中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　物理與天文學科

051813

流速與孔徑對於反泡泡生成的影響

學校名稱： 國立新竹高級中學

作者：	指導老師：
高二 周佑宸 高二 方彥博	林慧潔

關鍵詞： 反泡泡、孔徑、流速

摘要

本研究透過 Arduino 控制步進馬達，再由步進馬達穩定推動針筒，進而噴出泡泡水柱，在水中製造反泡泡。我們控制步進馬達的推進時間，改變泡泡水的注射水量；也以針頭距水面的高度、針頭孔徑大小為操作變因來改變泡泡水的注射速度。最後用 Tracker 應用程式測量出泡泡水的注射速度、反泡泡半徑，推算出不同的注射水量以及注射速度可生成的最多反泡泡的範圍以及最大的反泡泡半徑。

壹、前言

一、研究動機

反泡泡是一種由空氣包裹液體的特殊現象，與普通氣泡相反，它的液體在內部，被一層極薄的空氣層包覆著。過去的科展作品中，有許多人針對於它的生成成功率和存活時間作探討，或以不同的滴法探討對反泡泡的生成影響。其中也有許多探討滴落高度與生成成功率等等的影響，閱讀了的許多的研究作品後，我們發現液體注射量以及液面的接觸速度在反泡泡的生成之中扮演著十分重要的角色。因此，我們想要更進一步地研究這部分的關係。

二、研究目的

(一) 水柱下落距離與速度的關係

(二) 同一孔徑，不同滴落速度對反泡泡生成大小的影響

(三) 不同孔徑，不同滴落速度，生成反泡泡的數量分佈

(四) 不同注射量對反泡泡大小的影響

(五) 不同孔徑下 生成反泡泡的最佳滴落速度

(六) 孔徑與生成反泡泡大小的關係

三、文獻回顧

在 2008 年的論文<Dynamics of the formation of antibubbles>(P. G. Kim and H. A. Stone，2008)中，作者使用幫浦每次注射 0.1 ml 之單滴的溶液並在一容器中生成反泡泡(圖一)，因作者認為泡沫會對反泡泡的生成產生影響，使用一吸取裝置吸收產生的泡沫。作者也提到了生成反泡泡的條件，包括了液滴的初始速度、低落高度、注射孔徑等變因，而作者也發現低落高度與孔徑有一最佳關係(圖二)，可見不同孔徑下有一最佳生成高度及可生成範圍。

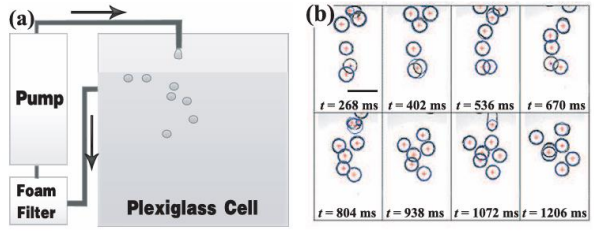
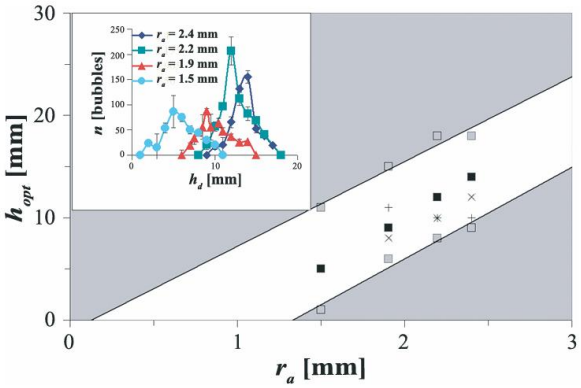


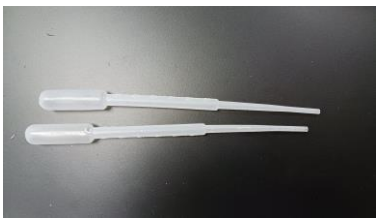
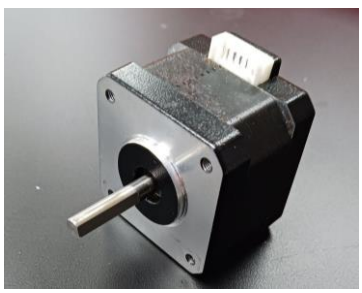
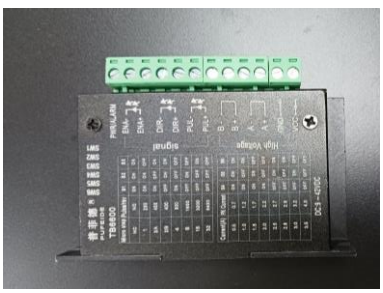
Fig. 2: (a) Sketch of the experiment. The cell is filled with soap solution and the arrows indicate the direction of flow. (b) The detection of antibubbles. The red on-line pluses indicate the centers of the antibubbles detected using the image processing software. The black bar in the first frame indicates 1 cm.

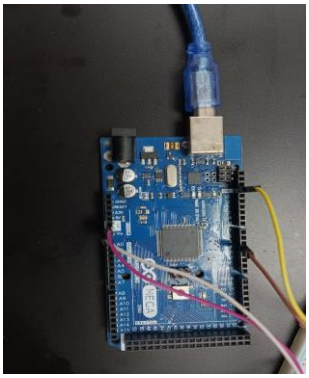
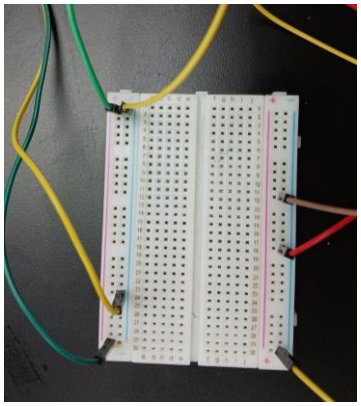
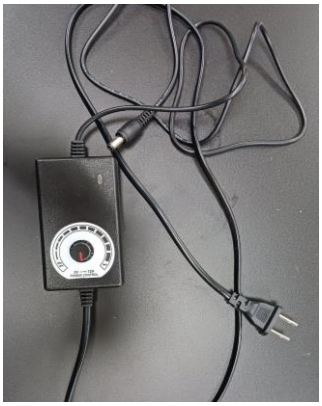


圖(一)(左)作者之實驗裝置圖(P. G. Kim[1]，Fig.2)

圖(二)(右)不同孔徑(橫軸)下生成反泡泡的最佳高度(黑點)與可生成高度範圍(白底區域)(P. G. Kim[1]，Fig.3)

貳、研究設備及器材

沙拉脫	量筒	容量瓶
		
滴管	針筒	攝影機
		
各種尺寸針頭	步進馬達	步進馬達驅動器

		
方形容器	Arduino 面板	照明設備
		
麵包版	電壓供應器	Excel 軟體
Tracker 軟體	Arduino 軟體	

以上設備器材圖片從沙拉脫至電壓供應器均為作者自行拍攝， Excel 軟體、 Tracker 軟體與 Arduino 軟體圖片為參考至網路。來源分別為參考文獻資料中第 11、12 與第 13 項

參、研究過程與方法

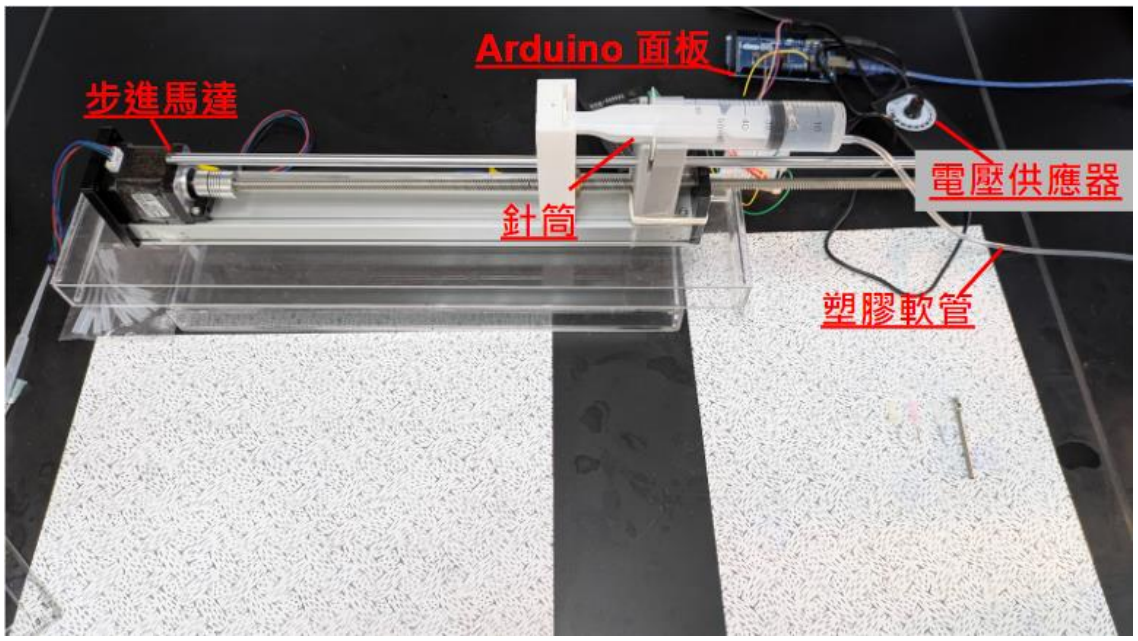
一、步進馬達原理

步進馬達透過改變內部的磁極，使其轉軸轉動，我們可以透過 Arduino 面板輸入信號來使其轉動，其中一個信號就能讓步進馬達轉動一個步距角，改變發送信號之間的時間長短，就可以控制馬達轉動的頻率，進一步控制馬達轉速，在步進馬達的 Arduino 指令中，我們使用變數 delaytime 作為發送信號之間的時間間隔，單位為毫秒。我們也透過馬達轉動的步距角數改變水溶液的注射量，使用的變數則為 one

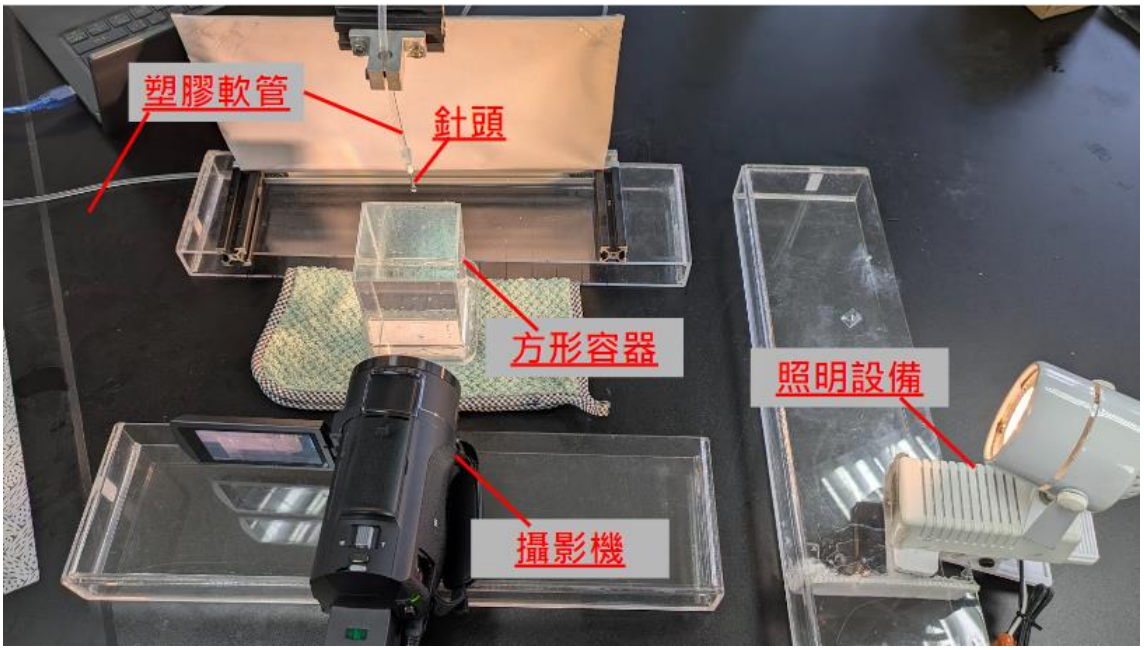
round，此參數控制的為發送信號的次數，也表示一次注射步進馬達轉動的步距角數，進一步影響針筒的推近距離，也進一步改變了單次注射的液體量。

二、實驗裝置

我們在網路上找到了自製針筒注射幫浦的教學，我們參考後製作出了以下的推進裝置(圖三)，利用 Arduino 面板可以控制步進馬達，進而推動針筒和軟管中的水溶液(圖四)。水溶液會由針頭低落至方形容器中，生成反泡泡。我們在旁使用照明設備以便觀察，使用攝影機紀錄反泡泡的生成過程。



圖(三)推進裝置(作者自行拍攝)



圖(四)滴落裝置(作者自行拍攝)

三、前置實驗

目的：為了找出確保反泡泡有一定的生成率，我們透過以下實驗找出最適合生成反泡泡的 delaytime 。

(一) 調製溶液

先用量筒量取 5 毫升的沙拉脫，再加進 500 毫升之容量瓶並加入純水至 500 毫升

(二) 架設、調整實驗器材至完善

1. 用針筒吸滿溶液、連接塑膠軟管並將針筒固定在推進器上、軟管固定在支架上且裝上針頭。我們總共對五種不同孔徑的針頭進行實驗，直徑分別為：0.84、0.9、1.32、1.6、3.48 (mm)。
2. 將方形容器裝滿泡泡水並置於針頭下方，調整針頭與液面距離，使針頭距離水面高度 0.5 至 2.5cm 之間。

(三)選定測量數值

使用 Arduino 面板設定步進馬達的 delaytime 。

(四)開始實驗

啟動電壓供應器，使步進馬達推進針筒、產生水柱注射至水面

(五)實驗分析

找出所有的孔徑在哪一個 delaytime 能產生最多反泡泡，並以此作為往後之實驗數值。

四、反泡泡滴製

(一) 調製溶液

先用量筒量取 5 毫升的沙拉脫，再加進 500 毫升之容量瓶並加入純水至 500 毫升。

(二) 架設、調整實驗器材至完善

1. 用針筒吸滿溶液、連接塑膠軟管並將針筒固定在推進器上、軟管固定在支架上且裝上針頭。我們總共對五種不同孔徑的針頭進行實驗，直徑分別為：0.84、0.9、1.32、1.6、3.48 (mm)。
2. 將方形容器裝滿泡泡水並置於針頭下方，調整針頭與液面距離，使針頭距離水面高度 0.5 cm。
3. 將 Arduino 面板連接至筆電，利用前置實驗所找到的最適合的 delaytime 並設定推進時間，以及每次推進設定 1.5 秒的間隔，讓每次的注射互不干擾。但直徑為 3.48 mm 之針頭則否，此部分將在後面提及。
4. 架設攝影機、照明設備。

(三) 選定測量數值

1. 用 Arduino 面板設定步進馬達的推進時間 one round 分別為 50、75、100。

2. 調整針頭與液面高度。

3. 選定針頭尺寸。

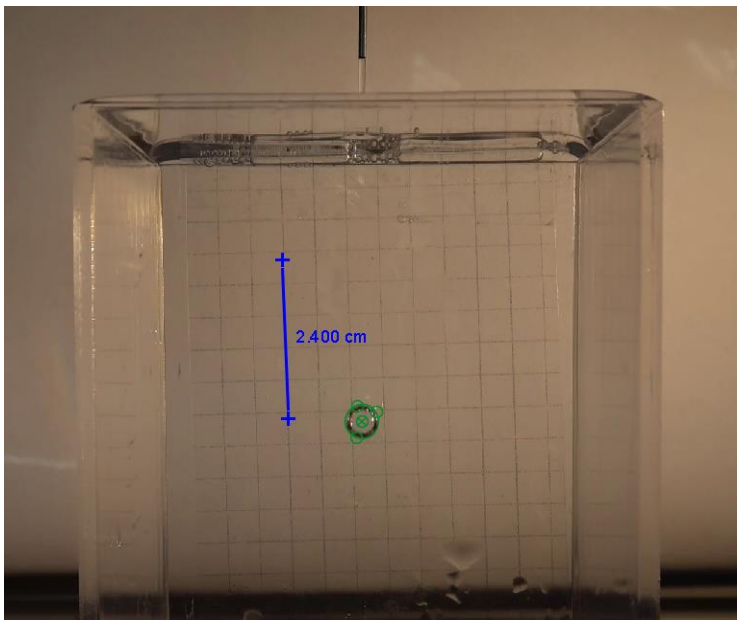
(四) 開始實驗

1. 啟動電壓供應器，驅動步進馬達，並用攝影機記錄反泡泡的生成過程。同一個高度滴 10 次。

2. 將針頭與水面的距離調高 0.2cm，重複步驟 1.直到針頭與水面的距離為 2.5cm。每一個推進時間均會進行 0.5 至 2.5cm 的高度。

(五) 實驗分析

利用追蹤軟體 Tracker 內建的工具「circle fitter」點選出反泡泡的周圍輪廓，測量出反泡泡的半徑。



圖(五)反泡泡的半徑測量(作者自行拍攝)

(六) 結果分析

利用 Excel 試算表統整出每個孔徑的每個高度、注射量生成的反泡泡大小，進而分析這些變因之間的關係。

五、液滴下落速度測量

(一) 調配染色水溶液

用墨水將純水染色至用滴管滴落時水柱明顯可見。

(二) 架設、調整實驗器材至完善。

1. 用針筒吸起染色水溶液，並在針頭下方放置相同的染色水溶液。

2. 針筒連接塑膠軟管並將針筒固定在推進器上、軟管固定在支架上且裝上針頭。

3. 架設攝影機、照明設備。

(三) 選定測量數值

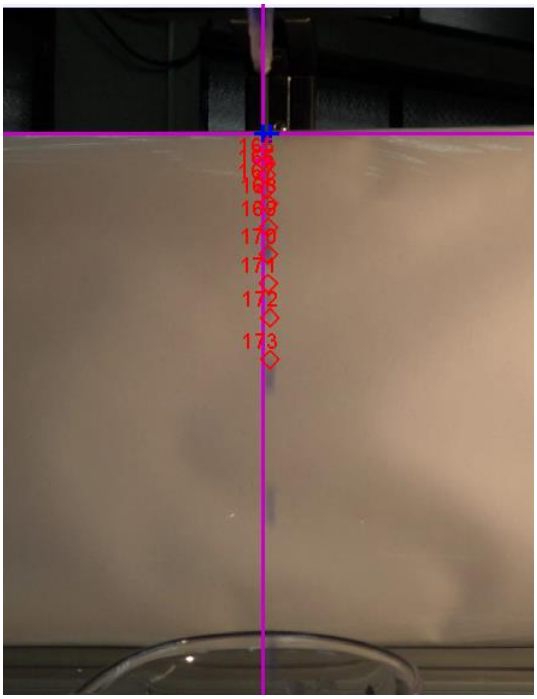
選定推進速度及針頭尺寸。

(四) 開始實驗

開啟電壓供應器驅動步進馬達，並用攝影機紀錄水柱下落過程。注射三次。

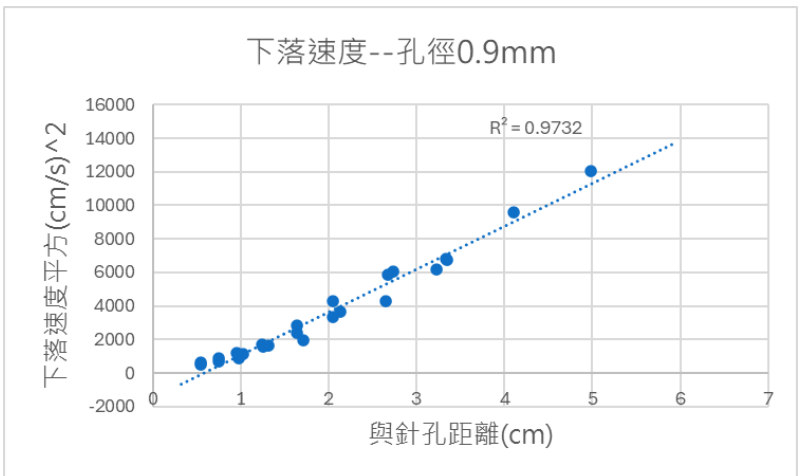
(五) 實驗分析

利用 tracker 追蹤水柱前緣軌跡，得出下落距離與瞬時速率的數據點，收集三次注射水柱下落速度及當下與針孔距離之數據點。



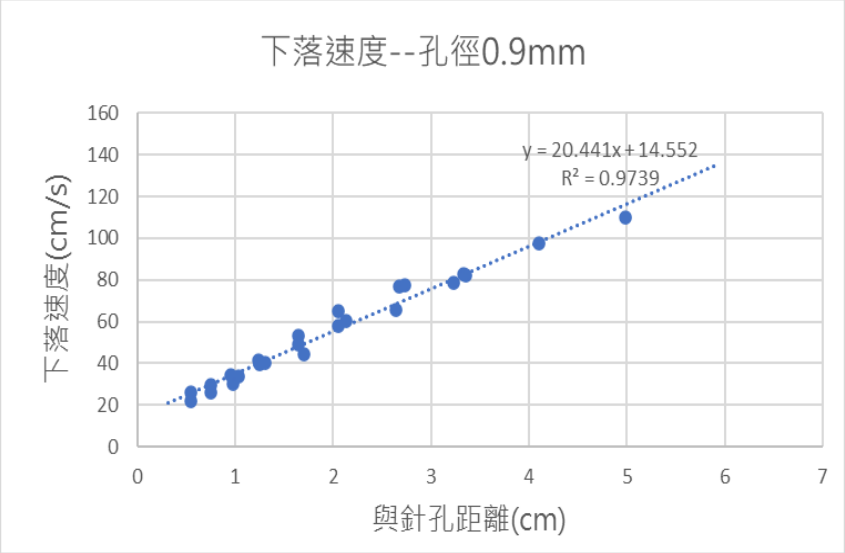
圖(六)水柱速度測量(作者自行拍攝)

由等加速度之下落速度與距離關係式 $v^2 = {v_0}^2 + 2gH$ ，我們將下落速度平方後與下落距離製成以下圖表



圖(七)孔徑 0.9mm 下落速度平方與水面距離散佈圖(作者自行繪製)

然而此圖表之 y 截距為負數，使得一開始水柱的下落速度不存在，顯然與我們針筒注射裝置水柱初速度不為零之結果相違背。我們認為原因應是我們的針筒注射裝置在一開始的速度無法適用於等加速度之條件推定。在考量兩者一次方關係圖線性回歸後 R^2 值仍然算高，在此我們利用兩者一次方之線性回歸方程式推算在不同高度下水柱抵達水面時的速度，如下圖所示。



圖(八)孔徑 0.9mm 下落速度與水面距離散佈圖(作者自行繪製)

六、單次注射量測量

(一) 架設、調整實驗器材至完善。

1. 用針筒吸取純水並架設在推進器上，接上塑膠軟管、針頭並固定在支架上。

2. 在針頭下方放置十毫升之量筒。

3. 架設攝影機、照明設備。

(二) 選定測量數值

1. 用 Arduino 面板設定步進馬達的推進長度 one round 分別為 50、75、100。

2. 選定針頭尺寸。

(三) 開始實驗

啟動電壓供應器驅動步進馬達，當推進十次後停止。

(四) 實驗分析

讀取量筒中的液面數值並除以十，得到平均注射量(單位:毫升/次)。

肆、研究結果

一、參數 one round 與注射量之關係

round \ 孔徑	0.84	0.9	1.32	1.6	3.48
50	0.31	0.32	0.31	0.32	0.34
75	0.49	0.52	0.51	0.51	0.51
100	0.65	0.64	0.62	0.63	0.65

表(一)不同孔徑 (單位：毫米)在不同 round 的單次注射量 (單位：毫升) (作者自行繪製)

由表格可以看到，不同的注射量主要受到參數「round」所控制，不同孔徑間的差異並不大。平均來說，one round50 的單次注射量平均為 0.32 毫升， one round75 的單次注射量平均為 0.51 毫升， one round100 的單次注射量平均為 0.64 毫升。

二、水柱下落距離與速度之關係

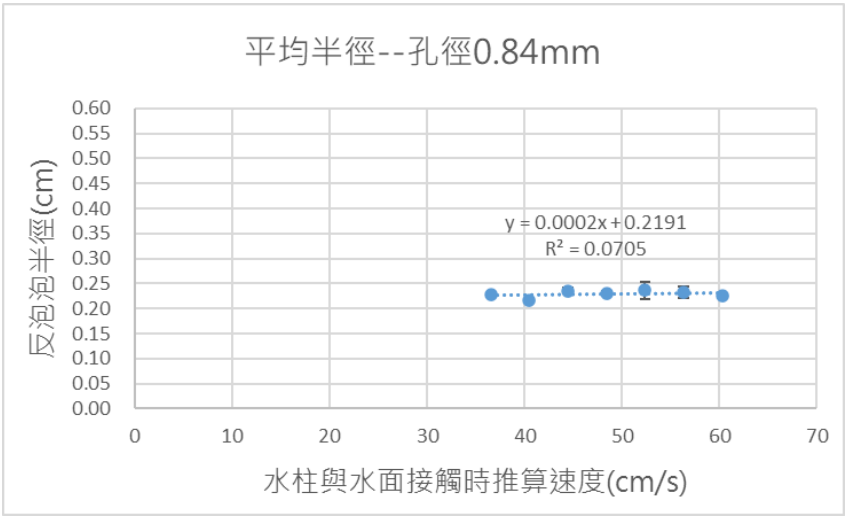
孔徑	下落距離與速度關係式	孔徑 3.48	下落距離與速度關係式
0.84	v=19.82h + 22.654	delaytime5	v=25.038h - 5.9366
0.9	v=20.44h + 14.552	delaytime4	v=19.299h + 4.608
1.32	v=18.22h + 12.863	delaytime3	v=16.224h + 12.275
1.6	v=19.79h + 14.526	delaytime2	v=12.267h + 25.05
		delaytime1	v=11.371h + 30.994

表(二)各孔徑之下落距離與速度關係式(作者自行繪製)

根據這些下落距離與速度關係式，將針頭與水面的距離代入，即可求得在該高度時當水柱落至水面時的速度，其中，v 為下落速度，h 為與針頭的距離。然而，當在使用孔徑為 3.48mm 的針頭進行注射時，發現隨著水柱下落，水柱的半徑將因為水的內聚力而明顯變小，因此並不適用於其他針頭以調整高度來改變速度的方式。於是在 3.48mm 針頭的實驗中，我們改將針頭與水面的距離固定為 1cm，藉由調整 delaytime 改變速度。在我們的實驗中，僅有 delaytime 為 1 至 5 時有反泡泡生成，詳細關係將在後面呈現。

三、反泡泡滴製結果

(一) 接觸水面速度與反泡泡半徑關係



圖(九)孔徑 0.84mm 在 one round=50 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)

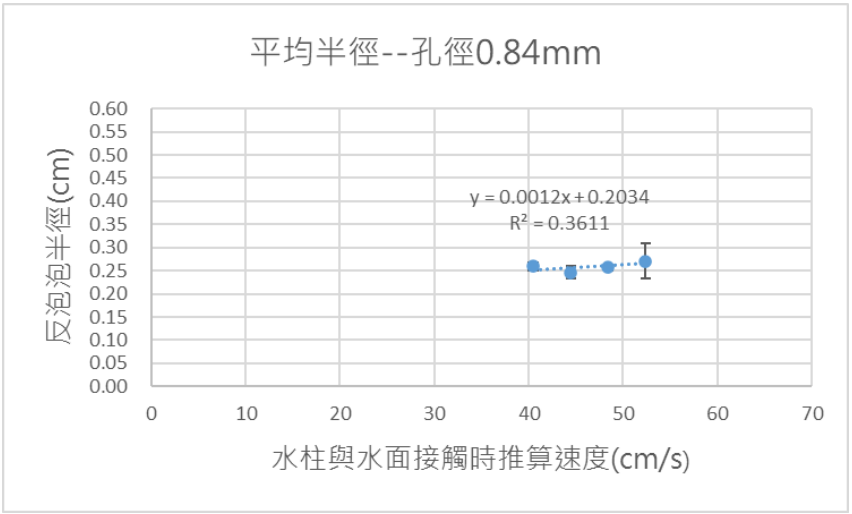
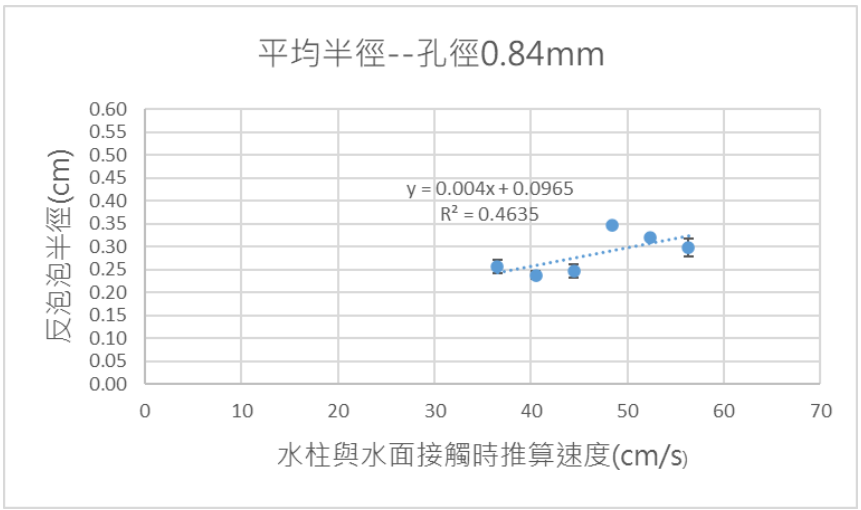
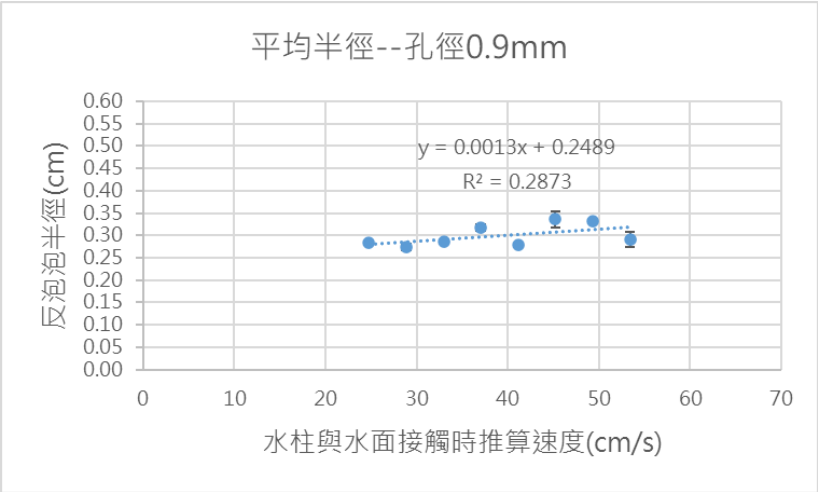


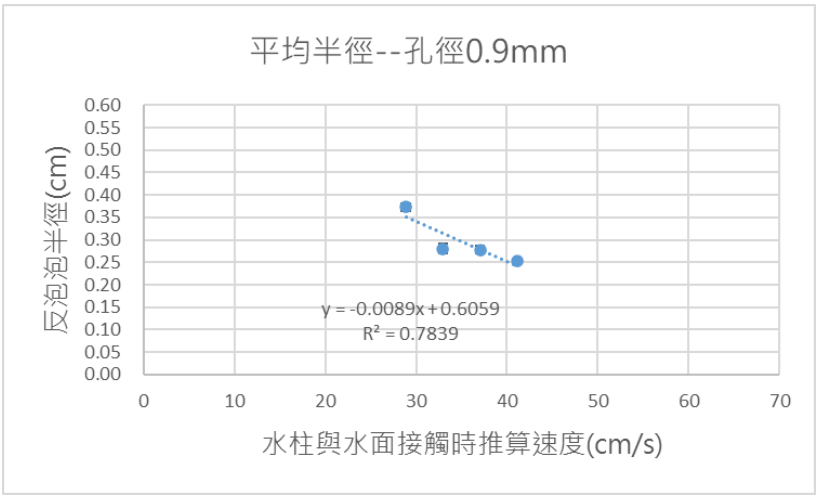
圖 (十)孔徑 0.84mm 在 one round=75 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)



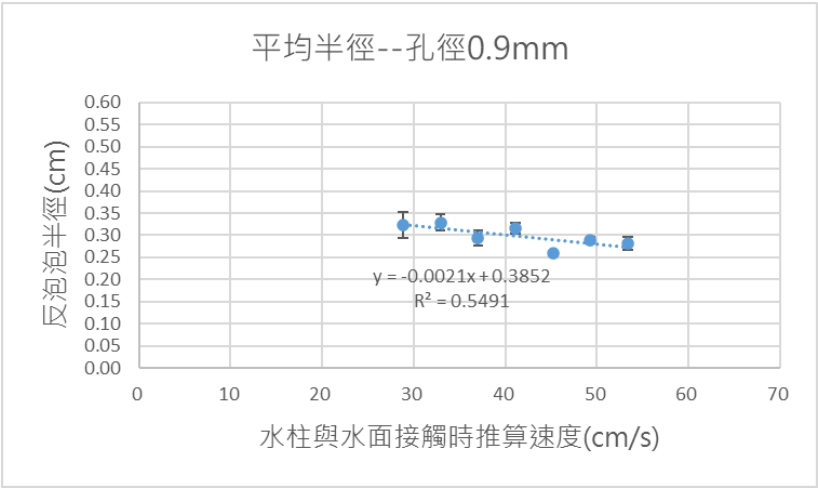
圖(十一)孔徑 0.84mm 在 one round=100 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)



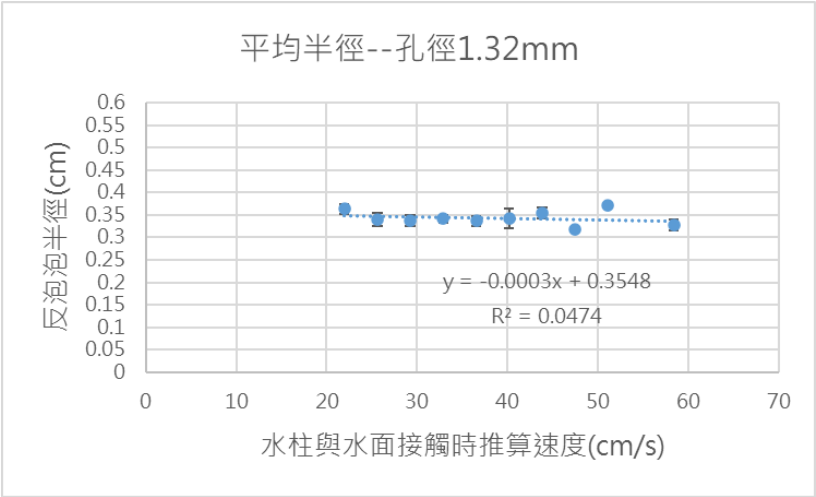
圖(十二)孔徑 0.9mm 在 one round=50 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)



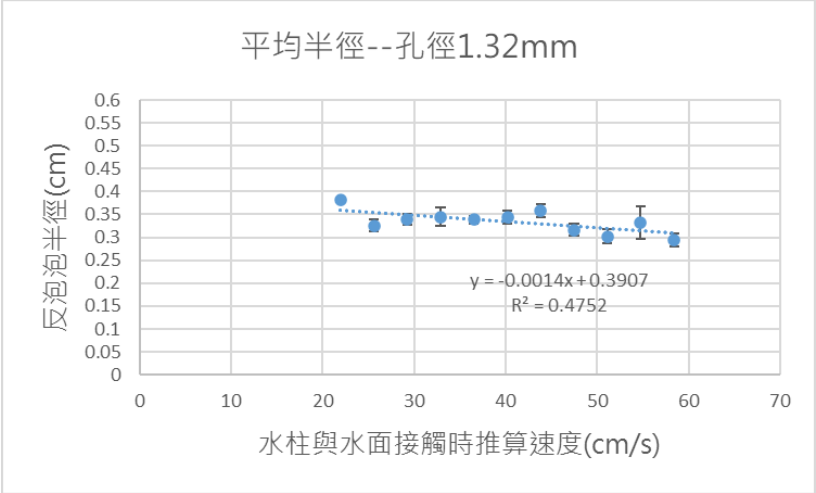
圖(十三)孔徑 0.9mm 在 one round=75 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)



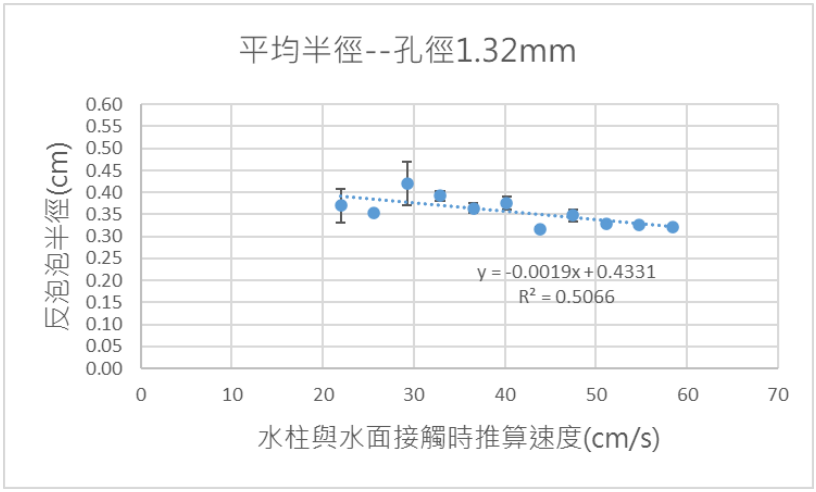
圖(十四)孔徑 0.9mm 在 one round=100 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)



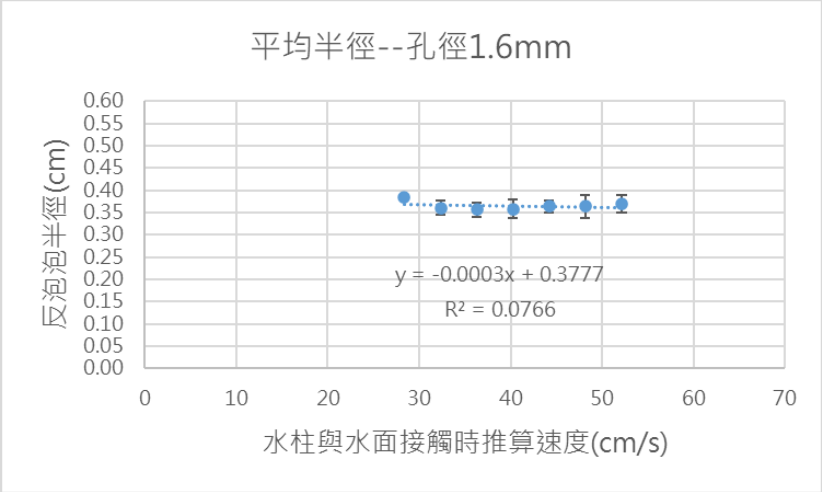
圖(十五)孔徑 1.32mm 在 one round=50 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)



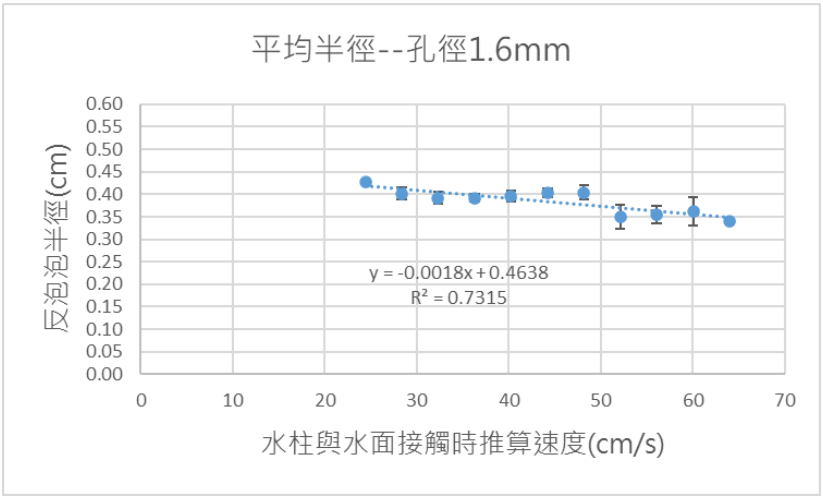
圖(十六)孔徑 1.32mm 在 one round=75 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)



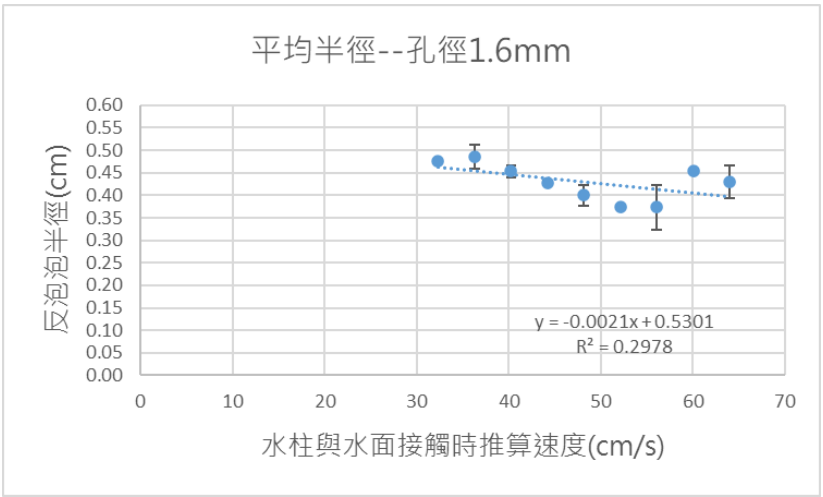
圖(十七)孔徑 1.32mm 在 one round=100 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)



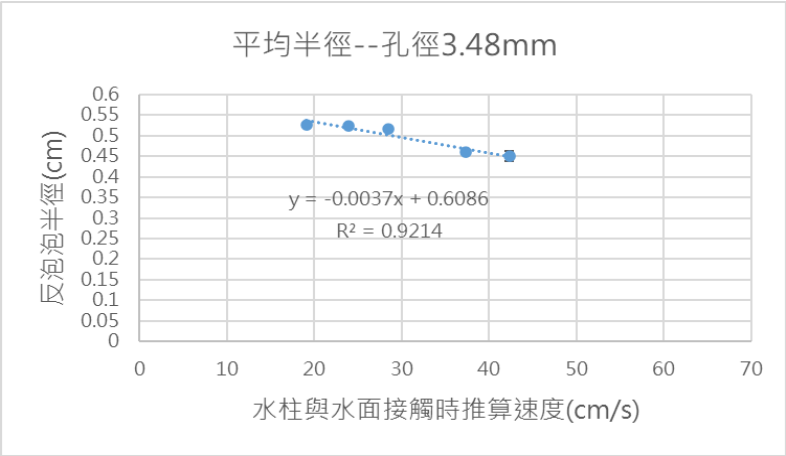
圖(十八)孔徑 1.6mm 在 one round=50 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)



圖(十九)孔徑 1.6mm 在 one round=75 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)



圖(二十)孔徑 1.6mm 在 one round=100 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)

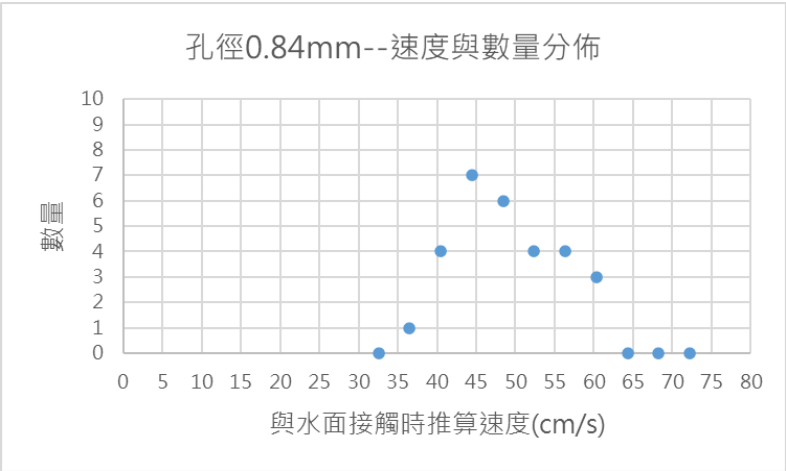


圖(二十一)孔徑 3.48mm 在 one round=100 的反泡泡平均半徑與速度散佈圖(作者自行繪製)

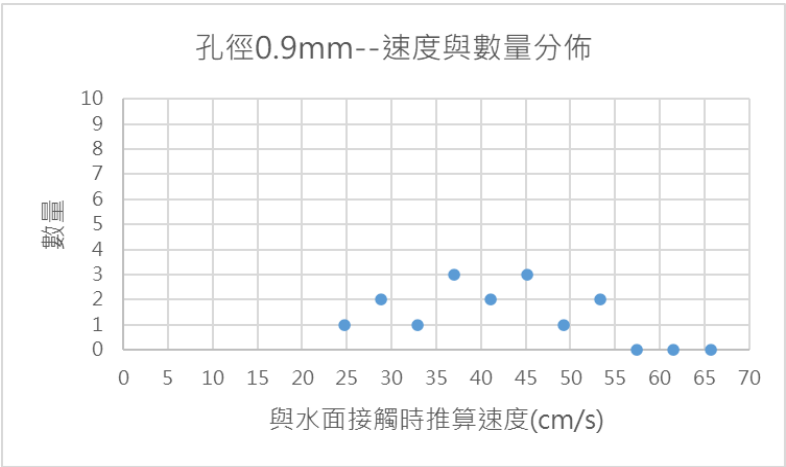
針頭孔徑為 3.48mm 在注射時，在 one round100 產生數顆，而在 one round75 僅有一顆，在 one round50 時則完全沒有產生反泡泡。因此，圖表部分僅呈現在 one round=100 時的實驗情況。

(二) 反泡泡生成的滴落速度與數量分佈

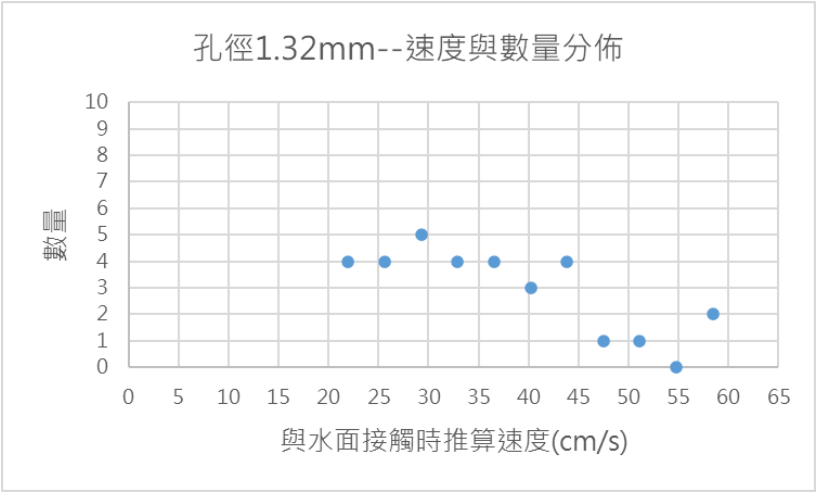
1.單次注射量平均為 0.32 毫升時(one round=50)



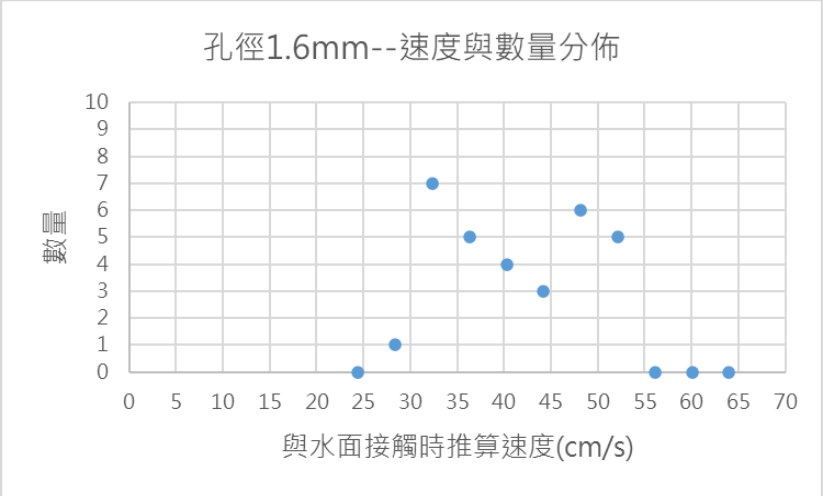
圖(二十二)孔徑 0.84mm 在 one round=50 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)



圖(二十三)孔徑 0.9mm 在 one round=50 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)

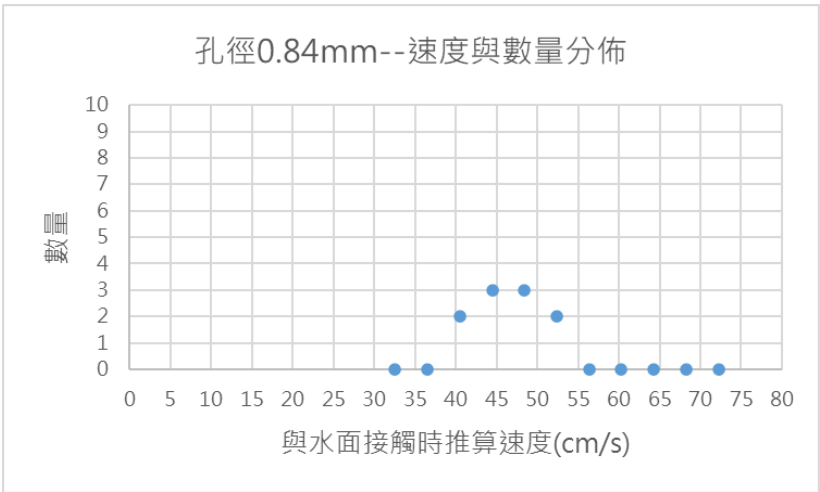


圖(二十四)孔徑 1.32mm 在 one round=50 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)

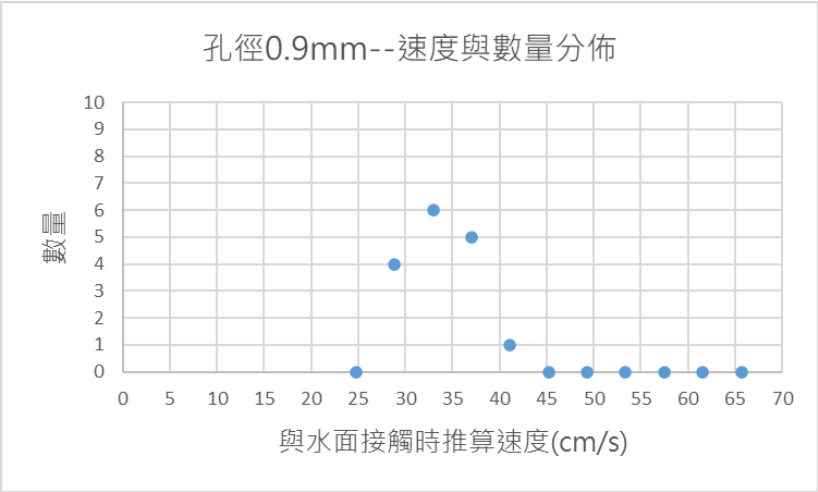


圖(二十五)孔徑 1.6mm 在 one round=50 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)

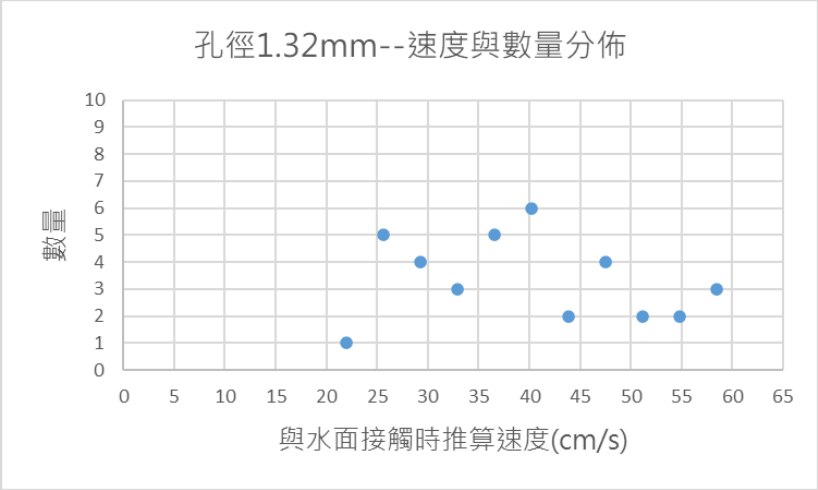
2.單次注射量平均為 0.51 毫升時(one round=75)



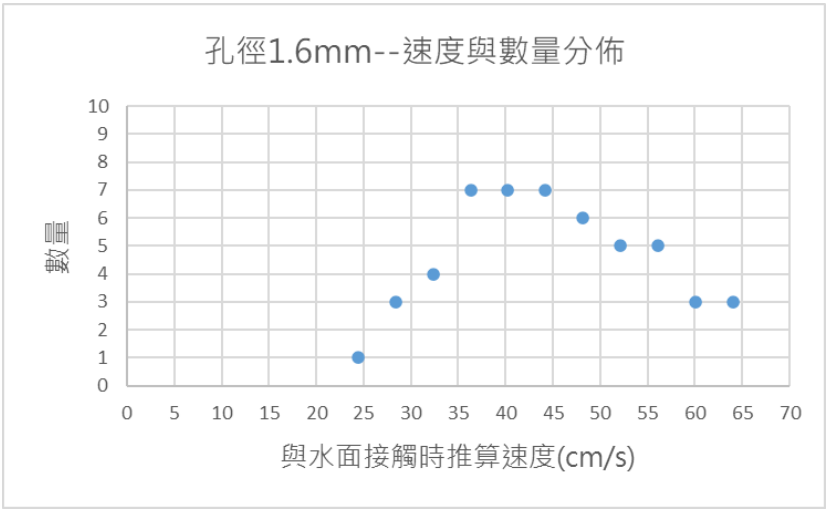
圖(二十六)孔徑 0.84mm 在 one round=75 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)



圖(二十七)孔徑 0.9mm 在 one round=75 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)

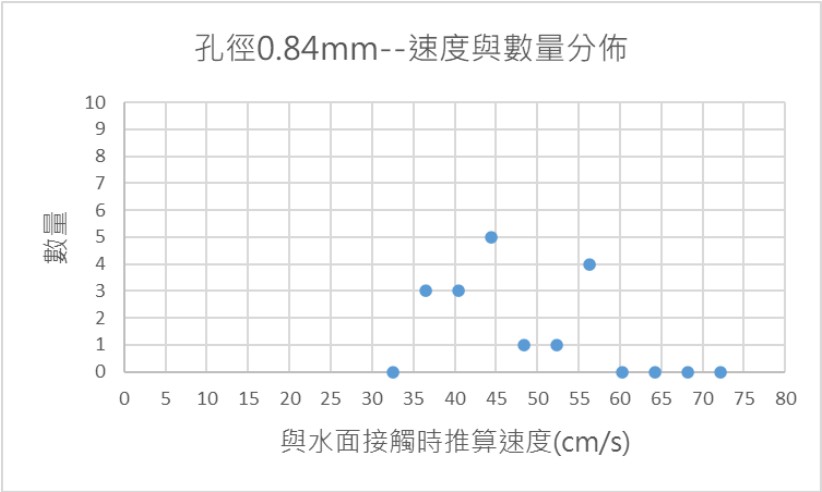


圖(二十八)孔徑 1.32mm 在 one round=75 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)

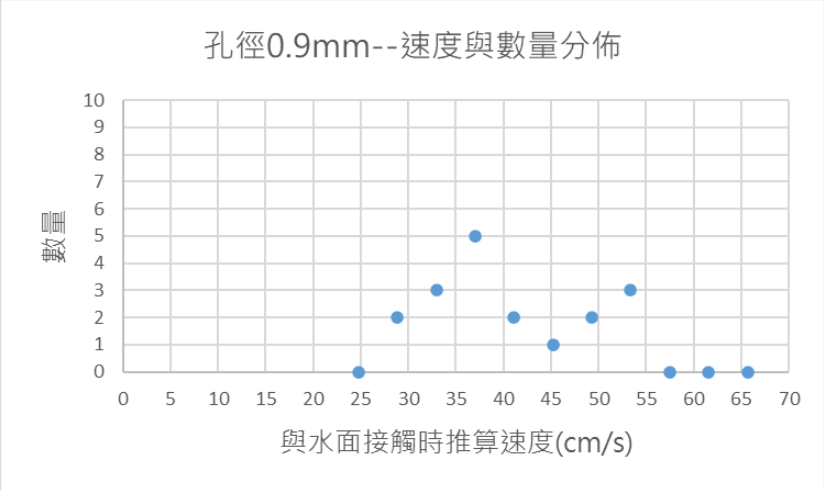


圖(二十九)孔徑 1.6mm 在 one round=75 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)

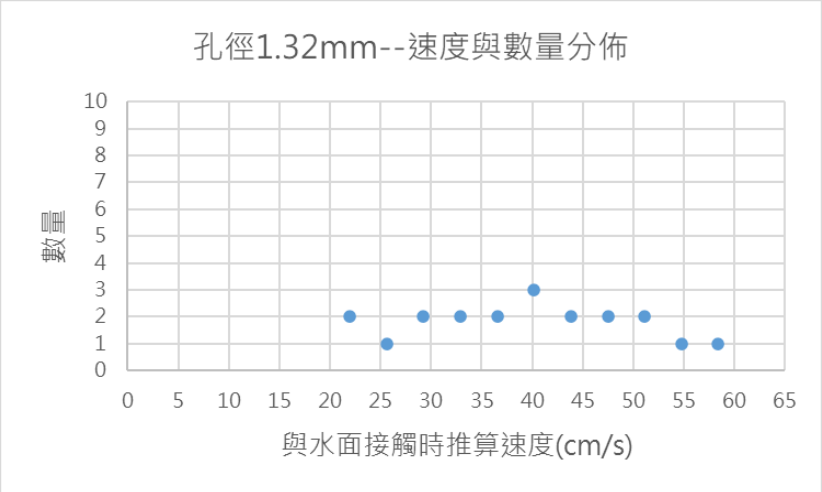
3.單次注射量平均為 0.64 毫升時(one round=100)



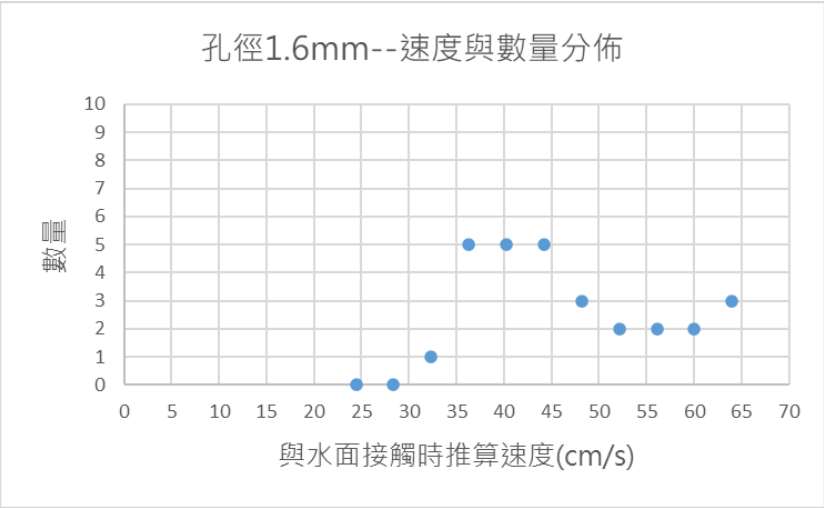
圖(三十)孔徑 0.84mm 在 one round=100 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)



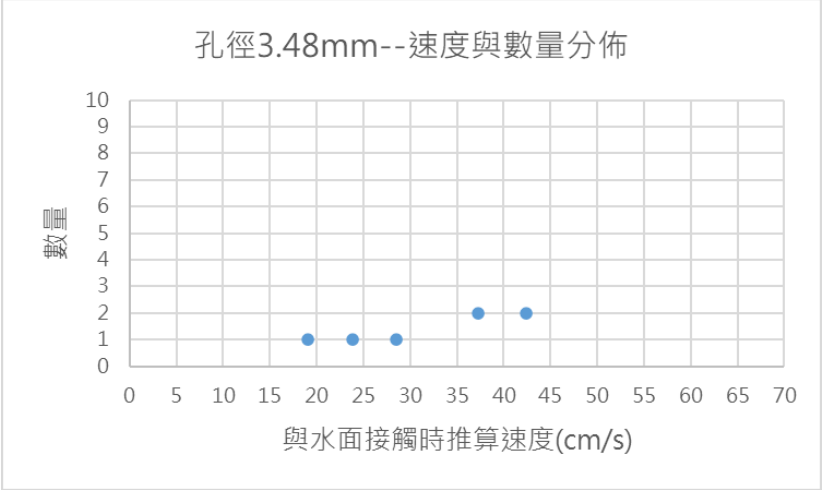
圖(三十一)孔徑 0.9mm 在 one round=100 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)



圖(三十二)孔徑 1.32mm 在 one round=100 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)



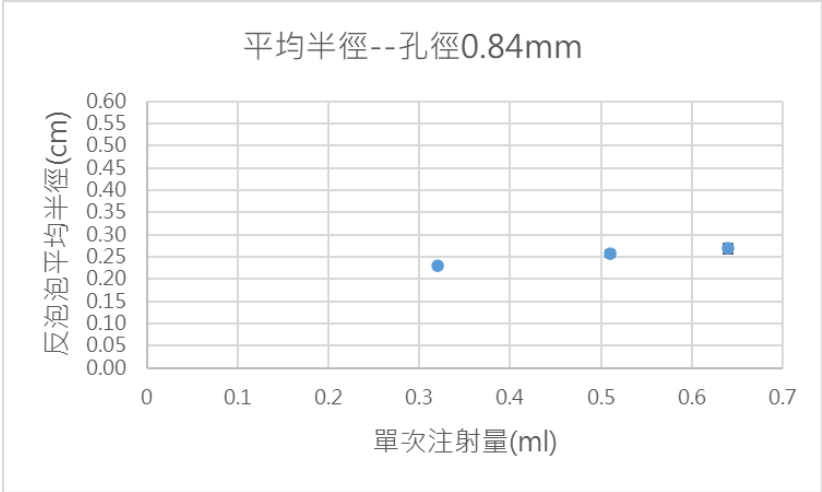
圖(三十三)孔徑 1.6mm 在 one round=100 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)



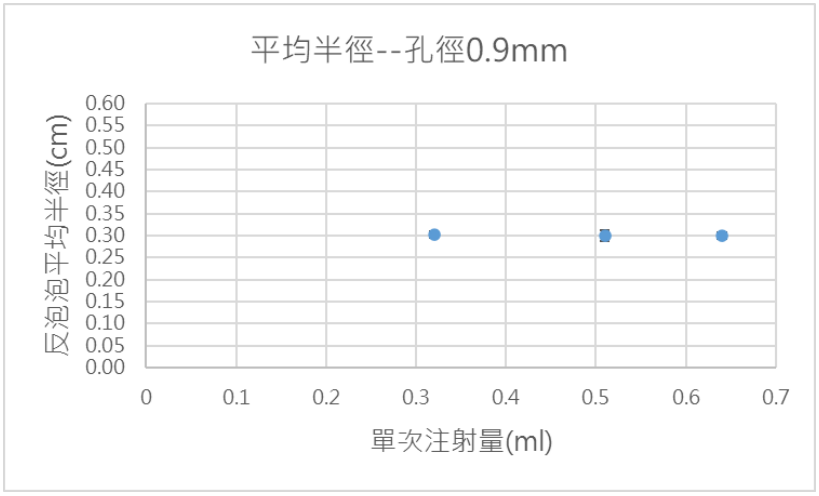
圖(三十四)孔徑 3.48mm 在 one round=100 時反泡泡數量對速度散佈圖(作者自行繪製)

(三) 不同注射量對反泡泡大小的影響

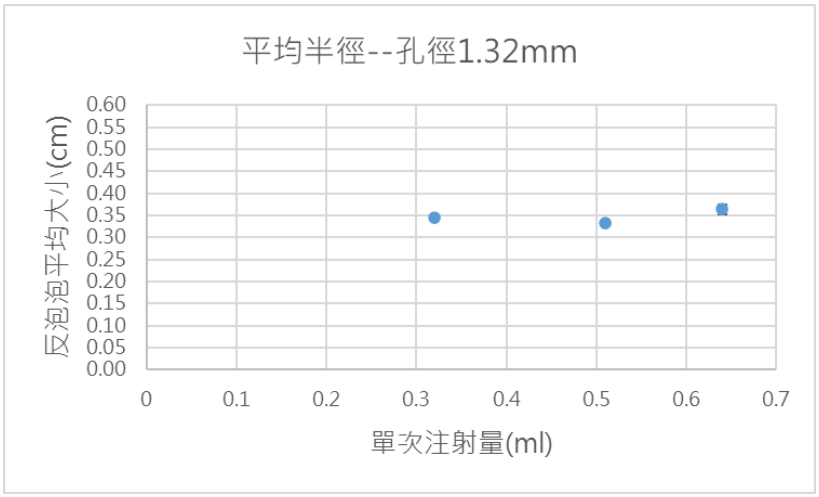
將同一孔徑，各個注射量所生成的反泡泡半徑取平均，得到下列圖表。



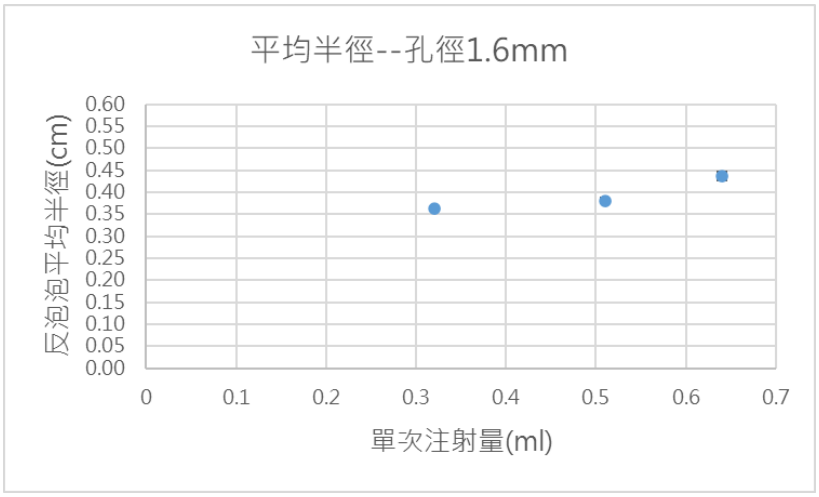
圖(三十五)孔徑 0.84mm 在不同注射量下反泡泡平均半徑之散佈圖(作者自行繪製)



圖(三十六)孔徑 0.9mm 在不同注射量下反泡泡平均半徑之散佈圖(作者自行繪製)



圖(三十七)孔徑 1.32mm 在不同注射量下反泡泡平均半徑之散佈圖(作者自行繪製)



圖(三十八)孔徑 1.6mm 在不同注射量下反泡泡平均半徑之散佈圖(作者自行繪製)

(四) 不同情況下生成反泡泡的最佳滴落速度

對於每個孔徑與每種注射量，選取生成數量最多的反泡泡滴落速度，作為本實驗的最佳生成速度，如果出現生成最多的有 2 個以上的速度，則取平均值。

注射量 \ 孔徑	0.84	0.9	1.32	1.6	3.48
0.32	44.460	41.126	29.261	32.340	無資料
0.51	46.443	32.949	40.193	40.257	39.841
0.64	44.460	37.037	40.193	40.257	42.365

表(三)在不同孔徑、不同注射量下所能生成反泡泡的最佳速度(作者自行繪製)

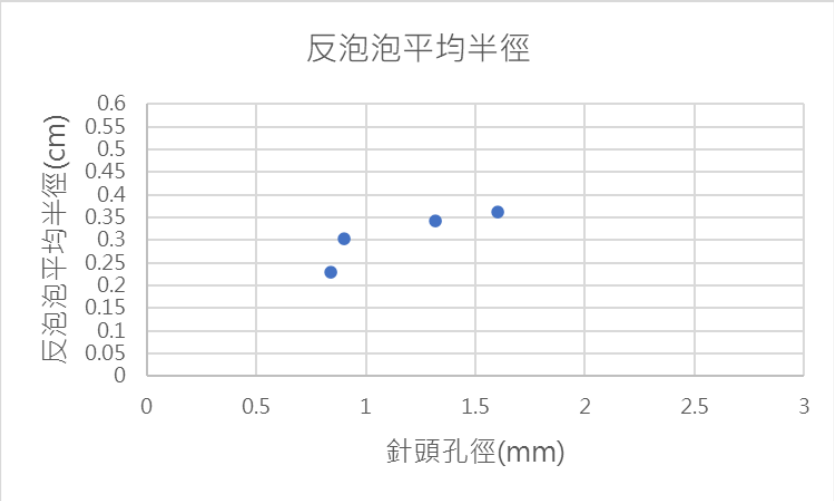
(五) 孔徑與生成反泡泡大小的關係

在使用 3.48mm 的針頭時，我們發現水柱在距離針頭 1cm 處時的直徑仍然與 3.48mm 有些差距，我們認為採用在水柱下落 1cm 的直徑來表示水柱直徑較為適切。因此，我們在測量水柱下落速度的影片中，再測量了孔徑為 3.48mm 時不同 delaytime 下水柱下落 1cm 後的直徑，每個 delaytime 測量三次。

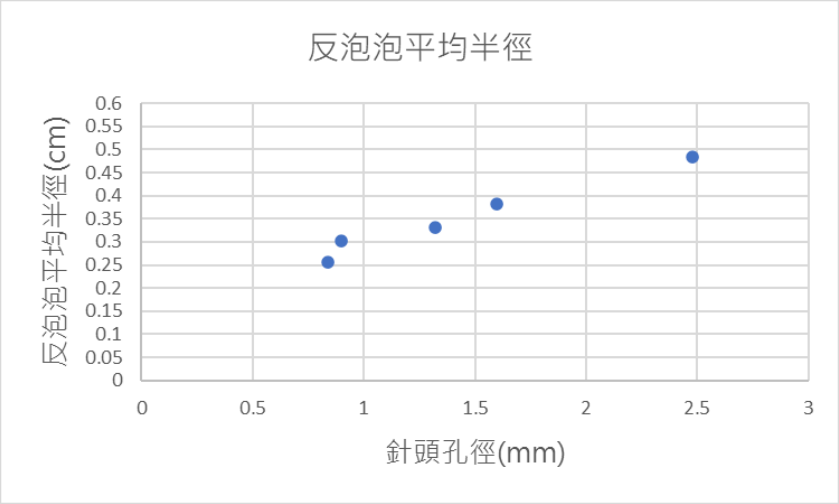
	delay5	dejay4	delay3	delay2	delay1
第一次	0.226	0.231	0.252	0.262	0.261
第二次	0.236	0.227	0.247	0.261	0.263
第三次	0.228	0.239	0.263	0.256	0.269
平均	0.230	0.232	0.254	0.260	0.264

表(四)在孔徑 3.48mm、不同 delaytime 下水柱下落 1cm 後的直徑(單位 : cm) (作者自行繪製)

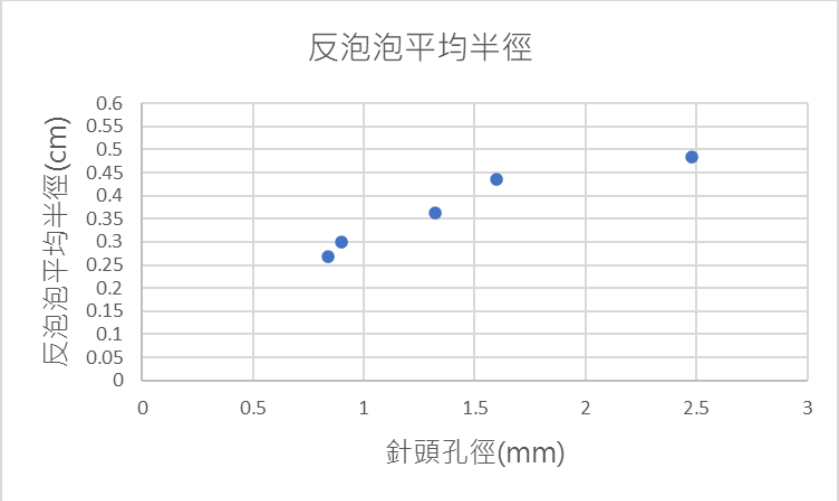
我們將孔徑 3.48mm 的水柱直徑以以上 5 個 delaytime 的平均水柱直徑取平均來表示，並和其他孔徑生成反泡泡的平均半徑作圖後得到下列圖表：



圖(三十九) one round=50 時不同孔徑下反泡泡平均半徑之散佈圖(作者自行繪製)



圖(四十) one round=75 時不同孔徑下反泡泡平均半徑之散佈圖(作者自行繪製)



圖(四十一) one round=100 時不同孔徑下反泡泡平均半徑之散佈圖(作者自行繪製)

伍、討論

一、速度與反泡泡大小的關係

由圖(六)至圖(十八)可觀察出，不同滴落速度下在同一孔徑和注射量時，許多反泡泡半徑的分佈似乎接近水平線。為了進一步確認，我們計算了每張圖兩變數之間的相關係數。

孔徑 / 注射量	0.84	0.9	1.32	1.6	3.48
0.32	0.2656	0.5360	-0.2177	0.7273	無資料
0.51	0.6009	-0.8854	-0.6893	-0.8553	無資料
0.64	0.6808	-0.7410	-0.7118	-0.5457	-0.9599

表(四)在不同孔徑、不同注射量下的相關係數(作者自行繪製)

由表中我們發現，在孔徑較大以及單次注射量較多時，反泡泡的大小與速度大多呈現負相關，因此我們推論，在這樣的情況下，水柱的速度越快時所生成的反泡泡大小越小，並且此影響性會隨著注射量與水柱大小(受孔徑影響)而有所變化。

二、反泡泡數量分布

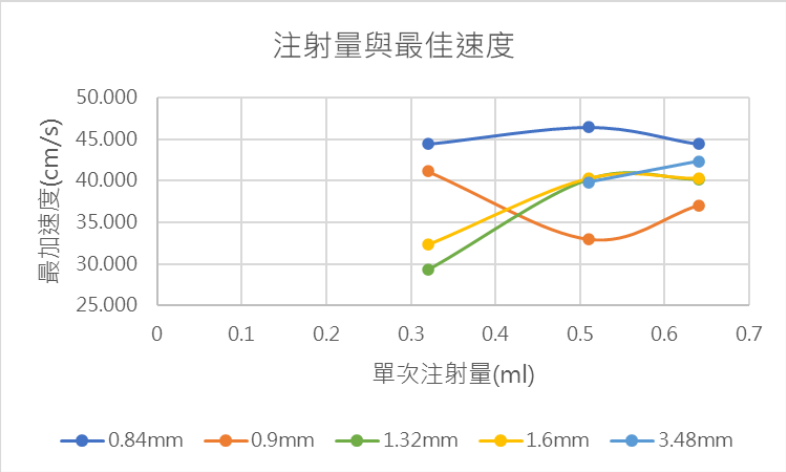
從圖(二十二)至圖(三十四)，我們大致觀察到了以下兩點：

1. 速度與數量分佈隨著單次注射量不同，會有不同的樣態，似乎不同的孔徑，在某個特定的注射量下，就會出現有特定速度生成數特別多的單峰分布。這部分也可得到　與作者研究文獻的相同結果，意即具有反泡泡的最佳生成速度。
2. 這樣的單峰分佈在我們的實驗結果中，似乎在較小孔徑的實驗結果較為明顯(孔徑為 0.84mm 和 0.9mm)，如圖(二十二)、(二十六)、(二十七)。

然而，在我們的實驗中，單一孔徑在其中一個注射量中，我們僅注射十次，與作者實驗所滴的次數相差甚遠，這或許也是為什麼有些圖我們沒有辦法看出明顯的峰值分布。

三、單次注射量對最佳速度的影響

將圖(二十二)至圖(三十四)進行統整後，我們得出以下散佈圖(圖四十二)：



圖(四十二)不同孔徑之注射量與最佳生成速度關係圖(作者自行繪製)

此處由於某些數據點有接近重疊的現象，因此我們在同一孔徑數據點之間加入平滑曲線以方便判讀。

由圖(四十二)可以分析得知：

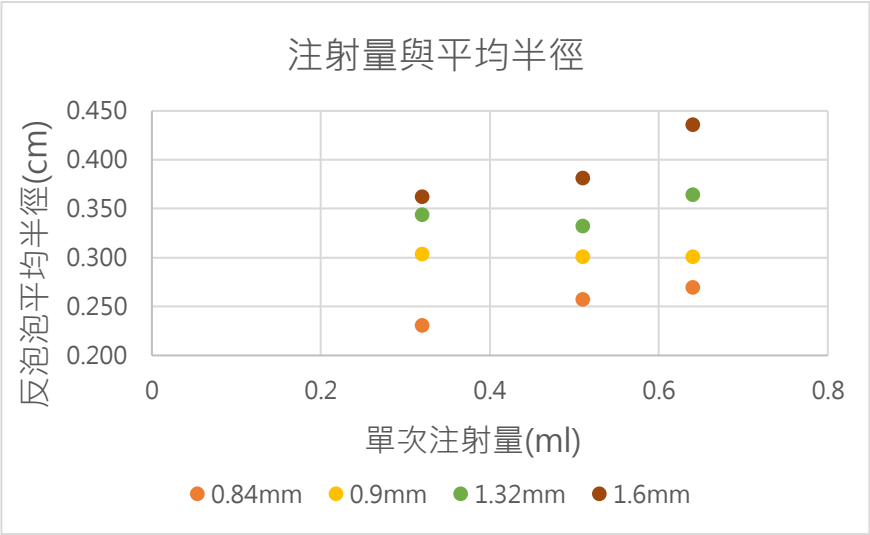
1. 注射量對孔徑 0.84 mm 之最佳速度並無明顯影響。
2. 注射量對孔徑 0.9mm 之最佳速度大致呈負相關。
3. 注射量對孔徑 1.32、1.6、3.48 mm 之最佳速度最明顯也最接近正相關。

綜合以上三點，可以知道孔徑在 0.9、0.84 mm 時，隨著注射量增大，最佳速度並不會明顯因此提升；而在孔徑 1.32、1.6、3.48 mm 時，隨著注射量增大，最佳速度皆有上升的

趨勢。因此，我們推測在孔徑較大的反泡泡生成中，越大的注射量就以越大的速度進行注射，可能能夠提升生成成功率。

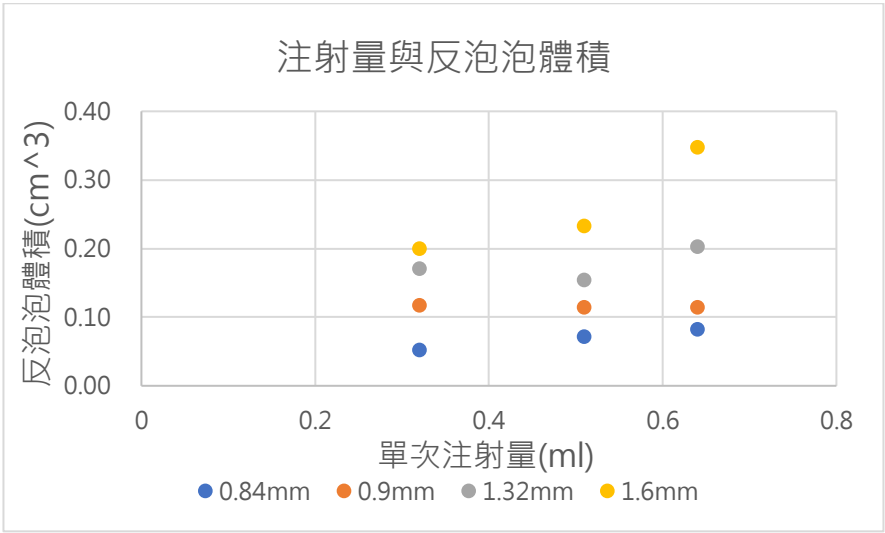
四、單次注射量對反泡泡大小的影響

將圖(三十五)至圖(三十八)進行疊圖後可得以下圖表



圖(四十三) 反泡泡平均半徑與不同孔徑之注射量關係圖(作者自行繪製)

由圖中可得，在孔徑為 1.6mm 和 0.84mm 時，反泡泡的平均半徑明顯地隨著注射液體量上升而上升，其中又以 1.6mm 的半徑增幅最為明顯。而其餘 2 個所得到的平均半徑並無明顯變化。將平均半徑利用球體體積公式計算後，再和注射量作圖後可得以下圖表：



圖(四十四)反泡泡體積與不同孔徑之注射量關係圖(作者自行繪製)

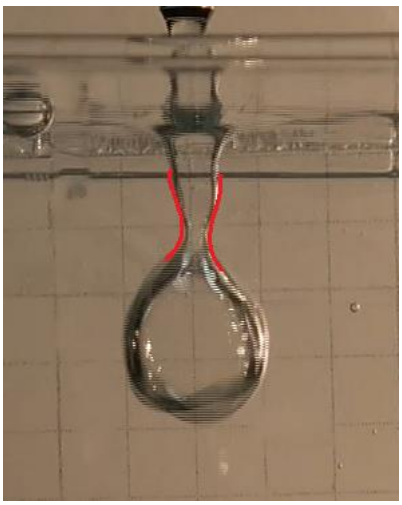
從上圖中更可以看出，1.6mm 所生成的反泡泡體積增幅明顯多於其餘三者，在單次注射量為 0.64ml 時的體積更高達 0.347 立方公分。因此根據此結果，我們推測在不同孔徑之間，所生成的反泡泡體積具有一定的上限，當體積已經達到或接近上限時，增加注射量也無法使反泡泡的體積明顯提升。

五、不同孔徑對反泡泡大小的影響

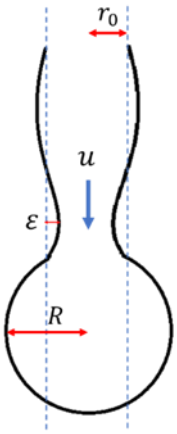
由圖(三十八)至圖(四十)明顯可看出反泡泡的半徑和孔徑呈現正相關。當水柱落下至液面後，我們觀察到，在大多數的情況下，此時的反泡泡尚未完全形成，而是一團由落下水柱累積的液體連接著上方的液柱。如圖(四十四)所示：

圖(四十五)液柱下落至水面形成反泡泡過程(作者自行拍攝)

與原文獻不同之處在於我們使用的為持續注射的液柱，我們發現在這些累積液體下落一段時間後，液柱會被夾斷。我們推測此夾斷現象應為普拉托-瑞利不穩定性(Plateau－Rayleigh instability)所造成。此現象解釋了當一根細長液柱受到擾動表面張力影響時，會發生夾斷分離的現象。如同累積液體上方的液柱與累積液體分離而形成反泡泡。



圖(四十六)(左)反泡泡形成過程圖(作者自行拍攝)

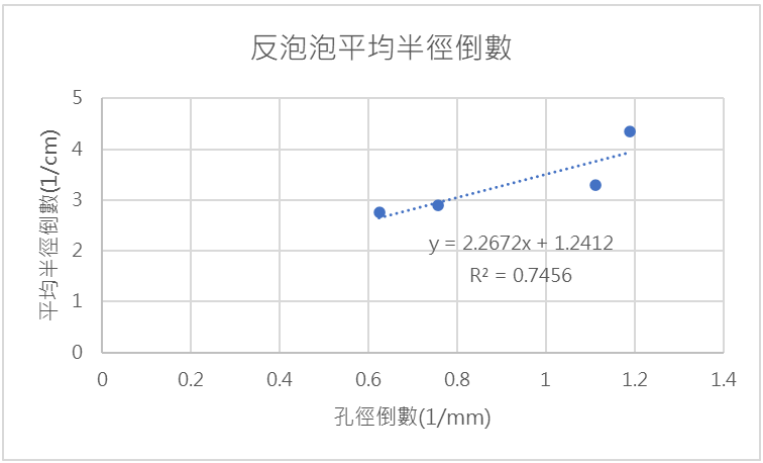


圖(四十七)(右)反泡泡夾斷模型假設示意圖(作者自行繪製)

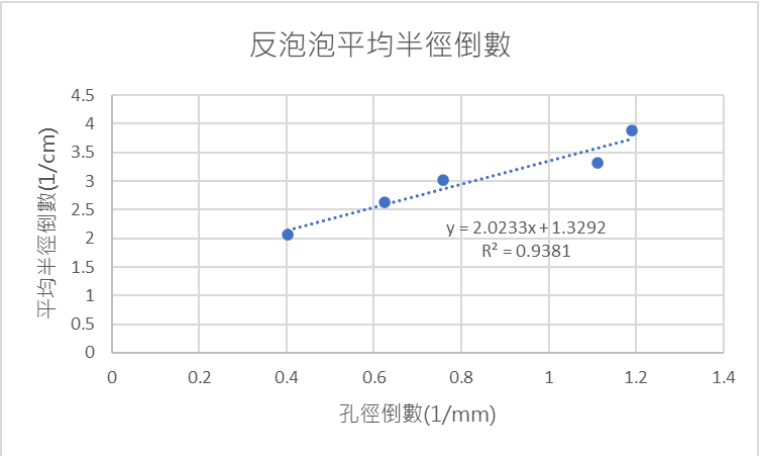
在此一現象中，我們會發現細長水柱在快要被夾斷時產生波浪狀的輪廓，而我們在反泡泡的生成中也有看到類似現象。我們推測，在這樣的情況之下，不同水柱孔徑下，反泡泡夾斷的條件可能和累積液體和上方水柱兩者所構成的幾何形狀有關。

(其中 r_0為液柱半徑、ε為擾動波振幅、R 為下方液體半徑 (假設為球體)、u 為內部液體向下流動的速度)

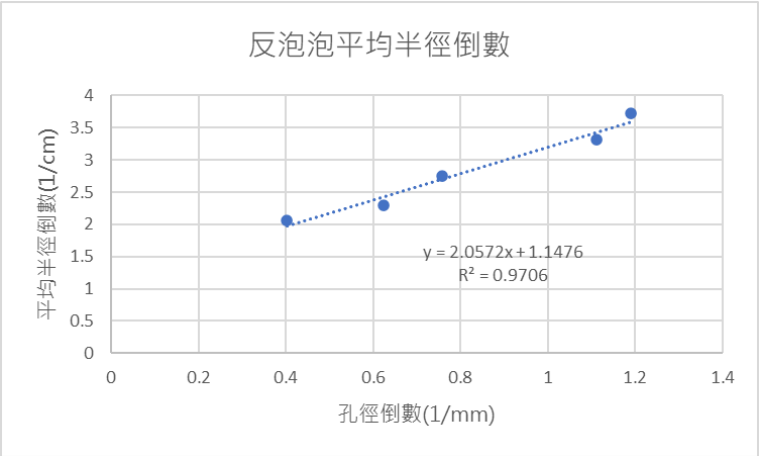
我們考慮水柱與反泡泡之間最細處，將側面輪廓圖形假設為一個正弦函數，假定波長為 λ ，振幅為 ε ，則可以假設為：$y = \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ 其中 x 軸正向極為水柱下落方向。最細處即為波峰處。由函數曲率半徑的公式 $R = \frac{(1+y')^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$ ，可以得到側面最細處的曲率半徑為 $\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon}$ 。而此處的水柱半徑為$r_0 - \varepsilon$。對於此處的壓力分析，可以分為下方液體膜表面張力造成的壓力、水流所造成的壓力以及側面輪廓因表面張力所產生的壓力。由楊-拉普拉斯公式 $\Delta P = \gamma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ ，其中γ為表面張力、R_1 、R_2 為主曲率半徑，我們可以得到此時側面輪廓因表面張力所產生的壓力為 $\gamma(\frac{1}{r_0-\varepsilon} - \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda^2})$ 。在內部考慮下方累積的液體與水流所造成的壓力，其中我們將下方液體近似為球體，則因表面張力所產生的壓力為 $\gamma(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}) = \frac{2\gamma}{R}$ 。若可以發生夾斷現象，外部壓力應大於等於內部壓力。因此，考慮等於的情況作為條件，則可得：$\gamma(\frac{1}{r_0-\varepsilon} - \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda^2}) = \frac{2\gamma}{R} + P_{水流}$ 。考慮振幅ε和水柱半徑尺度有關，我們在此假設$\varepsilon = mr_0$。以及，在前人學者的文獻中，得到當$\lambda = 9.02\, r_0$ 時擾動成長最明顯，我們將此結果代入可得到 $\frac{1}{r_0} = \frac{K}{R} + b$ 的形式，其中 K 和為r_0 與 R 以外的數值。我們將我們的實驗結果與此結合，將孔徑倒數與對應的反泡泡平均半徑倒數作圖後可得到下列三張圖表：



圖(四十八) 平均注射量 0.32ml 平均半徑倒數與不同孔徑倒數關係圖(作者自行繪製)

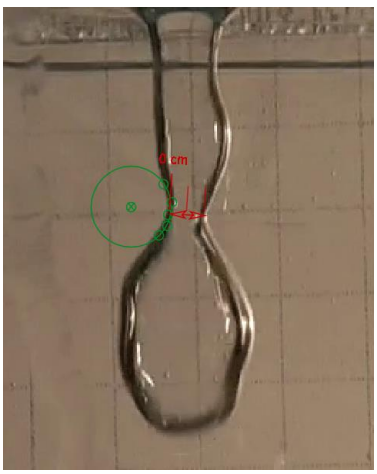


圖(四十九) 平均注射量 0.51ml 平均半徑倒數與不同孔徑倒數關係圖(作者自行繪製)



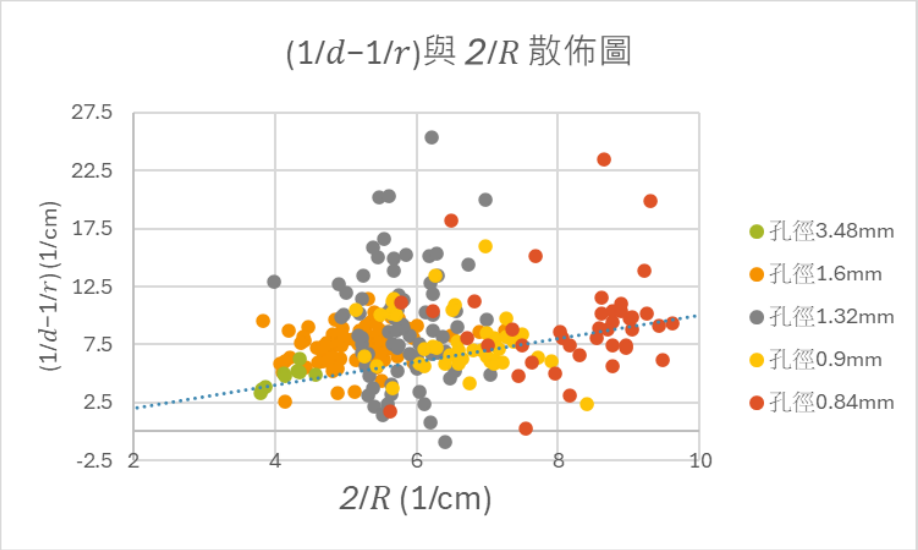
圖(五十) 平均注射量 0.64ml 平均半徑倒數與不同孔徑倒數關係圖(作者自行繪製)

由以上三圖發現，在注射量 0.51 與 0.64ml 的圖表中，線性回歸的效果良好，R^2 值均在 0.9 以上，然而在注射量 0.32ml 的圖表中，處理後的數據點似乎和直線仍有一些差距，為了進一步確認我們的假設，我們利用 tracker 分析反泡泡的生成在水柱斷裂前 1 至 2 幀的側面曲率與水柱最細處直徑，如下圖所示：



圖(五十一) 利用 tracker 測量水柱最細處直徑與側面曲率半徑(作者自行拍攝)

令最細處水柱半徑為 d，側面曲率半徑為 r ，我們將取得的數據計算成兩個值，分別為 $\frac{2}{R}$ (R 為反泡泡半徑) 以及 $\frac{1}{d}-\frac{1}{r}$ ，分別表示內向外的壓力與由外對內的壓力，我們將以上兩個值製成以下圖表：



圖(五十二) $(1/d-1/r)$ 與 $2/R$ 散佈圖 (藍色虛線表示兩者相等時之數據點位置)

(作者自行繪製)

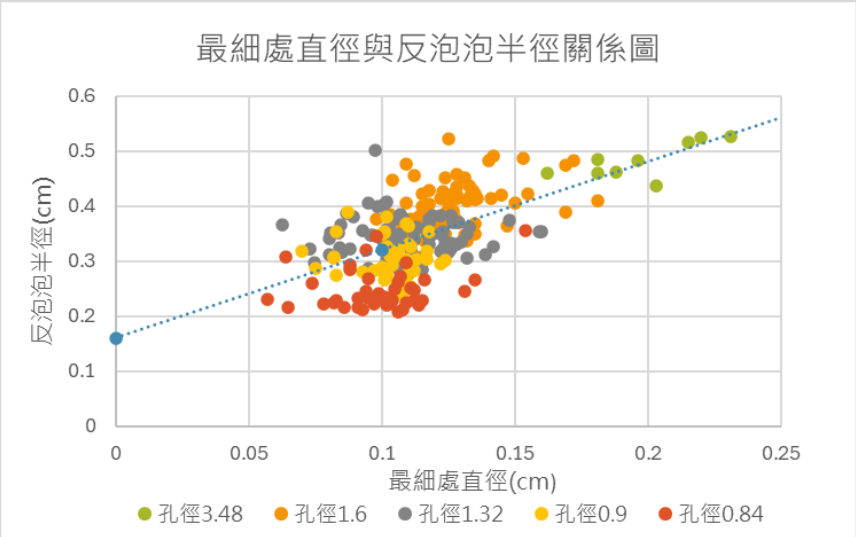
從以上圖表看出，大多數的數據點顯示由外向內的壓力大於等於由內向外的壓力，符合我們的假設。然而，並非如我們的預期，有許多的數據點並非落在兩者相等的位置。很可能是因為當我們取反泡泡上方水柱即將斷裂之時的形狀時，外部向內的壓力早已大於等於內部向外的壓力。使得所得到的結果與我們的假設相異。此外，在我們的分析過程中，也發現並非所有的反泡泡在其生成過程中水柱側邊都有明顯的波紋，有些的反泡泡在生成過程時左右搖擺，而非垂直下落。

我們發現，在孔徑較大，速度較慢時所生成的反泡泡較有可能具有波浪狀側面的結構。如下圖所示：

圖(五十三) (左) 具有波浪狀輪廓的反泡泡生成 (作者自行拍攝)

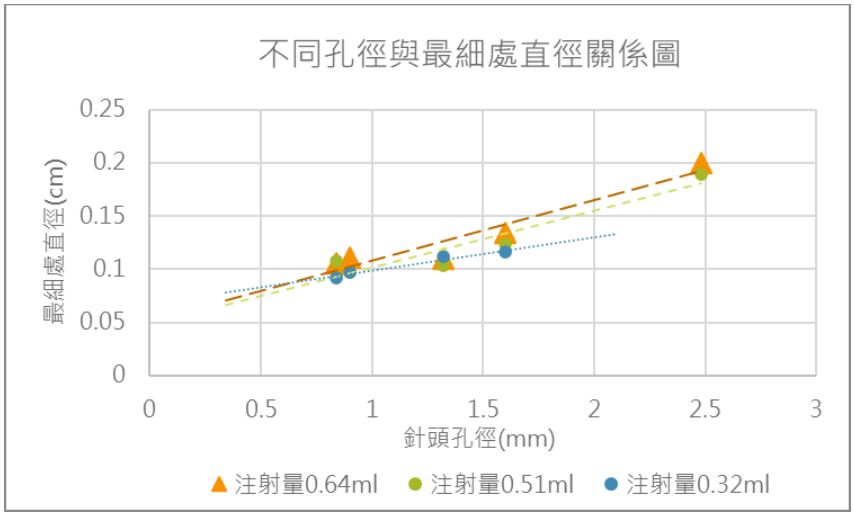
圖(五十四) (右) 左右搖擺的反泡泡生成 (作者自行拍攝)

除了普拉托-瑞利不穩定性之外，實際上可能存在其他因素驅動水柱斷裂而形成反泡泡。雖然此一分析說明了我們的假設是有瑕疵的，然而我們發現和孔徑大小可能有關係的最細處直徑和反泡泡半徑有較為一致的趨勢，我們將不同最細處直徑與所生成的反泡泡半徑製成圖表，如下圖所示：



圖(五十五)反泡泡半徑與最細處直徑散佈圖(作者自行繪製)

以及，我們將不同注射量下不同孔徑與其所對應的平均最細處直徑製成以下圖表：



圖(五十六) 最細處直徑與針頭孔徑散佈圖(作者自行繪製)

由以上二圖我們可以發現，孔徑和最細處直徑在不同注射量下均接近線性關係(依注射量由大至小，線性回歸 R^2 值依序為 0.9172、0.8926、0.9569)。並且由圖(五十五)看出最細處直徑和反泡泡半徑之間大致上可能存在著線性關係，在這裡我們推定反泡泡半徑也可能和孔徑之間有著線性關係。

陸、結論

一、由相關係數分析推測，在孔徑或注射量較大時，水柱的速度越快，所生成的反泡泡大小越小，並且此影響性可能會隨著注射量與水柱大小(受孔徑影響)而有所變化。

二、從速度對反泡泡成功數量圖看出，不同速度與反泡泡生成的成功數目應具有峰值，呈現單峰分佈，反映了在生成反泡泡時最適速度的存在。其中又以在較小孔徑(0.84mm 和 0.9mm)下明顯具有這樣的特徵。

三、在孔徑較大的反泡泡生成中，越大的注射量若以越大的速度進行注射，可能較容易生成，然而在不同孔徑之間的最佳速度我們並沒有觀察到較一致的趨勢。

四、在不同孔徑之間，所生成的反泡泡體積具有一定的上限，當體積已經達到或接近上限時，增加注射量也無法使反泡泡的體積明顯提升。

五、從反泡泡形成時的形狀、壓力分析與數據點的擬合，我們推測反泡泡半徑倒數和孔徑倒數應呈線性關係，然而，在實際圖形分析中，發現反泡泡水柱夾斷可能存在不只一種因素，原假設可能存在瑕疵。並且在圖形曲率半徑測量時所取的影片幀數未考量到當下內外壓力關係。而我們在此推測兩者可能存在線性關係或者其倒數存在線性關係。

柒、未來展望

一、我們實驗的數據量可能需要更多組數據以增加實驗結果的精確度。

二、除了最常見的空氣包裹液體這樣子的反泡泡之外，也許可以嘗試將中間的空氣層替換成其他液體，並研究這些液體的特性如何影響反泡泡。

三、使用反泡泡包裹不同的物質，未來可能可應用在人體中進行精準的藥物投遞。

四、利用反泡泡包裹食物、營養物質，使之不易腐敗，更容易保存。

五、我們的研究大致找到了一些影響反泡泡的因素，或許這部分對於定量液體的包裝與儲存有幫助

六、對於反泡泡形成時水柱的夾斷機制可以進一步做研究，例如水柱即將夾斷處之半徑隨時間的變化。或者下方累積液體量隨著時間的變化等。也許有望找出更明確地水柱半徑與反泡泡大小之間的數學關係。

捌、參考文獻資料

[1] P. G. Kim 、 H. A. Stone，2008。Dynamics of the formation of antibubbles。EPL, 83 (2008) 5401。

[2] 李夢筑、黃晴（2006）。泡泡造反了－反泡泡之形成、存活與破滅之物理特性探討。中華民國第四十六屆中小學科學展覽會作品說明書

[3] 林煒翔（2021）。反泡泡空氣層厚度測量之探究。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會作品說明書。

[4] Song, Y., Zhang, L., & Wang, E. N. (2020). Criteria for antibubble formation from drop pairs impinging on a free surface. *Physical Review Fluids, 5*(12), 123601.

[5] Bush, J. W. M. (2004, May). *MIT lecture notes on surface tension: Lecture 5* (PDF). Massac husetts Institute of Technology.

[6] 譚詠心、 洪紜家、吳昇峰 (2013). 是誰掐斷了水柱：自由落體水柱的雷利不穩定性研究. 中華民國第 53 屆中小學科學展覽會作品說明書,

[7] Zia, R., Nazir, A., Poortinga, A. T., & van Nostrum, C. F. (2022). Advances in antibubble formation and potential applications. *Advances in Colloid and Interface Science, 305*, 102688.

[8] 網路影片：https://youtu.be/UHa-OKb_CiM

[9] 網路影片：https://www.youtube.com/watch?v=GyEa5MPJw_A

[10] 網站資料：https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%9B%B2%E7%8E%87%E5%8D%8A%E5%BE%84

[11] excel 軟體圖片：
https://play.google.com/store/apps/details/Microsoft_Excel_View_Edit_Create_Spreadsheets?id=com.microsoft.office.excel&hl=zh_HK

[12] tracker 軟體圖片：https://physcourse.thu.edu.tw/~mengwen/fig/exp500-tracker-01.png

[13] Arduino 軟體圖片：
https://static.wixstatic.com/media/77ef90_97920cec3f0941ea9fac54b0ce4349cb~mv2.png/v1/fill/w_568,h_386,al_c,q_85,usm_0.66_1.00_0.01,enc_avif,quality_auto/77ef90_97920cec3f0941ea9fac54b0ce4349cb~mv2.png

【評語】051813

以噴射出泡泡水柱，在水中製造反泡泡，探討反泡泡生成的物理條件。以針頭孔徑、流速、注水量、針頭距水面的高度為實驗參數，攝影紀錄測量反泡泡半徑，計算可生成反泡泡的注射水量及注射速範圍。反泡泡形成的物理機制已有理解，但或許可再嘗試結合 CFD 模擬或擴展 Rayleigh 理論，以增強模型的解釋力與預測能力；增加樣本數並引入統計誤差分析（如標準差、信賴區間），有助於確認單峰分布等觀察是否具普遍性；強化圖表排版與數據視覺設計，提升科學溝通的清晰度。

作品海報

流速與孔徑對於反泡泡生成的影響

摘要

本研究透過Arduino控制步進馬達，再由步進馬達穩定推動針筒，進而噴出泡泡水柱，在水中製造反泡泡。我們控制步進馬達的推進時間，改變泡泡水的注射水量；也以針頭距水面的高度、針頭孔徑大小為操作變因來改變泡泡水的注射速度。最後用Tracker應用程式測量出泡泡水的注射速度、反泡泡半徑，推算出不同的注射水量以及注射速度可生成的最多反泡泡的範圍以及最大的反泡泡半徑。

研究動機

反泡泡是一種由空氣包裹液體的特殊現象，與普通氣泡相反，它的液體在內部，被一層極薄的空氣層包覆著。過去的科展作品中，有許多人針對於它的生成成功率和存活時間作探討，或以不同的滴法探討對反泡泡的生成影響。其中也有許多探討滴落高度與生成成功率等等的影響，閱讀了的許多的研究作品後，我們發現液體注射量以及液面的接觸速度在反泡泡的生成之中扮演著十分重要的角色。因此，我們想要更進一步地研究這部分的關係。

研究目的

(一) 水柱下落距離與速度的關係

(二) 同一孔徑，不同滴落速度對反泡泡生成大小的影響

(三) 不同孔徑，不同滴落速度，生成反泡泡的數量分佈

(四) 不同注射量對反泡泡大小的影響

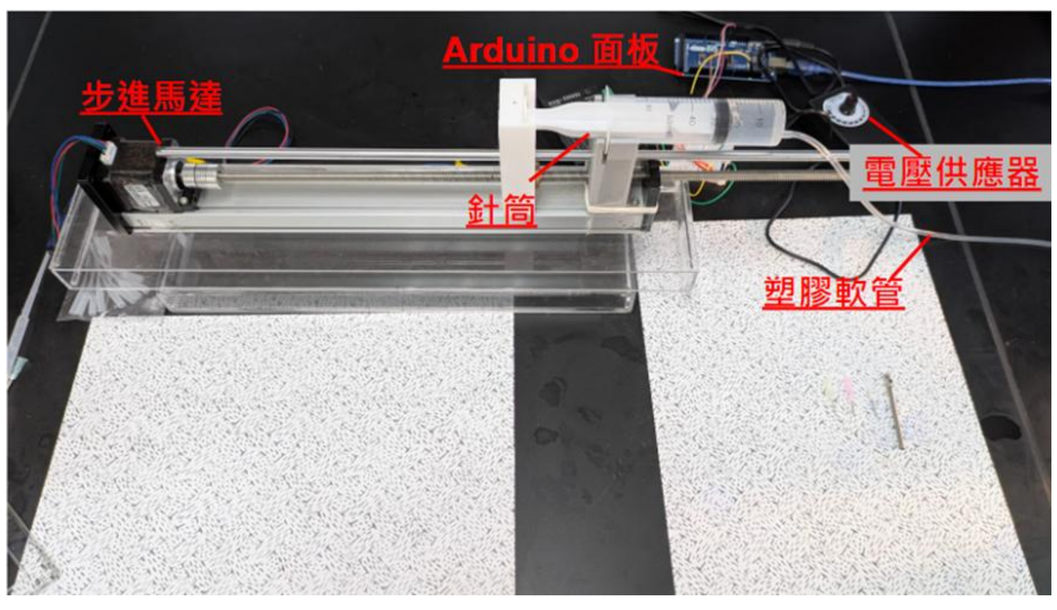
(五) 不同孔徑下 生成反泡泡的最佳滴落速度

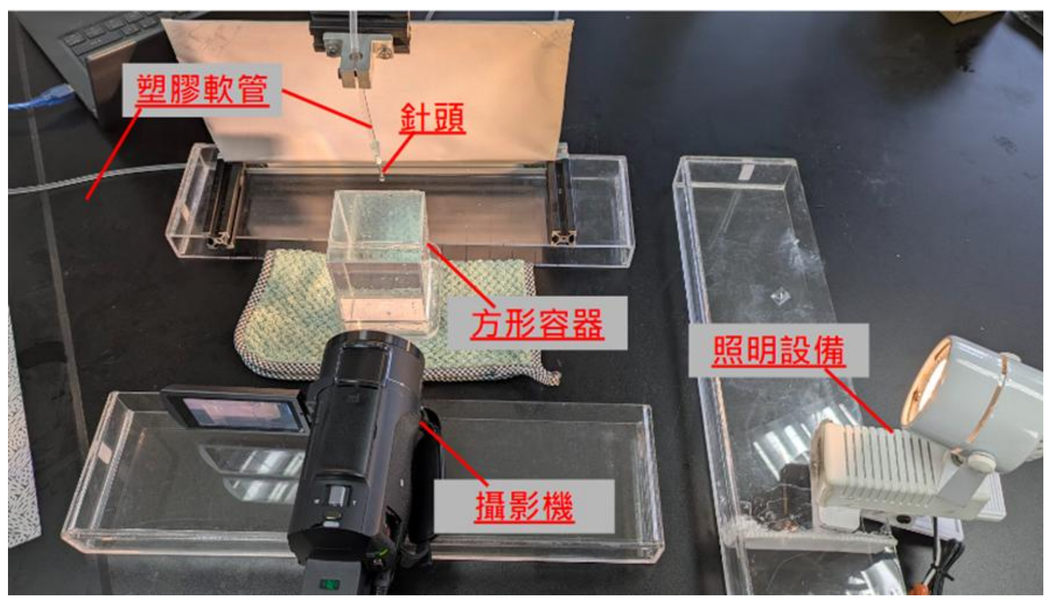
(六) 孔徑與生成反泡泡大小的關係

研究設備與器材

沙拉脫、步進馬達驅動器、量筒、方形壓克力容器、容量瓶、步進馬達、滴管、Arduino 面板、針筒、照明設備、攝影機、電壓供應器、麵包板、各種尺寸針頭、Excel 軟體、Tracker 軟體、Arduino 軟體

實驗裝置





研究過程與方法

實驗情況：
1.使用溶液：5毫升的沙拉脫，再加進500毫升之容量瓶並加入純水至500毫升。
2.方形容器內液體：為避免濃度有所變化，我們在容器內也加入相同液體。
3. 注射時每一種情況注射十次 (即每一個孔徑中，每一個高度中的每一個注射量分別進行十次注射)。

前置實驗

第一步：調整各實驗器材置完善，準備開始實驗。

第二步：裝上其中一個針頭（一共有5個針頭）

第三步：針頭與水面距離0.5cm至2.5cm之間。調整delay-time並注射。

第四步：找出最適合生成反泡泡的delaytime並記錄。

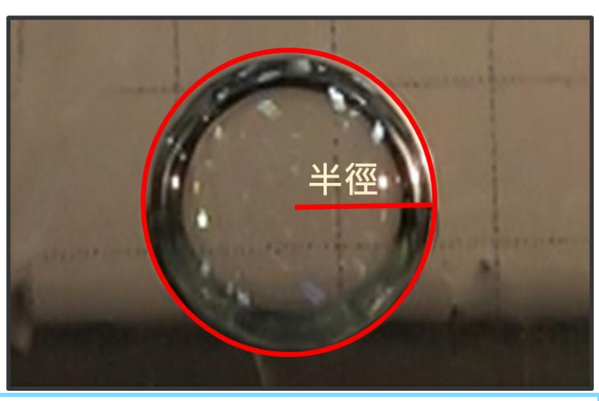
反泡泡滴製

第一步：調整各實驗器材置完善，準備開始實驗。

第二步：裝上其中一個針頭（一共有5個針頭）

第三步：針頭與水面距離0.5cm至2.5cm之間。調整delay-time並注射。

第四步：找出最適合生成反泡泡的d-elaytime並記錄。

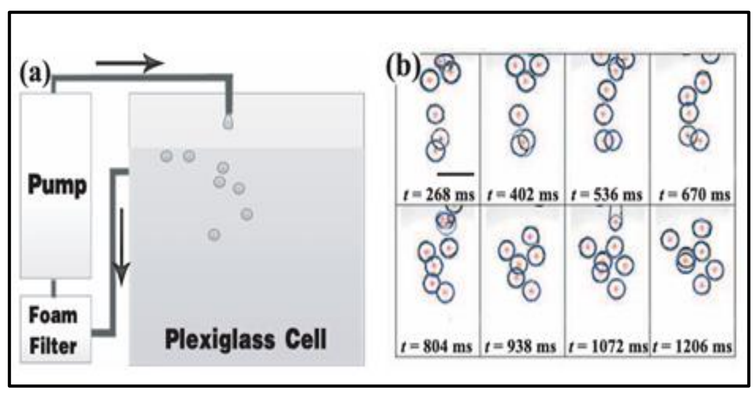


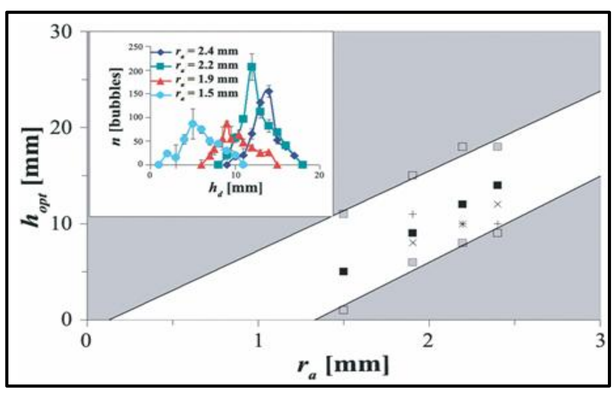
水柱速度測量：
將純水染色，開啟步進馬達，針筒推進使得水溶液從針頭注射出並錄製成影片。利用Tracker追蹤水柱前緣製成下落距離和速度之圖表，利用回歸直線推算速度。

注射量測量：
為了得知不同 one round 下實驗裝置注射一次的液體量，我們針對不同孔徑的針頭，設定one round=50、75、100 並使裝置注射10次至10ml的量筒中，將量筒讀數除以10作為單次注射的液體量。

文獻探討

在文獻<Dynamics of the formation of antibubbles>(P. G. Kim and H. A. Stone，2008)中研究反泡泡的生成，使用幫浦單次注射 0.1 ml 溶液液滴於容器內。研究探討影響反泡泡生成的變因，如液滴初始速度、低落高度與注射孔徑，並發現低落高度與孔徑間存在最佳關係，使不同孔徑對應特定最佳生成高度與可生成範圍。





研究結果

一、參數 one round與注射量之關係

round \ 孔徑	0.84	0.9	1.32	1.6	3.48
50	0.31	0.32	0.31	0.32	0.34
75	0.49	0.52	0.51	0.51	0.52
100	0.65	0.64	0.62	0.63	0.65

不同孔徑 (單位：毫米)在不同round的單次注射量 (單位：毫升)平均one round50的單次注射量平均為0.32毫升， one round75的單次注射量平均為0.51毫升， one round100的單次注射量平均為0.64毫升。

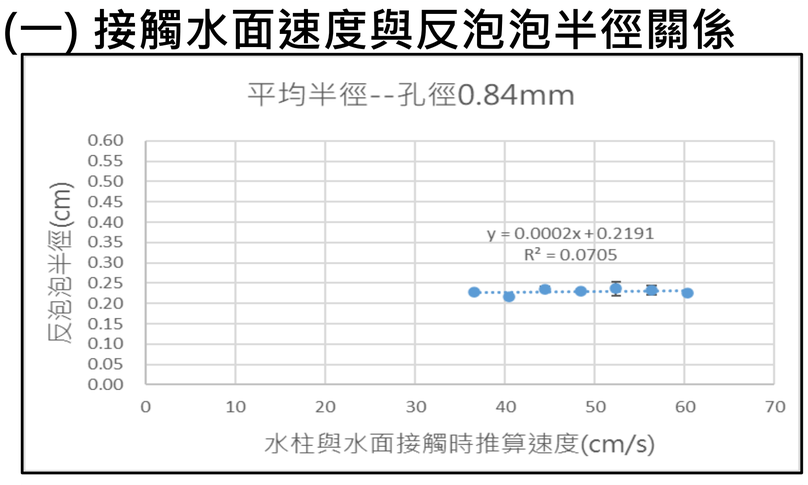
二、水柱下落距離與速度之關係

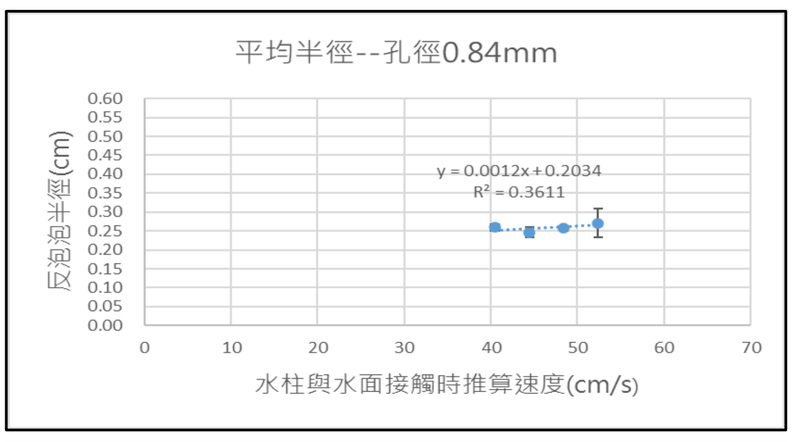
孔徑	下落距離與速度關係式
0.84	v = 19.824h + 22.654
0.9	v = 20.441h + 14.552
1.32	v = 18.22h + 12.863
1.6	v = 19.793h + 14.526
3.48-delaytime5	v = 25.038h - 5.9366
3.48-delaytime4	v = 19.299h + 4.608
3.48-delaytime3	v = 16.224h + 12.275
3.48-delaytime2	v = 12.267h + 25.05
3.48-delaytime1	v = 11.371h + 30.994

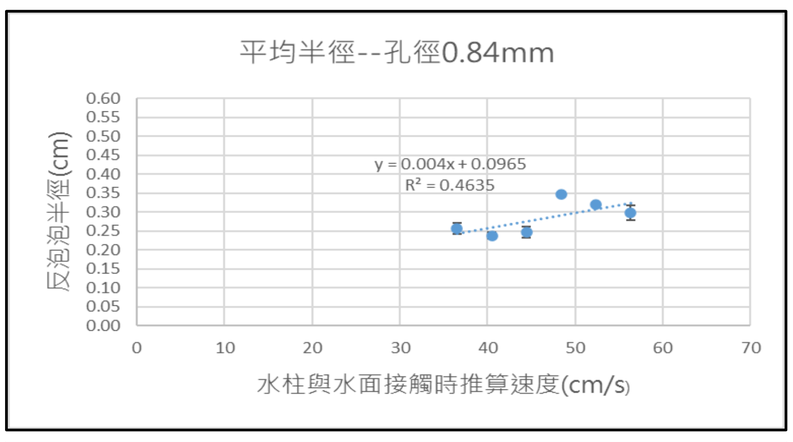
左圖為各孔徑之下落距離與速度關係式
當在使用孔徑為3.48mm 的針頭進行注射時，發現隨著水柱下落，水柱的半徑將因為水的內聚力而明顯變小。於是在3.48mm 針頭的實驗中，我們改將針頭與水面的距離固定為1cm，藉由調整delaytime 改變速度。

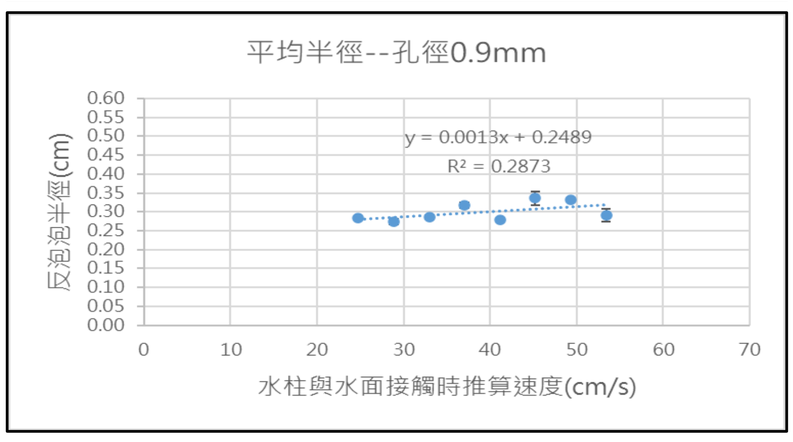
三、反泡泡滴製結果

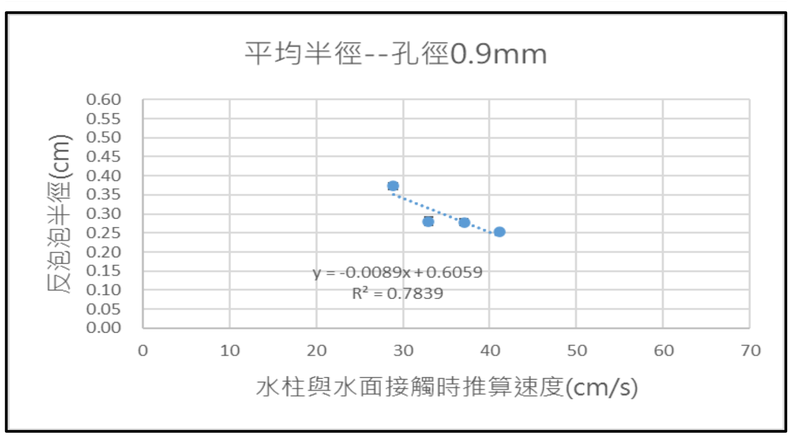
(一) 接觸水面速度與反泡泡半徑關係

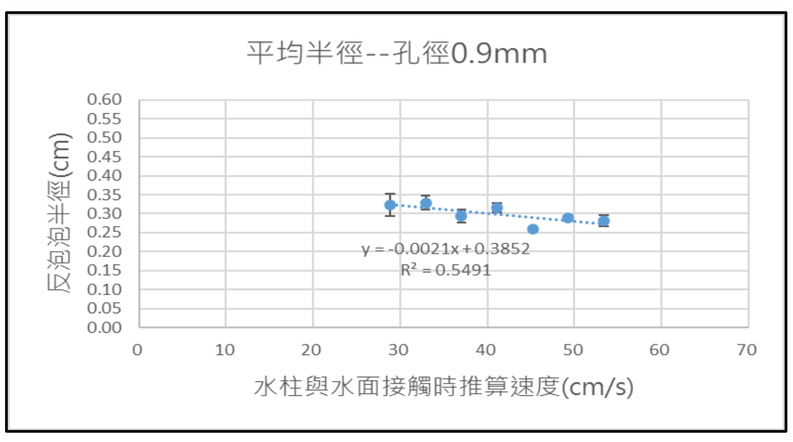


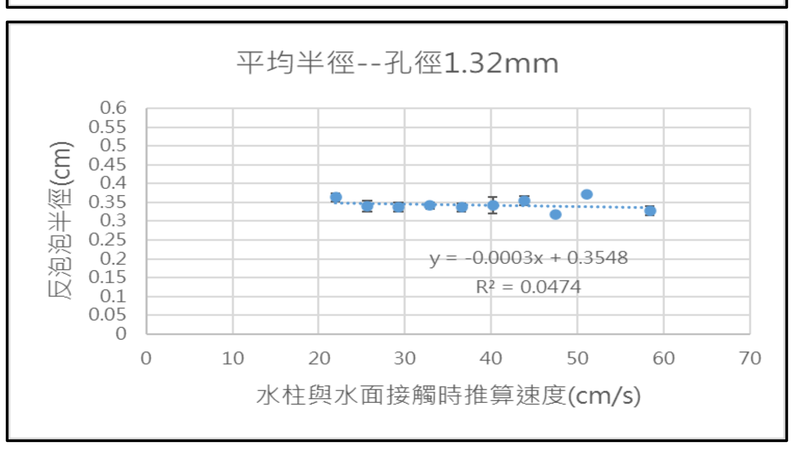


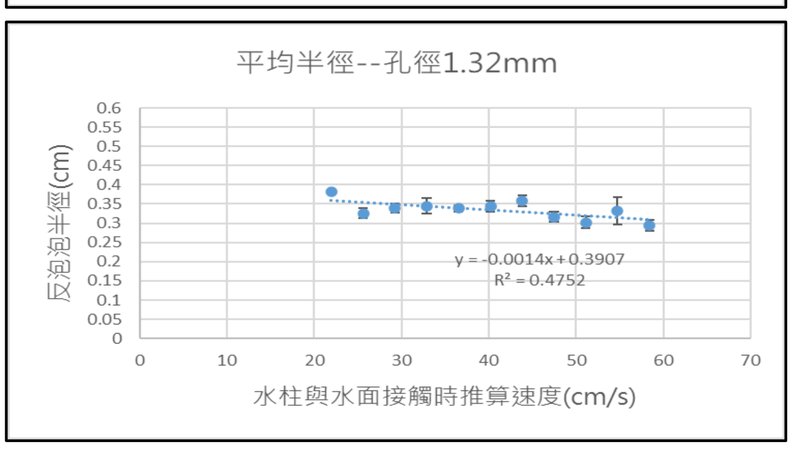


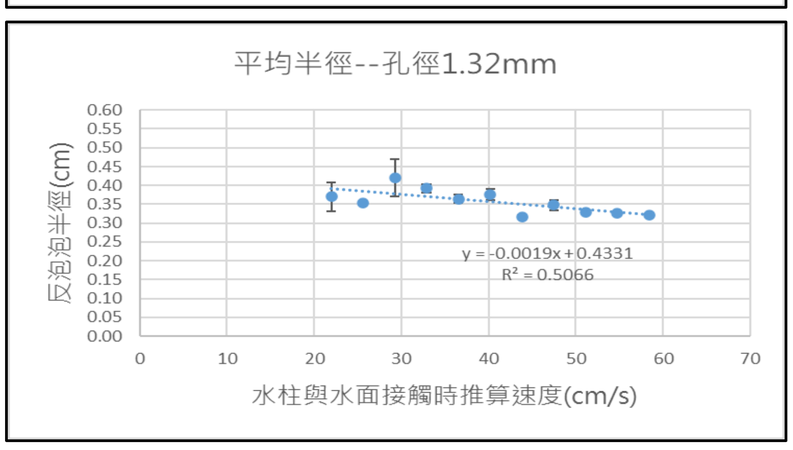


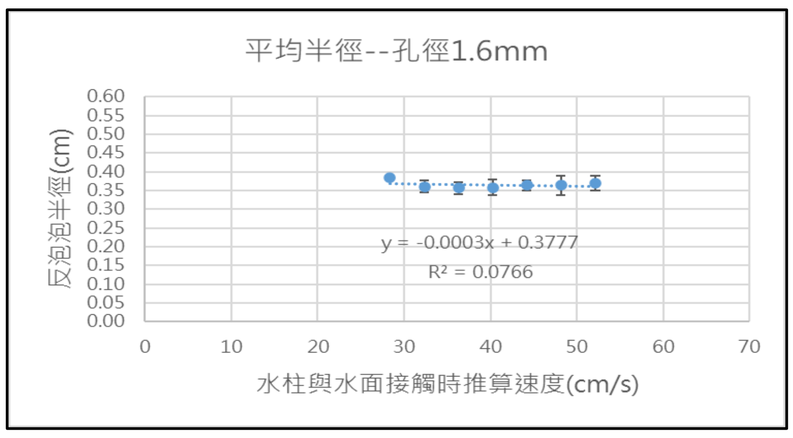


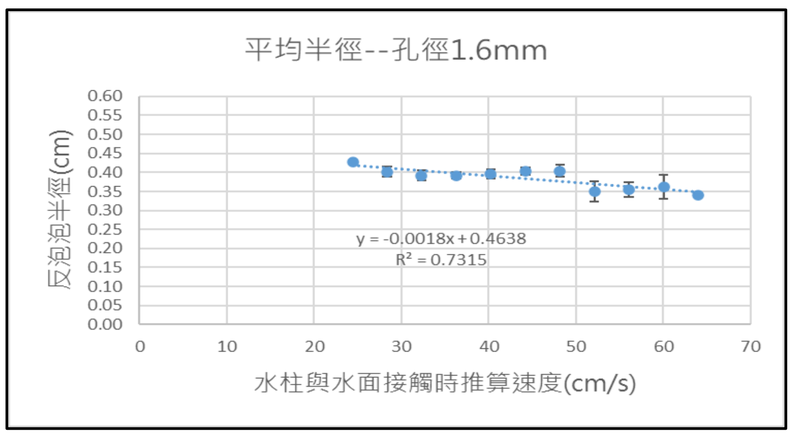


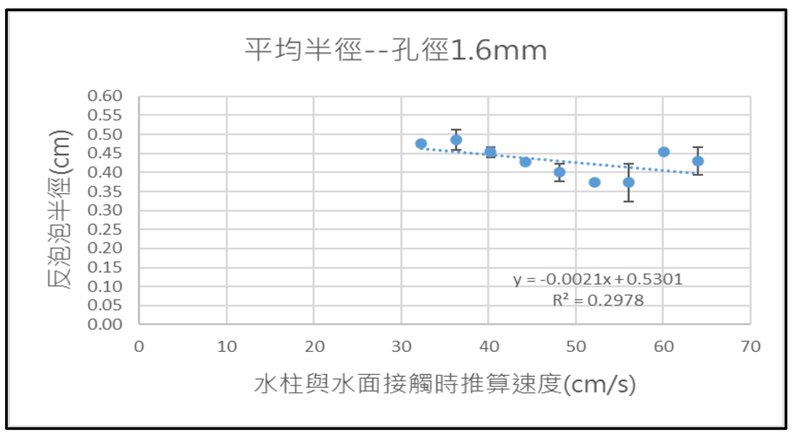






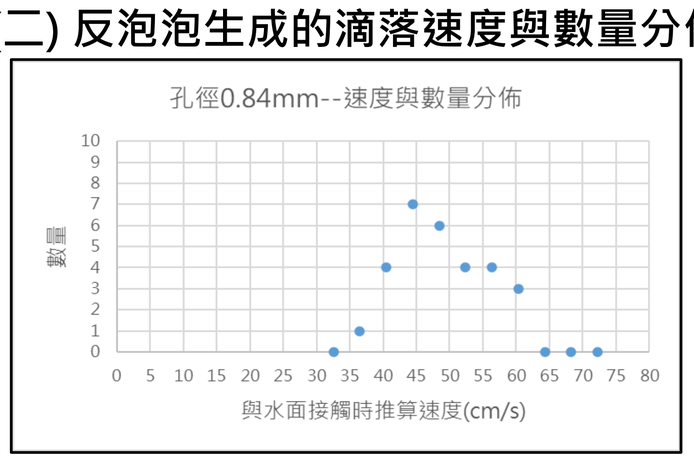


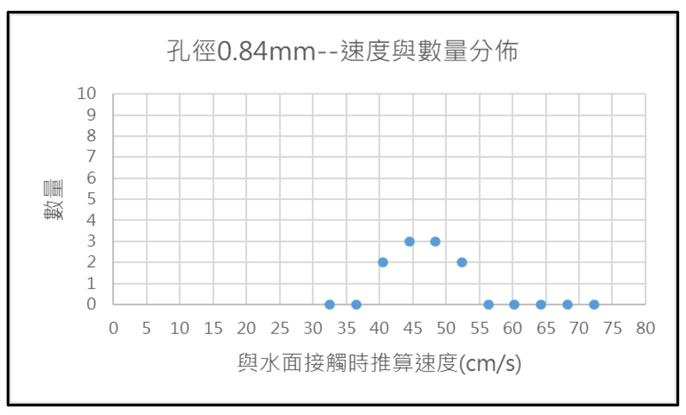


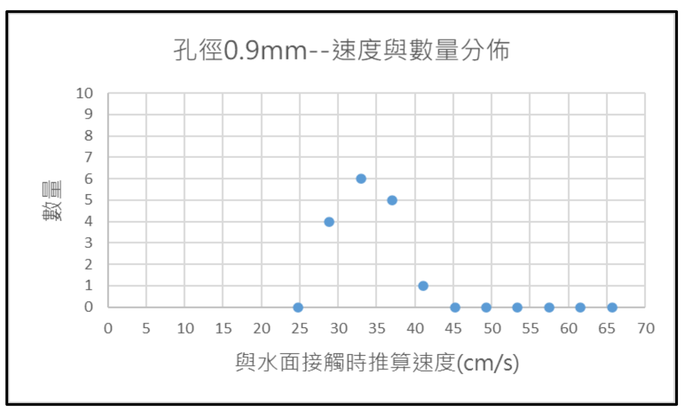


以上為不同孔徑、不同注射量下，反泡泡平均半徑與注射速度散佈圖，由左而右之單次注射量依序為one round=50 、75、100

(二) 反泡泡生成的滴落速度與數量分佈

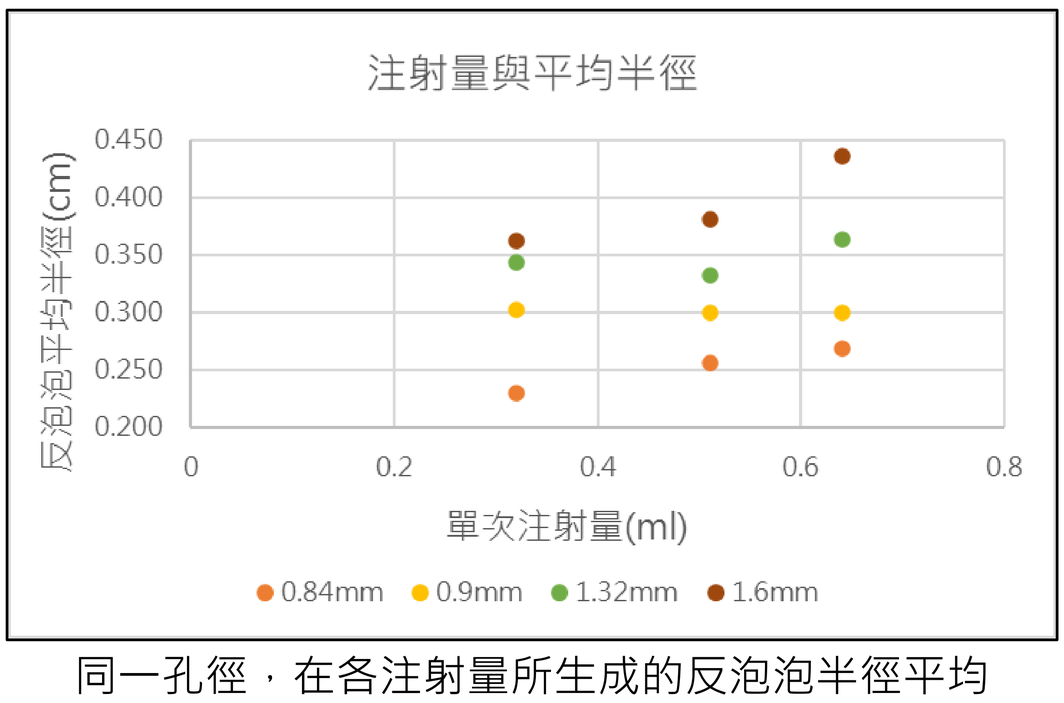






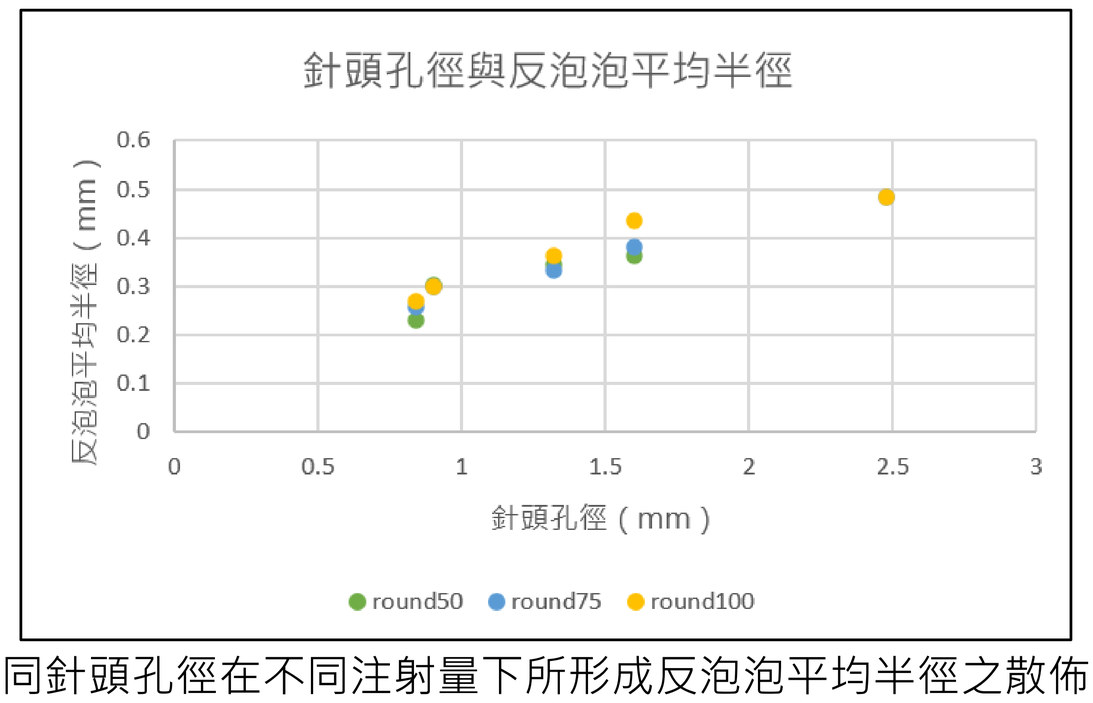
孔徑 0.84mm 在one round=50 時反泡泡數量對速度散佈圖（左）
孔徑 0.84mm 在one round=75 時反泡泡數量對速度散佈圖（中）
孔徑 0.9mm 在one round=75 時反泡泡數量對速度散佈圖（右）

(三) 不同注射量對反泡泡大小的影響



同一孔徑，在各注射量所生成的反泡泡半徑平均

(四) 不同孔徑對反泡泡大小的影響



不同針頭孔徑在不同注射量下所形成反泡泡平均半徑之散佈圖

討論

速度與反泡泡大小的關係

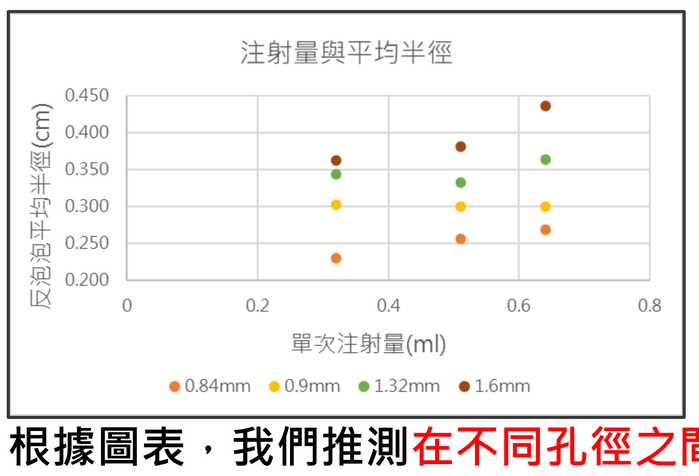
不同滴落速度下在同一孔徑和注射量時，許多反泡泡半徑的分佈似乎接近水平線。為了進一步確認，我們計算了每張圖兩變數之間的相關係數。

注射量 \ 孔徑	0.84	0.9	1.32	1.6	3.48
0.32	0.2656	0.5360	-0.2177	0.7273	無資料
0.51	0.6009	-0.8854	-0.6893	-0.8553	無資料
0.64	0.6808	-0.7410	-0.7118	-0.5457	-0.9599

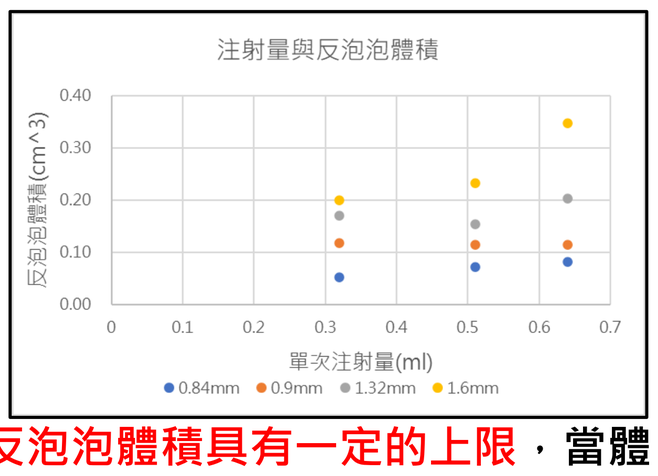
在孔徑較大以及單次注射量較多時，反泡泡的大小與速度大多呈現負相關，因此我們推論，在這樣的情況下，水柱的速度越快時所生成的反泡泡大小越小

注射量與反泡泡大小的關係

將不同注射量、不同孔徑生成的平均反泡泡半徑疊圖後得到以下圖表：



換算成體積

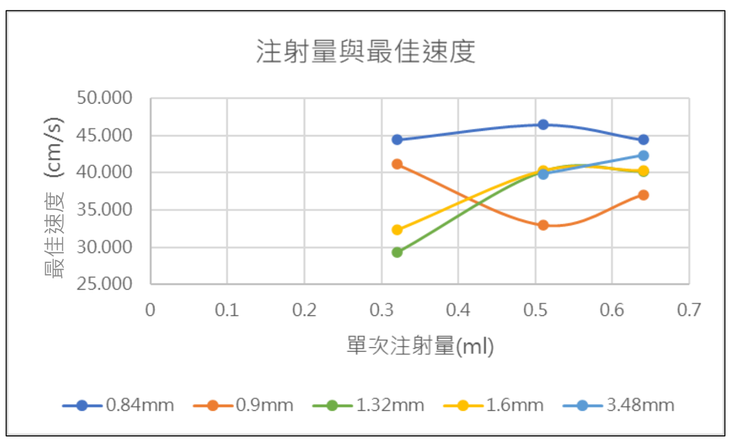


根據圖表，我們推測在不同孔徑之間，所生成的反泡泡體積具有一定的上限，當體積已經達到或接近上限時，增加注射量也無法使反泡泡的體積明顯提升。

反泡泡數量分布

在某些孔徑的特定注射量下，我們明顯地看到在某個特定速度下反泡泡生成數量最多的單峰分佈，這部分也可得到與作者研究文獻的相同結果，意即具有反泡泡的最佳生成速度。

注射量與最佳速度



將不同孔徑、不同注射量下生成最多反泡泡數量的速度作為最佳速度並製成上圖

1. 注射量對孔徑0.84 mm 之最佳速度並無明顯影響。
2. 注射量對孔徑0.9mm 之最佳速度大致呈負相關。
3. 注射量對孔徑1.32、1.6、3.48 mm 之最佳速度最明顯也最接近正相關。

水柱直徑與反泡泡大小的關係

我們推測此為普拉托–瑞利不穩定性(Plateau–Rayleigh instability) 所致，即細長液柱在表面張力作用下受擾動而斷裂。我們亦觀察到液柱斷裂前出現波浪狀輪廓，與反泡泡生成過程中的現象相符，因此我們認為不同孔徑下的斷裂條件可能與液柱與累積液體之間的幾何形狀有關。

r_0 ：液柱半徑、ε：擾動波振幅、R：下方液體半徑 (假設為球體)、u：內部液體向下流動的速度假設波長為 λ ，擾動波波型的函數假設為 $y = \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$

考慮此處因表面張力與內部水流流動所受到的壓力：

1. 側面輪廓因表面張力所產生的壓力

$$\gamma\left(\frac{1}{r_0-\varepsilon}-\frac{4\pi\varepsilon}{\lambda^2}\right)$$

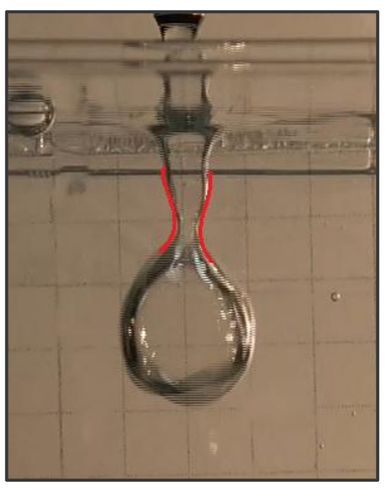
2. 下方液體膜表面張力造成的壓力、水流所造成的壓力

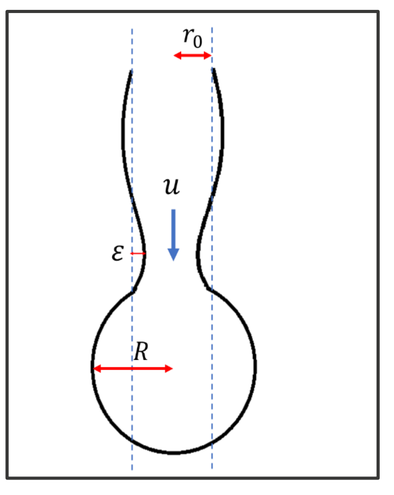
$$\frac{2\gamma}{R}+P_{水流}$$

發生夾斷現象→外部壓力應大於等於內部壓力。

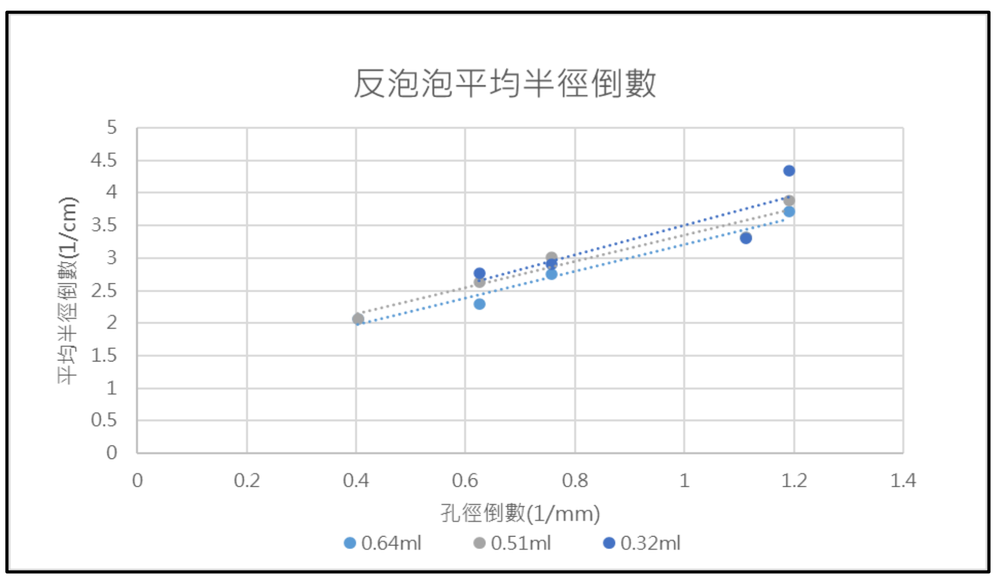
將等於的情況作為條件，則可得：$\gamma\left(\frac{1}{r_0-\varepsilon}-\frac{4\pi\varepsilon}{\lambda^2}\right)=\frac{2\gamma}{R}+P_{水流}$ 。

考慮其中的振幅ε可能和水柱半徑尺度有關，假設$\varepsilon = mr_0$。並且在前人學者的文獻中，得到當$\lambda = 9.02\, r_0$ 時擾動成長最明顯，我們將此結果代入可得到 $\frac{1}{r_0}=\frac{K}{R}+b$ 的形式，其中K和b為r_0 與R以外的數值。





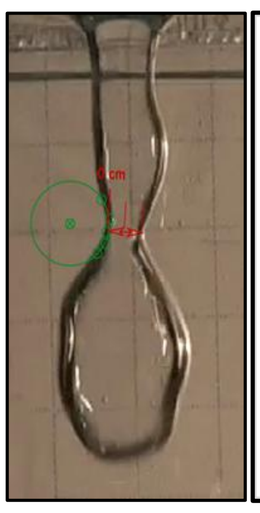
我們將水柱半徑的倒數和反泡泡半徑的倒數製成圖表，得到下圖：

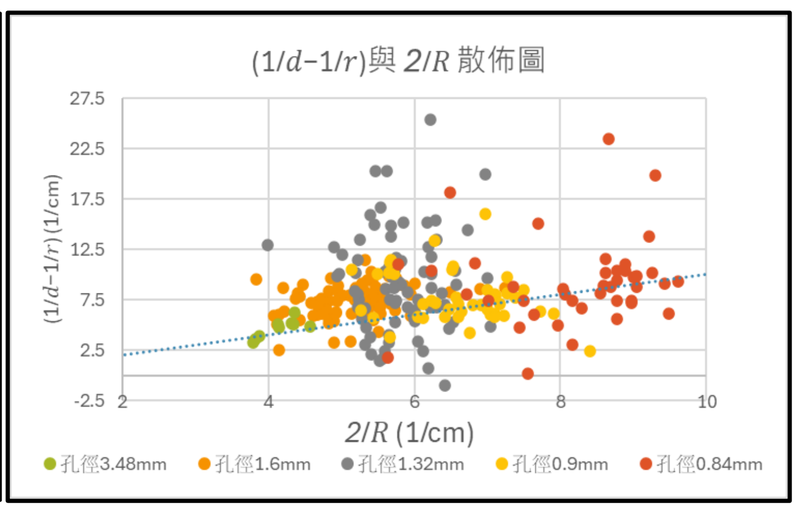


平均注射量0.32ml 0.51ml0.64ml平均半徑倒數與不同孔徑倒數關係圖

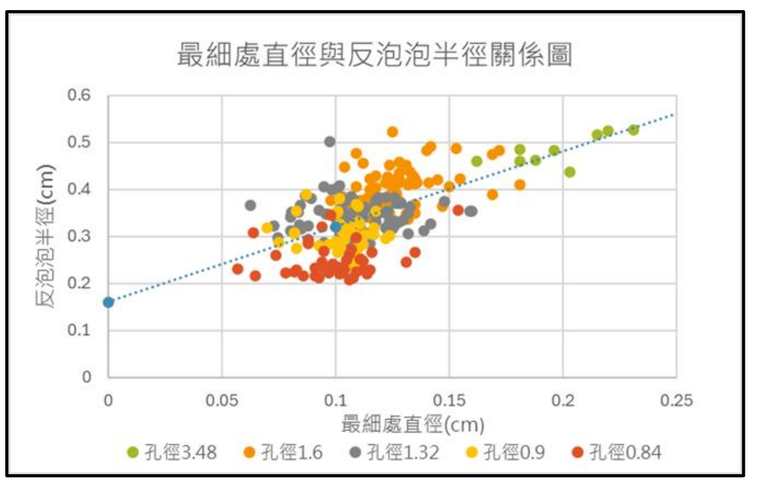
實際測量曲率半徑確認

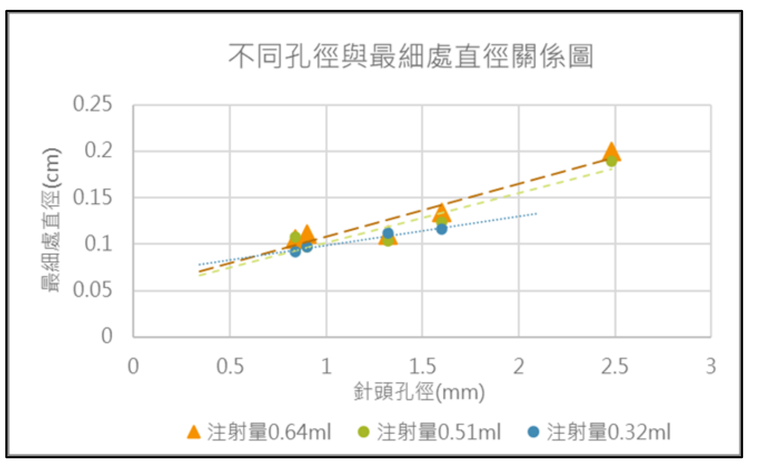
並非如我們的預期，有許多的數據點並非落在兩者相等的位置。很可能是因為當我們取反泡泡上方水柱即將斷裂之時的形狀時，外部向內的壓力早已大於等於內部向外的壓力。使得所得到的結果與我們的假設相異。





然而我們發現和孔徑大小可能有關係的最細處直徑和反泡泡半徑有較為一致的趨勢，我們將不同最細處直徑與所生成的反泡泡半徑製成圖表，如右上圖所示，以及將不同注射量下不同孔徑與其所對應的平均最細處直徑製成右下圖表。由這2張圖表我們推測反泡泡半徑可能和孔徑之間有著線性關係。





結論

一、相關數據分析顯示，當孔徑或注射量較大時，水柱速度越快，反泡泡體積越小，此趨勢會隨孔徑與注射量變化。
二、不同速度對反泡泡生成數量呈單峰分佈，表示存在最佳生成速度，特別在小孔徑（0.84mm 和 0.9mm）下更明顯。
三、在大孔徑下，較大注射量配合較高速度較易生成反泡泡，但最佳速度隨孔徑變化並無一致趨勢。
四、各孔徑下的反泡泡體積有上限，當接近此上限時，增加注射量也難以進一步增大體積。
五、從反泡泡形成時的形狀與壓力分析中，我們推測反泡泡半徑與孔徑倒數可能呈線性關係。但實際圖像分析顯示，水柱夾斷可能受多種因素影響，原本假設仍有待驗證，曲率半徑測量也未完全反映即時壓力狀態。