et} \cdot 0.365))^2 - b^2 \right)$$

捌、參考文獻資料

- [1] Bhaben kalita ,alexander leonessa and santosha k. dwivedy ,(2022). A Review on the Development of Pneumatic Artificial Muscle Actuators: Force Model and Application. *Actuators*, 1-28.
- [2] Chou, C.P.; Hannaford.(1996). Measurement and modeling of McKibben pneumatic artificial muscles. *IEEE Trans. Robot. Autom.* 90 – 102.
- [3]Mooney, M. (1940). A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11(9), 5 82 – 592.
- [4] 王寶珍、胡時勝、周相榮. (2007).<不同溫度下橡膠的動態力學性能及本構模型研究>

【評語】051815

此研究透探討橢球形氣球與圓柱形氣球在受力狀態下，長軸與短軸伸長量的差異。基於圓柱形氣球所建立的理論與公式，對橢球形氣球的形狀進行更精確描述其變形行為。因此設計兩組實驗。實驗一：施加不同負載，測量長短軸的伸長量，分析負載對氣球變形的影響，並與理想圓柱體做比較。實驗二：在氣球外包覆編織網，觀察編織網對氣球在不同負載下伸長量的作用。兩組實驗結果有效描述氣球在不同形狀下的變形行為，為氣壓驅動柔性致動器提供更完善的模型。學生表達佳、理論論述佳、實驗過程與結果佳、討論與結論尚可。

作品海報

相隨球形柔性氣壓致動

器的分析與建模

壹、前言

氣壓驅動柔性致動器(Pneumatic Artificial Muscle, PAM)具備高功率重量比與柔順的仿生特性。實際運作時，其形狀常接近橢球，造成長軸與短軸間的應力分布不均，進而影響變形行為與輸出效能。此外，外層纖維束縛網的網格直徑與纖維角度也可能導致應力集中，影響其耐用性與穩定性。

現有理論多假設致動器為圓柱形，較少探討橢球幾何對其行為的影響。因此，若能深入分析橢球致動器中長軸與短軸對應力的變化，並探討有無網格的效應，建立適合橢球致動器的物理模型，將有助於了解橢球與圓柱結構在性能與力學表現上的差異，為致動器設計提供更完整的理論基礎。

貳、研究目的

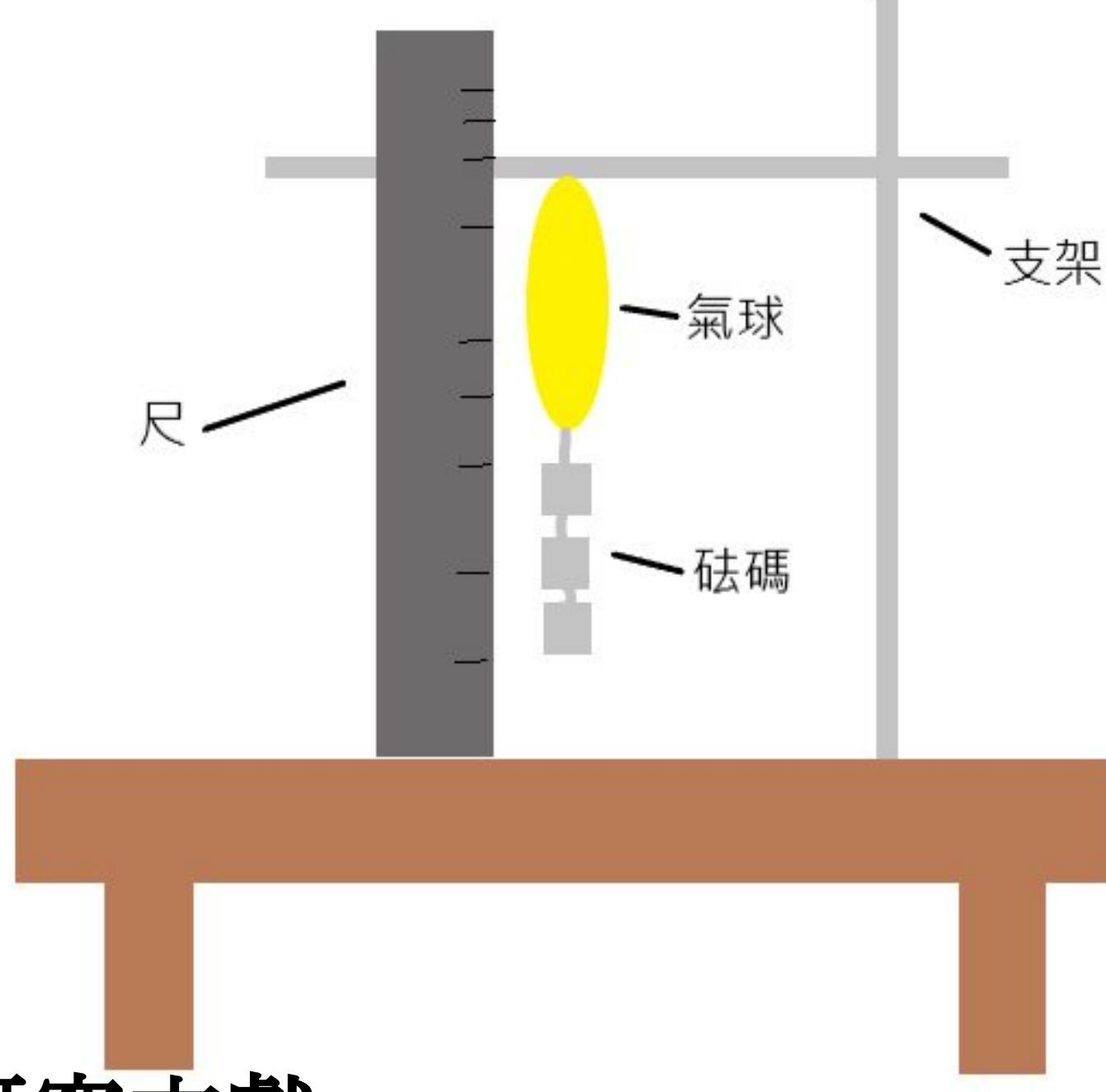
- 一、探討負載質量對橢球氣球與理想圓柱體之長度關係
- 二、探討氣壓驅動柔性致動器的物理模型
- 三、探討外包裹編織網對其橢球氣球之長短軸長度影響

參、研究設備與方法

一、材料及設備：胎壓計、熱熔膠槍、剪刀、編織網、電子秤、氣球、砝碼、打氣筒、支架、尺

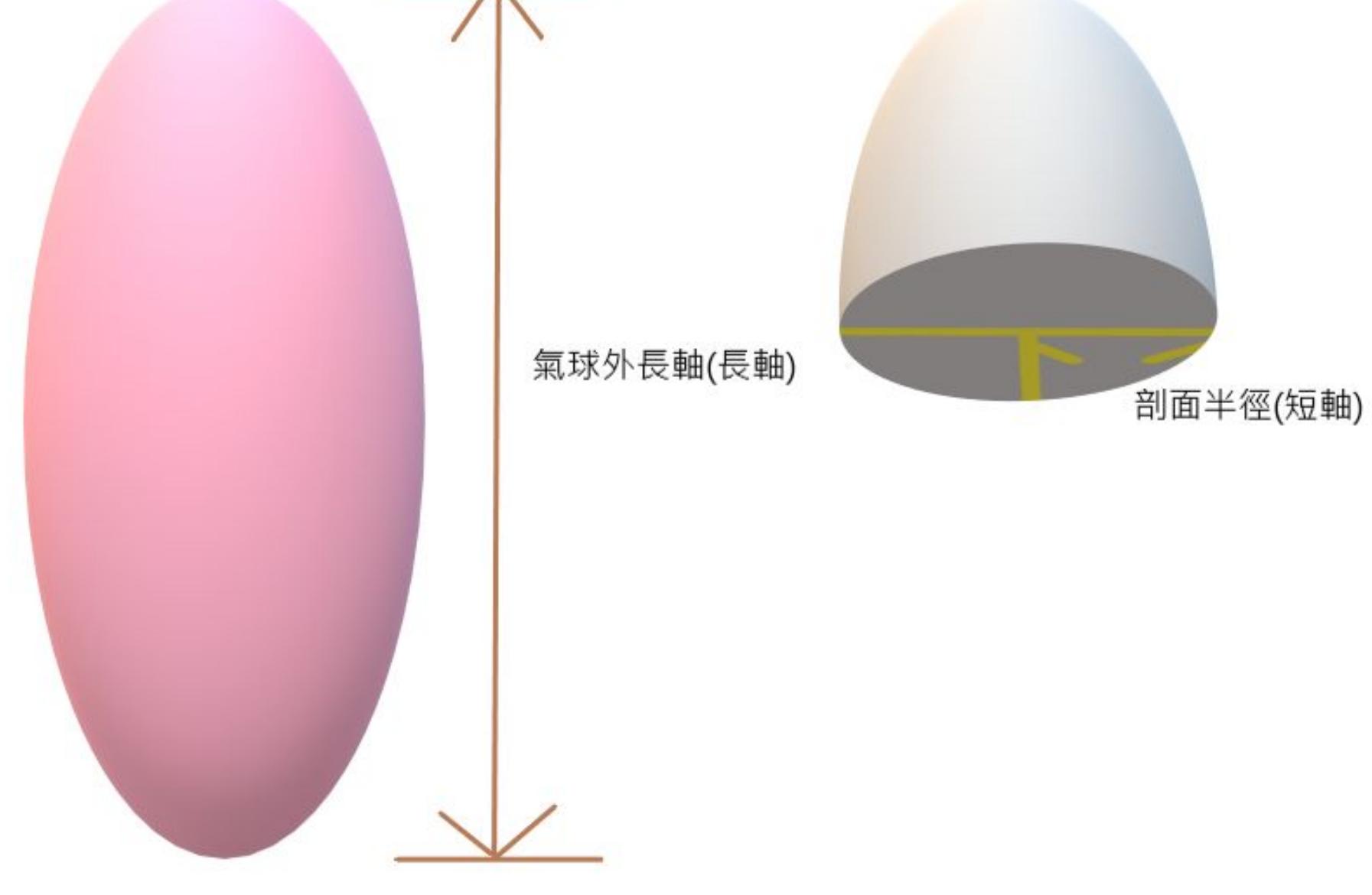
二、實驗裝置圖

(以下照片為作者自行完成)



三、設定氣球長軸與短軸

(以下照片為作者自行完成)



四、研究文獻

(一)根據Bhaben Kalita等人(2022)，氣動人工肌肉(PAM)對每個負載有一平衡長度[1]。其最為廣泛使用之模型為Chou和Hannaford模型，將PAM視為理想圓柱(見圖一)推導出靜態力模型[2]：

$$dW_{in} = \int_{S_i} (p - p_0) dl_i \cdot ds_i = (p - p_0) \int_{S_i} dl_i \cdot ds_i = P'dV$$

P 內部氣壓 p_0 環境氣壓 P' 相對氣壓 S_i 總內表面積

ds_i 面積向量 dl_i 內表面積位移 dV 體積變化

$$-FdL = P'dV$$

$$F = -P' \frac{dV}{dL}$$

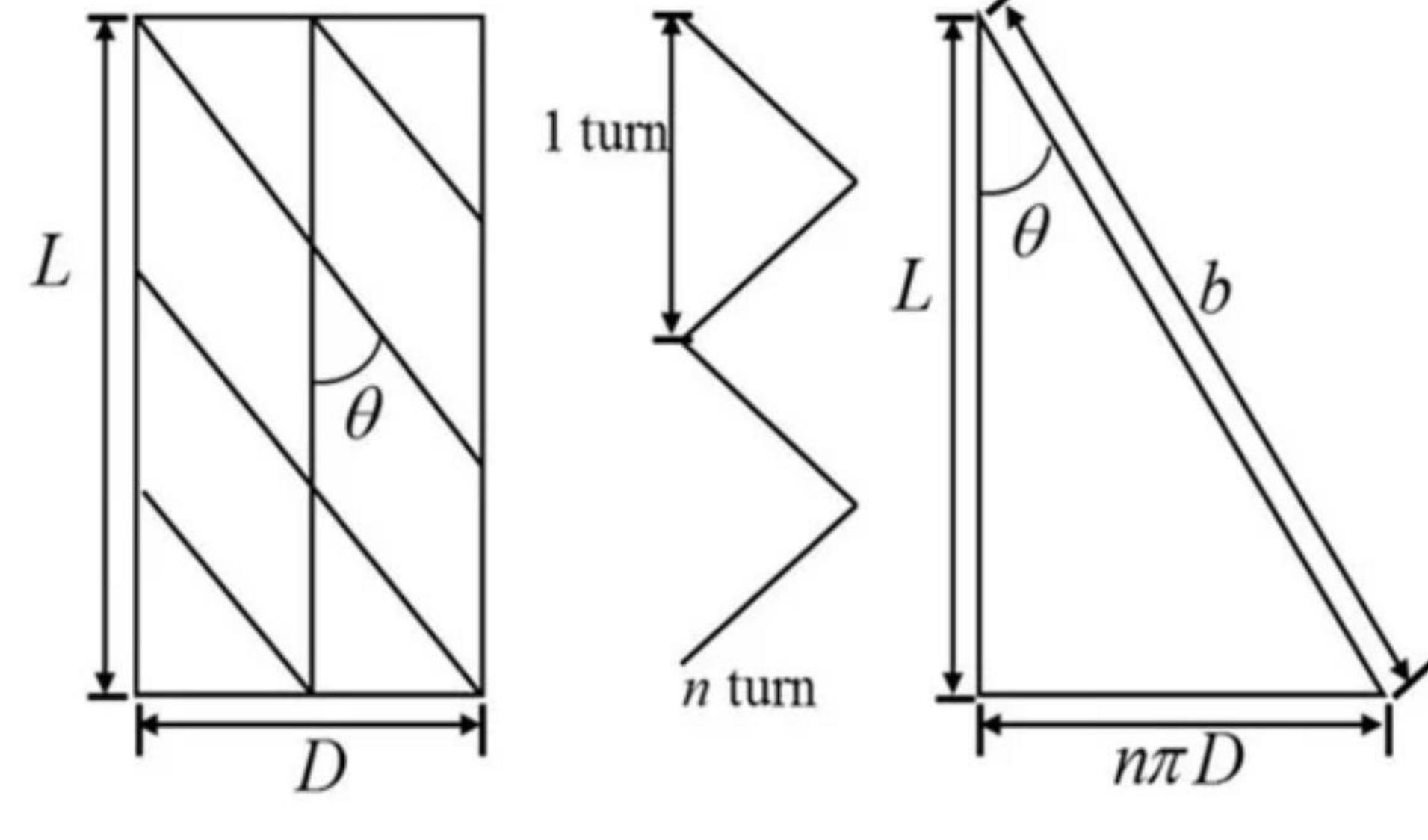
為估計 dV/dL ，假設外圍螺紋的延伸性非常低，因此致動器體積僅取決於其長度。

$$D = \frac{bs\sin\theta}{n\pi} \quad L = b\cos\theta$$

L長度 b螺紋長度 n螺紋圈數

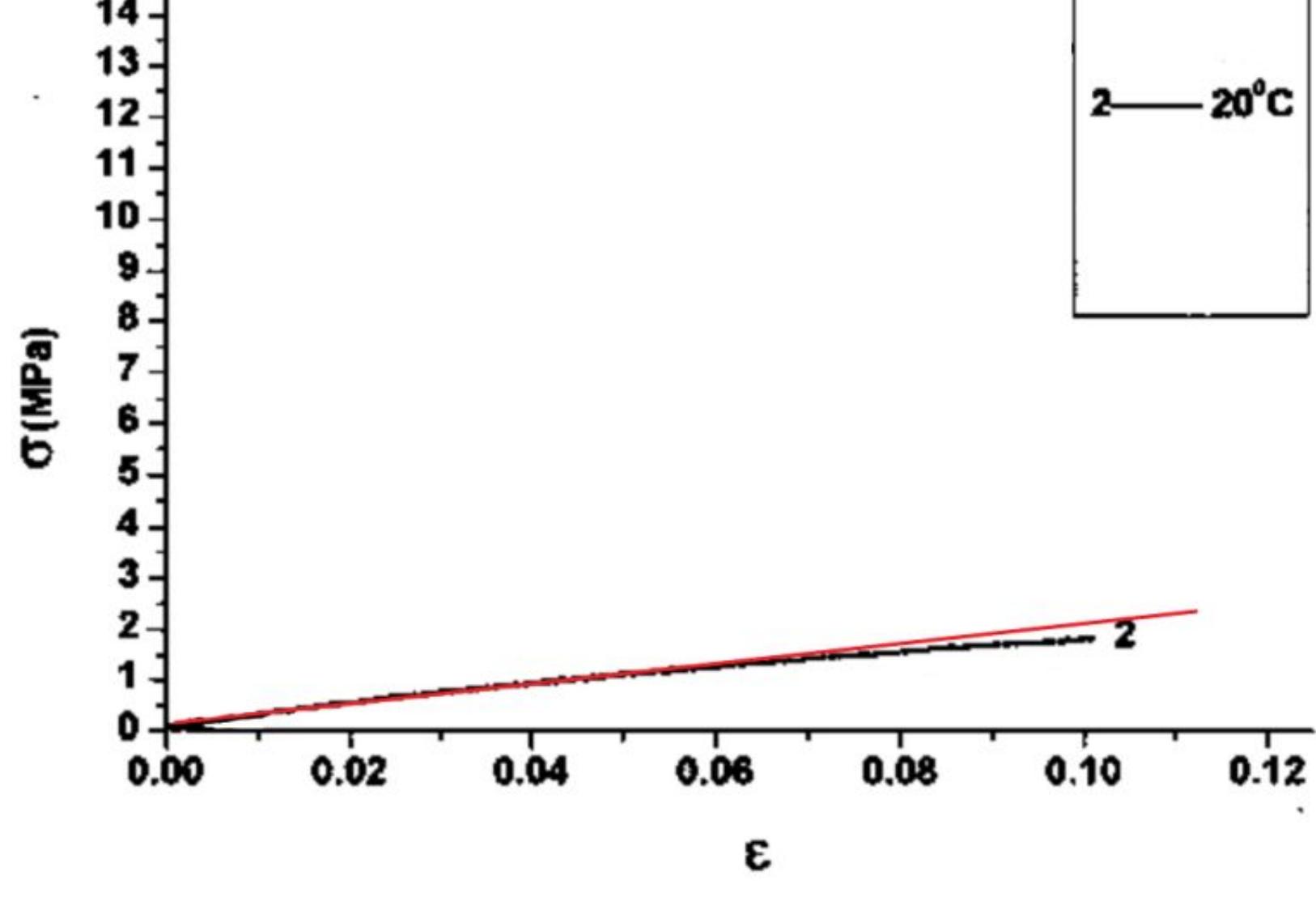
$$F = -P' \frac{dV}{dL} = -P' \frac{dV/d\theta}{dL/d\theta} = \frac{P'b^2(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{4\pi n^2}$$

$$F_g = \frac{Pb^2 \left(\frac{3L^2}{b^2} - 1 \right)}{4n^2 \pi}$$



圖一、PAM的簡化幾何模型(取自<A Review on the Development of Pneumatic Artificial Muscle Actuators: Force Model and Application>)

(三)參考2007年王寶珍、胡時勝、周相榮的研究<不同溫度下橡膠的動態力學性能及本構模型研究>，可看出其曲線趨近線性[4]，因此猜測其降伏點還未到其降伏點。



圖二、橡膠應力-應變關係圖(來源: 王寶珍、胡時勝、周相榮的研究<不同溫度下橡膠的動態力學性能及本構模型研究>)

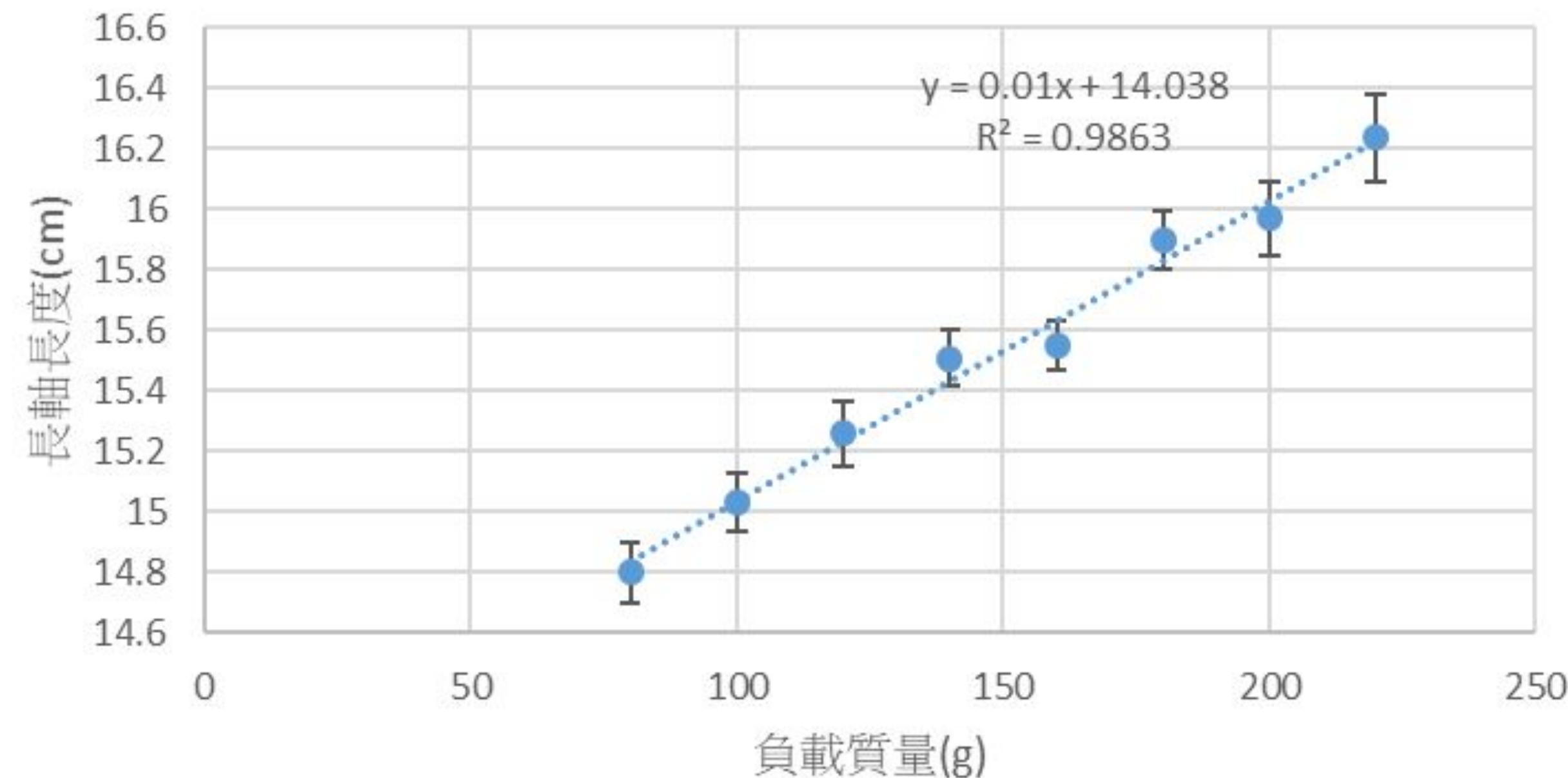
(二)現今主要的彈性材料變形模型為Mooney-Rivlin模型[3]，其假設氣球變形時體積不變，然而實驗顯示變形常伴隨明顯體積變化，因此模型需要能描述體積變化。

肆、研究結果與討論

一、實驗一：探討負載質量對橢球氣球與理想圓柱體之長度關係

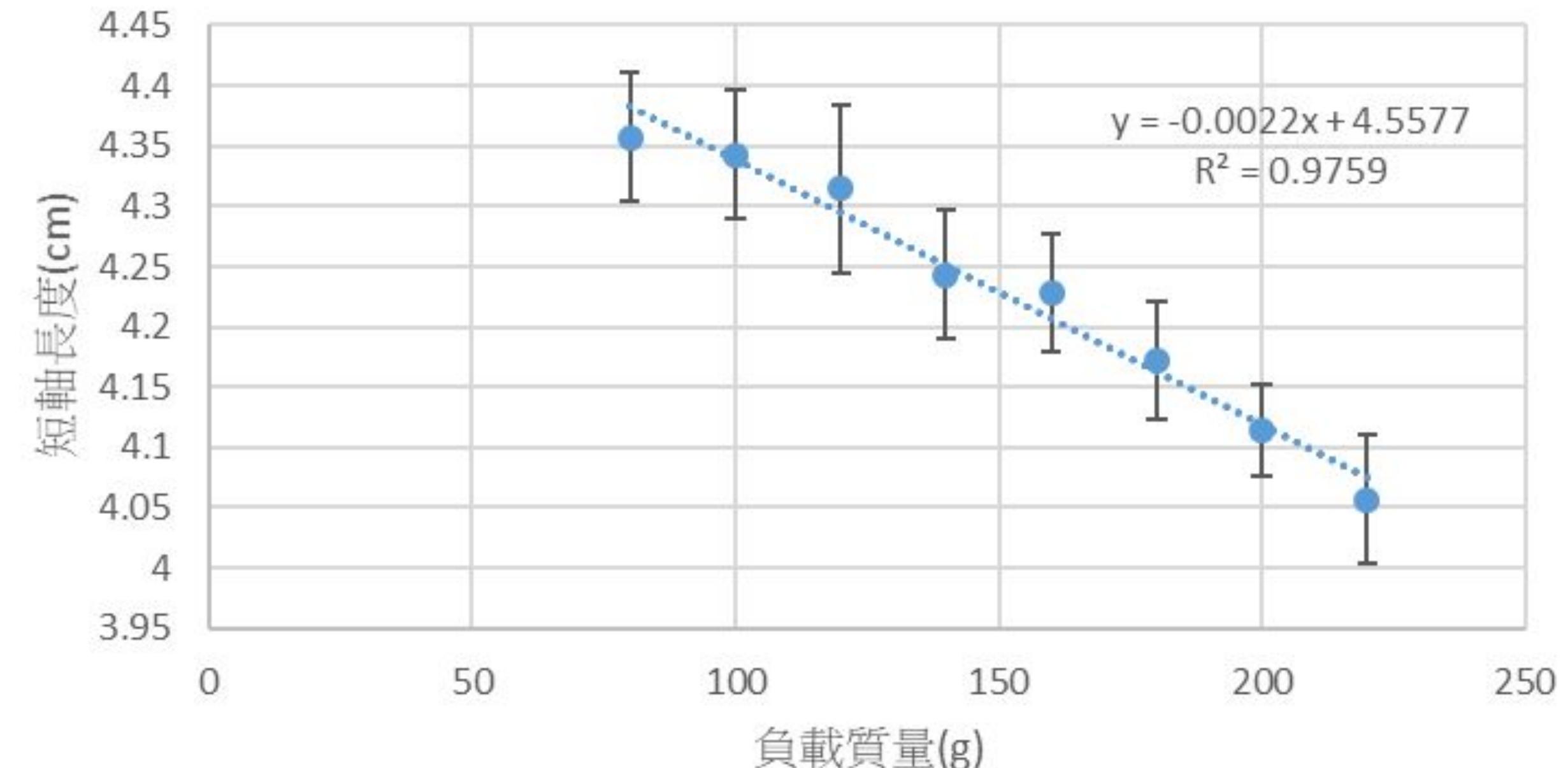
使用初始長軸長度為14.4cm、短軸長度為4.4cm的氣球。(以下圖表皆為作者自製)

不同負載下的平均長軸長度



圖三、不同負載下的長軸長度(有網)

不同負載下的平均短軸長度



圖四、不同負載下的短軸長度(有網)

計算圓柱體受力時的理想長度與半徑變化，得到理想變形長度。

$$\sigma_z = \frac{F}{2\pi R_0 t}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F}{2\pi R_0 t} / \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

由圖五可知，相較於理想圓柱體氣球，橢球氣球在拉伸時長度變化較小。由於橢球表面具有不均勻的曲率，施加的拉力並不完全沿軸向傳遞，部分力會被分散至圓周方向，使得變化量下降。

圖中方程式初始值不同，因此猜測未實驗之質量與長度的關係應與80公克後的斜率不同，為不完全線性增長，導致線性回歸時出現不合預期的截距。透過此實驗修正：

$$L = L_0 \left(1 + \frac{F}{2\pi R_0 Et} \cdot f_{shape} \right)$$

其中 f_{shape} 橢球的曲率有關。圓柱體軸向的曲率為0，因此會承受所有負載質量，而橢球軸向具有曲率，能更有效地分散外力。因此 f_{shape} 的涵義為：

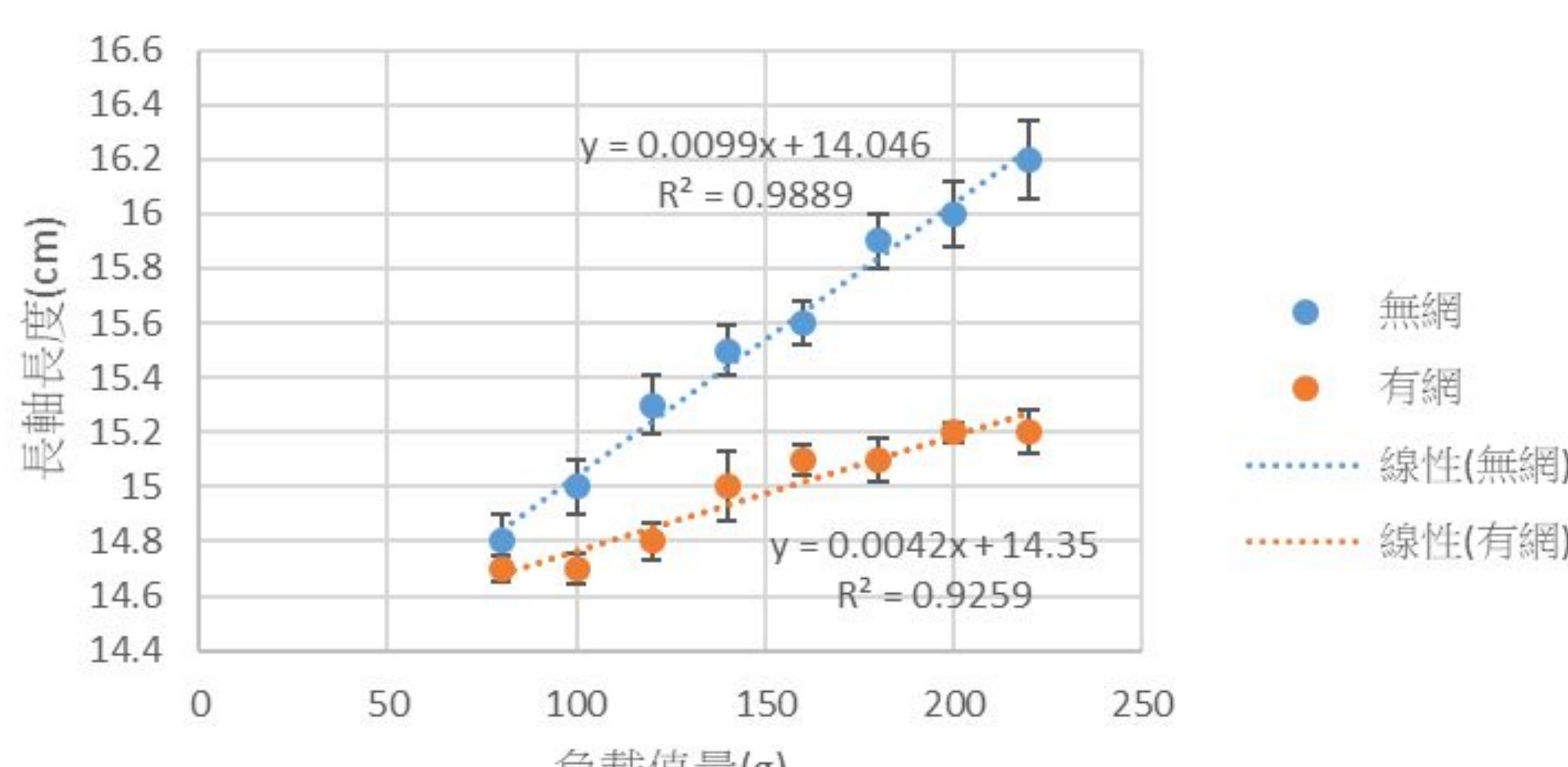
$$f_{shape} = 1 - \kappa_{軸向}$$

$$\kappa = \frac{1}{a} \approx 0.139 \Rightarrow f_{shape} \approx 0.861$$

此為無網時，理想橢球長度變化推導，但Chou和Hannaford模型為有包裹編織網之公式，因此參考先前的實驗數據，將長度線性回歸(見圖六)：

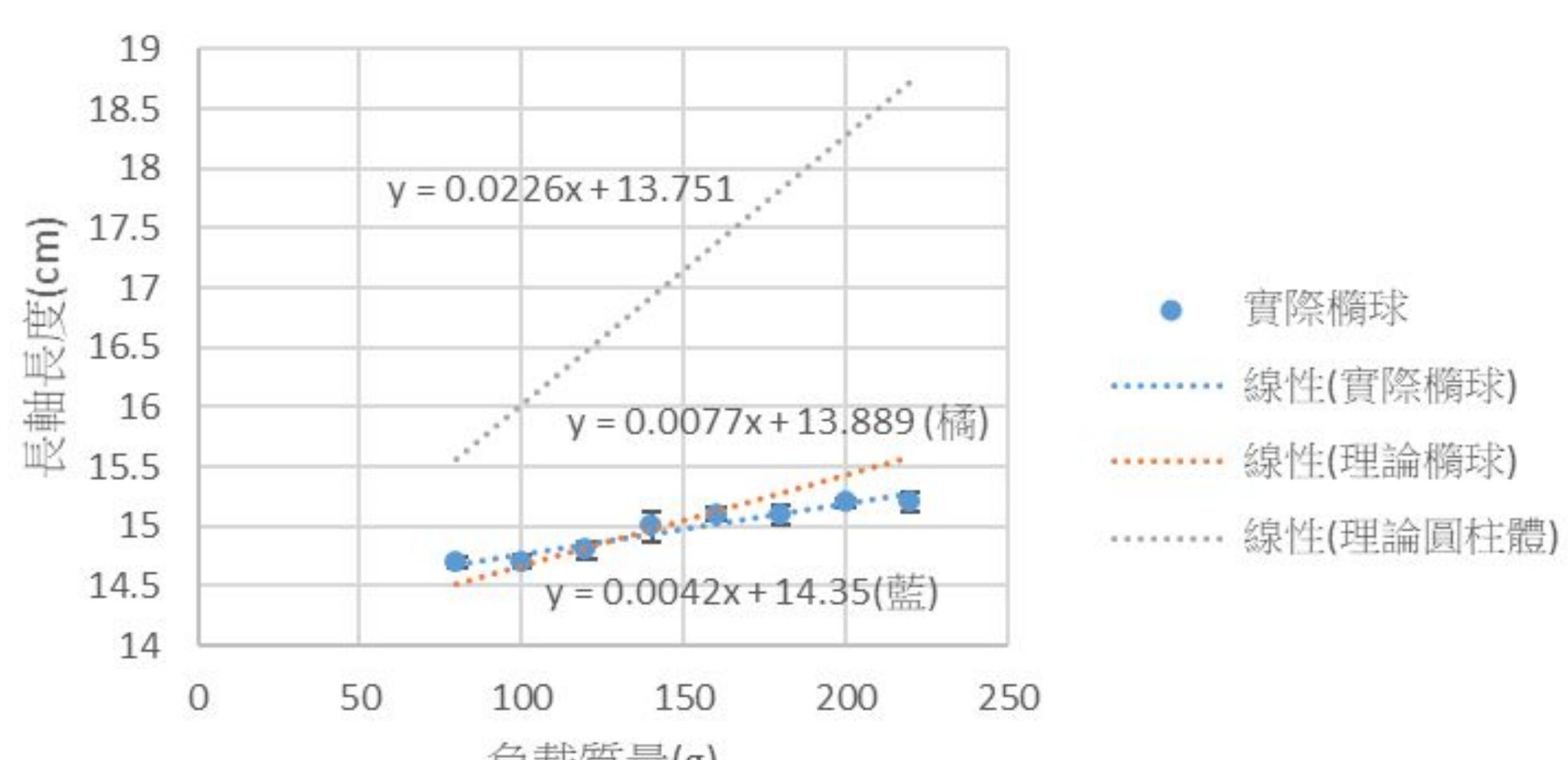
$$L = L_0 \left[1 + \frac{F}{2\pi R_0 Et} \cdot (1 - \kappa_{軸向}) \cdot \frac{42}{99} \right] \approx L_0 \left(1 + \frac{F}{2\pi R_0 Et} \cdot 0.365 \right)$$

橢球長軸長度變化(有無網)



圖六、有無網橢球的長軸長度變化

實際橢球、理論橢球與理論圓柱體



圖七、實際橢球、理論橢球與理論圓柱體比較

二、實驗二：探討氣壓驅動柔性致動器的數學模型

可發現比起原先模型中假設之圓柱體(見圖七)，現考慮之橢球形條件後之模型更符合實際橢球形變。根據原先假設氣囊形狀為圓柱體之Chou& Hannaford模型：

$$F = \frac{Pb^2 \left(\frac{3L^2}{b^2} - 1 \right)}{4n^2 \pi} = \frac{P(3L^2 - b^2)}{4n^2 \pi} = \frac{P \left(3(L_0(1 + \frac{F}{2\pi R_0 Et})^{1/2} - b)^2 \right)}{4n^2 \pi}$$

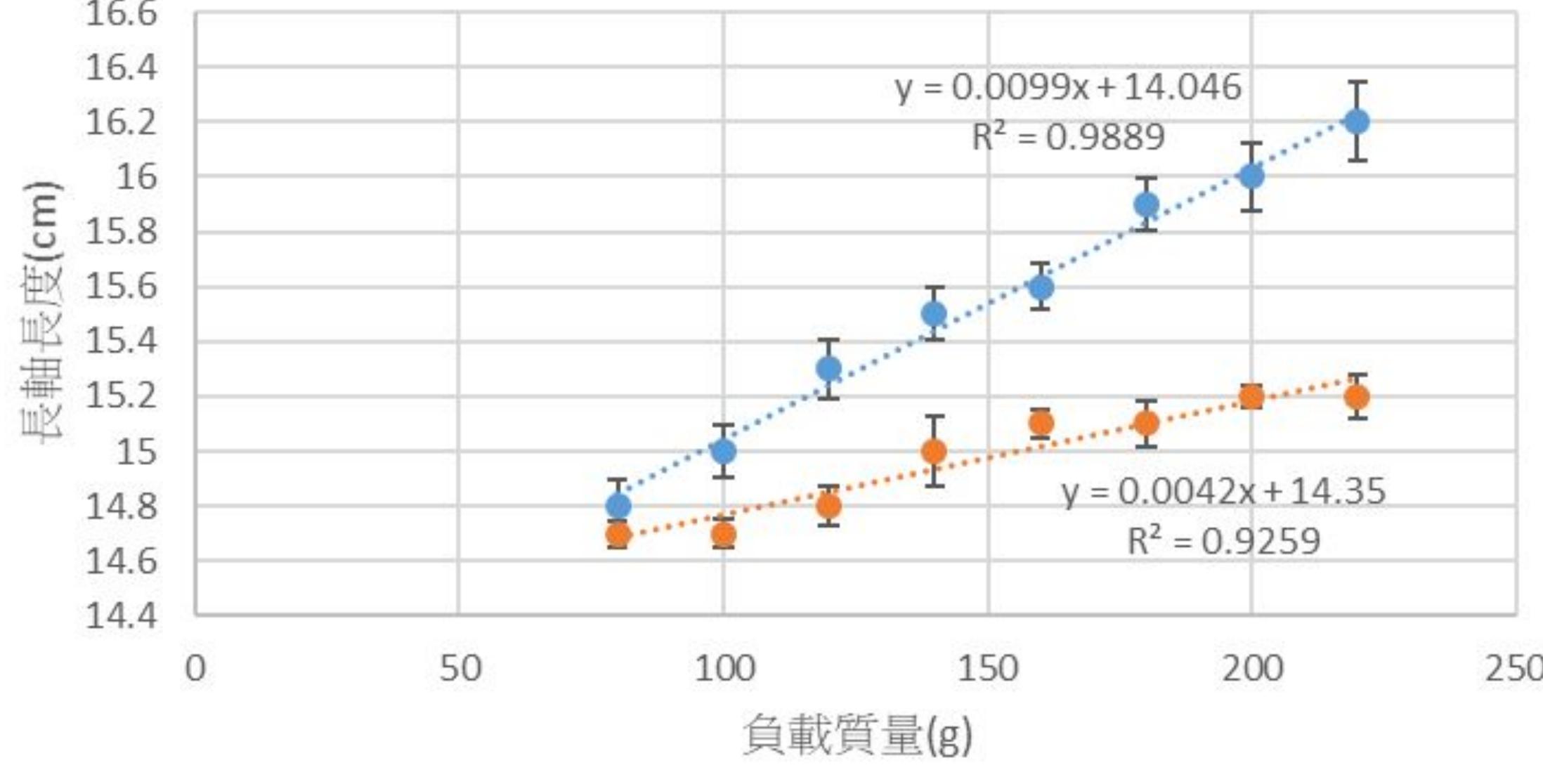
經加入考慮橢球形狀及有包裹編織網而導致其長度變化量影響：

$$F = \frac{P}{4n^2 \pi} \left(3(L_0(1 + \frac{F}{2\pi R_0 Et} \cdot 0.365))^{1/2} - b \right)^2$$

此公式即為本研究者經實驗修改後，可適用於橢球形氣動肌肉對其長軸長度之物理模型。憑此模型能預測更符合現實狀況之氣囊拉伸長度與體積變化，以此提高對耐久性與抗負載能力之預測準確度。

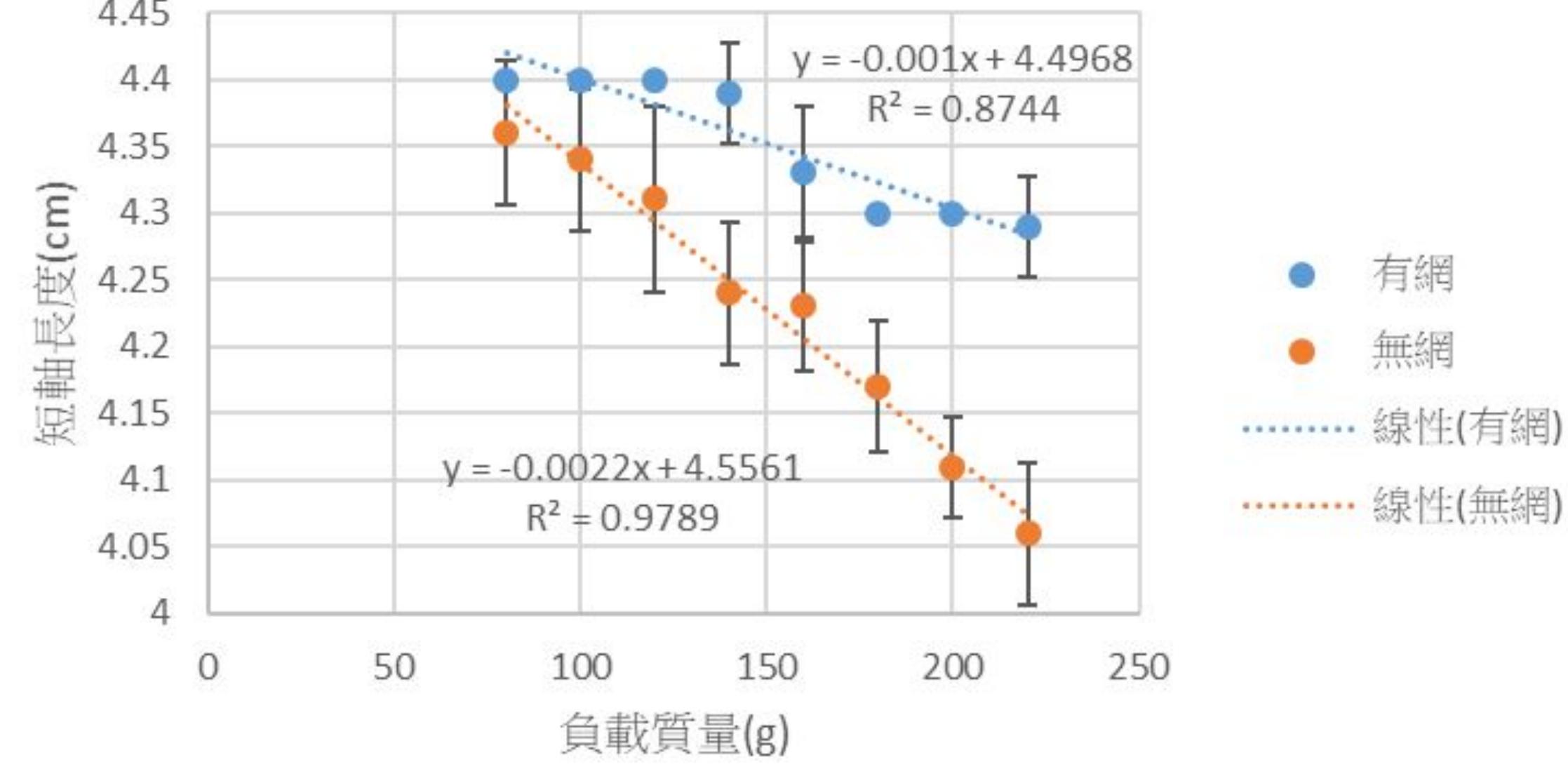
三、實驗三：探討外包裹編織網對其橢球氣球之長短軸長度影響

長軸長度(有無網)



圖八、有無網的長軸長度

短軸長度(有無網)



圖九、有無網的短軸長度

(以上圖表皆為作者自行製作)可以發現當外包裹編織網時，長軸長度的變化量將會比無包裹網子還要小，可猜測應是編織網的邊界限制(無彈性)，使長軸長度無法如無網時伸長，並且網子應也提供額外張力，使長軸方向受到的張力不如無網時是完全的張力。因此使長軸變化量較小。

可發現當外包裹編織網時，短軸長度的變化量將會比無包裹網子還要小，猜測應是編織網的邊界限制(無彈性)，使短軸長度無法如無網時伸長，因此使短軸變化量較小。

伍、結論

- 一、形狀不同會導致其伸長量不同，為曲率影響其應力分布。
- 二、當外包裹編織時，會限制使短軸的長度變化，變形主要發生在長軸方向。
- 三、不論是否有在氣球外包裹編織網，其長軸伸長變化都呈線性增長。
- 四、橢球氣球與圓柱體之模型主要為體積及應力分布影響。

五、得到橢球氣球之物理模型： $F = \frac{P}{4n^2 \pi} \left(3(L_0(1 + \frac{F}{2\pi R_0 Et} \cdot 0.365))^{1/2} - b \right)^2$

陸、參考文獻

- [1] Bhaben kalita ,alexander leonessa and santosha k. dwivedy , (2022). A Review on the Development of Pneumatic Artificial Muscle Actuators: Force Model and Application. *Actuators*, 1-28.
- [2] Chou, C.P.; Hannaford.(1996). Measurement and modeling of McKibben pneumatic artificial muscles. *IEEE Trans. Robot. Autom.* 90–102.
- [3] Mooney, M. (1940). A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 11(9), 582–592.
- [4] 王寶珍、胡時勝、周相榮. (2007).<不同溫度下橡膠的動態力學性能及本構模型研究>