

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051810

簡單離心水泵的未滿水流動模態

學校名稱：桃園市立武陵高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 邱柏瑋	王慈甦

關鍵詞：離心泵、流動模態、流體力學

摘要

這份研究探討利用正三角形旋轉吸管構成的離心泵抽水的現象。我利用電鑽固定此三角形結構，使其部分浸入水中並定速旋轉。我們發現在吸管的管徑-旋轉半徑比大於一定值時，水流因無法穩定地充滿整個吸管，離心泵中的水流將會穩定的僅占據吸管的一部分。我測量「吸管的幾何參數和旋轉角速率」對「抽水流率」的關係；以及「旋轉角速率」對「抽水流速」的關係，並以穩層流下的流體力學模型(白努力方程式在旋轉座標系中的修正+流體力學穩定性分析)加以解釋，在不使用數值模擬的情況下方了解了此未滿水模態的水流情形。

壹、前言

一、研究動機

2024年臺灣青年學生物理辯論競賽(TYPT)的題目「Pumping Straw」啟發了此研究。題目要求使用切割成三角形的吸管，在頂點切出開口來製作簡單的水泵。當吸管快速繞著其垂直軸旋轉時，水會透過吸管向上流動。探討幾何形狀和其他相關參數對抽水速率的影響。

在TYPT中，包括一開始的我，絕大部分的參賽者都將注意力集中在水充滿整個吸管的流動模式中，將水未充滿吸管造成的實驗誤差視為應避免的情況，畢竟一般所謂的「水泵」在運作過程中會充滿水。因此更讓我發現到研究此未滿水流模態的新穎性。在此競賽後，我決定投入對此模式的研究，期待透過這樣的研究，能對離心泵的水流有更深入的理解。

二、研究目的

(一)研究在水流呈未滿模態時，

- 1 「抽水流速」對「旋轉角速率」的關係
- 2 「抽水流率」對「吸管的幾何參數和旋轉角速率」的關係

並建立「未滿模態模型」以解釋之。

其中吸管的幾何參數指吸管長度、吸管入水深度，抽水流率指三角形兩管單位時間內抽出的水質量(平均總質量流率)

(二)研究在何條件下，水流會呈未滿模態，並用理論計算出條件而解釋之。

三、文獻回顧

經過多次的尋找，我沒有找到關於水泵在未滿模式下的研究報告。因此本研究主要基於簡單且常見的流體力學原理(白努力方程式和力學分析)展開。

貳、研究設備與器材

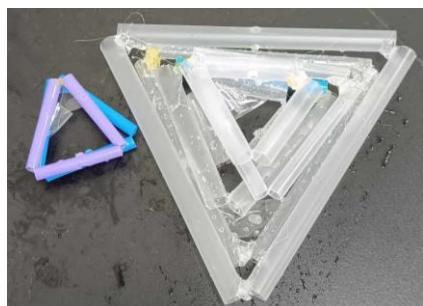
一、設備與器材列表

1. 不同直徑、長度的塑膠吸管(內壁光滑)
2. 電鑽與鐵桿
3. 固定用支架、水平儀
4. 電子秤(3kgw)*3
5. 水盆、水(7-8L)
6. 尺(1.2m)
7. 熱熔膠、膠帶(固定吸管、製作電鑽按鈕上突起物)
8. 手機錄影(120 fps)與影片分析軟體 tracker
9. 游標卡尺(0.05mm)

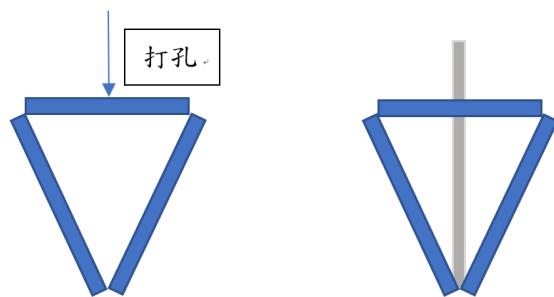
二、吸管水泵製作

1. 用熱熔膠黏合三段等長(用尺測量)的圓形吸管，確保其為正三角形，開口皆垂直吸管方向。

(或者將一根吸管折成三段，在凹折處都剪開開口)



(圖1)(作者自行拍攝)



(圖2) (作者自行繪製)

2. 將等腰三角形的底邊中點鑽出恰可使鐵桿通過的孔洞，並用熱熔膠或膠帶將其固定在鐵桿上。

三、設備架設

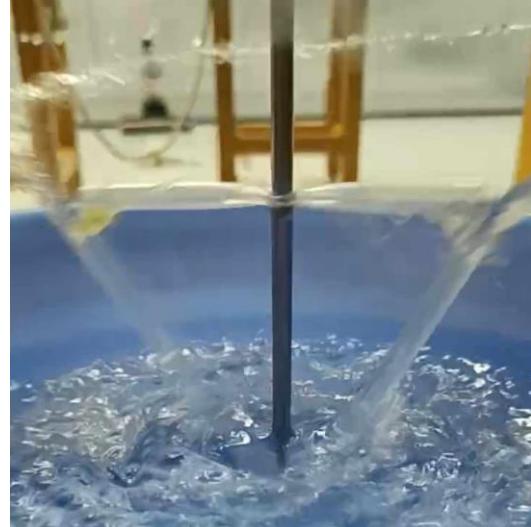


(圖3-1) (作者自行拍攝)



(圖3-2) (作者自行拍攝)

將插入鐵桿的三角形吸管鎖入電鑽，並固定在支架上以穩定轉動，鐵桿朝正下方。下方再放入足夠大的裝水容器(使其在抽水過程中水位高度沒有明顯變化)。若需要測量質量流率時在容器下放置電子秤(包覆防水用的塑膠袋)。當電鑽開始旋轉，吸管內的水就會因為離心力而由吸管中噴射而出。



(圖4) (作者自行拍攝)

參、研究過程與方法

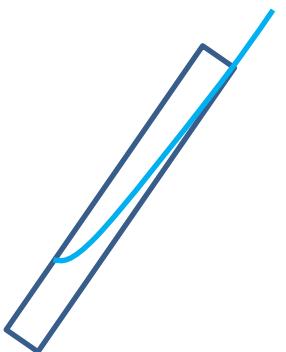
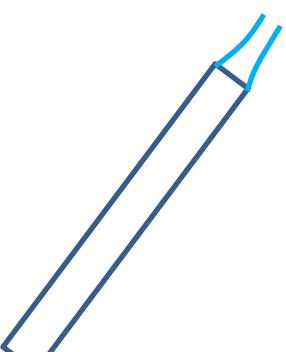
一、綜論

為了達成研究目標，我進行了多次實驗，對噴出水流的全滿及未滿狀態進行記錄，並且測量水流噴出流率。我將未滿水流模式的流率數據取出，在固定剩餘變數的情況下分別對旋轉角速度、吸管長度、吸管入水深度繪圖。另外，在部分水流模式為未滿狀態的實驗中，部分實驗控制了其他變數，將流速對旋轉角速度繪圖。這四張圖以及是否為未滿狀態的數據，都用理論模型來擬合，期待驗證此理論模型。

二、詳述實驗方法

(一) 觀察與判斷水流模式

利用手機拍攝旋轉的吸管，

半滿	全滿
 (圖 5)(作者自行拍攝)	 (圖 6)(作者自行拍攝)
 (圖 7) 半滿模態水面示意圖 (作者自行繪製)	 (圖 8) 全滿模態水面示意圖 (作者自行繪製)

如左圖，在較粗的吸管中水流並未充滿吸管。在右圖中則相反。在後續的實驗中，我透過觀察手機拍攝的影片確認其水流的模態。

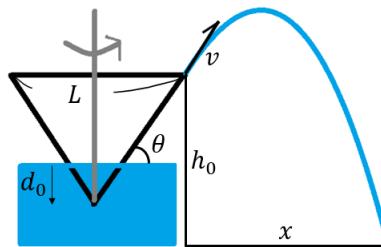
(二) 測量水流初速

我利用(圖3)的裝置來測量流速。

離心泵會將水由水盆中抽出，在忽略表面張力的情況下液壓和大氣壓力相同，水在噴出後只受重力和空氣阻力作用。如果在較低流速的情況下，可以忽略空氣阻力，由此噴出的水流會以拋物線軌跡運動，因此可藉由測量水流落地距離(x)計算初速，推導方式如下：

$$\begin{cases} x = vT\sin\theta \\ h_0 + vT\sin\theta - 1/2gT^2 = 0 \end{cases}$$

$$v = \sqrt{\frac{gx^2}{2\cos^2\theta(h_0 + xt\tan\theta)}}$$



(圖9) (作者自行繪製)

其他數據都可透過直尺輕易測量，唯 x 的測量方式是將直尺(1.20m, 最小刻度1mm)的零刻度放在三角形垂直軸的正下方，測量開啟電鑽水流洽達穩定後，噴出水流覆蓋在直尺上的刻度減去 $L/2$ 即可得到 x 。值得一提的是水流覆蓋的位置大約僅會在±1cm略微幅動，因此此方法在水流速不快的情況下相當精確。

(三) 測量水流流率

抽水流率的測量是透過在裝置的下方放置三個電子秤，來測量三角形吸管左右兩管流出水的平均總質量流率($\Delta m/\Delta t$)。 Δm 可以透過電子秤的刻度加總變化來得到， Δt 可用手機拍攝的影片來測量(水流噴出始末的時間)。值得注意的是關於 Δt 取值問題，也就是我每次測量水泵噴水的時距。為了保持吸管入水深度沒有明顯變化，此時距應該盡可能短。但電鑽加速，水流達穩定也需要一段

時間(根據影片觀察約10張，約0.08秒)，為了使這段時間可以被合理的忽略，我的 Δt 通常取約2-3秒。

(四) 測量及控制入水深度

吸管入水深度d是兩吸管在下方相碰處含水面的垂直距離，由直尺測量。由於吸管水泵將水盆裡的水向外噴射，使得水盆中水位下降，因此吸管浸入水中的深度將會減少。然而，此「深度」對本實驗而言是重要的變數。所以在水泵一次運作的過程中，我們不會讓水位變化超過2mm，也就是說，在一般的情況下(每秒約噴射30-60cc的水)，我們不會讓運作時間超過3秒，以保數據的準確性。(水盆半徑約15cm，故表面積約700cm²)當後續實驗出現「吸管入水深度」時，代表在噴射過程中吸管入水的平均深度(將其視為噴射前後入水深度的平均值)。

(五) 測量及控制旋轉角速度

我在電鑽按鈕上黏貼(用膠帶)突起物(熱熔膠)，使其有按壓深度的上限，確保電鑽加速按鈕被按壓的「深度」在同一系列的測量中保持固定，並且在水泵作用時慢動作錄影，利用 $\omega = 2\pi/T$ (T為吸管轉動週期)測量旋轉角速度。如果需要調整旋轉角速度，只要將突起物拆下並黏貼到即可。

三、理論模型的建立

(一) 白努力方程式在旋轉座標系的修正

對於僅受重力和壓力梯度力之不可壓縮、無黏滯的層流、穩流來說，白努力方程式可以被寫為以下形式：

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + P = const$$

相當於描述一流線上的液塊之力學能變化等於壓力梯度力的作功。

若一流場在旋轉座標系下才有符合白努力方程式的性質，我們欲在旋轉的非慣性座標系分析流場，此時離心力顯然是可作功的保守力場，因此須加上單位體

積的離心位能(科氏力因垂直速度方向而不作功，因此不會影響等效位能場)，將白努力方程式寫成以下形式：

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh - \rho \frac{r^2 \omega^2}{2} + p = constant$$

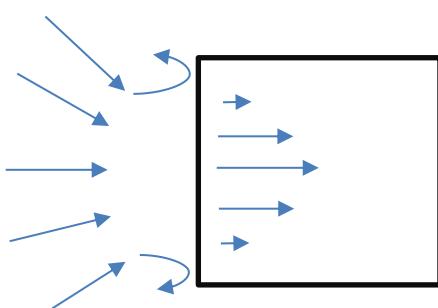
其中 r 定義為液體位置和定角速率 ω 旋轉的轉軸的距離， h 為距離水平面的鉛直高度， v 為流速， ρ 為水密度， g 為重力加速度，大氣壓力為 P_0 。

(二) 未滿模態模型及其推導

將其中一管未滿模態的水流形狀分成充滿段和未滿段(垂直吸管軸向)，並注意四個關鍵區域：下端開口、充滿段、臨界點、未滿段到上端管口(外側)。對於此模型的適用性，將在討論問題有進一步的論證。值得一提的是，我的分析專注於「其中一管」的縱切面上，以此來代表整個吸管內液的流動情形。

1. 下端開口：

水流在這裡會流入吸管中，因液體有黏滯力和與管壁的吸附，不可能使吸管中存在均勻的流速場，較靠邊緣的水流速必定較慢，是為哈根-泊肅葉 (Hagen-Poiseuille) 流動。因此從離吸管遠方流入，原本由白努力方程式計算出的均勻流場不可能繼續維持均勻，而是較靠近吸管壁的液體在經過紊流減速後才得以流入吸管(如圖10紅圈處)，因此側邊流線液體的流速在進入吸管後很可能不符合白努力方程式但是由於吸管滿足柱對稱性，我認為這些紊流對於開口正中央的流體流動不會產生顯著影響。



(圖10) (作者自行繪製)

綜合穩流的假設，我可對中央流線使用白努力方程式。具體思考方式是考慮一條從水容器遠方(在旋轉座標系中速率 $v = r\omega$ ，也就是在靜

止座標系中靜止)流向管中央的流線，有

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh - \rho \frac{r^2 \omega^2}{2} + p = \text{constant} \equiv E$$

其中座標(r,h)定義為水平面 $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ ，旋轉中心 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ，大氣壓力 = \mathbf{P}_0 ，因此遠方的 $\mathbf{E} = \mathbf{P}_0$ ，故中央流線上任點都應該有 $\mathbf{E} = \mathbf{P}_0$ 。

2. 充滿段：

假設充滿段足夠長，使得我們可以假設流場對平行軸方向有平移對稱性，所以我們可以套用哈根-泊肅葉 (Hagen-Poiseuille) 流來近似流場。

我們將流場寫作

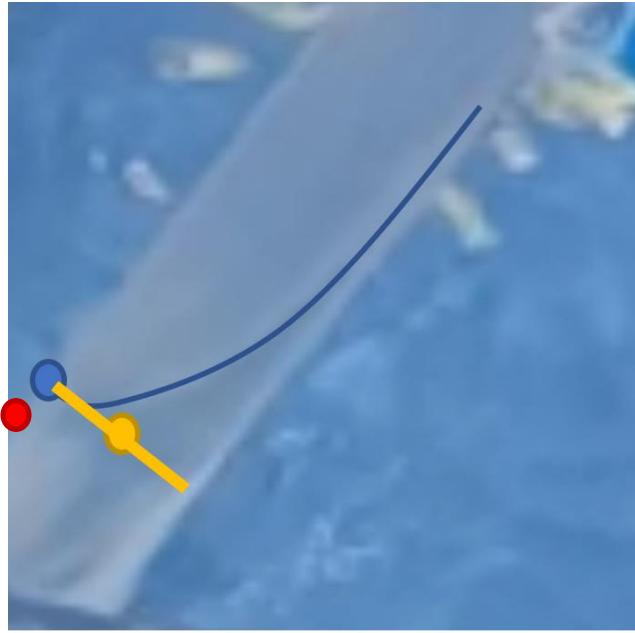
$$\vec{v}(\vec{r}) = v(\mathbf{y})\hat{v} = v_0(1 - (y/r_0)^2)$$

其中 y 為所在處離吸管中軸的距離， r_0 為吸管半徑， v_0 為中央處的流速。想要計算質量流率，只要乘以密度並對吸管橫截面面積分即可(如下推導，乘以二是因為在這個情況下，有兩管貢獻流率)

$$\begin{aligned} dm/dt &= 2 \times \int_0^{r_0} (\rho \vec{v}(\vec{r}) \cdot \hat{v} \times 2\pi y) dy \\ &= 2 \times \int_0^{r_0} 2\pi \rho y v_0 (1 - (y/r_0)^2) dy \\ &= \rho \pi r_0^2 v_0 \end{aligned}$$

關於充滿段的流場，我們的未知量便只剩下 v_0 ，需要由接下來對臨界點的理解來計算。

3. 臨界點：下圖為此模態下的示意圖，藍點稱為臨界點C，黃點稱為和臨界點同面的中央流線點B，紅點稱為點A



(圖11) (作者自行拍攝並繪製)

忽略表面張力，依據以下論述，在交界點上，單位體積重力、離心力、以及科氏力在臨界點上的平行吸管方向之合力為0。(接下來提到合力就意指這幾個力，也就是除了壓力之外剩下的力)

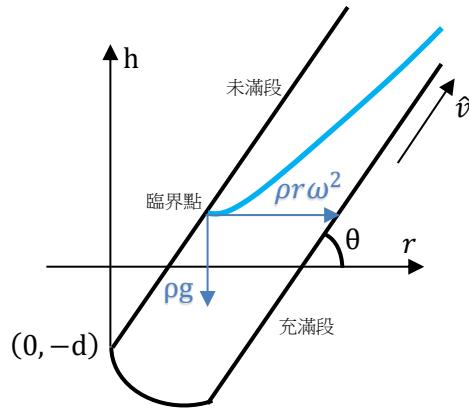
考慮一個剛剛經過電鑽加速後的水面，其水面很高，以致在臨界點附近平行吸管方向之合力方向向上，根據充滿段的水流條件(平行軸方向 $v = \text{constant}$)，不難發現在臨界點C沿著平行吸管面正下方點A的壓力小於 P_0 。而這樣的邊界是「不穩定」的，因為但凡有一點空氣在擾動下流進CA區域都能夠持續灌入(因為液體提供的壓力過小)，使得液面持續下降。所以我們可以預期液面會下降直到合力為0。

由上，我們可以透過重力和離心力的平衡條件計算出臨界點的位置，接著我們可以藉由思考臨界點同截面的中央流線點B的伯努力方程，來求出該處的液體流速，即 v_0 。根據充滿段滿足哈根泊肅葉流的假設，點B和點A的「位能」

$$\rho gh + p - \rho \frac{r^2 \omega^2}{2}$$

應該相同(因為從B到C上可以取一條滿足哈根泊肅葉流，且垂直流動方向的路徑，顯然在路徑上哈根泊肅葉流要求流體受合力為0，因此根據梯度定理，位能值相同)，

故我們在計算 \mathbf{v}_0 時自努力方程中帶入的 $(\mathbf{r}, \mathbf{h}, \mathbf{p})$ 可以取臨界點的值。(臨界點的壓力必然等於一大氣壓，這是界面的條件)。如下，我藉由取臨界點的 $(\mathbf{r}_c, \mathbf{h}_c, \mathbf{p})$ 和自努力方程式計算出 \mathbf{v}_0 。



臨界點力平衡條件解 $(\mathbf{r}_c, \mathbf{h}_c)$:

$$-\rho g \sin \theta + \rho r_c \omega^2 \cos \theta = 0 \rightarrow r_c = g \tan \theta / \omega^2$$

$$h_c + d = r_c \tan \theta \rightarrow h_c = g \tan^2 \theta / \omega^2 - d$$

其中 d 為兩吸管在水下相碰處距離水面的深度

解 \mathbf{v}_0 :

$$\frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho g h_c - \rho \frac{r_c^2 \omega^2}{2} + p_0 = p_0$$

$$v_0 = \sqrt{2gd - g^2 \tan^2 \theta / \omega^2} \rightarrow dm/dt = \rho \pi r_0^2 \sqrt{2gd - g^2 \tan^2 \theta / \omega^2}$$

(圖12) (作者自行繪製)

在角速率足夠大的情況，後項可以忽略，這是因為臨界點已經幾乎在下端開口處了。總結來說，我們完全了解充滿段的水流了。

4. 未滿段到上端管口：

如上頁圖，水流在經過黃色面後持續向上但不充滿管，在上端開口處聚集到吸管外側並噴出。基於忽略下端管口和未滿段耗散，為了進行一個量級上的估計(因為其實會有顯著誤差)我們可以持續使用中央流線的白努力方程式來計算在上端開口處的流速。

$$v = \sqrt{r_m^2 \omega^2 - 2gh_m}$$

此處 r_m 是吸管最外側距離軸心的距離， h_m 是其距離水面的高度。

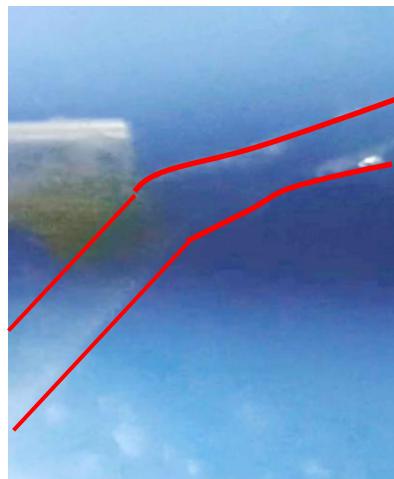
透過對以上四處的分析，我導出公式：

$$\text{兩管總質量流率 } dm/dt = \rho \pi r_0^2 \sqrt{2gd - g^2 \frac{\tan^2 \theta}{\omega^2}},$$

$$\text{水流管口初速(流速) } v = \sqrt{r_m^2 \omega^2 - 2gh_m}$$

(三) 未滿模態發生穩定的條件

我認為未滿模態發生的條件是全滿模態不穩定。因為我們觀察到半滿模態穩定電鑽開始轉動起初水會充滿整管，故只有當全滿模式不穩定時，才可能使得水流變成未滿模態。



(圖13) (作者自行拍攝並繪製)

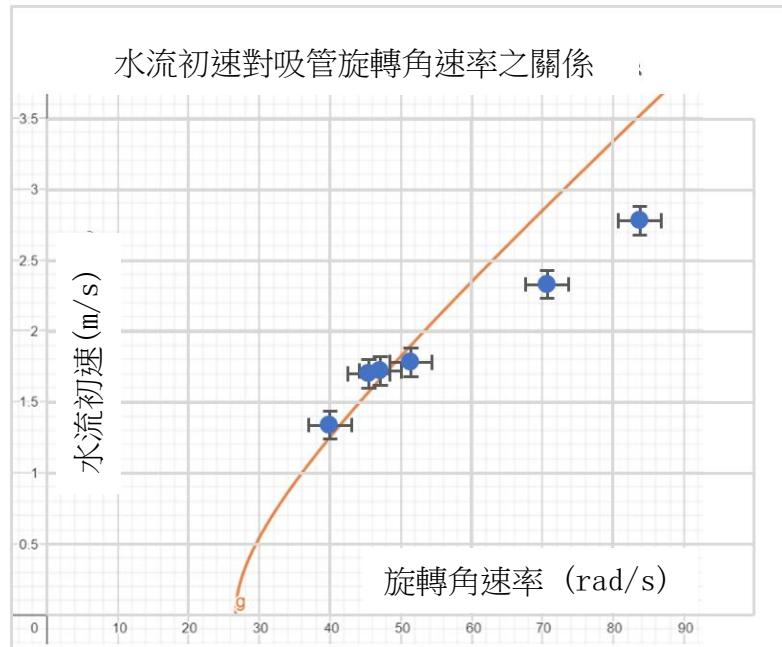
如圖，觀察到水流在全滿模式中略為收束後，我分析了射流縮聚的模型，估計出吸管出口中央水流的壓力，再考慮再整個管口處科氏力和離心力與壓力的平衡條件，計算出管口處可能存在之最低水壓 P_{min} 。如前一點對穩定性的討論，我認為 P_{min} 需要 $> P_0$ (大氣壓力)才會使全滿模態穩定，否則可能招致空氣的流入。因此，未滿模態發生的條件應為 $P_{min} < P_0$ 。對於 $P_{min} < P_0$ 條件的計算

稍嫌複雜，因此寫為紙本列於附錄中。其條件的結論為：當 $r_0/r > 0.14$ (也就是當吸管太粗)，則 $P_{min} < P_0$ ，全滿模式不穩定，造成半滿模式的產生。其中 r_0 為吸管半徑， r 為吸管上端中央離旋轉軸的距離。

肆、研究結果

此處將在「參，研究方法」綜述中提到之未滿水流模式的水流初速對旋轉角速度之實驗數據和未滿水流模式的質量流率對旋轉角速度、吸管長度、吸管入水深度之實驗數據，以及是否為未滿模式的實驗數據共五點列出，並和理論模型給出的公式進行比較。圖表中顯示的誤差槓為B類不確定度(詳細計算方式在附錄列出)因為儀器本身的誤差(最顯著的，手機攝影的更新率有限(120fps)，導致時間的測量不準確)已經大於多次測量之間的誤差。作為補充說明，我們在理論分析時使用的 $\rho = 997 \text{ kgm}^{-3}$ ， $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$

一、未滿水流模式的水流初速對旋轉角速度



(圖14) (作者自行繪製)

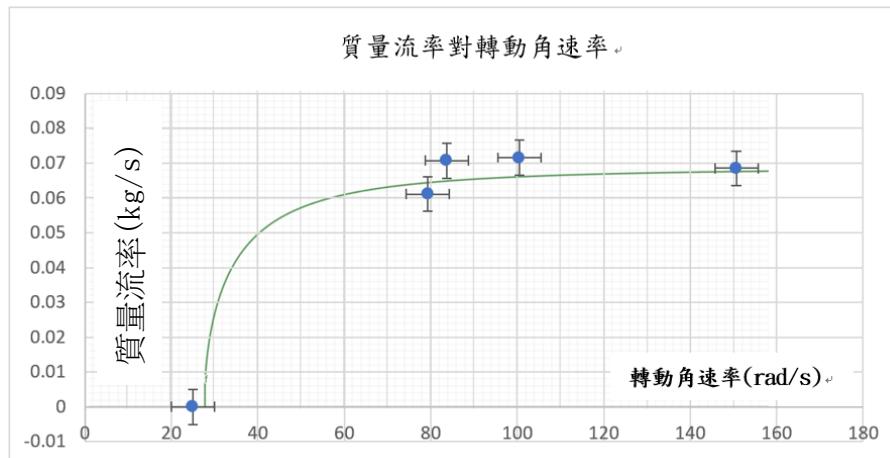
本組實驗數據固定使用管長 $d=0.070\text{m}$ ，半徑 $r_0=3.8\text{mm}$ 的吸管，入水 $d=0.020\text{m}$ 。橘線為理論預測得出的結果，依據在「參、」提到的

$$v = \sqrt{r_m^2 \omega^2 - 2gh_m}$$

公式。其中 r, h 我代入管口外側的數值(0.040m, 0.0364m)。整體來說，此數據

符合預期，然而在70-90rad/s的兩個數據點出現了誤差。我認為這是因為若吸管旋轉角速率較高，噴出水的速率也較高，很可能因為空氣阻力的介入而使得我們低估其水流初速(如「參、」所述，我是透過水滴的拋射來估算出其初速，忽略空氣阻力會使我們在高水流速的情形中低估水流速)。

二、未滿水流模式的質量流率對旋轉角速度



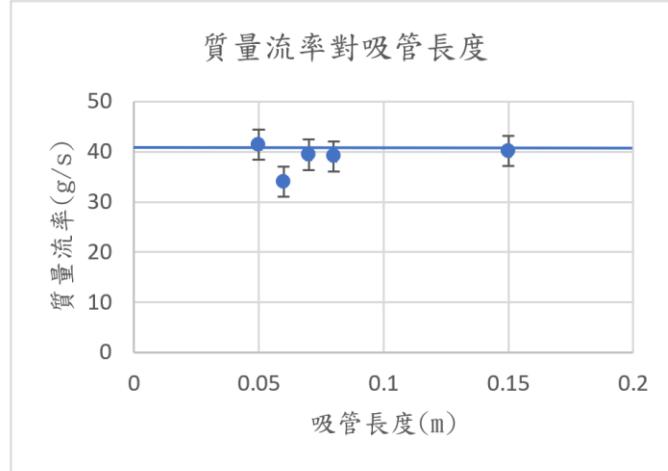
(圖15) (作者自行繪製)

本組實驗使用 $L=0.050\text{m}$, $r_0=6.0\text{mm}$ 的吸管，入水深度 $d=0.019\text{m}$ 。圖中綠線是由以下公式提出的理論預測，在三、四、五、點亦同，故不再贅述。

$$dm/dt = \rho \pi r_0^2 \sqrt{2gd - g^2 \frac{\tan^2 \theta}{\omega^2}}$$

這組實驗很好的說明了在高轉速下質量流率和轉動角速率的近乎不相關性。這是因為當角速率足夠高，就可以發現「參、」中提到的臨界點會幾乎貼近管底，使得兩吸管中的充滿段的中央流線流速 v_0 趨近於一定值 $\sqrt{2gd}$ ，因此質量流率也趨近於一定值。

三、未滿水流模式的質量流率對吸管長度

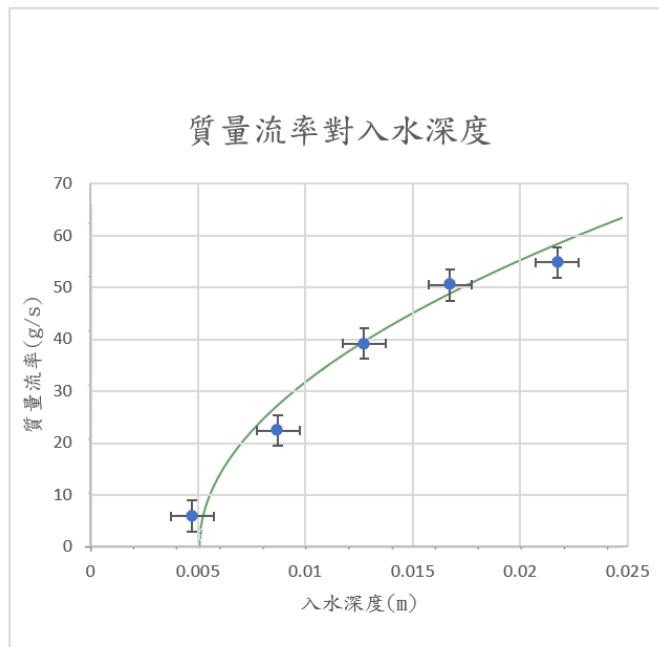


(圖16) (作者自行繪製)

本組實驗固定使用 $r_0=4.86\text{mm}$ 的吸管，入水深度 $d=0.0178\text{m}$ ，轉速 81rad/s 。

根據理論模型(藍線)，在一定長度之後，無論吸管如何變長，質量流率都不會增加，因為質量流率取決於臨界點的位置，而其和附近的水流速和吸管長度沒有關係。實驗數據也吻合此敘述。

四、未滿水流模式的質量流率對吸管入水深度



(圖17) (作者自行繪製)

本組實驗固定使用 $L=0.070\text{m}$ ， $r_0=5.6\text{mm}$ 的吸管，旋轉角速度 81rad/s 。透過改變入水深度，我們確認了在高轉速下質量流率和入水深度 d 有接近 $1/2$ 次方正比的特性，合乎理論預測。

五、是否為未滿模式

這裡是根據我的部分實驗數據(防止佔據過多版面，未全部列出一些缺乏代表性的數據，但事實上所有數據都滿足未滿模式，由於他們都半滿模式的模型且全滿模式的流量應和半滿模式差距巨大)，和其是否為全滿的紀錄表。其中**r**為吸管上端中央離旋轉軸的距離。

編號	入水深度 (m)	角速率 (rad/s)	吸管半徑 r_0 (m)	旋轉半徑 r (m)	半徑比 r_0/r	V:全滿 X:未滿
1	0.030	18.9	0.0039	0.064	0.062	V
2	0.030	35.9	0.0039	0.064	0.062	V
3	0.030	83.7	0.0039	0.064	0.062	V
4	0.023	81.0	0.0065	0.081	0.080	V
5	0.0047	81.0	0.0056	0.040	0.140	X
6	0.0127	81.0	0.0039	0.040	0.140	X
7	0.0217	81.0	0.0039	0.040	0.140	X
8	0.023	81.0	0.0065	0.046	0.142	X
9	0.023	81.0	0.0065	0.036	0.181	X
10	0.019	79.5	0.0060	0.030	0.200	X
11	0.019	82	0.0060	0.030	0.200	X
12	0.019	150.1	0.060	0.030	0.200	X

(表1) (作者自行繪製)

由數據1-3及10-12，確認了角速率和是否全滿無直接關係，並且也可發現和深度無直接關係。是否全滿應由**r**/**r**決定，**r**/**r** < 大約0.140時呈全滿，反之則呈半滿。

伍、討論

此處針對兩個面向進行討論：

一、未滿模態的理論的適用性

(一) 雷諾數分析：

事實上，我在未滿模態模型和臨界條件的計算中忽略了黏滯力的造成的壓降，但是我同時將流動視為層流，意味著黏滯力並不算極小，這到底是怎麼一回事呢？經過計算，吸管水泵的雷諾數(實驗時溫度約10-15度)由下計算。其中**p**為液體密度，**v**為平均流速(因是哈根-伯肅業流而將管心速度 $\sqrt{2gd}$ 乘上2/3)，**D**

為管徑， μ 為液體黏性係數。

$$Re = \rho v D / \mu = 997 \left(\left(\frac{2}{3} \right) \sqrt{2 * 9.8 * (0.005 \sim 0.02)} \right) (0.006 \sim 0.013)$$
$$/(0.0013)$$

$$Re = 860 \sim 4420$$

幾乎介於層流($Re < 2000$)和過渡流($2000 < Re < 4000$)間。因此將流動視為層流是可行的，但黏性效應仍沒有顯著到需要將其列入流場的分析中(因為雷諾數代表慣性力和黏性力的比值，黏性力仍只有前者的數百至數千分之一)。

(二) 下端管口處管中央流線不受紊流影響的假說

我在進行理論模型建立時，假設流入吸管的中央流線之流速不受下端管口之紊流效應影響，在缺少複雜黏滯效應下保持伯努力定律的適用性。(在附錄中推導全滿模型的理論時，我也做了中央流線不受紊流影響的假說)，原因是吸管的軸對稱性。這樣的對稱性可能會因為另一吸管的存在而被破壞，因此此假說可被懷疑。不過儘管如此，依據此建立的理論仍然在實驗精度下預測了實驗結果的質量流率，使此假說成為一個合適的預測工具。

(三) 表面張力造成的壓力

我注意到水柱在噴出水泵時，裡面的靜壓可能因為表面張力的因素而會大於大氣壓力(楊-拉普拉斯方程式)。其可能對我們的分析造成影響，但我未納入理論計算中。這裡我們不妨對其進行量級估計，並和水泵中的動壓進行比較，以說明其可忽略性。

$$2\gamma/D = 2 * 0.073/(0.006 \sim 0.013) = 12 \sim 24 Pa$$

$$1/2 \rho v^2 = 0.5(1000)(1 \sim 3)^2 = 500 \sim 4500 Pa$$

動壓顯著大於表面張力壓力差。因此在實驗精度下忽略表面張力壓是合理的近似。

二、實驗誤差的可能原因及可能的改進方式

(一) 吸管在過程中形變或振動

這是我們未考慮的實務因素，為我們的實驗結果造成潛在的誤差。因此我建議往後的研究者使用更加堅硬的材料(如壓克力、玻璃)以減低此問

題造成的影響。

(二) 電鑽加速、減速過程造成的不穩定流

加減速的過程(約10幀，約0.08秒)會造成不穩定流，這段時間的抽水流率很可能和穩態出現偏差。儘管我們可以測量水流的時間(約2-3秒)已經遠超過水泵將水抽出的特徵時間(L/v ，約是旋轉週期的量級，約0.05-0.1秒)，應可以忽略，將後面的流動視為穩態分析之。然而，更佳的作法是在吸管旋轉抽水的過程中，同時為水盆等流率的補充水(或者使用極大的水盆，並另行收集噴出的水)，用以完全達成穩態，再行測量流率及流量。

(三) 科氏力的影響

本研究的理論模型中假設科氏力不會影響流速等因素。原因是科氏力的方向垂直吸管三角形所在的平面。然而，水流的速度並不均勻，呈丘狀分布(哈根-伯肅業流)，這也就意味著滿管區之科氏力場會有旋度，因而導致不能和壓力梯度力完全抵銷，可能產生渦旋等現象，消耗能量。然而，在此研究中，不討論科氏力的模型，和實驗數據還是有很好的擬合度，因此認為科氏力的影響可和壓力梯度力相抵銷是相當合理的。

(四) 速度的測量

我們應該提升拍照品質，直接用出射水流剛形成水滴的橫向速度，來評估出射速度，因為我事後發現我的方法其實造成了嚴重的不準度。不過這不影響我這個理論的正確性，因為理論對流率的預測仍然高度吻合。

陸、結論

總的來說，我成功利用實驗驗證了我提出的未滿模態模型。

一、水流呈未滿模態時，

(一) 水流流速和吸管旋轉角速率的關係

根據我們的實驗，水流出離心泵的初速和吸管旋轉角速率的關係為一條雙曲線，在角速率很大(使得重力可以被忽略)時近似一條直線。這樣的關係可以使用旋轉座標系中的白努力方程式來擬合。儘管我們測量出的水流初速與此相比仍稍偏低，但應是因為空氣阻力使得噴射距離變短所致。

(二) 水流流率和吸管長度的關係

根據我們的實驗，水流流率對吸管長度沒有顯著關係，根據我們建立的模型，這是因為水流流率並不取決於吸管未充滿段的長度，而是和充滿段的位置相關。

(三) 水流流率和吸管入水深度的關係

綜合我們的實驗和理論，可以得到在角速率夠大的情況下，水流流率大約和深度的平方根呈正比。

(四) 未滿模態模型的結述

水流在進入吸管後，邊緣的水流會因紊流而減速，然而中央水流不受影響。接著水流場保持拋物面狀，直到臨界點---重力和離心力的平行管分量抵銷才漸漸收束，而中央水流流速始終可以用旋轉座標系中的白努力方程式描述。這樣的模型不能完全解出流場，但能讓我們準確的預測吸管水泵的流率及流速。

二、水流呈未滿模態的條件

透過分析全滿模式下管口處壓力的最小值 P_{min} ，若 $P_{min} < P_0$ 則水流呈未滿模態。經過計算， $P_{min} < P_0$ 之條件為 $r_0/r > \sqrt{0.14}$ 。此分析方式合乎實驗結果。

柒、參考文獻資料

1. TYPT-2024 <https://www.iypt.org/problems/problems-iypt-2024/>
2. Reynolds number in tube <https://www.nuclear-power.com/nuclear-engineering/fluid-dynamics/reynolds-number/reynolds-number-for-pipe-flow/>
3. Hagen poiseuille equation <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/hagen-poiseuille-equation>
4. Laplace pressure https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_pressure
5. 本作品為原作者參加第23屆旺宏科學獎未獲獎(亦未公開)之作品的延伸版本
https://drive.google.com/file/d/1-KxZcgIHAx9oRfd_i1i0d84BT-XB2TTw/view?usp=drive_link

附錄

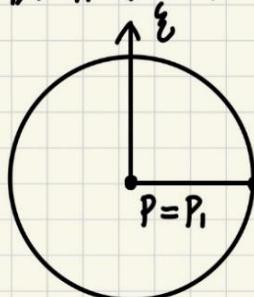
此附錄旨在補充說明「參、」中(三)的管口壓力 $P_{min} < P_0$ 之條件的推導。我們首先計算在全滿狀態下的 P_1 ----管口中央壓力的表達式。在推導中，我利用連續方程式以及動量守恆，還有中央流線滿足伯努力方程式的條件：

$a = \pi r^2$
 $P = P_0, u = \sqrt{r^2 \omega^2 - 2gh_M}$ (中央流線永遠滿足伯努力方程)
 (視中央壓力為平均壓力)
 $P = P_1, V(y) = V_0 (1 - (\frac{y}{r_0})^2)$ (哈根-泊肅葉流)
 $\int_0^{r_0} V(y) 2\pi y dy = \frac{1}{2} A V_0 = au$ (連續方程式)
 $\left\{ \begin{array}{l} A(P_1 - P_0) = \rho au^2 - \int_0^{r_0} \rho V(y)^2 2\pi y dy = \rho au^2 - \rho A V_0^2 / 3 \\ \frac{\rho V_0^2}{2} + P_1 = \frac{\rho u^2}{2} + P_0 \end{array} \right. \text{(動量守恒)}$
 $\frac{\rho V_0^2}{2} + P_1 = \frac{\rho u^2}{2} + P_0$ (伯努力方程) (距離短，忽略重力場)

可解得 $a = \varphi A, V_0 = 2\varphi u, P_1 = P_0 + \frac{1}{2}(1 - 4\varphi^2)\rho u^2 \approx P_0 + 0.187\rho u^2$

其中 $u = \sqrt{r^2 \omega^2 - 2gh_M}, \varphi = \frac{\sqrt{21}-3}{4} \approx 0.396 \approx P_0 + 0.187\rho r^2 \omega^2$

考慮上端全滿的管口，計算 $P_{min} < P_0$ 的條件，亦是半滿的條件
先計算各力在管口上的投影最大值(應從寬估計不穩定條件)



科氏力： $2\rho \vec{V} \times \vec{\Omega} = -2\rho u \omega \cos \theta \hat{x}$ $\theta = 60^\circ$

離心力： $-\rho \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \rho r \omega^2 \sin \theta \hat{y}$

(重力太小 $\omega^2 \gg g/r$)，若要平衡則

$-DP_{\xi, \eta} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \rho r \omega^2, \rho r \omega^2\right)$, 最小壓力為

$$P_{min} = P_1 - \rho r \omega^2 \sqrt{1 + (\sqrt{3}/2)^2} r_0$$

$$= P_0 + \rho r \omega^2 (0.187r - 1.32r_0)$$

當 $\frac{r_0}{r} > 0.14$, $P_{min} < P_0$ ，則為所求條件

(圖18)(作者自行繪製)

接著，為了解出管上端口之最小壓力 P_{min} ，我考慮管口處之截面，因為其流線在滿水狀態平行吸管流動，所以科氏力、重力會與壓力梯度力平衡。因為要解出最小可能的壓力，所以我考慮最大可能存在的科氏力，也就是用中央流線流速 v_0 計算出的科氏力。這樣一來，為了平衡科氏力的壓力梯度力就會有相對 P_1 最大的變化，才得以解出最小可能的 P_{min} 。

透過以下的推導，我們最終解出 $P_{min} < P_0$ 的條件： $r_0/r > 0.14$ (大約值)

原始數據圖

L	r	d	\theta	r_0		質量流率		r_0/r
0.15	0.081	0.023	60	0.0065	81	76.7	(全滿)	0.08
0.08	0.046	0.023	60	0.0065	81	39		0.141
0.07	0.041	0.023	60	0.0065	81	39.4		0.159
0.06	0.036	0.023	60	0.0065	81	34		0.181
0.05	0.031	0.023	60	0.0065	81	41.4		0.21
0.07	0.04	0.00472	60	0.0056	81	5.9		0.14
0.07	0.04	0.00872	60	0.0056	81	22.4		0.14
0.07	0.04	0.01272	60	0.0056	81	39.2		0.14
0.07	0.04	0.01672	60	0.0056	81	50.5		0.14
0.07	0.04	0.02172	60	0.0056	81	54.8	(半滿)	0.14
0.12	0.063	0.03	60	0.0039	18.9	0		0.062
0.12	0.063	0.03	60	0.0039	34.3	0.0699		0.062
0.12	0.063	0.03	60	0.0039	35.9	0.0704		0.062
0.12	0.063	0.03	60	0.0039	37.7	0.0662		0.062
0.12	0.063	0.03	60	0.0039	41.9	0.0778		0.062
0.12	0.063	0.03	60	0.0039	62	0.0792		0.062
0.12	0.063	0.03	60	0.0039	83.7	0.0966	(全滿)	0.062
0.07	0.04	0.019	60	0.006	150.7	0.0685		0.15
0.07	0.04	0.019	60	0.006	79.3	0.0611		0.15
0.07	0.04	0.019	60	0.006	100.5	0.0716		0.15
0.07	0.04	0.019	60	0.006	83.7	0.0707		0.15
0.07	0.04	0.019	60	0.006	25	0		0.15

(表2) (作者自行紀錄)

旋轉角速率(RAD/S)	噴射距離(m)	噴射初速(m/s)
70.7	0.56	2.33
47.1	0.33	1.72
51.4	0.35	1.78
83.8	0.76	2.78
40.0	0.22	1.34
45.5	0.32	1.70

$$L = 0.070m \quad g = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad \theta = 60^\circ \quad h_0 = 0.015m \quad d_0 = 0.02m$$

(表3) (作者自行紀錄)

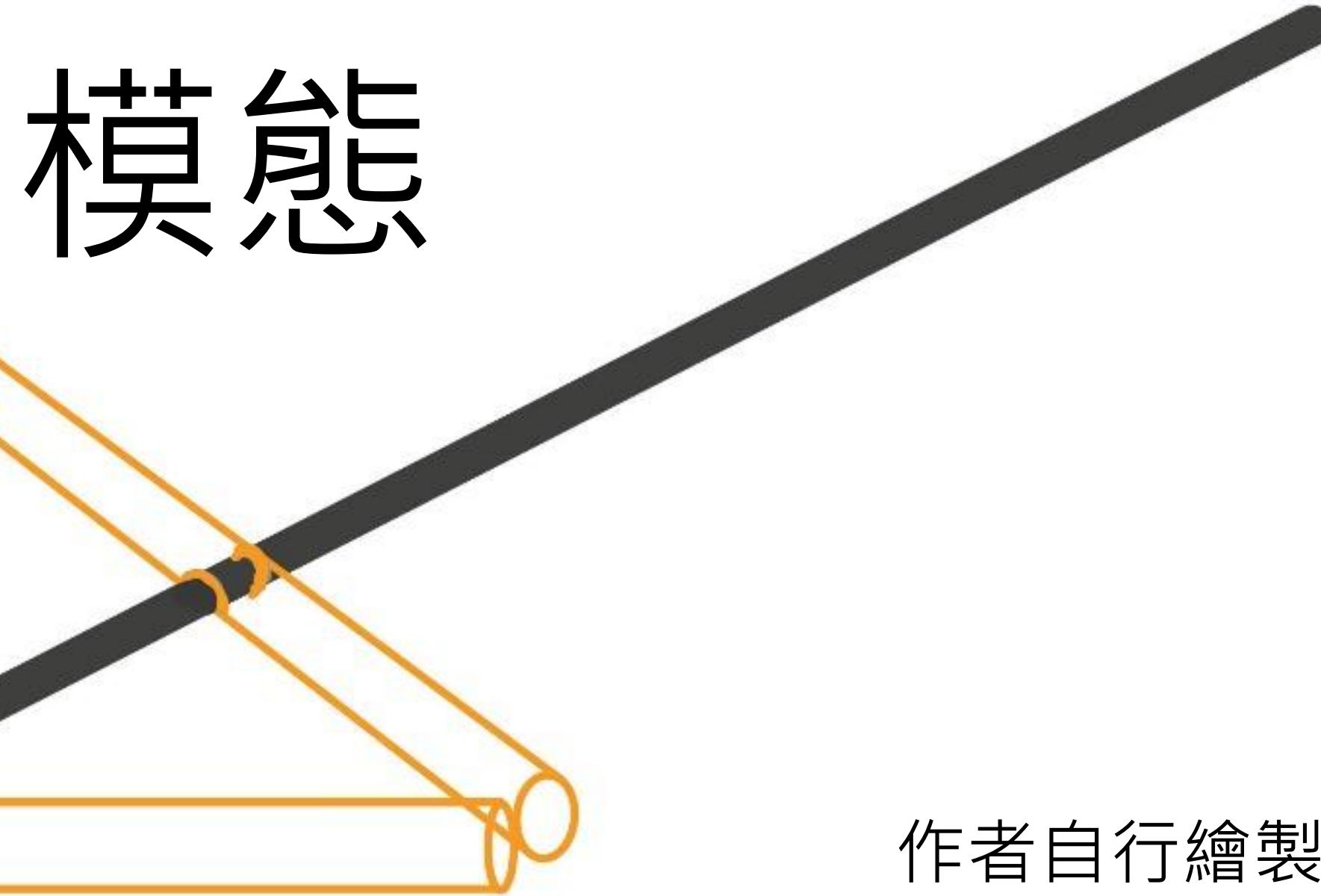
註：本實驗中的所有拍攝照片皆為使用紅米Redmi Note12 Pro+慢動作120fps錄影

【評語】051810

以旋轉 V 型管抽離容器內水，探討該抽水裝置的抽水量，為 TYPT 競賽題目延伸。以 V 型管角度及旋轉速率為實驗參數，觀測抽水量及抽水落地位置，做成吸管的管徑與旋轉半徑比大於一定值時，水流因無法穩定地充滿整個吸管，離心泵中的水流將會穩定的僅占據吸管的一部分。本作品內容已見於 2025 年國際科展作品，並未揭露或理解新穎物理現象。作品使用手持電鑽提供離心旋轉，較難調控轉速，建議使用可精確調控轉速的馬達，並採用較小轉速及較小轉速間距，應可顯現新穎現象。

作品海報

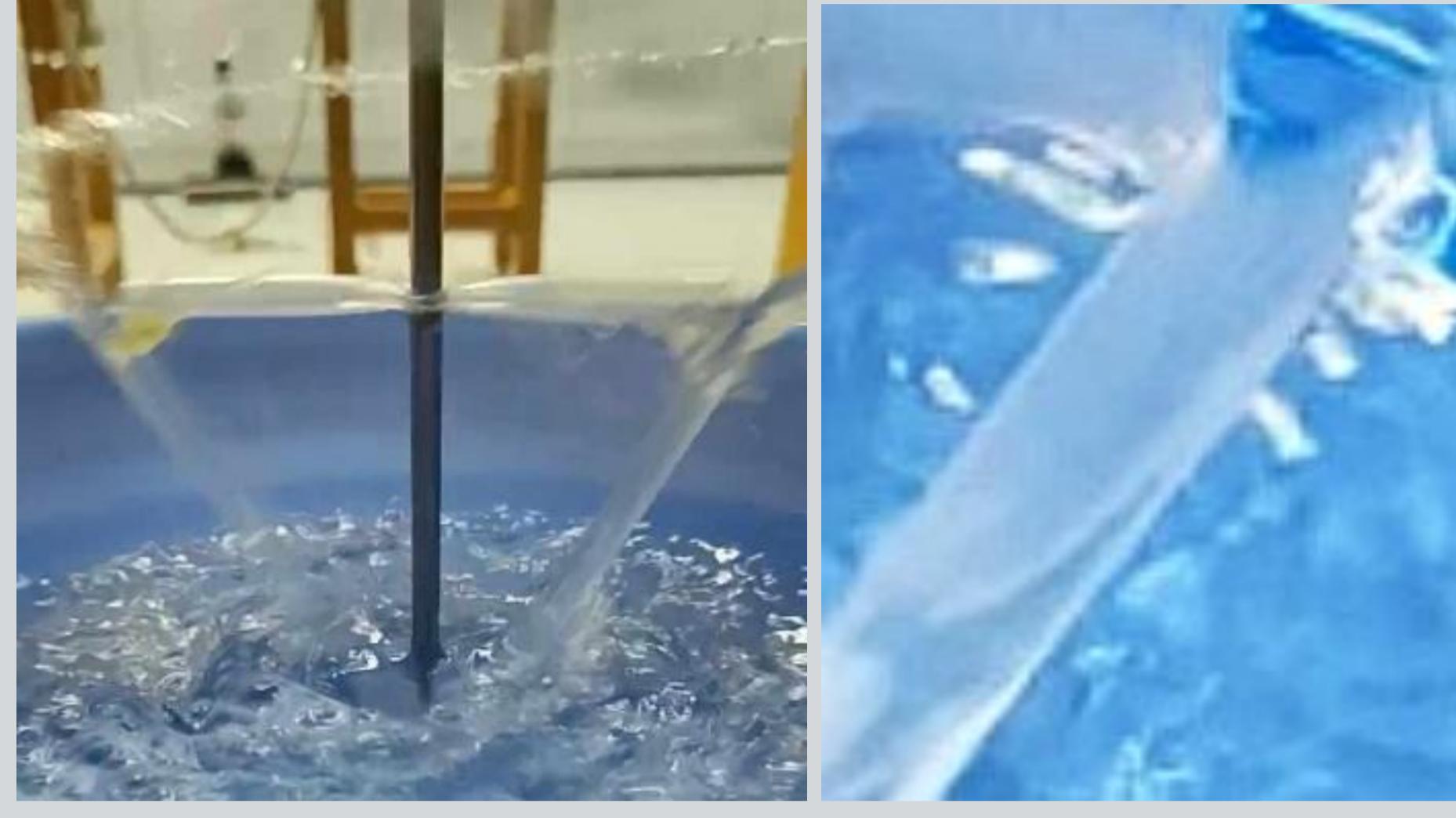
簡單離心水泵的未滿水流動模態



作者自行繪製

簡介

受到 2024 年 TYPT 題目「Pumping Straw」啟發，要求以三段吸管構成的離心泵在旋轉下的抽水現象。使吸管部分浸水並定速旋轉。我專門探索「未滿水」特殊情況的存在條件與流場，結合白努力方程式與穩定性分析，以簡潔的模型理解此模態的行為。



(以上圖皆為作者自行拍攝)

實驗目的

為了解現象，我利用旋轉座標系建立「未滿模態模型」以瞭解流場，並做以下實驗驗證之：

1. v 對 ω 的關係(後更改為 R 對 ω 的關係)
2. $\frac{dm}{dt}$ 對 ω, L, d 的關係
3. 未滿模態存在的條件

自變數：(旋轉角速率 ω , 吸管長度 L , 吸管入水深度 d)

測量：(是否半滿, 水拋射離軸距離 R , 水流質量流率 $\frac{dm}{dt}$)

常數：重力加速度 $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ ，吸管仰角 $\theta = 60.0^\circ$

水密度 $\rho = 997 \text{ kg m}^{-3}$, 手機拍攝幀數 $f = 120 \text{ Hz}$

其他(在同組實驗中會保持)：吸管半徑 r_0

座標系統(和三角形吸管同平面)：

(離水面鉛直高度 h , 離旋轉軸心距離 r)

設備架設



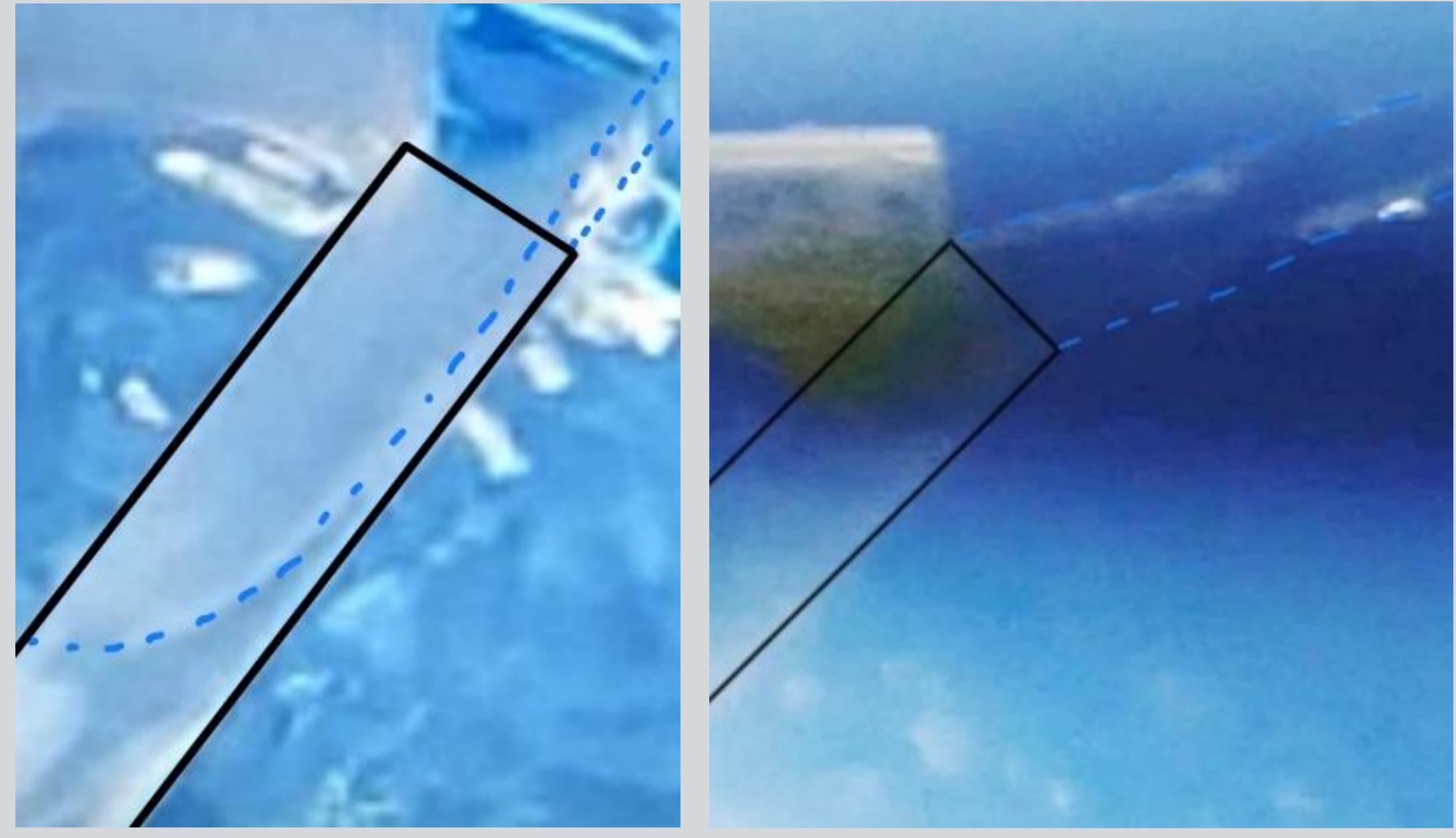
(上圖皆為作者自行拍攝)

在水盆上方架設電鑽(帶動浸入水中的吸管旋轉)，在旁邊架設手機(計時、判斷是否半滿)，在下方架設尺(測量 v)或電子秤(測量 dm/dt)

研究方法

測量應變變數

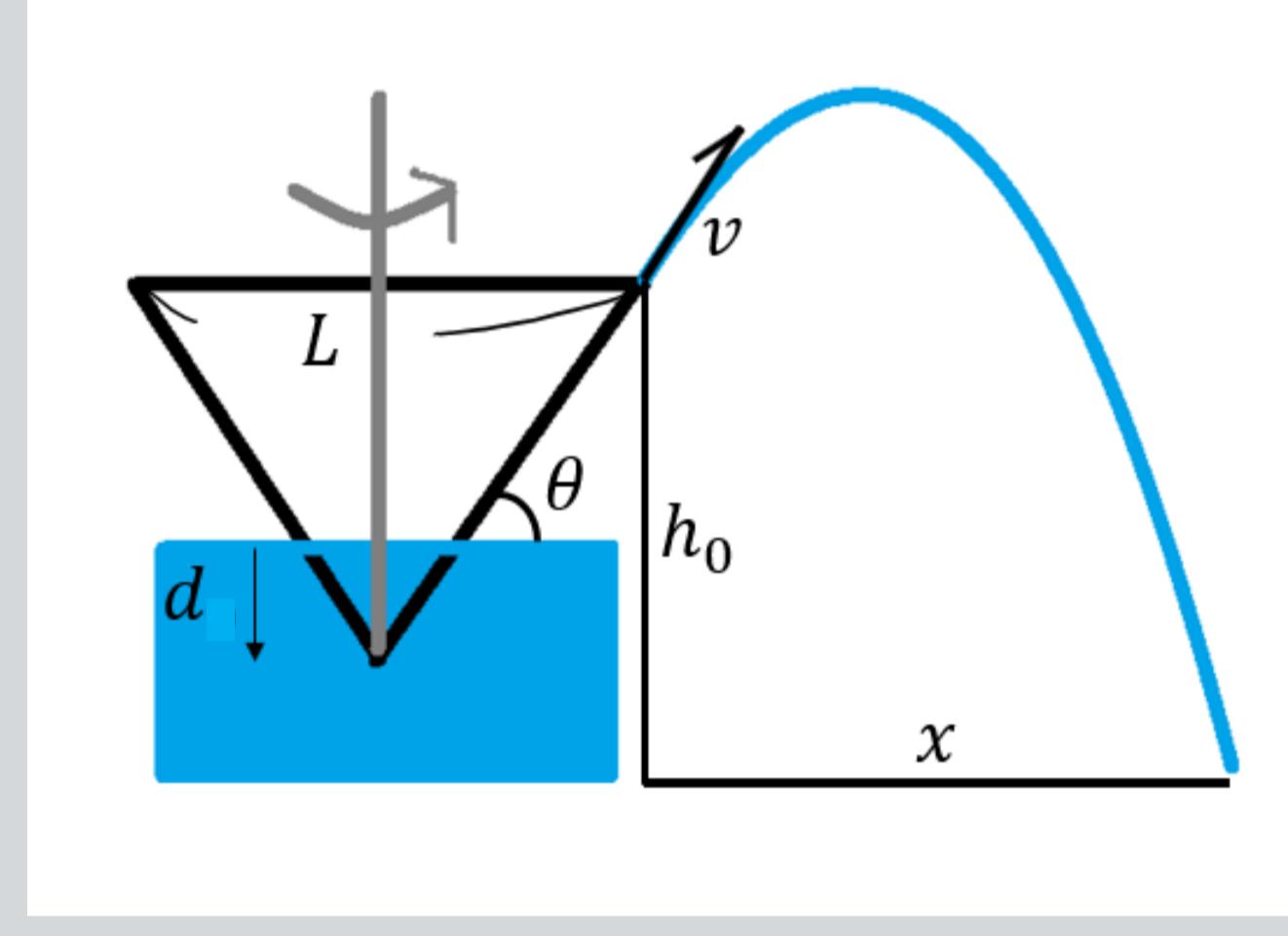
透過手機觀察水流為半滿模式或是全滿模式



(以上圖皆為作者自行拍攝繪製)

如圖所示，每次實驗(2-3 秒)都會進行這樣的拍攝，確認其為全滿還是半滿，

測量抽水流速



(作者自行繪製)

因為開口出水柱的分製造成的混亂，我並沒有直接量出射出的初速，而是用長尺測量吸管旋轉而噴出的水環的半徑對 ω 作圖($R - \omega$ 圖)，而再用理論推出的 v 導出 R ，進行比較來確認理論的適用性。

測量抽水流率

以在測量時間中的 $\Delta m / \Delta t$ 定義，其中

Δm = 噴水前後的電子秤讀數總變化

Δt = 噴水始末的時距(由手機錄影紀錄)

並且我為了避免水位變化過大，(3秒以上的噴射可使得水位變化約 3mm)或者加減速的時間不可忽略，(約 0.08s)限制一次實驗的噴射時間 Δt 在 $2 - 3\text{s}$ 。

測量及控制自變數

旋轉角速率 ω

以旋轉過程中手機錄影的每圈幀數測量。控制的方法則是利用貼在電鑽加速按鈕上的一個凸起物確保旋轉過程中的每圈幀數不會差異超過一幀，來得到角速率(約在 $40 - 150\text{rad/s}$)。

吸管長度 L

製作時直接用直尺測量即可。

入水深度 d

用直尺測量，定為下端吸管相碰處與水面的距離。

透過約束噴射時間，我可以將 d 在過程中對時間的變化視為線性，因此可以將噴射過程中 d 視為噴射前後的平均。

1. TYPT-2024

2. Reynolds number in tube

3. Hagen poiseuille equation

4. Laplace pressure

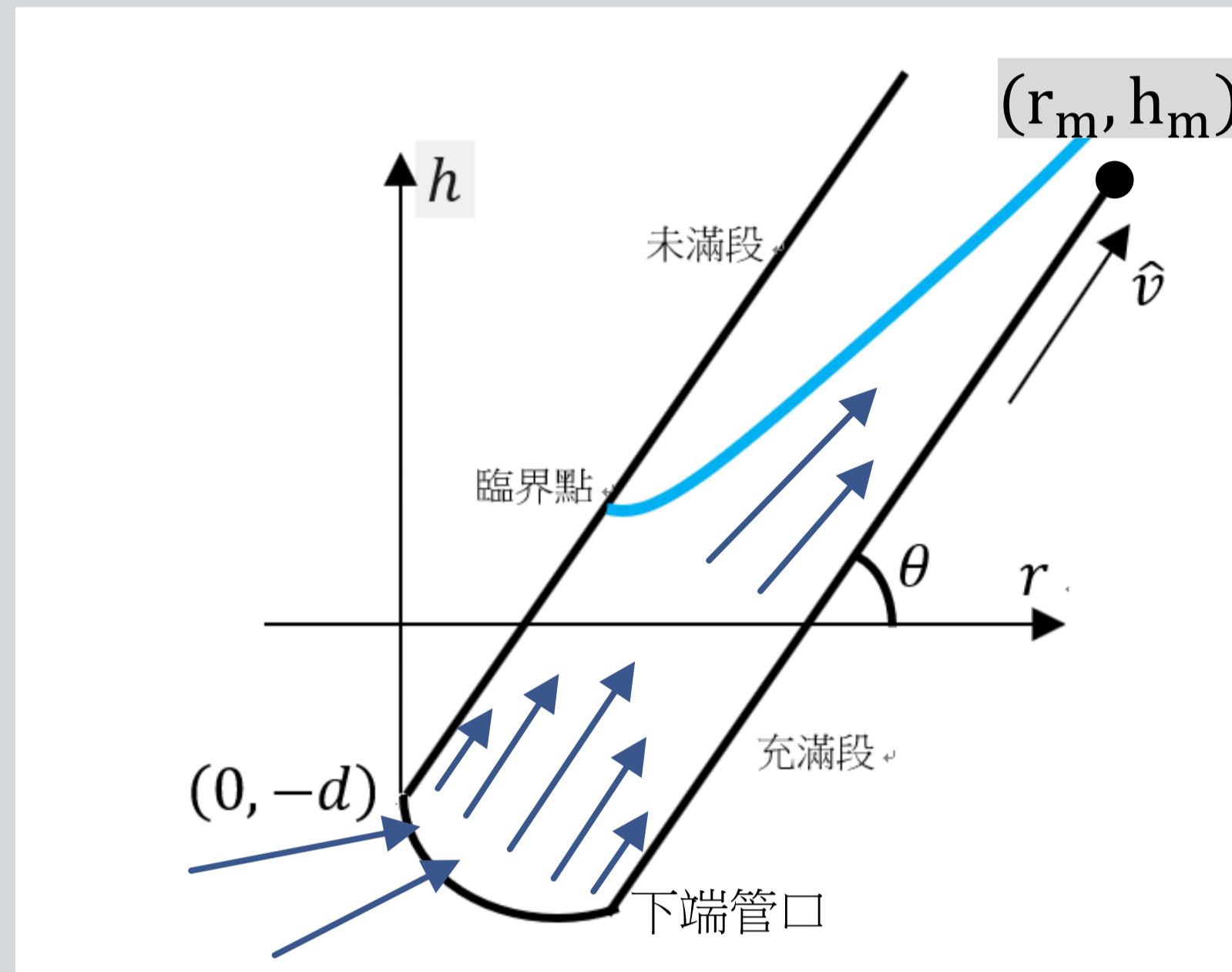
5. 本作品為原作者參加第 23 屆旺宏科學獎未獲獎(亦未公開)之作品的延伸版本

理論模型

隨著吸管的旋轉建立柱座標系並套用能量守恆式，得到在同一流線上

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh - \rho \frac{r^2\omega^2}{2} + P = constant$$

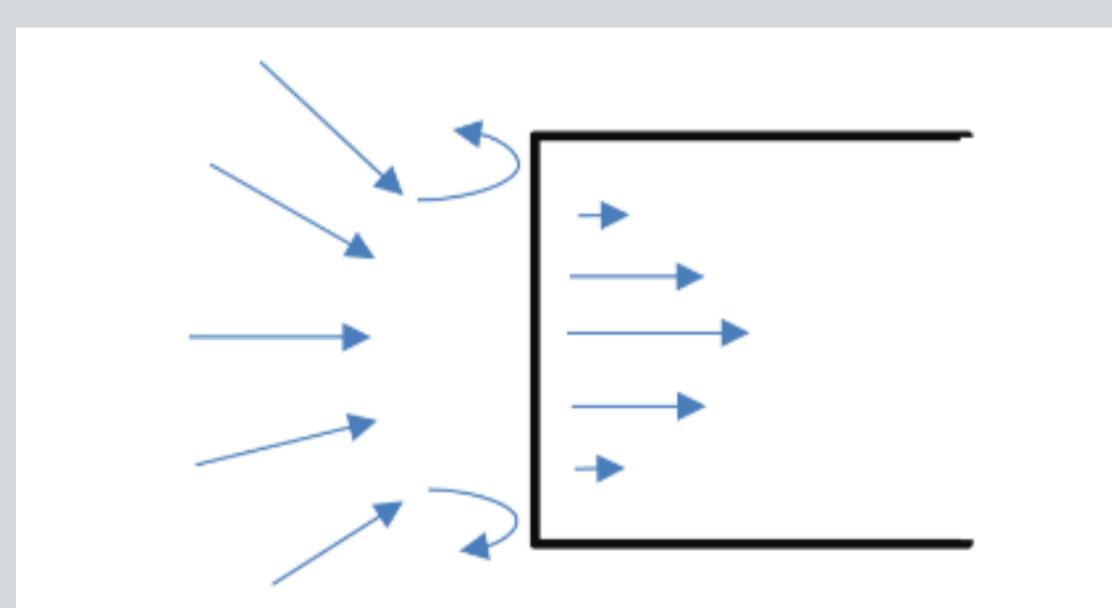
黏滯力、紊流、水的壓縮性被忽略。在黏滯力可忽略的流域我利用此假設。我將流域分成四段進行理論分析，以下為其中一側吸管的圖片。



(作者自行繪製)

充滿段：哈根-泊肅葉流、弱黏滯力

先分析可以直接得到解的此段，我將充滿段視為均勻的 hagen poiseuille 流(因為吸管很細、除黏滯力以外的其他力平行管的分量應該在同一截面中被視為常數)，流場在吸管橫截面上呈拋物面分布 $v(y) = v_0(1 - (y/r_0)^2)$ ，但因為黏滯力貢獻的能量損耗仍然相當有限($W/K \sim 1/Re * d/r_0 \ll 1$)，故白努力方程式仍對中央流線有效。



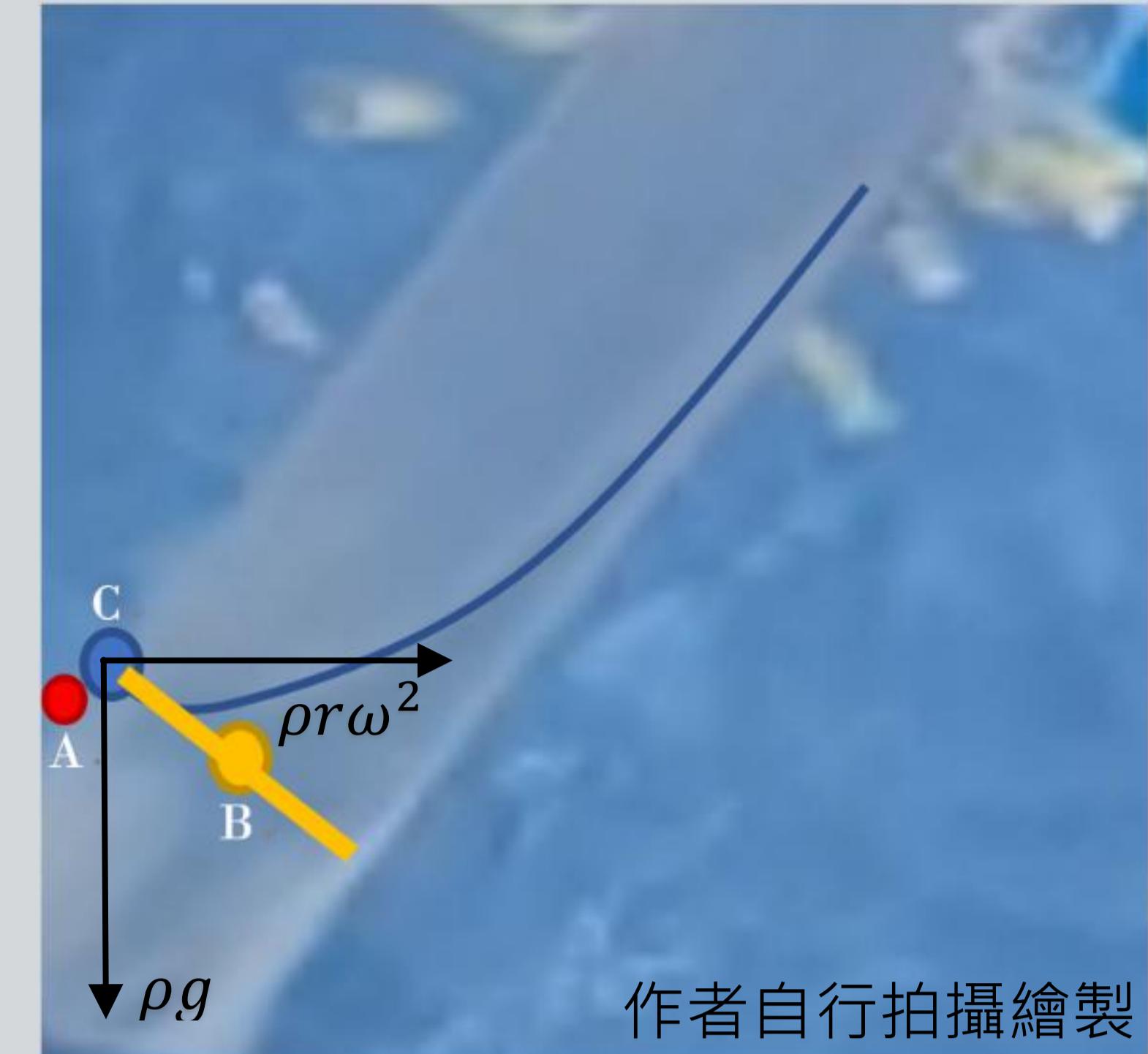
(作者自行繪製)

遠方-下端開口：僅中央無紊流

在這之前的流線都滿足白努力方程式，但在下端開口中，我考慮外圍流線速度需要耗散不可忽略黏滯力至和第二區域相同(哈根-泊肅葉流)，但假設中央流線不作受紊流影響，仍然保持白努力方程式的正確性。

臨界點

忽略表面張力，依據以下論述，可以證明在交界點上重力、離心力、在臨界點上的平行吸管方向之合力為0。(接下來提到合力就意指這幾個力，也就是除了壓力梯度力剩下的力)一個剛剛經過電鑽加速後的水面水面很高，根據穩流假設，可以發現在臨界點C沿著平行吸管面正下方點A的壓力小於 P_0 。而這樣的邊界是「空穴不穩定」的，使得液面持續下降。所以我們可以預期液面會下降直到合力為0。



作者自行拍攝繪製

據此和充滿段的條件，可以得到臨界點的位置，對應之截面中央流線的速度 v_0

$$v_0 = \sqrt{2gd - (gtan\theta/\omega)^2}$$

面積分並乘以密度，導出質量流率

$$dm/dt = \rho\pi r_0^2 \sqrt{2gd - (gtan\theta/\omega)^2}$$

未滿段-上端出口

(更改作品說明書中的不嚴格分析)作品說明書使用了白努力方程式得到以下的算式，

$$v = \sqrt{r_m^2\omega^2 - 2gh_m}$$

然而這是旋轉座標系中的結果，變換回慣性座標系時我們要補上一個和吸管所在平面正交的速度 $r_m\omega$ ，並且考慮管口流入水的平均耗散能量，才得到水平速度

$$v_x = \sqrt{r_m^2\omega^2 + (r_m^2\omega^2 - 2gh_m - \frac{v_0^2}{2})\cos^2\theta}$$

，鉛直速度

$$v_y = \sqrt{r_m^2\omega^2 - 2gh_m - \frac{v_0^2}{2}\sin^2\theta}$$

再考慮入噴射出後高雷諾數下的空氣阻力

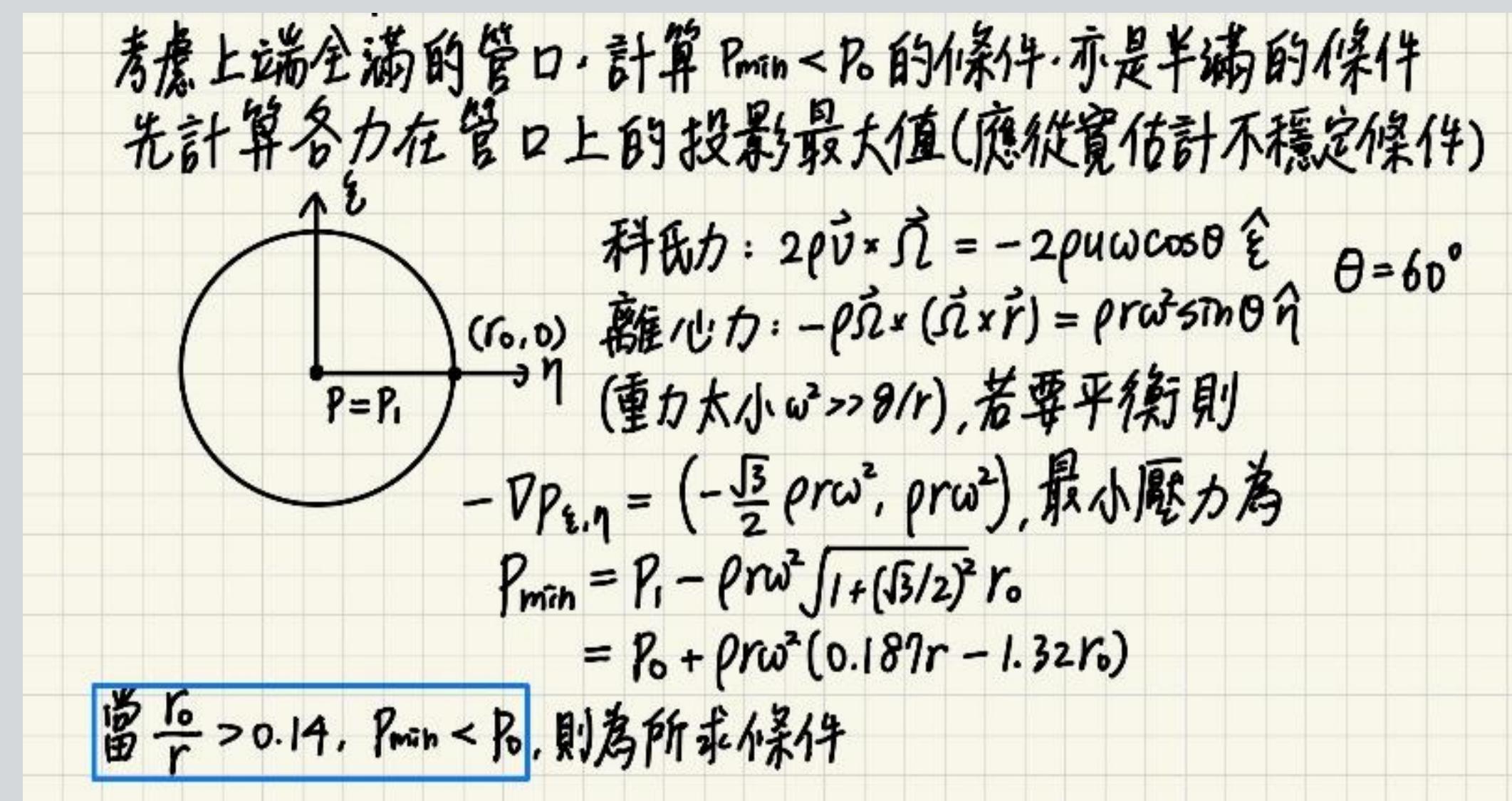
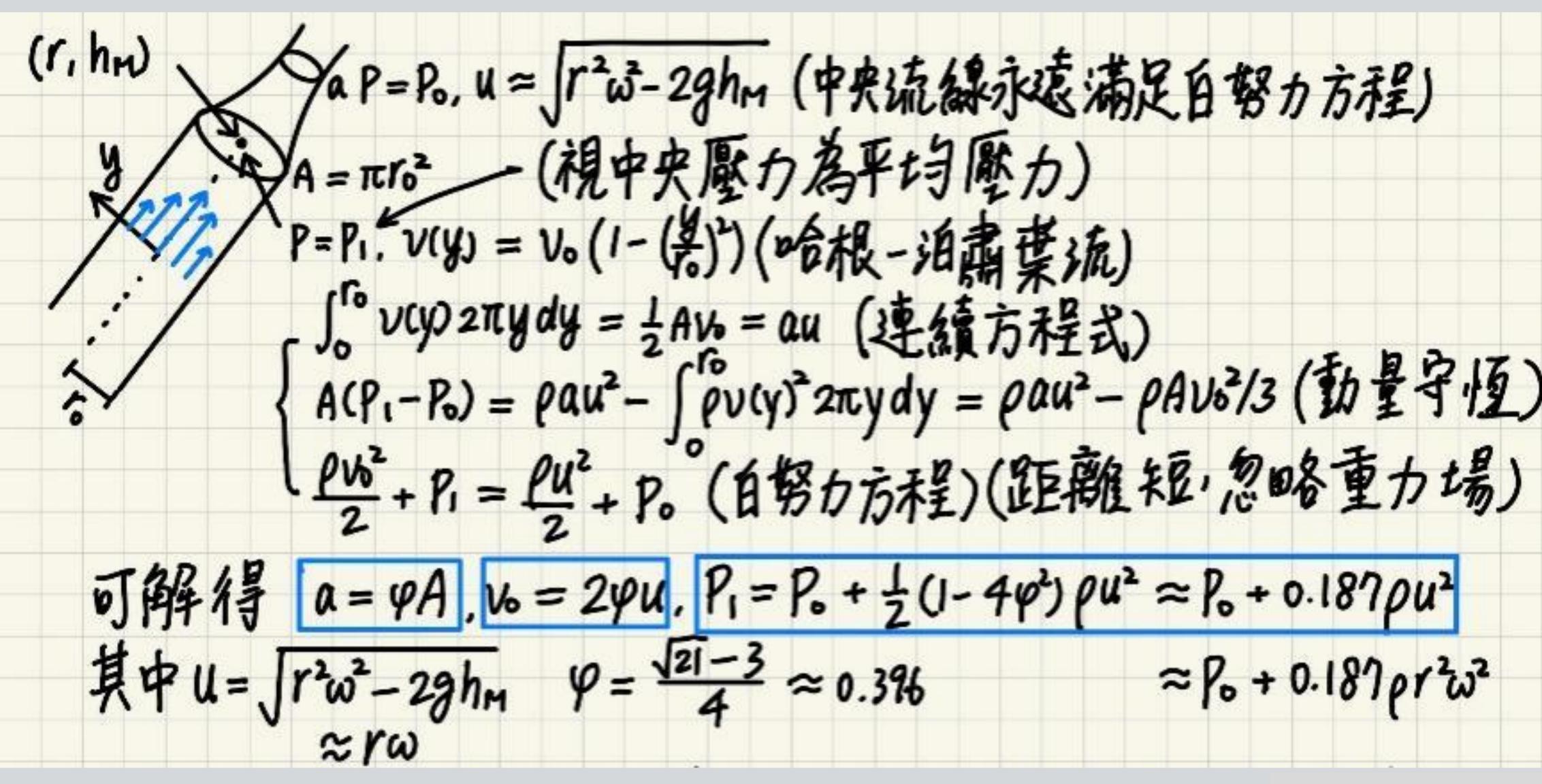
$$F = -kv^2$$

可以利用程式數值解斜拋微分方程式，來計算出拋射距離 R 。

忽略的部分：臨界點附近，因為速度差改變導致的大量耗散，以及在管口處的強烈耗散，使得我的模型不論採用多大的 k 在應對噴射速度時，都出現了嚴重但可以被解釋的偏差。儘管如此，前面幾點的分析可以受到質量流率的檢驗，使得模型的正確性不受顛覆。

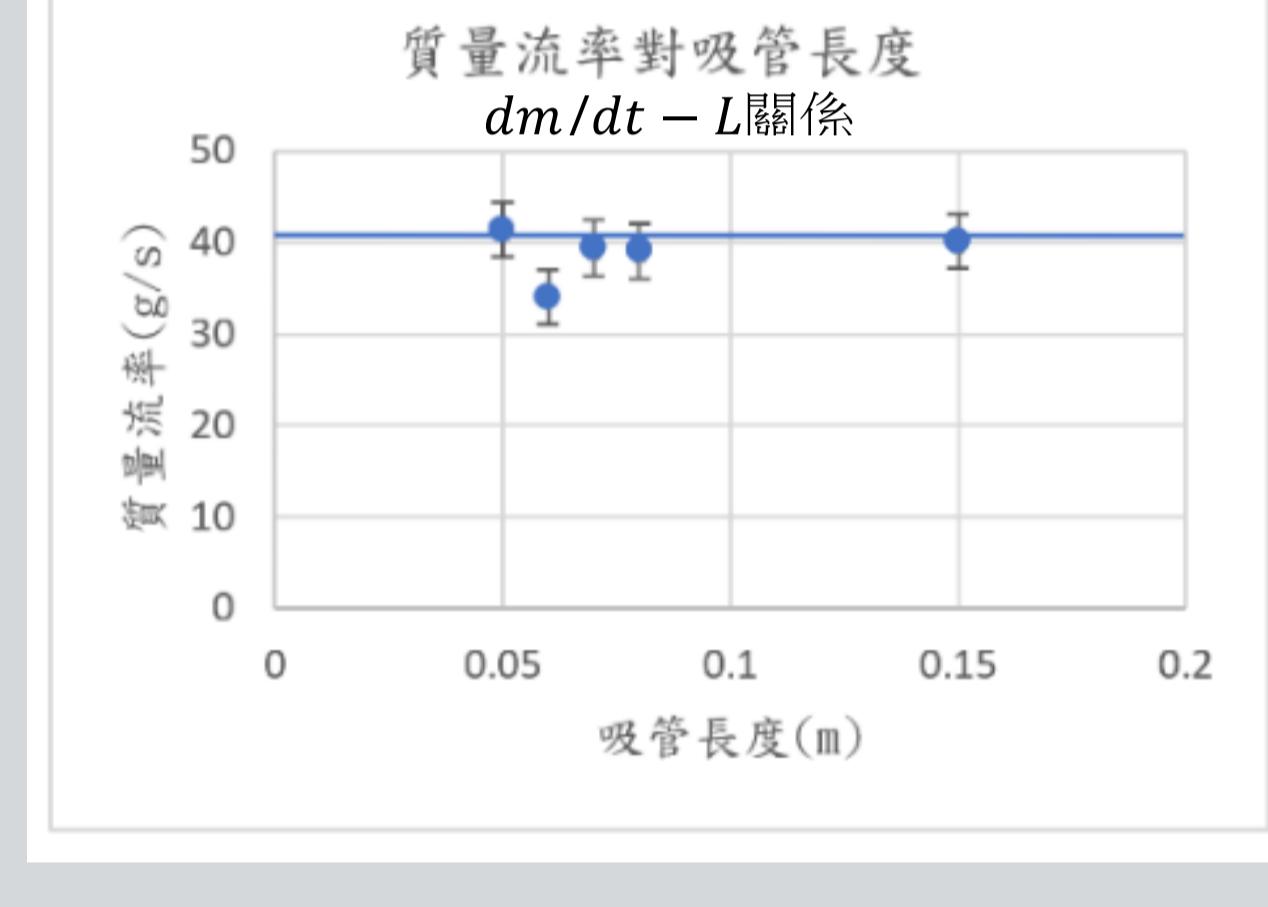
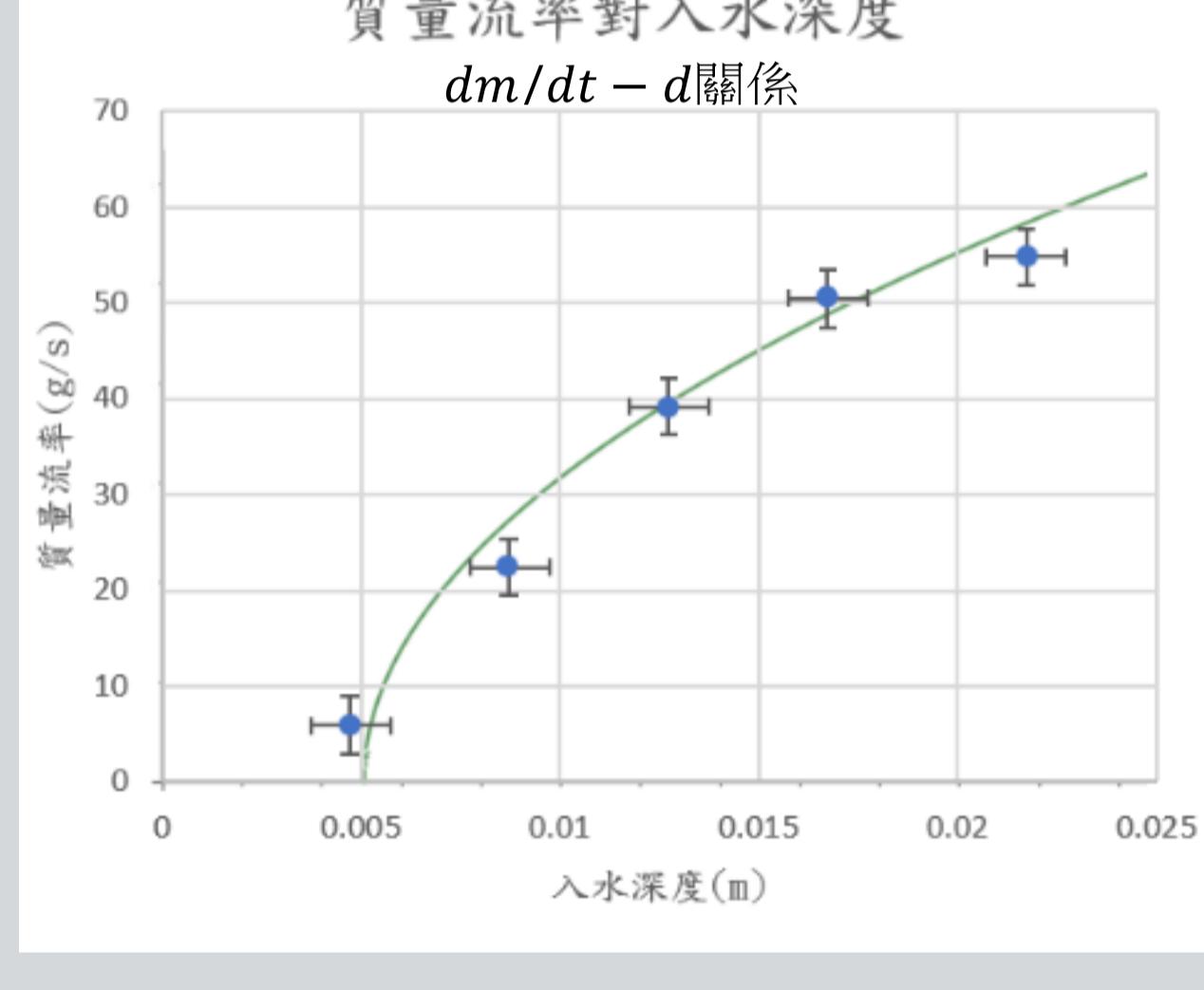
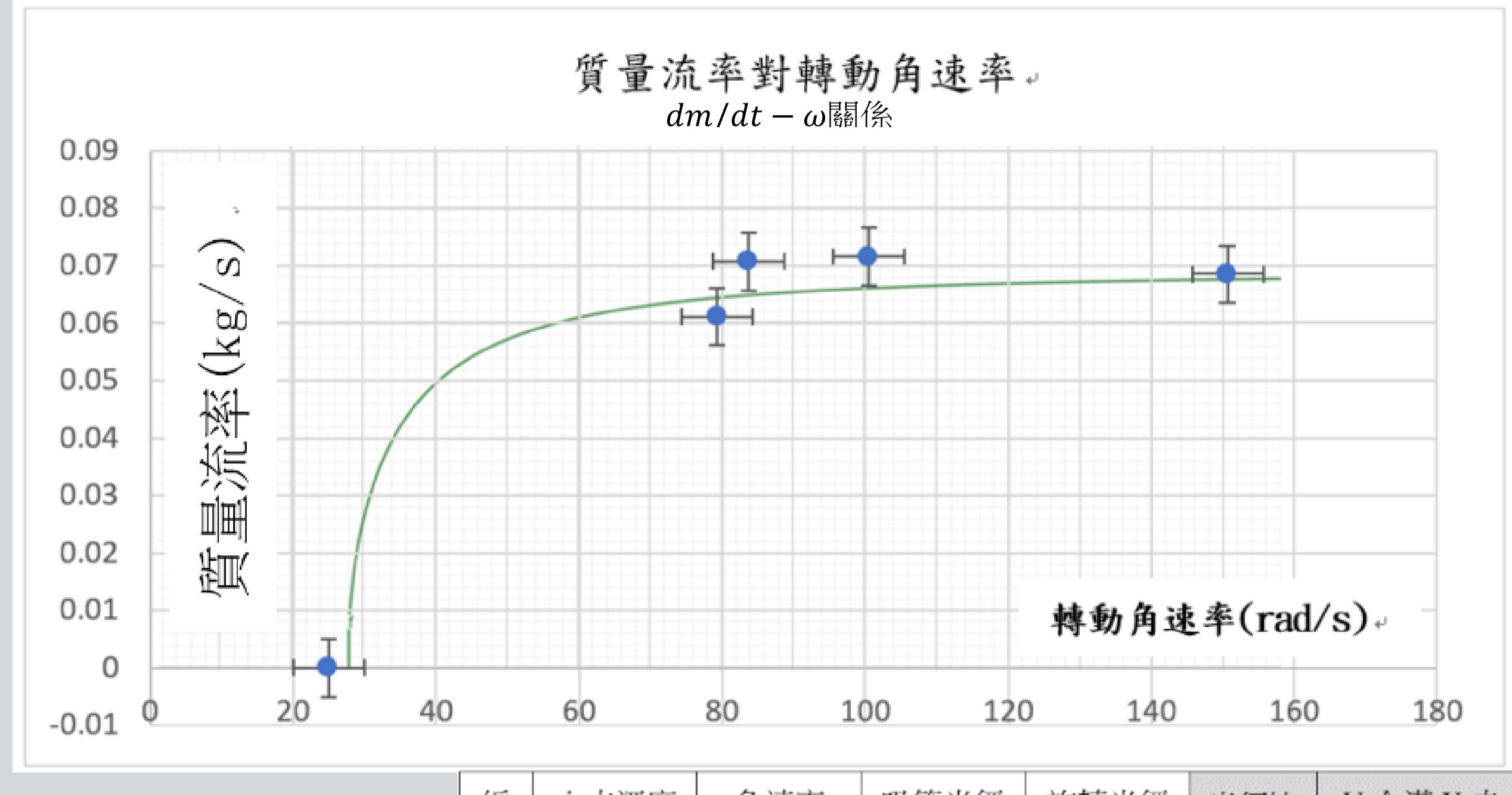
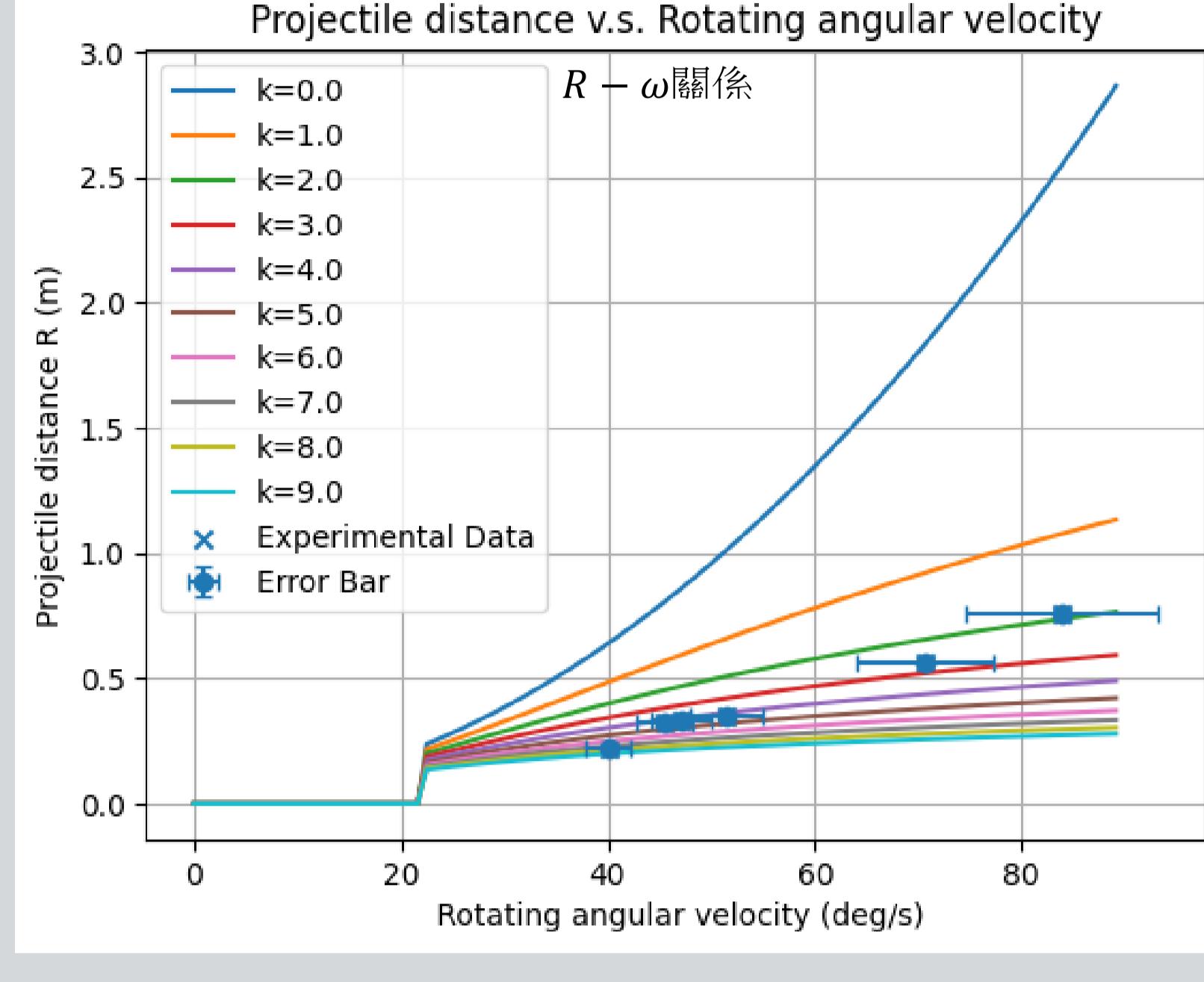
未滿模態發生的條件

全滿模態不穩定。電鑽開始轉動起初水會充滿整管，再變成半滿模式。故只有當全滿模式不穩定時，才可能使得水流變成未滿模態。我分析射流縮聚的模型，得到吸管出口中央水流的壓力，再考慮再整個管口處科氏力(為了盡量寬估不穩定性發生的條件，採最大科氏力為整體的科氏力)和離心力與壓力的平衡條件，計算出管口處可能存在之最低水壓 P_{min} 。如前一點對空穴穩定性的討論， $P_{min} > P_0$ (大氣壓力)才會使全滿模態穩定，否則必然招致空氣的流入。在高轉速下的結論為：當 $r_0/r > 0.14$ (大約值)，半滿模式出現。



(皆為作者自行繪製)

實驗結果(依序回應實驗目的，實線為理論預測，藍點為數據點，附上 B 類不確定度的誤差槓)



編號	入水深度 (m)	角速率 (rad/s)	吸管半徑 r_0(m)	旋轉半徑 r(m)	半徑比 r_0/r	V:全滿 X:未滿
1	0.030	18.9	0.0039	0.064	0.062	V
2	0.030	35.9	0.0039	0.064	0.062	V
3	0.030	83.7	0.0039	0.064	0.062	V
4	0.023	81.0	0.0065	0.081	0.080	V
5	0.0047	81.0	0.0056	0.040	0.140	X
6	0.0127	81.0	0.0039	0.040	0.140	X
7	0.0217	81.0	0.0039	0.040	0.140	X
8	0.023	81.0	0.0065	0.046	0.142	X
9	0.023	81.0	0.0065	0.036	0.181	X
10	0.019	79.5	0.0060	0.030	0.200	X
11	0.019	82	0.0060	0.030	0.200	X
12	0.019	150.1	0.060	0.030	0.200	X

(皆為作者自行繪製)

討論

1. 關於穩流的假設：本實驗的雷諾數 $Re \in [860, 4420]$ ，絕大部分皆可以被看作層流。

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

也因此我們使用 $\frac{W}{K} = \frac{1}{Re} \frac{d}{D}$

2. 關於中央無耗散的假說：管中央不受紊流影響為一個受到實驗驗證的假說。

3. 僅考慮壓力梯度力和重力作功的穩流：

表面張力壓不大 ($d \gg \sqrt{\gamma/\rho g}$)，予以忽略是合理的選擇。

因為有旋度，科氏力場可能造成渦漩，但因為方向和吸管面垂直，不討論科氏力在建模上是好的近似。

4. 關於實驗：

吸管之形變可能影響結果，應使用更堅硬的材料。

本實驗可能無法使流場完全達到穩態，使得持續抽水並在水盆中補充水為更佳選擇。

在測量速度方面，應該對水進行染色，用影像追蹤的方式記錄管口初速為更加選擇。

5. **拋射距離的誤差來源：**

我們由從上面的 $R - \omega$ 關係圖看到，距離的誤差不單純只來源於一般期待的二次方空氣阻力，他可能是由於各種原因的耗散，比如說管口的速度差要求的黏滯耗散，或著水滴形狀的不規則所增加的複雜度等。

結論

我透過「下端開口有紊流處僅中央流線維持白努力方程式」的假設和「空穴不穩定性」對應的臨界點，算出流場，並解釋了此水泵抽水時所觀察到的現象與測量到的流率，但流速部分的對耗散的分析不夠完備，但不影響整體的分析。總之，實驗驗證了提出的未滿模態模型，並且此種分析手段事實上可以應用在很多不同的雙相流中。