

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051809

范氏起電機驅動之靜電風車運動模型探討

學校名稱： 國立臺東高級中學

作者： 高二 曾琮凱 高二 薛理恩 高二 林詩唯	指導老師： 李建寬
---	------------------

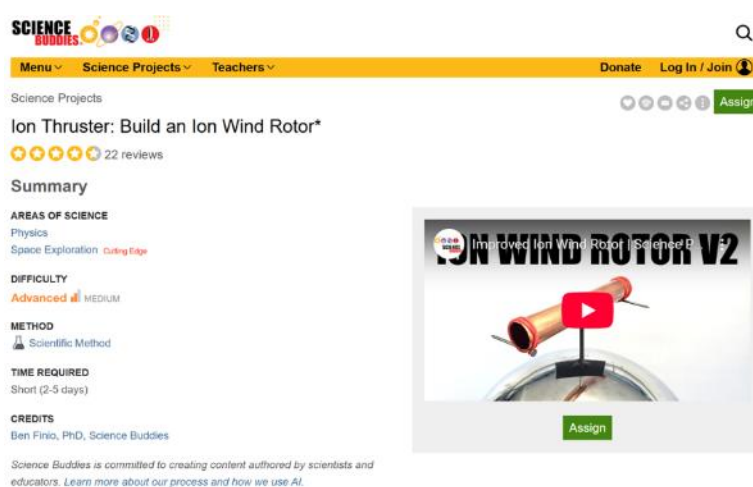
關鍵詞： 范氏起電機、尖端放電、靜電風車

摘要

本作品係利用范氏起電機產生靜電，並以電壓驅動標準靜電風車及自製鋁質靜電風車模型。其中標準靜電風車為范氏起電機附帶之零件，而自製靜電風車可改變包含尖端角度，風車半徑與阻力係數。以電鑽增加轉速改變范氏起電機輸出電壓。在各項實驗中分別測量包含電壓，離子風穩定性與轉動角速度。透過參考資料與實驗建立風車系統轉動時的統御方程式。結論包含推力與電壓呈正相關並在尖端角度介於30-45度間有最大推力，半徑影響特徵時間與終端角速度，阻力係數影響轉動方程，使系統分為指數飽和與雙曲正切飽和。最後探討其對空氣中微粒清潔之實際應用。

壹、前言

作者在 Science Buddies 網站上看到「離子推進器」實驗，被其帥氣名稱吸引。其內容提到的雖非常見的離子風泵，卻是同樣以尖端放電驅動並使圖一中裝置轉動，動力來源不同的是該項實驗以靜電力驅動而非高壓電路或特斯拉線圈。該網站提及，靜電可電離部分空氣使其離子化，進而以庫倫力驅使裝置轉動，甚至能在一段時間後達到每秒數圈的轉速。

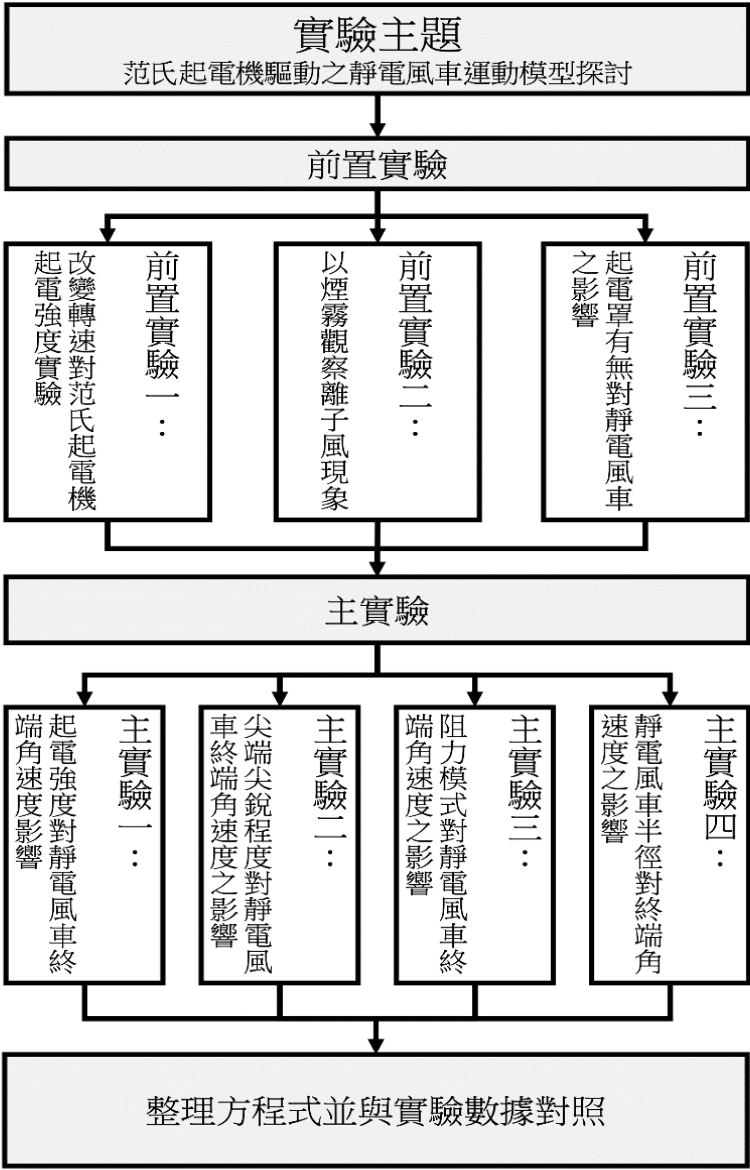


圖一：ion thruster 網站示意圖(圖片來源: sciencebuddies.org，見參考資料二)

而在實驗室恰有包裝完整的范氏起電機。內容包起電機本體、集電罩、導電棒與一枚鋁製靜電風車，而這給了作者一個機會探討這枚標準的靜電風車。在設想了包含改變尖端、電壓、半徑、阻力係數等變因後，作者亦以可樂罐製作靜電風車的模擬模型。相較於前人關於富蘭克林馬達或電暈馬達，離子風泵等實驗。以靜電產生離子風能是鮮有人進行過的實驗。且相較於特斯拉線圈，經常被觸碰的教具范氏起電機亦更為安全。後續討論亦會闡述在空氣淨化方面的可能應用，使范氏起電機與可樂罐不只是實驗道具。

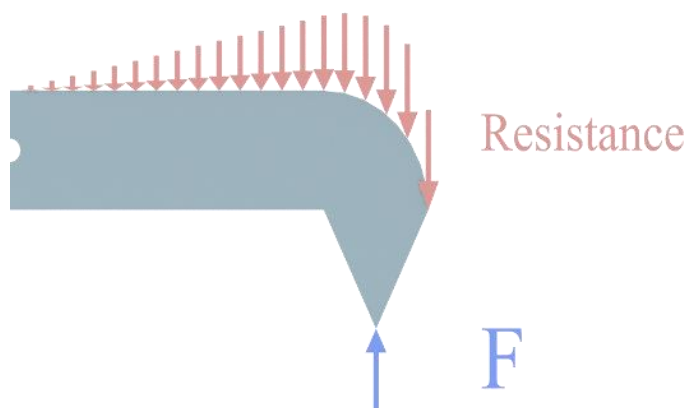
研究目的：

- 一、 探討施加范氏起電機起電強度與靜電風車終端角速度之關聯性
- 二、 探討阻力模式對終端角速度之影響
- 三、 探討尖端角度與施加推力效率關聯性
- 四、 探討不同半徑對達到終端角速度所需時間與終端角速度
- 五、 分析靜電風車之受力狀況與阻力系統
- 六、 求解統御方程式及討論該方程式中各系數之物理意義

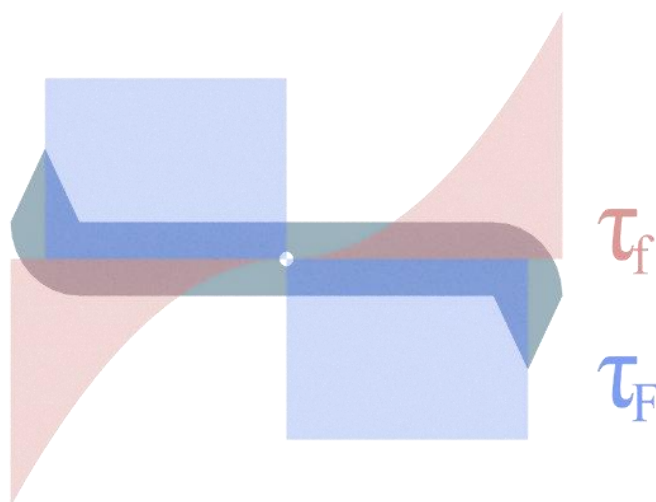


圖二:實驗架構總圖(第三作者繪製)

分析靜電風車之受力情形，受力狀況如下：



圖三：受力分析示意圖。(第三作者繪製)



圖四：力矩平衡時示意圖。(第三作者繪製)

其中圖三之藍色箭頭表離子風推力，紅色箭頭表作用於靜電風車之空氣阻力。圖四之藍色矩形表示推力之力矩，根據參考文獻，離子風所能產生之推力極小，約為克重至毫牛頓級別，力矩在該靜電風車上為力偶形式。而阻力則為均布力散佈於靜電風車懸臂之另一端，其力矩與推力力矩方向相反。

分析離子風穩定時期推力與空氣阻力之合力矩，由於不能確認在各實驗下屬於何種模型。於是假設兩阻力模型，式(1)、(2)中各項未知數之意義如表一：

表一：受力分析代數與因次表

符號	F	R	r	Γ	ω	ω_{steady}
物理意義	推力	半徑	局部半徑	合力矩	角速度	終端角速度
因次	$[MLT^{-2}]$	$[L]$	$[L]$	$[ML^2T^{-2}]$	$[T^{-1}]$	$[T^{-1}]$

一、小阻力狀態

在慣性阻力與黏滯阻力之比值極小時，依據斯托克斯公式(Stokes' law)對小雷諾數時的修正項，可假設靜電風車系統所受阻力 $f_{resistance}$ 正比於速度 \vec{v} ，又 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ，此時定義 k 值為該靜電風車的系統阻力係數。

由於推力阻力向量皆與該靜電風車之半徑垂直，將外積之大小令為兩者絕對值相乘，其合力矩 Γ 的量值為：

$$\Gamma = 2FR - 2 \int_0^R kr\omega r dr$$
$$\Gamma = 2FR - \frac{2}{3}kR^3$$

當阻力矩與推力達平衡時（ $\Gamma = 0$ 時），依據角動量守恆，其角速度為定值：

$$\omega_{steady} = \frac{3F}{kR^2} \quad (1)$$

二、大阻力狀態

又當慣性阻力與黏滯阻力之比值很大時，依據空氣阻力公式可假設系統阻力 $f_{resistance}$ 正比於速度 v^2 ，又 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ，在該平方阻尼的條件下，定義 k' 值為此時離子風車的系統阻力。

為方便計算，其合力矩 Γ 之量值為：

$$\Gamma = 2FR - 2 \int_0^R k'r^2 \omega^2 r dr$$
$$\Gamma = 2FR - \frac{1}{2}k'R^4 \omega^2$$

當阻力矩與推力達平衡時（ $\Gamma = 0$ 時），依據角動量守恆，其角速度為定值：

$$\omega_{steady} = \sqrt{\frac{4F}{k'R^3}} \quad (2)$$

根據參考文獻，對以一旋轉圓盤或旋轉圓棒而言，阻力係數與形狀有關。在實驗中，薄鋁片(厚度約0.1mm)之阻力係數極小，以形狀而言可能為0.1或更低。對漸折起的鋁片(即後續提及之阻力模型)則視為依照折起量值增加。

值得注意的是，大阻力時的阻力係數與小阻力時不同，其轉動時所套用之方程式也不同，故分析 k 與 k' 的因次分別為

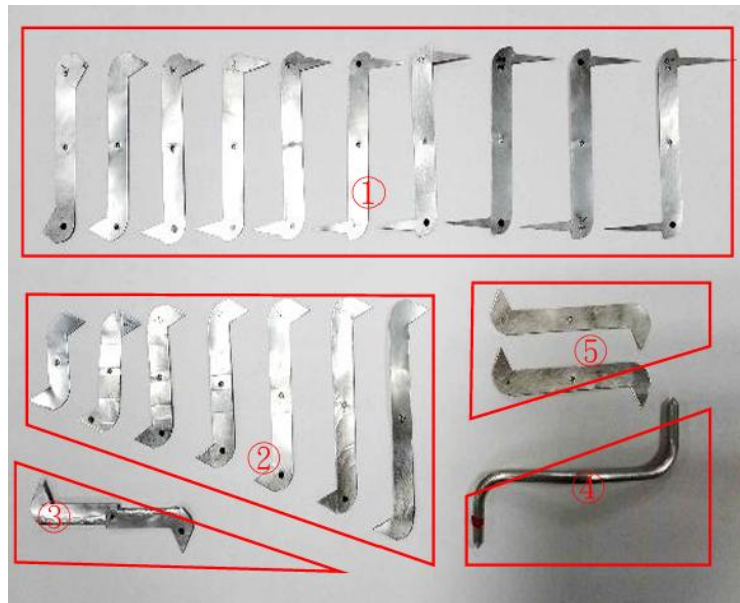
$$[k] = [ML^{-1}T^{-1}]、[k'] = [ML^{-2}]$$

阻尼的因次分別代表常見的黏度(表面阻尼)與高速風阻。而根據前人針對離子風，離子風推力極小，故在下述表示推力時單位皆為 milli Newton。

貳、 研究設備及器材

表二：實驗裝置硬體表(第二作者拍攝)

		
<p>范德格拉夫氏起電機：以下簡稱范氏起電機，用以生成靜電。</p>	<p>Makita TD110D 充電式衝擊起子機：以下簡稱電鑽，用以改變電壓檔位</p>	<p>導電棒:於實驗開始/結束時消除靜電。</p>
		
<p>攝影裝置：作為資料擷取使用</p>	<p>BK PRECISION 2190E 示波器：於前置實驗中取得電壓參考數據。</p>	<p>蚊香，火柴與火盆與燒杯：用以生成煙場</p>
		
<p>磅秤:精度0.01公克，用以測量靜電風車重量。</p>	<p>靜電風車近似模型:可樂鋁罐切製，於下方詳細說明。</p>	<p>兩公升燒杯:用以填充煙霧，圖為已填充煙霧狀態</p>



圖五:各式靜電風車(第二作者製作與拍攝)

承圖五，作為實驗載體靜電風車，與其對應操縱變因分別為：

- (一) ①為尖端模型，以相同面積三角形不同寬高改變兩尖端角度，於描述實驗時說明。
- (二) ②為半徑模型，以配重固定各組質量並改變全長。
- (三) ③為彎折模型，分別折下不同長度，其餘條件固定。
- (四) ④為標準模型，為實驗驗證目標，為附帶於范氏起電機之模型。
- (五) ⑤為直徑8公分模型，尖端角55度，彎折0公分，該模型在所有主實驗皆有出現。

實驗裝置完整架設如下圖，在前置實驗中亦會提到為何如此架設實驗裝置：



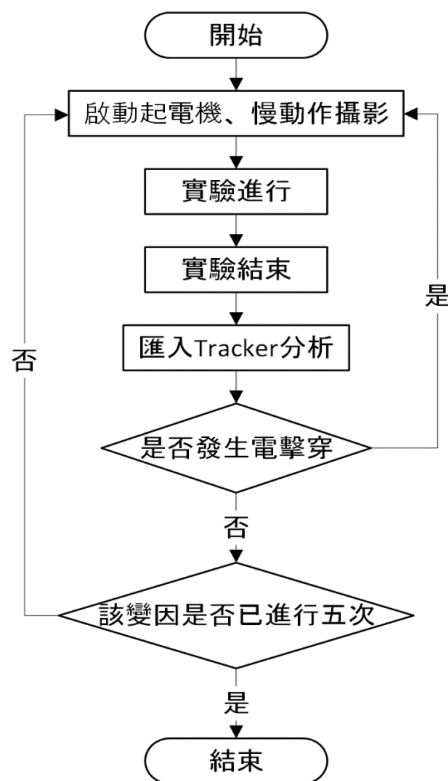
圖六：實驗裝置架設圖(左，第二作者拍攝)與示意圖(右，第三作者繪製)。

參、研究過程或方法

表三：使用之軟體表

名稱	圖示	用途
Tracker		用以追蹤靜電風車旋轉現象並生成各實驗數據點
Excel		數據處理，不確定度計算，部分圖表繪製
Blender		將靜電風車模型可視化，繪製示意圖與受力分析
Wolfram Alpha		求解常微分方程式並提供部分計算功能
Python Matplotlib		理論曲線擬合與繪製理論模型與實驗數據與理論模型對照圖表

實驗進行之流程圖如下：



圖七：實驗進行流程圖(第二作者繪製)

肆、研究結果

一、前置實驗一：電鑽轉速對范氏起電機起電強度影響

因范氏起電機本身改變起電強度方式有限，作者將電鑽裝置於范氏起電機上。由於距離集電罩過近可能發生電擊穿現象（如圖九）。故在距離起電機集電罩五公分處放置示波器測量電壓，該實驗中不確定度由於多次測量結果相同故取自型錄中之 B 類不確定度。

表四:前置實驗一變因列表

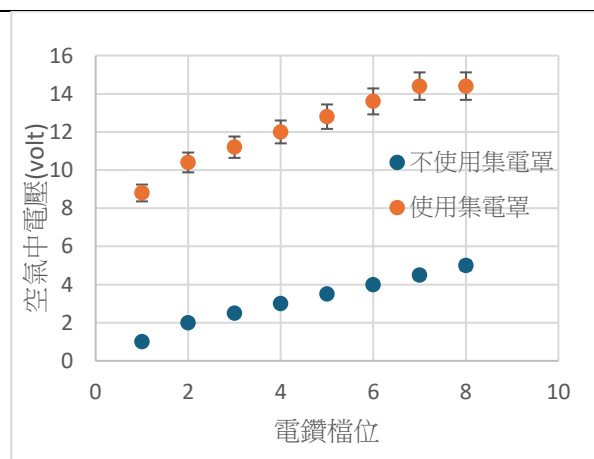
控制變因	1.環境20攝氏度，相對溼度50%無風 2.距離起電機5cm 3.所有設備在測量過程中皆未更換
操縱變因	電鑽扭力檔位
應變變因	電壓測量值(volt)



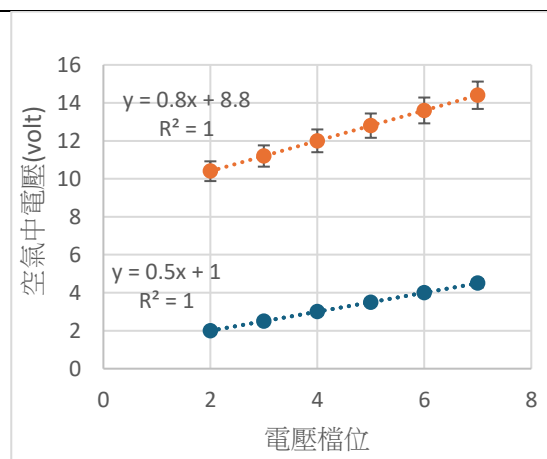
圖八：前置實驗一裝置(第二作者拍攝)



圖九：電擊穿示意。(第一作者拍攝)



圖十：電鑽檔位對空氣中電壓散布圖
(第一作者繪製)



圖十一:電鑽檔位對空氣中電壓關係圖
(第一作者繪製)

可以發現，若僅取2至7檔，能發現改變電鑽檔位與空氣中電壓呈正相關。將2至7檔電壓繪製成圖表如下。前置實驗一小結，即電鑽檔位在2至7檔時與空氣的電壓呈高度線性正相關。若後續實驗中並未提及電壓檔位，則表示起電強度一律為最高檔位。

二、前置實驗二：以煙霧觀察離子風現象

在靜電風車下方架設煙場，以熱熔膠固定靜電風車模擬模型。在將手電筒分別以垂直與平行煙場方向照射後以手機紀錄煙場受離子風引導之情形。

表五:前置實驗二變因列表

控制變因	1.環境20攝氏度，相對溼度50%無風 2.起電檔位為最高檔位 3.拍攝位置與方向以腳架固定
操縱變因	煙場偏移時間(s)
應變變因	煙場偏折角(度)

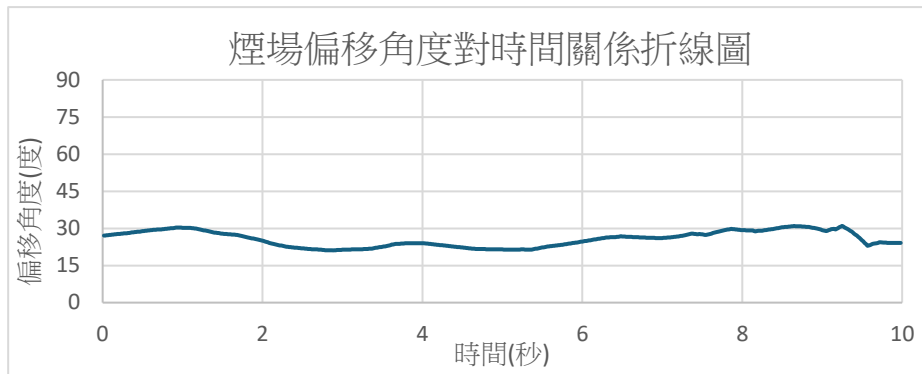


圖十二：離子風對煙場影響-未影響
(第一作者拍攝與分析)



圖十三:離子風使煙場偏折
(第一作者拍攝與分析)

由上述現象觀察，很明顯可以看到原先垂直向上的蚊香煙霧受到離子風影響而產生偏折，且偏折角與偏折距離穩定(如圖十四)，約為25.70度，十秒內數據標準差為2.20度，b若加上煙場本身燃燒點的不確定性，可將離子風視為一穩定頻率的推力來源。



圖十四:煙場偏折角度對時間關係圖(第一作者繪製)

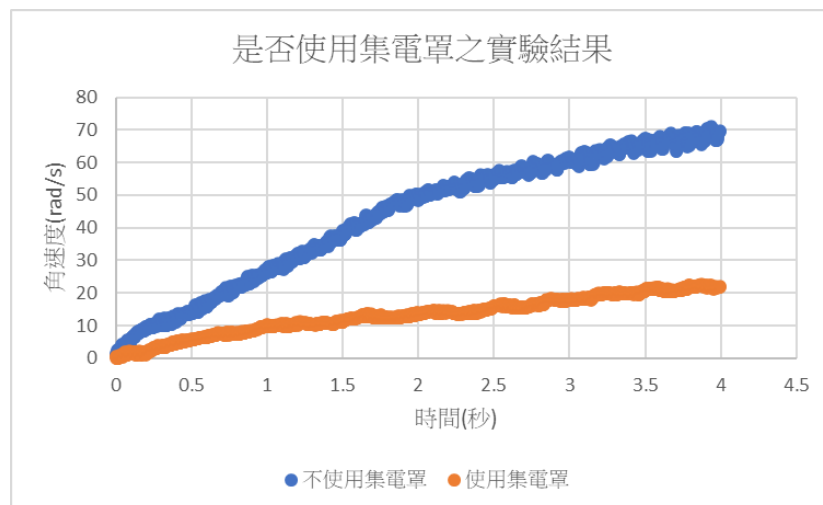
三、前置實驗三:起電罩有無對靜電風車之影響

本前置實驗為確認後續主實驗所使用之實驗情況，由於范氏起電機可能與靜電風車產生交互作用進而影響實驗結果，所以為確認是否使用集電罩，作者分別在使用集電罩與移除集電罩的狀態下各進行數次實驗。

表六:前置實驗三變因列表

控制變因	1.環境20攝氏度，相對溼度50%無風 2.起電檔位為最高檔位 3.拍攝位置與方向以腳架固定 4.靜電風車尖端角35度，8公分長，無折起
操縱變因	是否使用集電罩
應變變因	角速度(rad/s)

以下為是否使用集電罩所得到的角速度對時間關係圖。



圖十五：是否使用集電罩之時間角速度對時間關係圖(第一作者繪製)

根據實驗結果，不使用集電罩能明顯增加角速度，後續實驗將移除起電罩以避免任何可能對實驗結果產生影響的狀況。

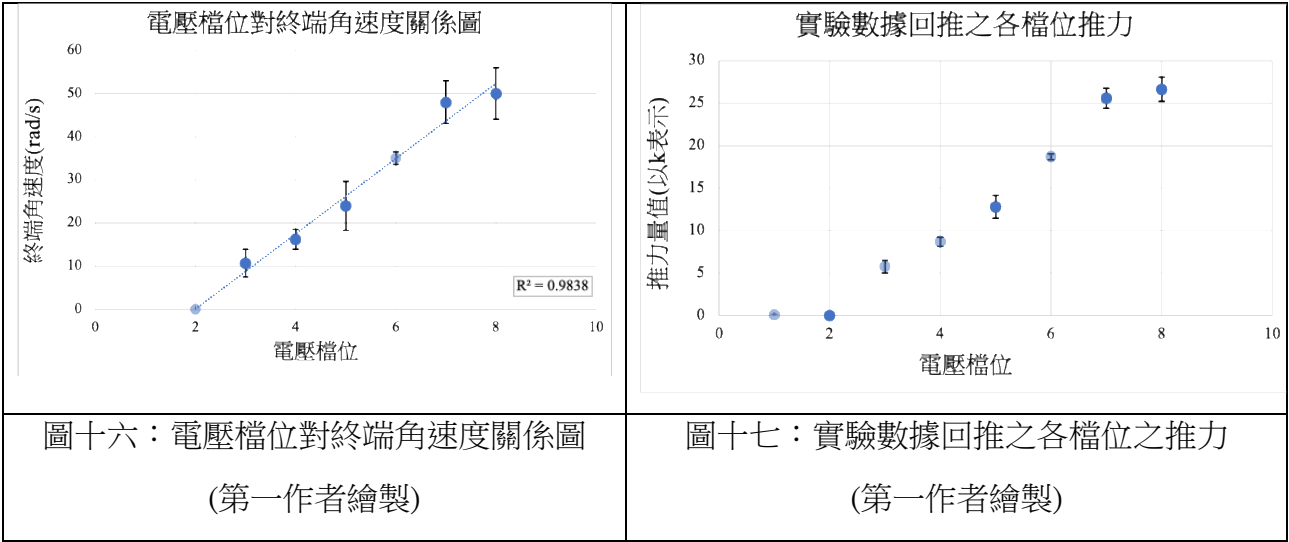
根據上述前置實驗之實驗結果，在進行以下主實驗時若未特別提及，則皆為在環境溫度20度，相對溼度50%下，不使用集電罩之實驗裝置，即為在研究設備及器材中所提及之架設圖，在此不再贅述。

四、 主實驗一：起電強度對靜電風車終端角速度影響

表七:主實驗一變因列表

控制變因	1.環境20攝氏度，相對溼度50%無風 2.拍攝位置與方向以腳架固定 3.靜電風車尖端角53度，8公分長，無折起
操縱變因	起電檔位1至8檔
應變變因	終端角速度(rad/s)

由前置實驗可以發現電鑽檔位與起電強度呈現線性正相關，又起電強度應與離子風推力呈正相關，故當改變電鑽檔位時，能改變離子風之推力。作者將2-7檔的電鑽檔位（在前置實驗中呈線性的區間）分別進行對8公分模擬模型的終端角速度之關係實驗，每組檔位各進行五次，在達該檔位之終端角速度（約為啟動後10秒鐘）後進行數據紀錄。



將式(1)移項得角速度對應離子風推力，討論中也會提及代入式(1)而非式(2)之原因：

$$F = \frac{1}{3} \cdot \omega_{steady} \cdot k \cdot R^2$$

(3)

此時1,2檔下無法造成轉動現象。表兩檔推力過低，或電壓不足以造成尖端放電。而在7檔與8檔下轉速不同，表示前置實驗中集電罩影響確實存在。由上述實驗數據對主實驗

一進行小結：離子風推力與電壓檔位間呈正相關，且離子風推力與終端角速度呈正比。

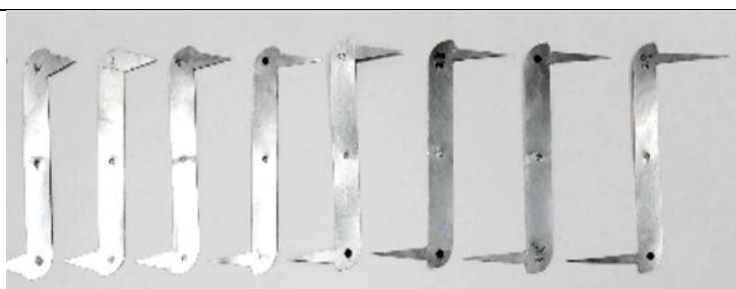
五、主實驗二：尖端角度對靜電風車終端角速度影響

探討尖端角度對靜電風車終端角速度影響，尖端面積相同，增加尖端（三角形）的高。

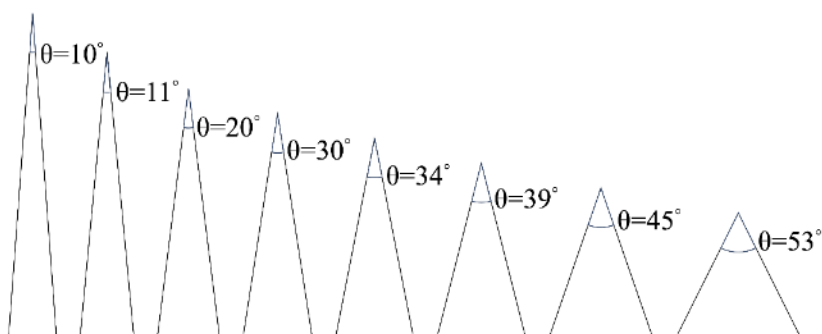
表八:主實驗二變因列表

控制變因	1.環境20攝氏度，相對溼度50%無風 2.起電檔位為最高檔位 3.拍攝位置與方向以腳架固定 4.靜電風車8公分長，無折起，尖端三角形總面積相等
操縱變因	尖端角度(度)
應變變因	終端角速度(rad/s)

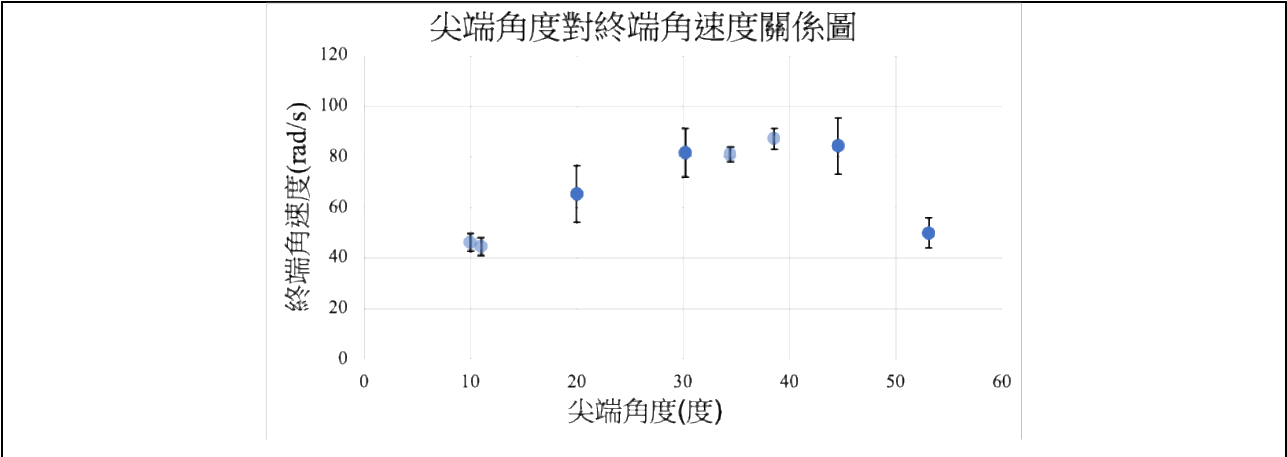
實驗裝置如圖十八，製作尖端模型後，依據底邊與高進行反正切計算以求得尖端角度數據。



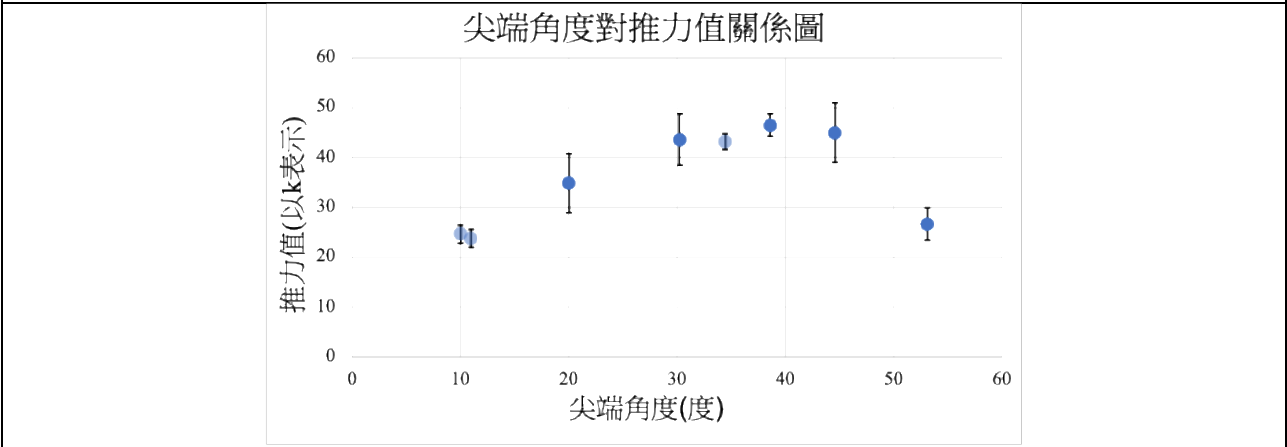
圖十八:尖端實驗之實驗器材(第二作者製作與拍攝)



圖十九:尖端實驗之靜電風車尖端角度(第三作者繪製)



圖二十：尖端角度對終端角速度關係圖(第一作者繪製)



圖二十一：尖端角度對推力值關係圖(第一作者繪製)

依據圖二十，尖端角約在30至45度時為擁有最高之終端角速度。依據理論，此時影響角速度之因素僅為推力 F ，與尖端收集與放出電荷效率有關。將尖端角度與以式(3)對應之推力值（以 k 表示）如圖二十一。依照實驗結果，可知對於平面上尖端角度介於30至45度時有最高尖端放電效率，能給予最高的離子風推力。

六、主實驗三：阻力模式對靜電風車終端角速度之影響

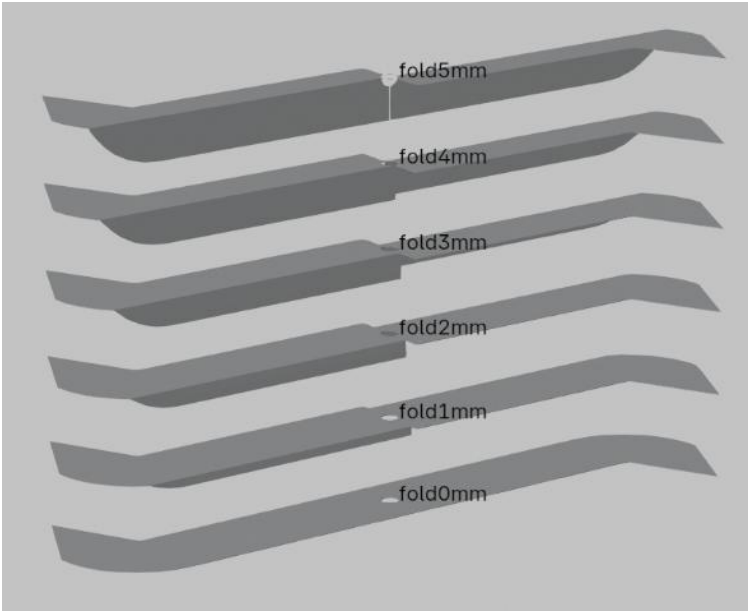
在前述受力分析中提到關於靜電風車之阻力狀態可分為小阻力模型（即阻力正比於速度）與大阻力模型（阻力正比於速度平方），未確認標準模型並探討變因故進行實驗。

表九:主實驗三變因列表

控制變因	1.環境20攝氏度，相對溼度50%無風	3.拍攝位置與方向以腳架固定
	2.起電檔位為最高檔位	4.靜電風車尖端角53度，8公分長

操縱變因	兩翼折起1-5mm(如圖二十二)
應變變因	終端角速度(rad/s)

在本實驗中，作者將靜電風車模擬模型之邊緣分別折下0.1,0.2,0.3,0.4,0.5公分（如圖二十二），並進行實驗，同樣的，該實驗亦加入未折起組別作為對照。



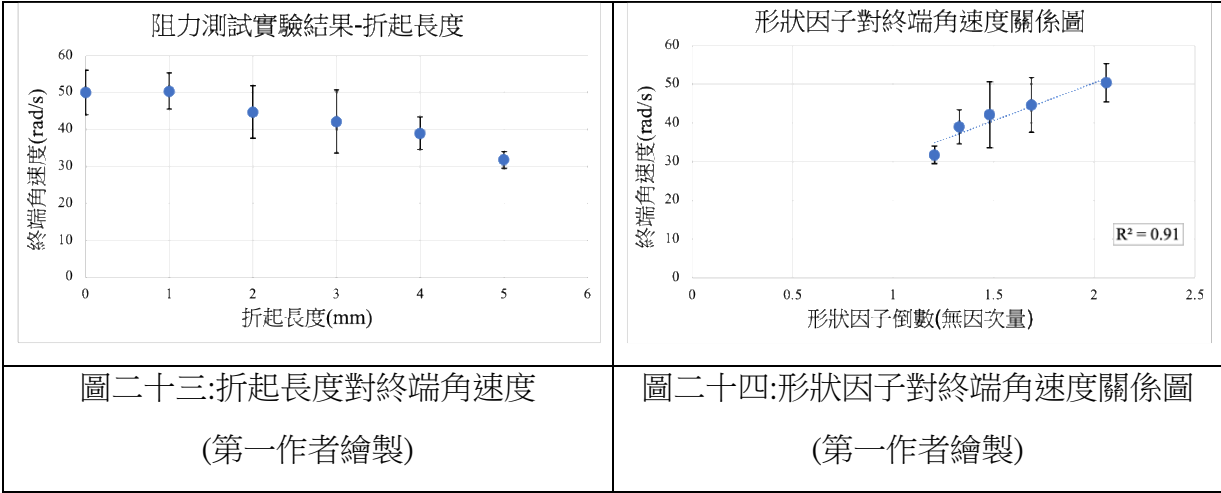
圖二十二:阻力測試之模擬模型示意圖(第三作者繪製)

在這邊定義一個形狀因子 ψ 為受風面積比例，計算方式如下

$$\psi = \text{受風面積比例} = \sqrt{\frac{\text{垂直空氣流動有效面積}}{\text{總有效面積}}} \quad (4)$$

此僅為一簡略估算方法，以該項作為計算方式是由於垂直空氣流動方向的面積越多，則平方阻尼做作用之面積將越高並增加阻力係數，平方根是避免尺度產生數值膨脹。其中，有效面積為空氣分子會產生摩擦或碰撞的投影面積。

比照前述實驗，同樣紀錄終端角速度，實驗數據如下：



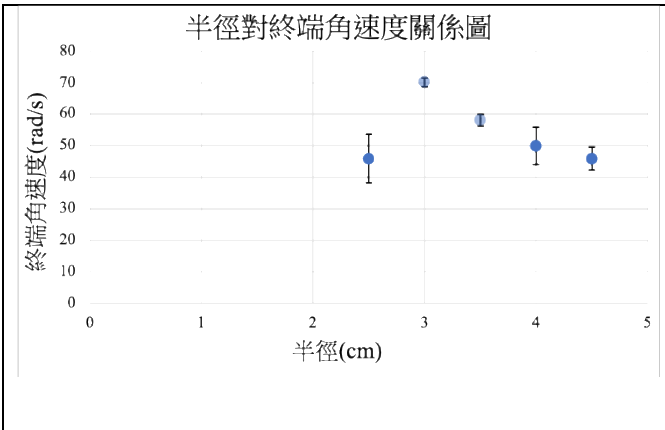
由上圖對阻力測試之實驗做出小結，形狀因子對終端角速度則呈現反比之趨勢，但在該實驗中，折起1毫米與未折起並未有明顯區別，在後續討論中會提到可能原因。

七、主實驗四：靜電風車半徑對終端角速度之影響

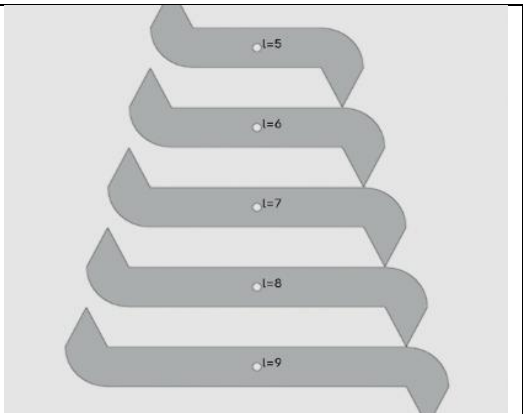
在實驗之受力分析方程中有提到半徑會反比於終端角速度，同樣製作直徑為5,6,7,8,9公分之靜電風車，變因如表十，示意圖請見圖二十六:

表十:主實驗四變因列表

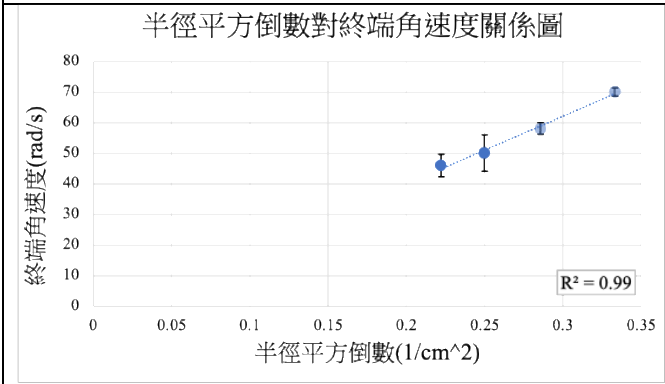
控制變因	1.環境20攝氏度，相對溼度50%無風	3.拍攝位置與方向以腳架固定
	2.起電檔位為最高檔位	4.靜電風車尖端角53度，未折起
操縱變因	全長依序為五至九公分。	
應變變因	終端角速度(rad/s)	



圖二十五:半徑對終端角速度關係圖
(第一作者繪製)



圖二十六：風車半徑模型示意圖
(第三作者繪製)



圖二十七:半徑平方倒數對終端角速度關係圖
(第一作者繪製)



圖二十八:5cm 風車與起電機半徑
(第一作者拍攝)

由圖二十五容易看出除了5cm 以外，其餘四組之半徑對終端角速度皆呈現反比趨勢。而對於長度為5cm 的組別其轉速大幅下降的原因可能是該靜電風車的半徑尺度太小(小於范氏起電機起電管的半徑，如圖二十八)而二者產生交互作用。對主實驗四進行小結，在一定範圍內，半徑平方與終端角速度呈反比。

伍、 討論

一、 受力分析與統御方程式

從前述實驗結果並對受力方程式作時間對角速度之解，即將前述受力分析方程轉換成常微分方程後進行求解。該一階 ODE(ordinary differential equation)之解如下。

表十一：小阻力模型代數意義表

符號	F	R	k	ω	α	Γ	I
物理意義	推力	半徑	系統阻力係數	角速度	角加速度	合力矩	轉動慣量
因次	$[MLT^{-2}]$	$[L]$	$[ML^{-1}T^{-1}]$	$[T^{-1}]$	$[T^{-2}]$	$[ML^2T^{-2}]$	$[ML^2]$

$$\Gamma = 2FR - \frac{2}{3}KR^3\omega = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$\text{分離變數並依據積分公式：} \int \frac{dx}{a-bx} = -\frac{1}{b}\ln|a-bx| + c$$

$$\frac{d\omega}{2FR - \frac{2}{3}kR^3\omega} = \frac{dt}{I}$$

$$\int_0^{\omega(t)} \frac{d\omega}{2FR - \frac{2}{3}kR^3\omega} = -\frac{3}{2kR^3}\ln\left|2FR - \frac{2}{3}kR^3\omega\right| + c = \frac{t}{I}$$

$$\omega(t) = \frac{3F}{kR^2} \left(1 - e^{\left(-\frac{2kR^3}{3I}t\right)}\right) \quad (5)$$

表十二：大阻力模型代數意義表

符號	F	R	k'	ω	α	Γ	I
物理意義	推力	半徑	系統阻力係數	角速度	角加速度	合力矩	轉動慣量
因次	$[MLT^{-2}]$	$[L]$	$[ML^{-2}]$	$[T^{-1}]$	$[T^{-2}]$	$[ML^2T^{-2}]$	$[ML^2]$

$$\Gamma = 2FR - 2 \int_0^R k'r^2 \omega^2 r dr = I\alpha$$

$$\text{分離變數並依據積分公式：} \int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + c$$

$$\frac{d\omega}{2FR - \frac{1}{2}k'R^4\omega^2} = \frac{dt}{I}$$

$$\int \frac{d\omega}{2FR - \frac{1}{2}k'R^4\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{Fk'R^5}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{k'R^3}{4F}} \omega \right) + c = \frac{t}{I}$$

$$\tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{k'R^3}{4F}} \omega(t) \right) = \frac{\sqrt{Fk'R^5}t}{I}$$

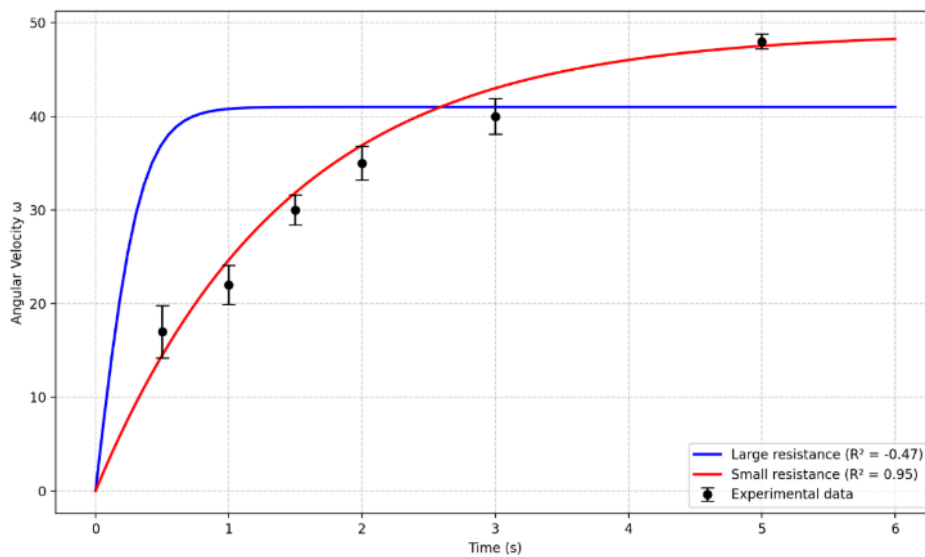
$$\omega(t) = \sqrt{\frac{4F}{k'R^3}} \tanh \left(\frac{\sqrt{Fk'R^5}}{I} t \right) \quad (6)$$

可以觀察到，時間對角速度方程式在小阻力中呈現自然指數式的飽和，在大阻力中則呈現雙曲正切函數飽和，且分析因次可以得到 ω 之因次與 $\sqrt{\frac{4F}{k'R^3}}$ ， $\frac{3F}{kR^2}$ 相同，指數項與 \tanh 的變數項同為無因次量，後續也會解釋其特徵時間係數。

二、統御方程式之解與實驗數據對照

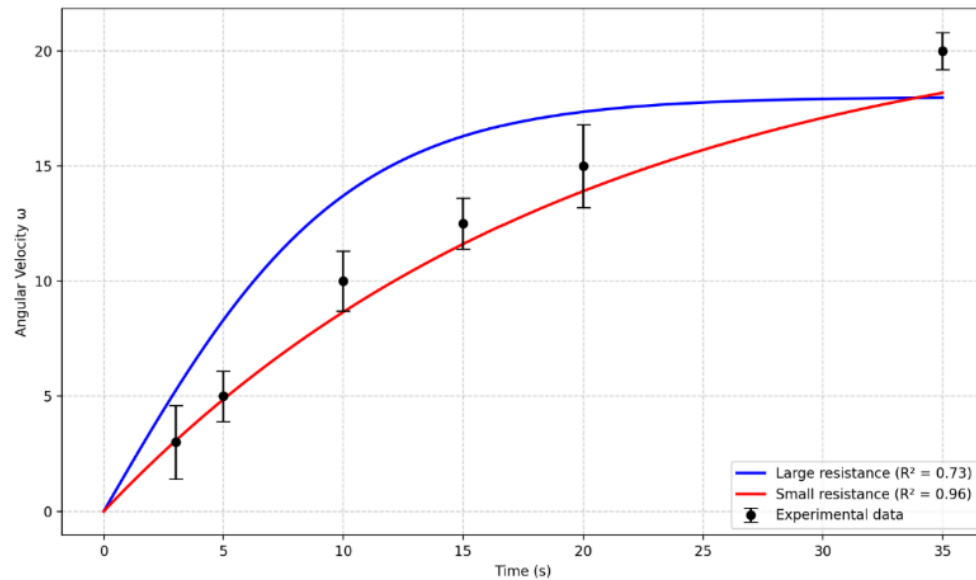
在該項討論終將著重探討討論一隻統御方程式與前述主實驗中所記錄之實驗數據，由於實驗數據龐雜且篇幅限制，主要探討代表性之模型數據。在討論二中，由於 excel 功能限制，故使用 Python Matplotlib 進行圖表繪製

將上述時間對角速度之方程式繪製成圖表，並將兩方程式與8cm 之小阻力近似型做比較，實驗數據如圖二十九。採用該模型之原因為在所有主實驗中都有該模型作為對照。結果如下圖，實驗結果符合小阻力模型之假設，即在圖表中曲線接近小阻力狀態。



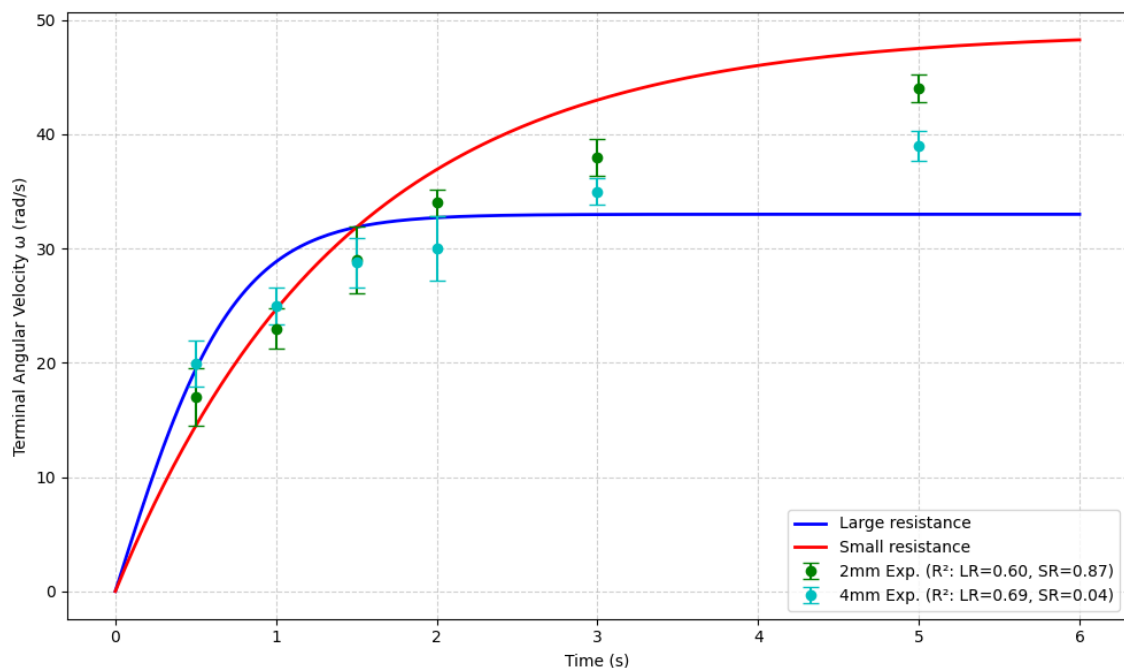
圖二十九:阻力理論模型與8cm 模型實驗數據對照(第一作者繪製)

一開始由於終端角速度與其形狀因子，認為標準模型應屬於大阻力模型，如主實驗三，但在將數據匯入兩組力模型後，結果呈現其接近小阻力模型，可能因為標準模型之迎風面帶有流線型（圓弧形）設計，這可能是降低該靜電風車的阻力係數的原因，故作者認為標準模型屬於小阻力的靜電風車。



圖三十:阻力理論模型與標準模型實驗數據對照(第一作者繪製)

在上述提到阻力部分若為圓弧設計，可能降低阻力係數，而在主實驗3中折起1mm 之組別，由於加工時無法以90度折起，再加上折起量不高，使其迎風面近似為弧形，這可能就是1mm 組別與未折起組別結果幾乎相同之原因。



圖三十一:方程式解與實驗數據對照圖-彎折模型(第一作者繪製)

由圖三十一，綠色標記為2毫米之彎折模型，青色標記為4毫米之彎折模型，可以明顯看到2毫米相較於4毫米更貼近於小阻力理論模型，而4毫米組別則更貼近大阻力模型，作者預測在彎折6毫米時能貼合大阻力模型，但該模型於實作上有加工困難。

三、 時間係數與物理意義

觀察雙曲函數 \tanh 的變數項與自然常數 e 的指數項，可以看到在時間項的係數，其因次為 $[T^{-1}]$ ，而此時定義小阻力之特徵時間為 $\alpha = \frac{3I}{2kR^3}$ 。大阻力之特徵時間 $\beta = \frac{I}{\sqrt{Fk'R^5}}$ 。在小阻力與大阻力的 t 分別達到 3α 或 2β 時，約能得到95與96%之終端角速度，在實驗中都有超過特徵時間再紀錄終端角速度。特徵時間係數皆包含轉動慣量，將靜電風車近似為長方體，以轉動慣量公式換算如表十三。

$$I = \frac{1}{12} m(\text{長}^2 + \text{寬}^2) \quad (7)$$

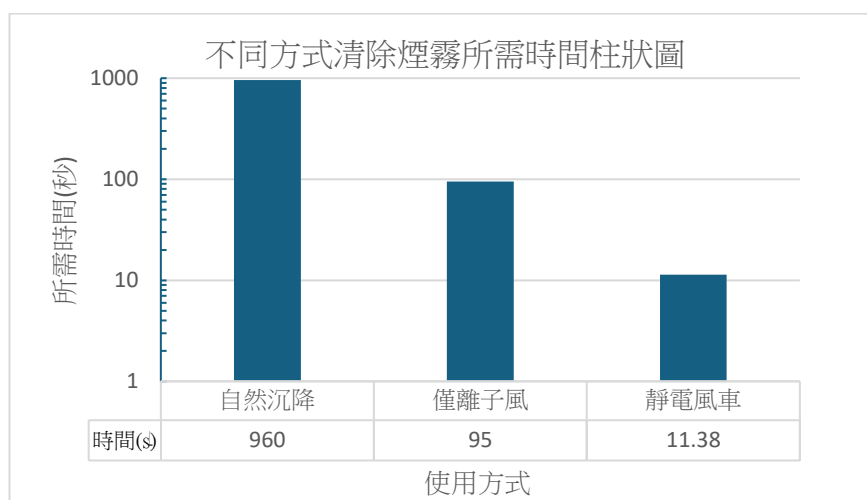
表十三:半徑對轉動慣量換算表

模型名稱	6公分近似	7公分近似	8公分近似	9公分近似	標準模型
轉動慣量($g \cdot \text{cm}^2$)	0.925	1.25	1.625	2.05	25.12
特徵時間(s)	2.17	1.85	1.61	1.43	12.78

圖表顯示特徵時間大幅受轉動慣量影響。由於標準模型質量高，使其轉動慣量極大。

四、 范氏起電機驅動之靜電風車實際應用初步探討

前述提到線香能生成煙場，在此討論靜電風車對煙場消散的空氣淨化能力。分別在兩公升大容量燒杯中裝入煙霧，觀測燒杯另一端之標記點，起初標記點因煙霧阻擋不可見。分別以自然沉降，僅離子風(固定靜電風車)與啟動靜電風車進行簡易實驗結果如下。



圖三十二: 不同方式清除煙霧所需時間柱狀圖(第三作者繪製)

依據實驗結果，離子風本身較自然沉降具有顯著差異，而靜電風車相較於二者，以11秒左右便能清除燒杯中煙霧之時間居冠，顯示其具有一定的空氣清淨潛力。期許這種以鋁罐便能輕易製作的裝置能得到發展。依據參考文獻，尖端放電也確實能應用於細懸浮顆粒的清淨。

陸、 結論

- 一、范氏起電機產生之離子風在不發生電擊穿現象下可視為穩定推力來源。
- 二、范氏起電機之起電強度與離子風推力呈正相關並和靜電風車終端角速度呈正比，尖端角度介於30至45度時有最大推力。
- 三、阻力模型、阻力係數與靜電風車表面形狀、風阻面積比值有關，且阻力越大會使模型轉變為平方阻尼，同時減少終端角速度。
- 四、在一定範圍內，半徑平方與終端角速度呈反比。
- 五、對小阻力模型，其時間對角速度之函數符合：

$$\omega(t) = \frac{3F}{kR^2} \left(1 - e^{\left(-\frac{2kR^3}{3I}t \right)} \right)$$

而對於大阻力模型，其時間對角速度之函數符合：

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{4F}{k'R^3}} \tanh\left(\frac{\sqrt{Fk'R^5}}{I}t\right)$$

- 六、除阻力模型以外其他模型皆符合小阻力函數，阻力近似模型雖不完全符合大阻力模型但有向其靠攏之趨勢。

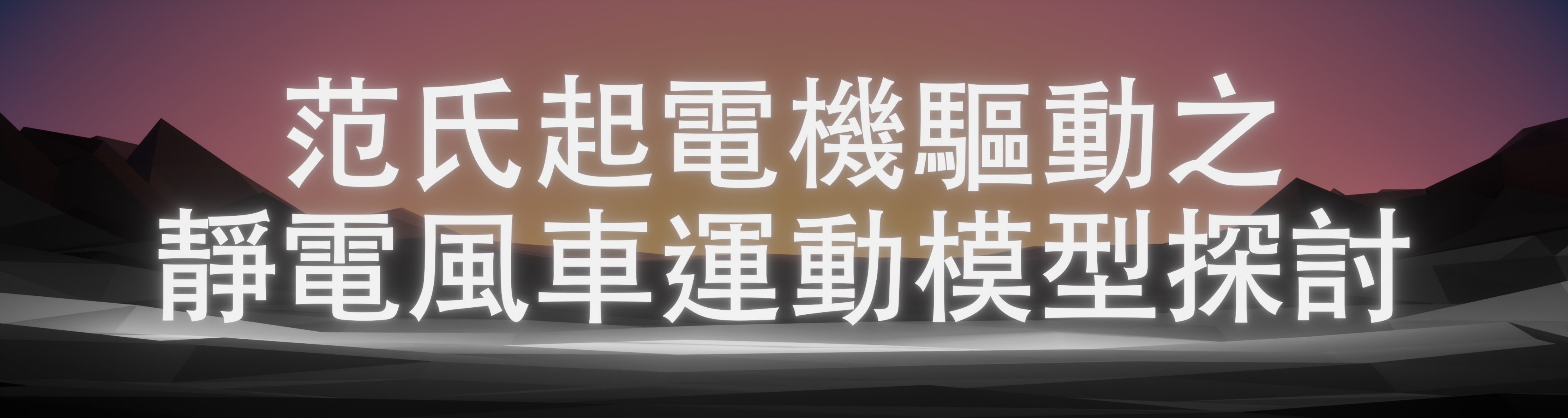
柒、 參考文獻資料

- 一、 Performance of an electrohydrodynamic gas pump fitted within a nozzle. (2017). *Journal of Electrostatics*, 90. Retrieved from [ScienceDirect](#)
- 二、 Finio, B. (n.d.). Ion thruster: Build an ion wind rotor [Image]. Science Buddies. https://www.sciencebuddies.org/science-fair-projects/project-ideas/Aero_p067/aerodynamics-hydrodynamics/ion-thruster-build-an-ion-wind-rotor
- 三、 陳芝任, 丘文磊, & 王秉聖. (2019). 我來電暈你—電暈馬達轉速之變因研究.
- 四、 徐冠東 (2020)。離子推進器之探索。國立臺灣科學教育館 中小學科學展覽會作品集
- 五、 Zyga, Lisa (February 7, 2018). "What causes ionic wind?". *Phys.org*. Retrieved August 27, 2018.
- 六、 Gourdine, M. C. (1968). "DIVISION OF ENGINEERING : ENGINEERING ASPECTS OF ELECTROGASDYNAMICS". *Transactions of the New York Academy of Sciences*. **30** (6 Series II) : 804–814. doi : 10.1111/j.2164-0947.1968.tb02524.x.
- 七、 Electrostatic pinwheel : Van de Graaff makes pinwheel spin - Lecture Demonstrations - UC Berkeley Physics
- 八、 Electostatic pinwheel - Indiana University Demo Reservation
- 九、 Robinson, M. (1960, June 8). Movement of Air in the Electric Wind of the Corona Discharge. (AD0262830)
- 十、 Satterly, John. [The Moments of Inertia of Some Polyhedra](#). *The Mathematical Gazette* (Mathematical Association). 1958, **42** (339)
- 十一、 Shiue, A., Hu, S.-C., & Tu, M.-L. (2011). Particles removal by negative ionic air purifier in cleanroom. *Aerosol and Air Quality Research*, 11(2), 179–186. <https://doi.org/10.4209/aaqr.2010.06.0048>

【評語】 051809

本作品選題具創意，將「范氏起電機」與簡易的鋁罐風車結合，創造出具實用與學術探究價值的靜電風車系統。自製風車中的尖端角度，探討風車半徑與阻力係數，能達實驗功效，獲得推力與電壓呈正相關、尖端角度介於 30-45 度間具最大推力、風車半徑能影響特徵時間及終端角速度。能計算阻力並與實驗比較，有物理機制討論。數據收集完整，每組變因皆具備重複測試與清晰記錄，並適當使用統計分析、回歸圖表與擬合理論曲線。合理使用 Excel、Python、Tracker 等工具進行運動分析與視覺化呈現。研究展現實作能力，風車模型多樣，材料取得簡便（如鋁罐等），具低成本、高重現性的特性。

作品海報



范氏起電機驅動之 靜電風車運動模型探討

摘要

本作品係利用范氏起電機產生靜電，並以電壓驅動標準靜電風車及自製鋁質靜電風車模型。其中標準靜電風車為范氏起電機附帶之零件，而自製靜電風車可改變包含尖端角度、風車半徑與阻力係數。起電機能以增加轉速改變范氏起電機輸出電壓。在各項實驗中分別測量包含電壓，離子風穩定性與轉動角速度。透過參考資料與實驗建立風車系統轉動時的統御方程式。結論包含推力與電壓呈正相關並在尖端角度介於30-45度間有最大推力，半徑影響特徵時間與終端角速度，阻力係數影響轉動方程，使系統分為指數飽和與雙曲正切飽和。最後探討其對空氣中微粒清潔之實際應用。

壹、前言

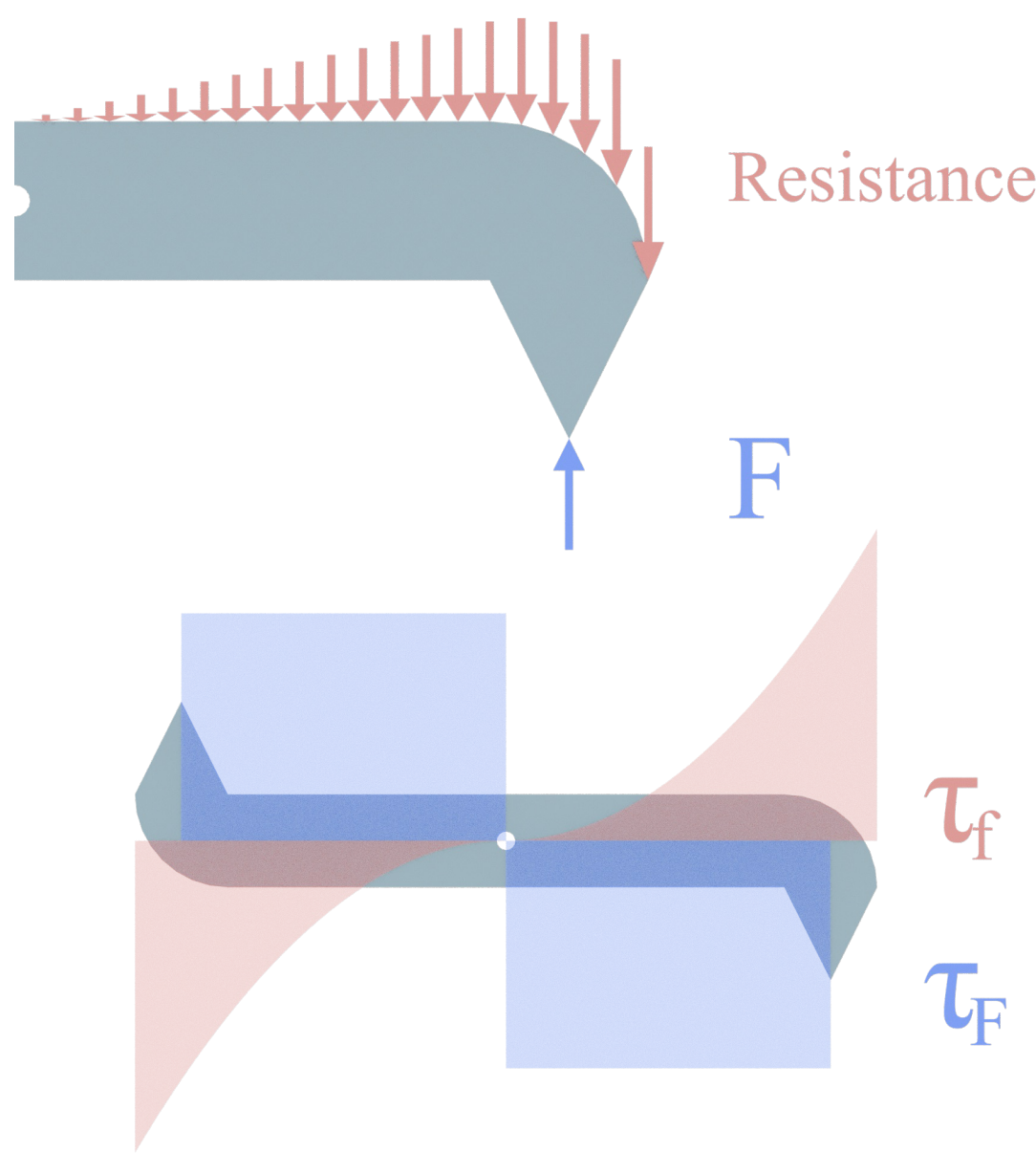
一、研究動機

我們在Science Buddies 網站上看到「離子推進器」實驗，被其帥氣名稱吸引。其內容提到的雖非常見的離子風泵，卻是同樣以尖端放電驅動並使裝置轉動，動力來源不同的是該項實驗以靜電力驅動而非高壓電路或特斯拉線圈。該網站提及，靜電可電離部分空氣使其離子化，進而以庫倫力驅使裝置轉動，甚至能在一段時間後達到每秒數圈的轉速。而在實驗室的范氏起電機以及各式器材，給了我們一個機會探討這枚標準的靜電風車。

二、研究目的

- (一)探討起電強度與終端角速度之關聯
- (二)探討阻力模式對終端角速度之影響
- (三)探討尖端角度與施加推力效率關聯
- (四)探討半徑對系統終端角速度之影響
- (五)分析靜電風車受力狀況與阻力系統
- (六)求解並討論系統運動之統御方程式

三、靜電風車之受力情形



藍色箭頭與矩形面積表示離子風推力與推力矩量值，紅色箭頭與圖形面積表示靜電風車阻力與阻力矩量值。

四、靜電風車之受力分析

(一)小阻力狀態

在雷諾數較小時，定義 k 值為該靜電風車的系統阻力係數。其合力矩 Γ 的量值為：

$$\Gamma = 2FR - 2 \int_0^R k r \omega r dr$$

當 Γ 為0，即穩定時，角速度為：

$$\omega_{steady} = \frac{3F}{kR^2}$$

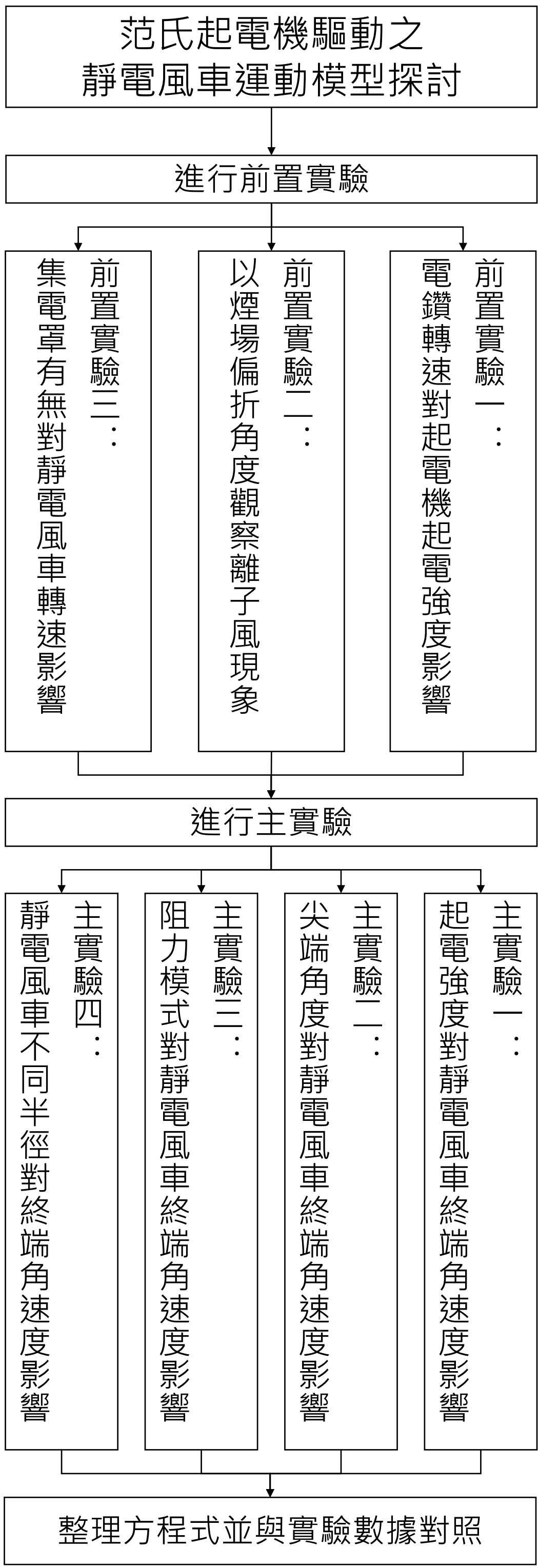
(二)大阻力狀態

在雷諾數較大時，定義 k' 值為該靜電風車的系統阻力係數。其合力矩 Γ 的量值為：

$$\Gamma = 2FR - 2 \int_0^R k' r^2 \omega^2 r dr$$

當 Γ 為0，即穩定時，角速度為：

$$\omega_{steady} = \sqrt{\frac{4F}{k'R^3}}$$



實驗架構總圖

貳、研究裝置



各式靜電風車



范氏起電機



拍攝裝置



示波器



電鑽



煙場生成裝置



鋁罐



電子秤



燒杯

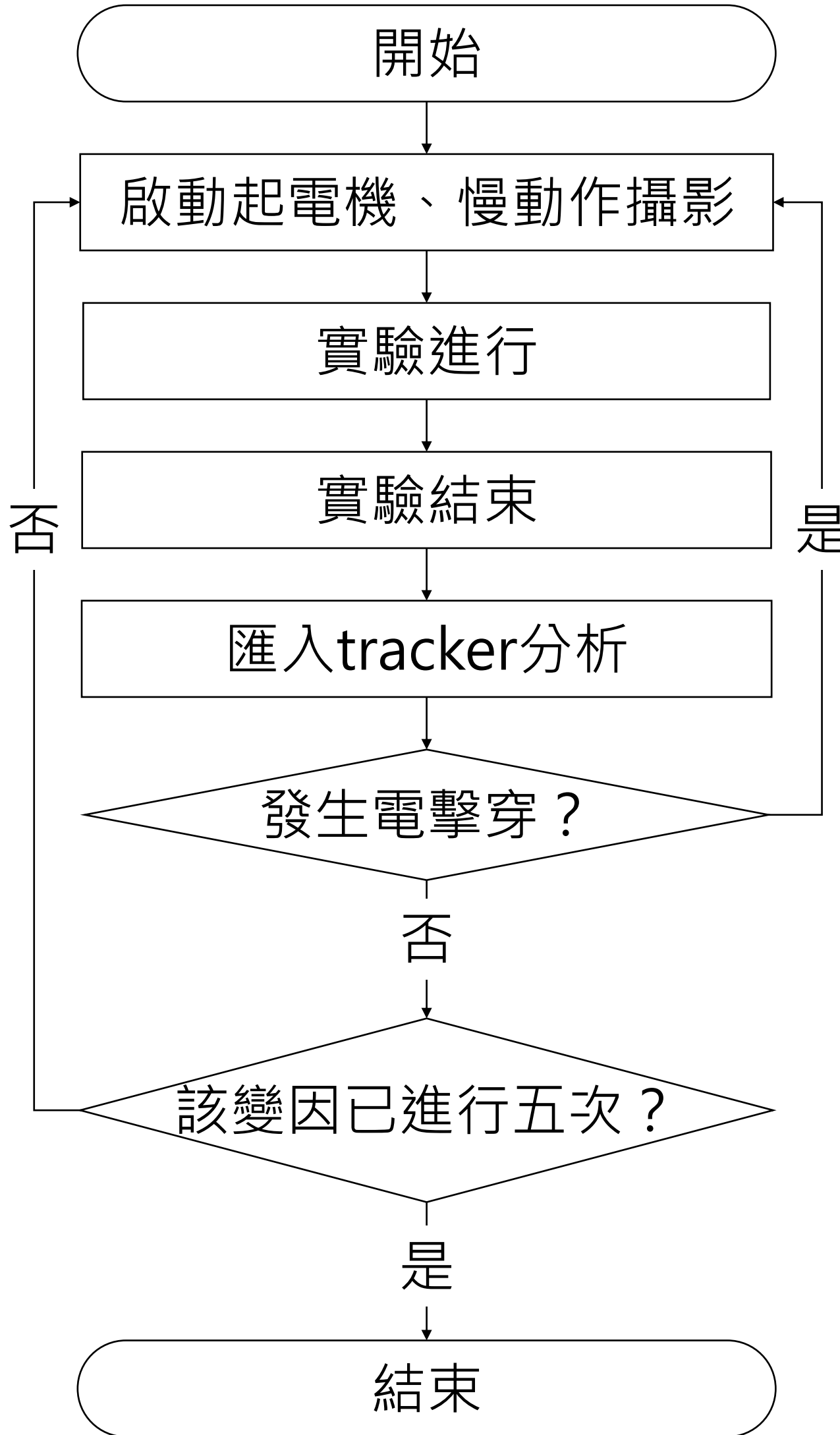


導電棒

參、研究方法



實驗裝置示意圖



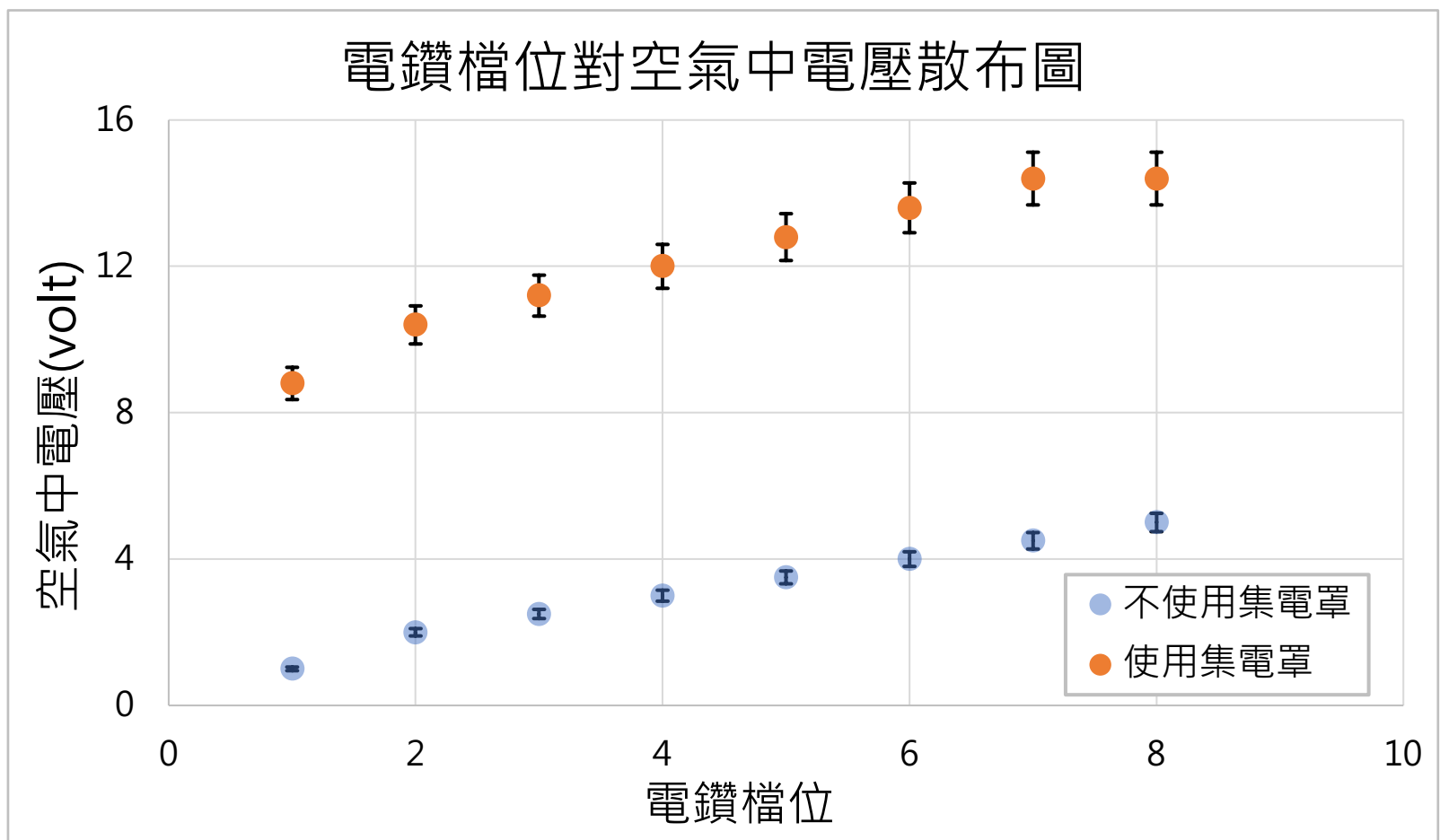
實驗進行流程圖

肆、實驗過程與結果

前置實驗

一、電鑽轉速對起電機起電強度影響

以電鑽改變范氏起電機的起電強度，分別以電鑽的一到八檔，在距離起電機集電罩五公分處測量，電鑽轉速在二到七檔間起電強度呈線性正相關。



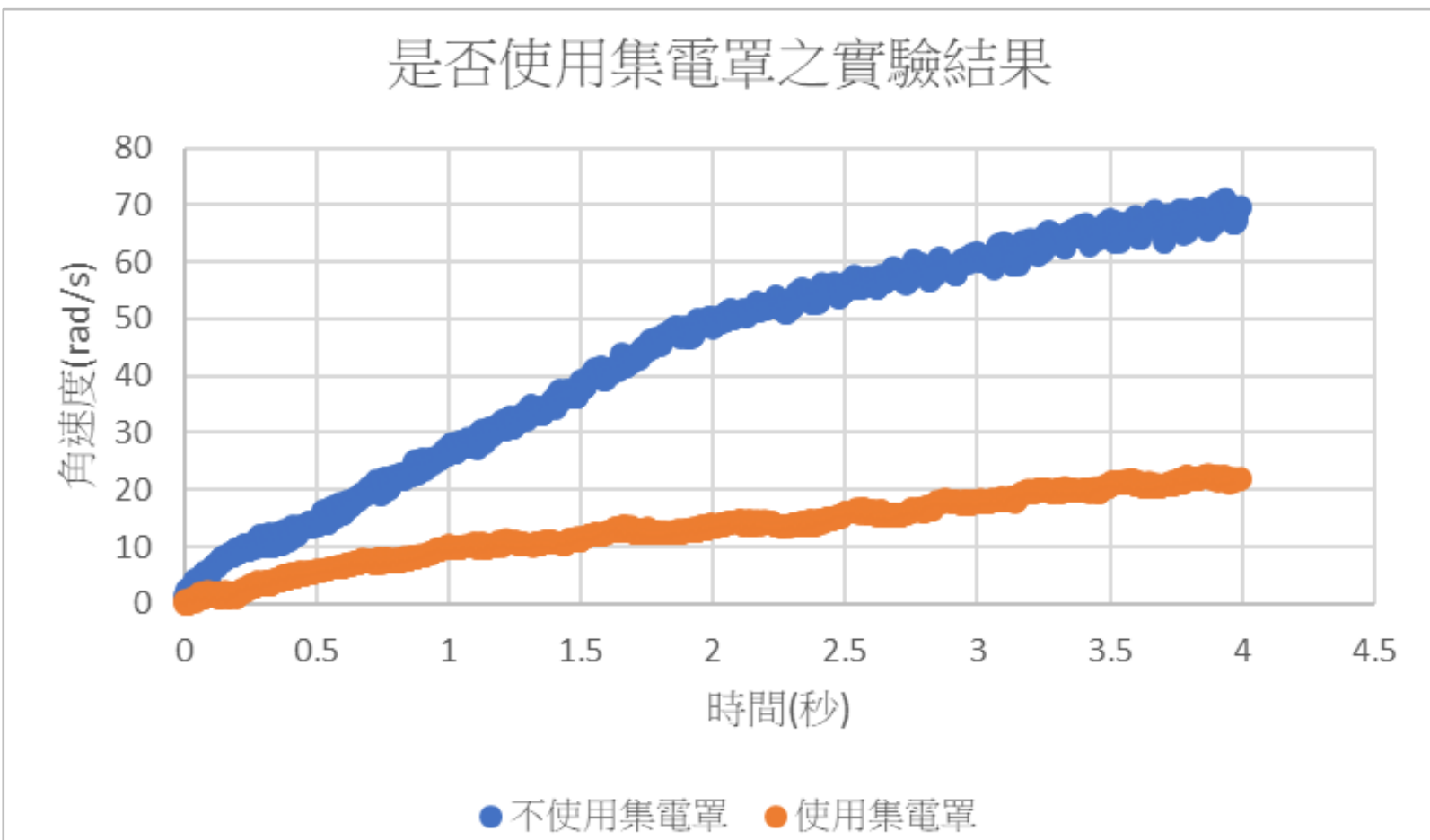
二、以煙場偏折角度觀察離子風現象

固定一靜電風車模型，觀測煙場受離子風影響的偏折現象，左圖為未影響，右圖則能觀察到明顯偏折。



三、集電罩有無對靜電風車轉速影響

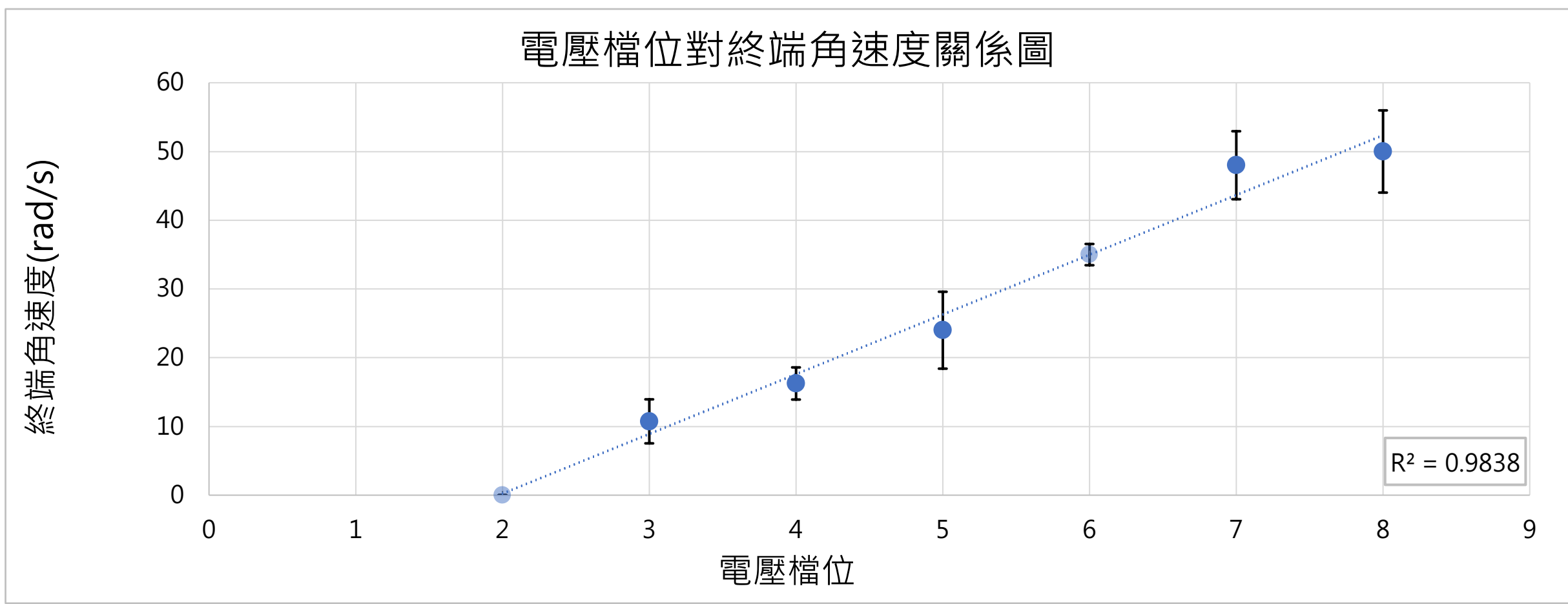
將范氏起電機之集電罩分別裝上與移除，並記錄角速度隨時間變化，結果顯示移除集電罩能更好觀察到衰減現象與更高轉速。



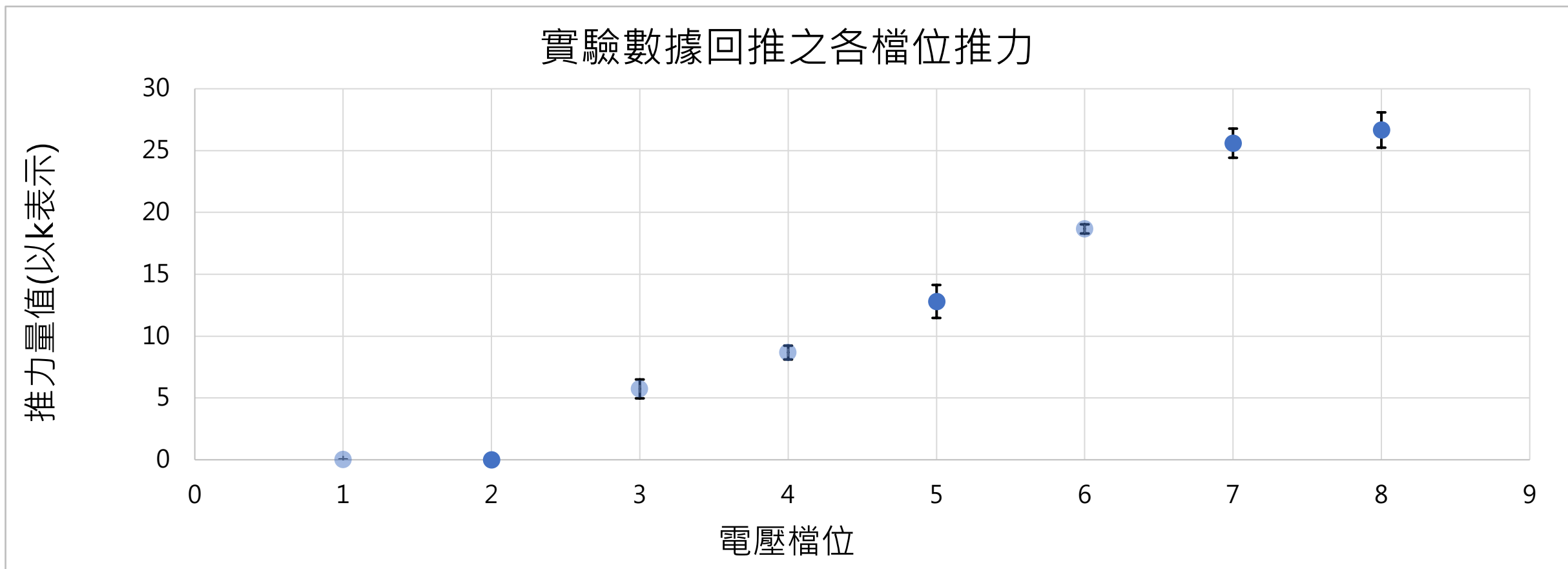
在主實驗中若未特別提及，則為環境溫度20度，相對溼度50%，並移除集電罩進行實驗。

主實驗

一、起電強度對靜電風車終端角速度影響



使用2至7檔電鑽檔位，對8公分模擬模型進行終端角速度實驗，每檔位重複5次，啟動後約10秒達終端角速度時記錄數據。



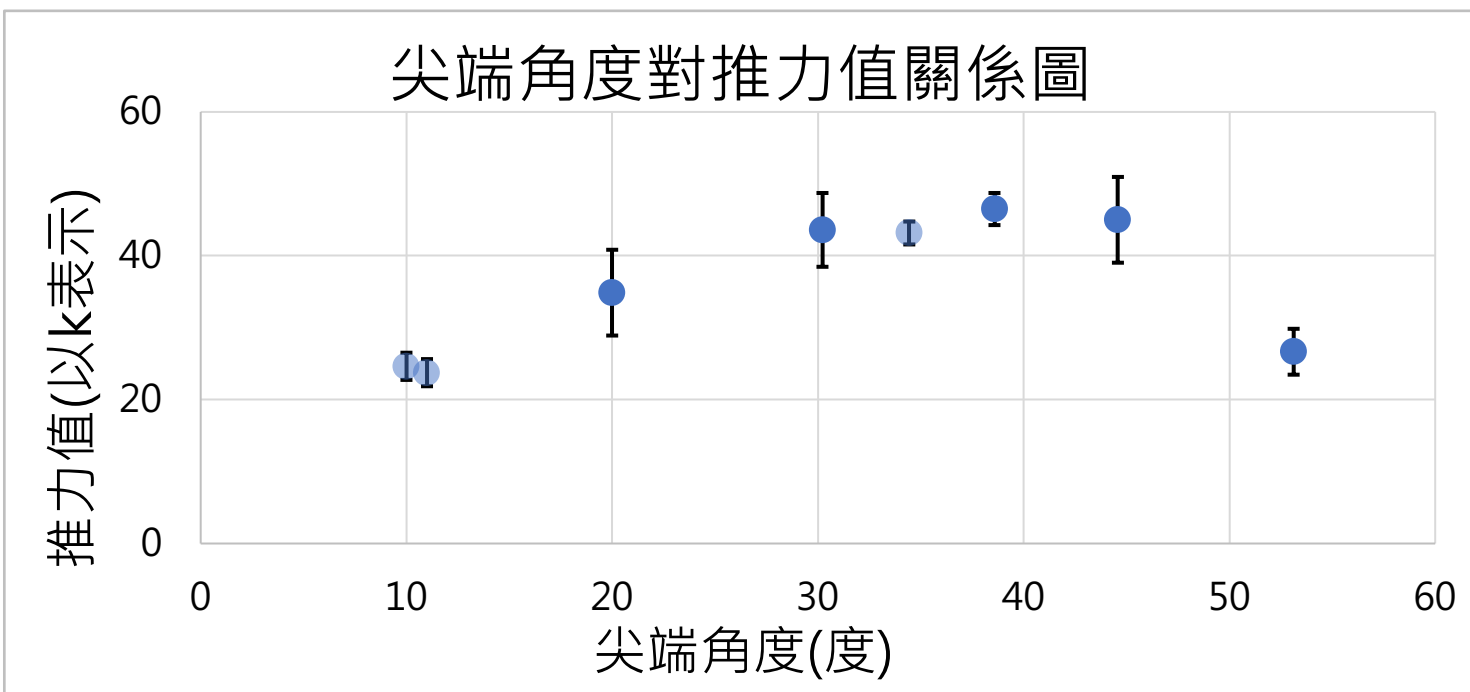
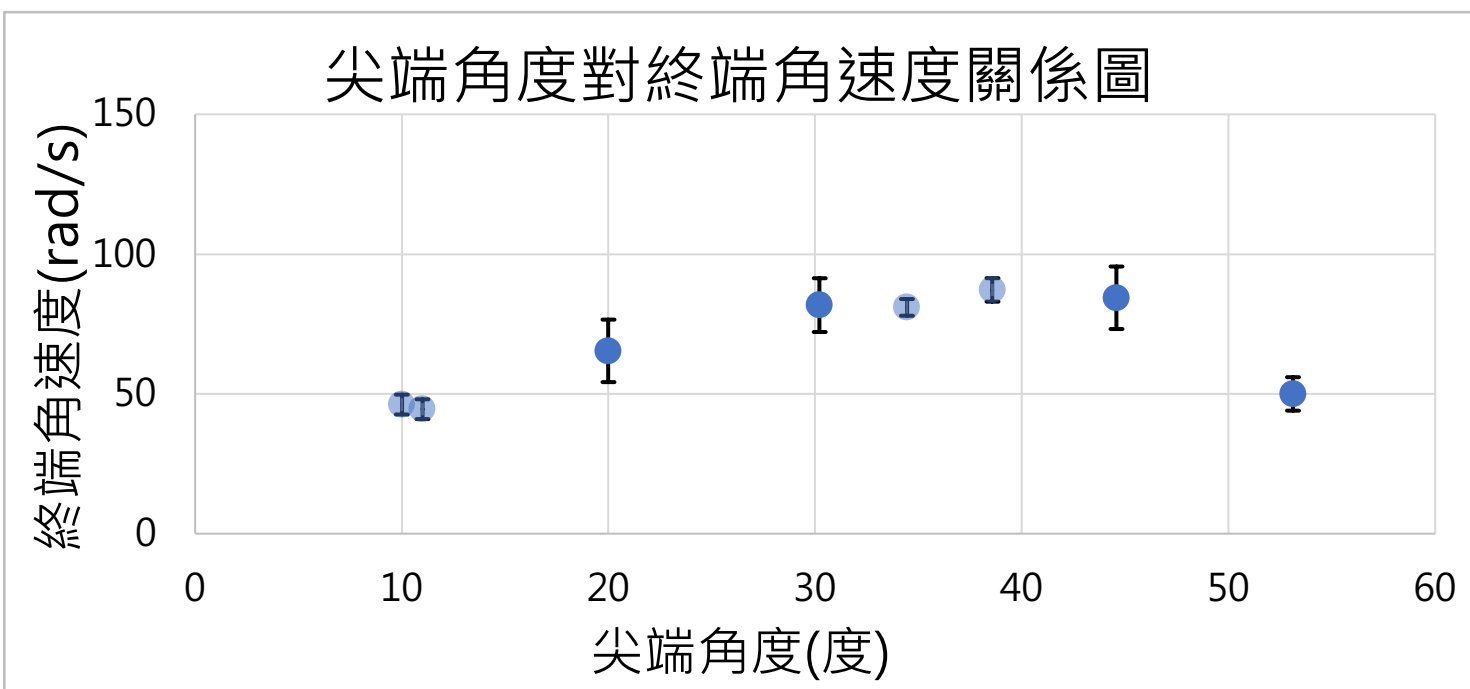
依據受力分析，可得終端角速度對應的離子風推力 F ：

$$F = \frac{1}{3} \cdot \omega_{steady} \cdot k \cdot R^2$$

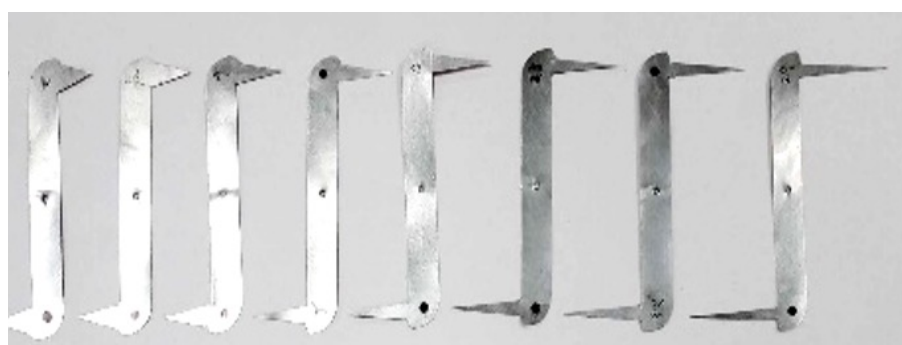
離子風推力與電壓檔位呈正相關，並與終端角速度呈正比。

二、尖端角度對靜電風車終端角速度影響

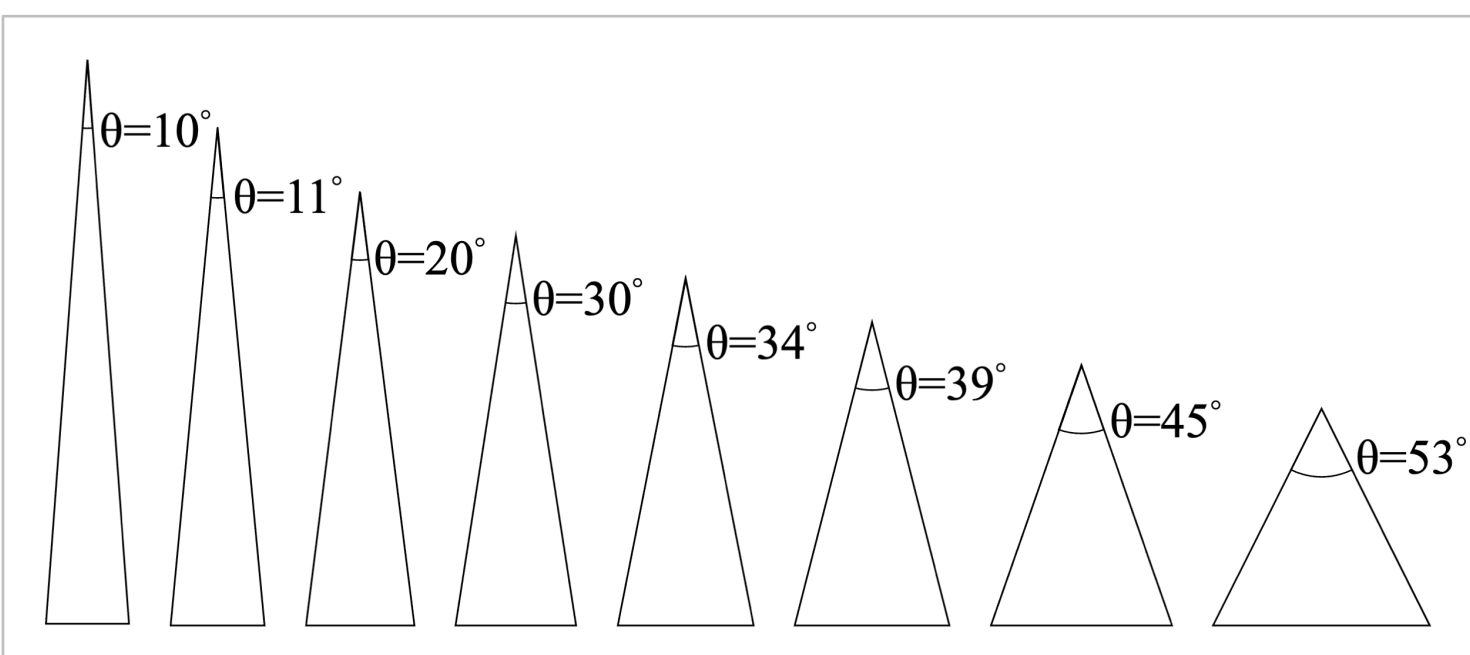
分別製作不同尖端角度，但面積相同的靜電風車。得到不同尖端角度下之終端角速度與推力量值。



結果顯示尖端角度約在30至45度間有最高終端角度，這可能代表此時靜電風車聚集與放出電荷效率最高。

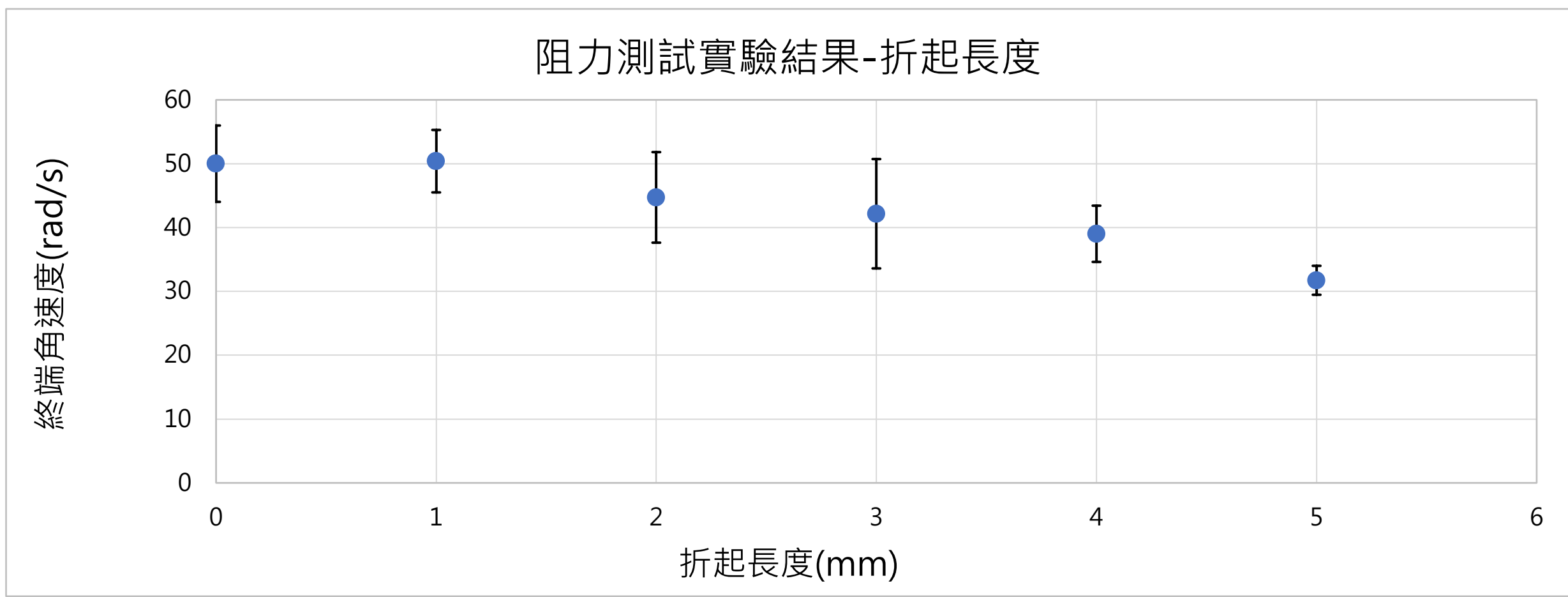


尖端實驗實驗器材



尖端實驗之靜電風車尖端角度

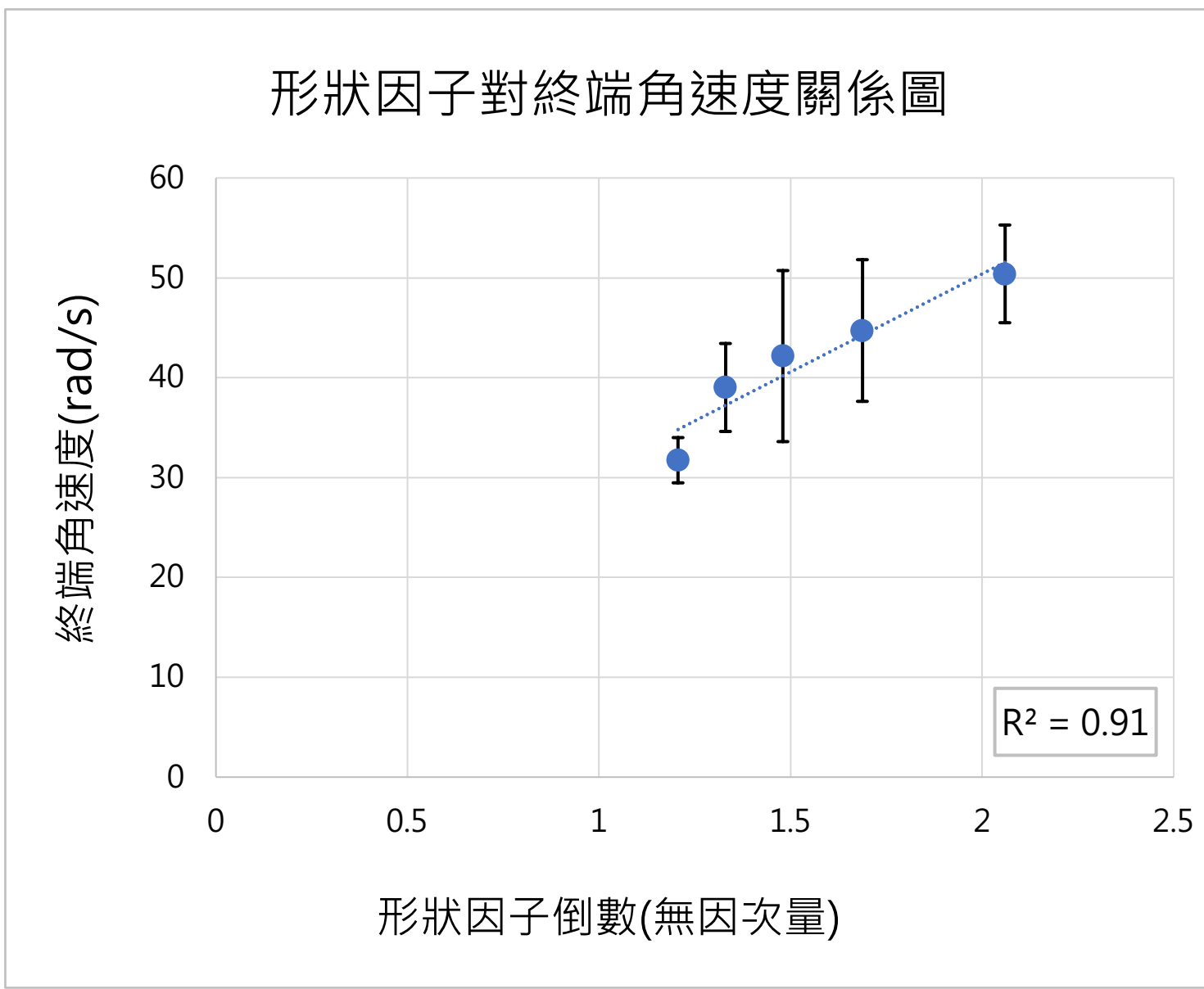
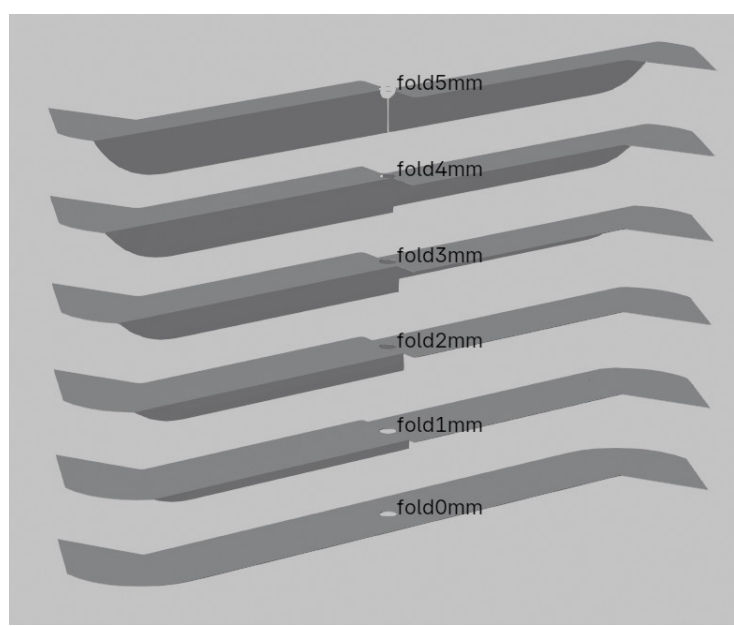
三、阻力模式對靜電風車終端角速度影響



靜電風車的阻力分為小阻力和大阻力模型。為確認標準模型的阻力類型，將8公分靜電風車模型的邊緣折下1至5毫米進行實驗。定義一個形狀因子 ψ 為受風面積比例，計算方式如下：

$$\psi = \text{受風面積比例} = \sqrt{\frac{\text{垂直空氣流動有效面積}}{\text{總有效面積}}}$$

由實驗可知終端角速度與折起量呈負相關，迎風面積比與終端角速度呈反比趨勢。

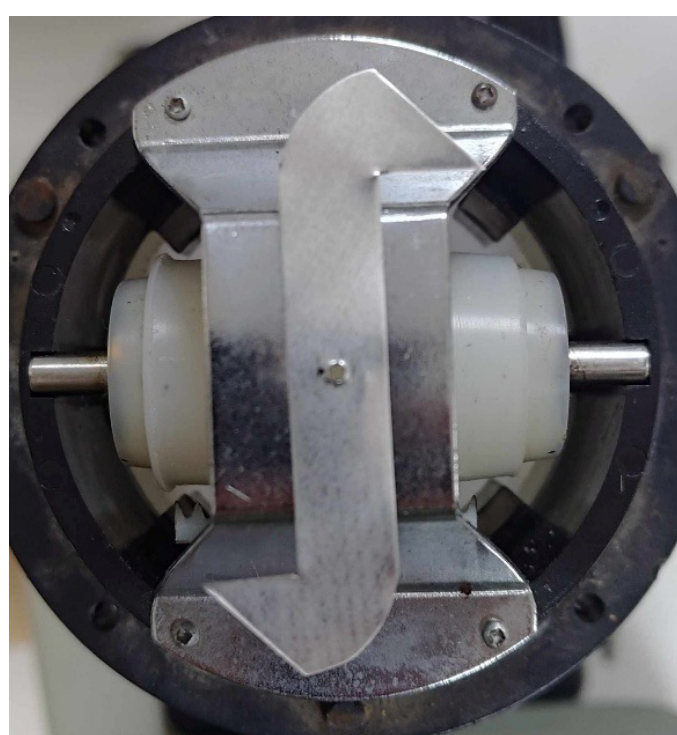
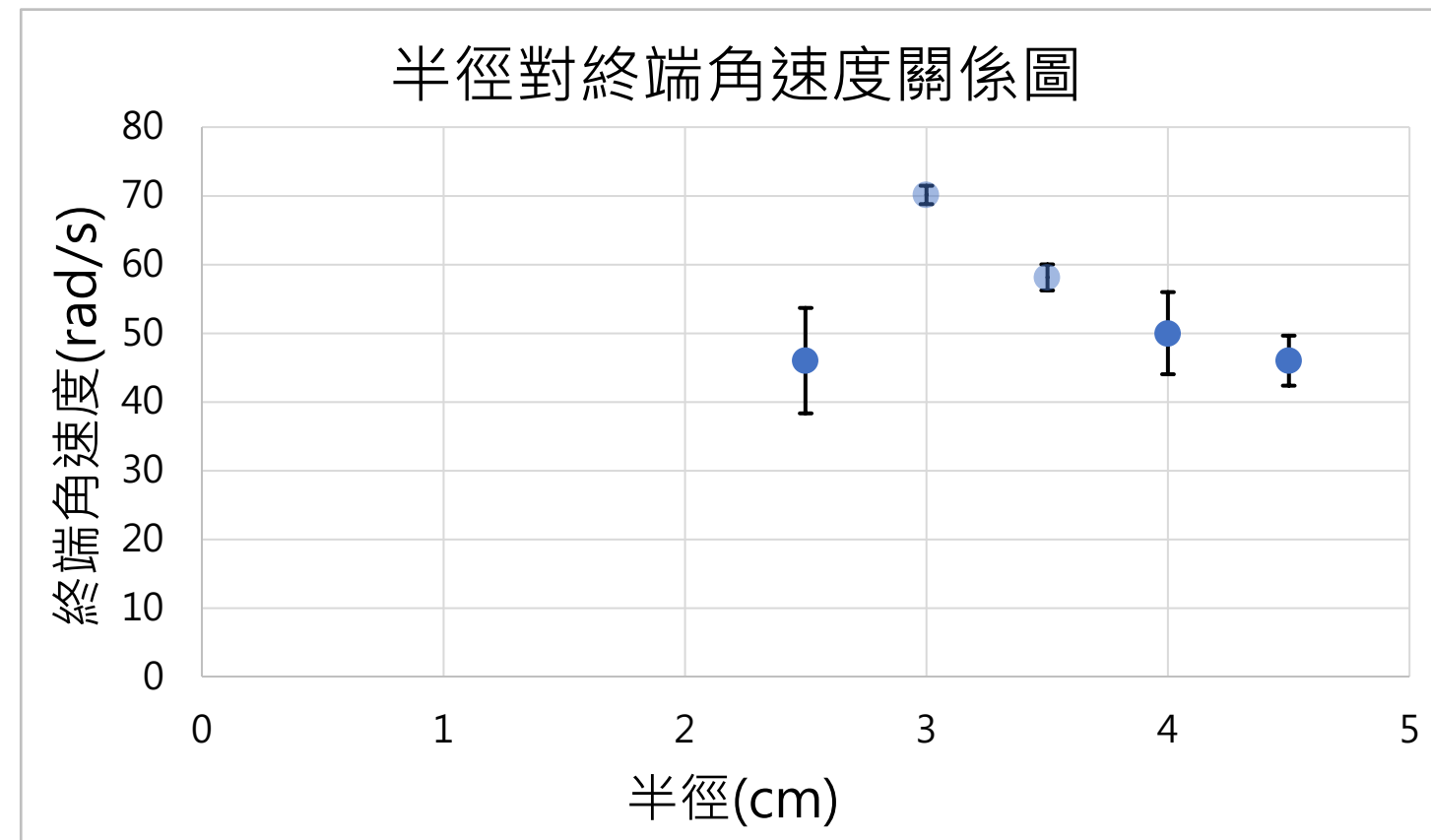


四、靜電風車不同半徑對終端角速度影響

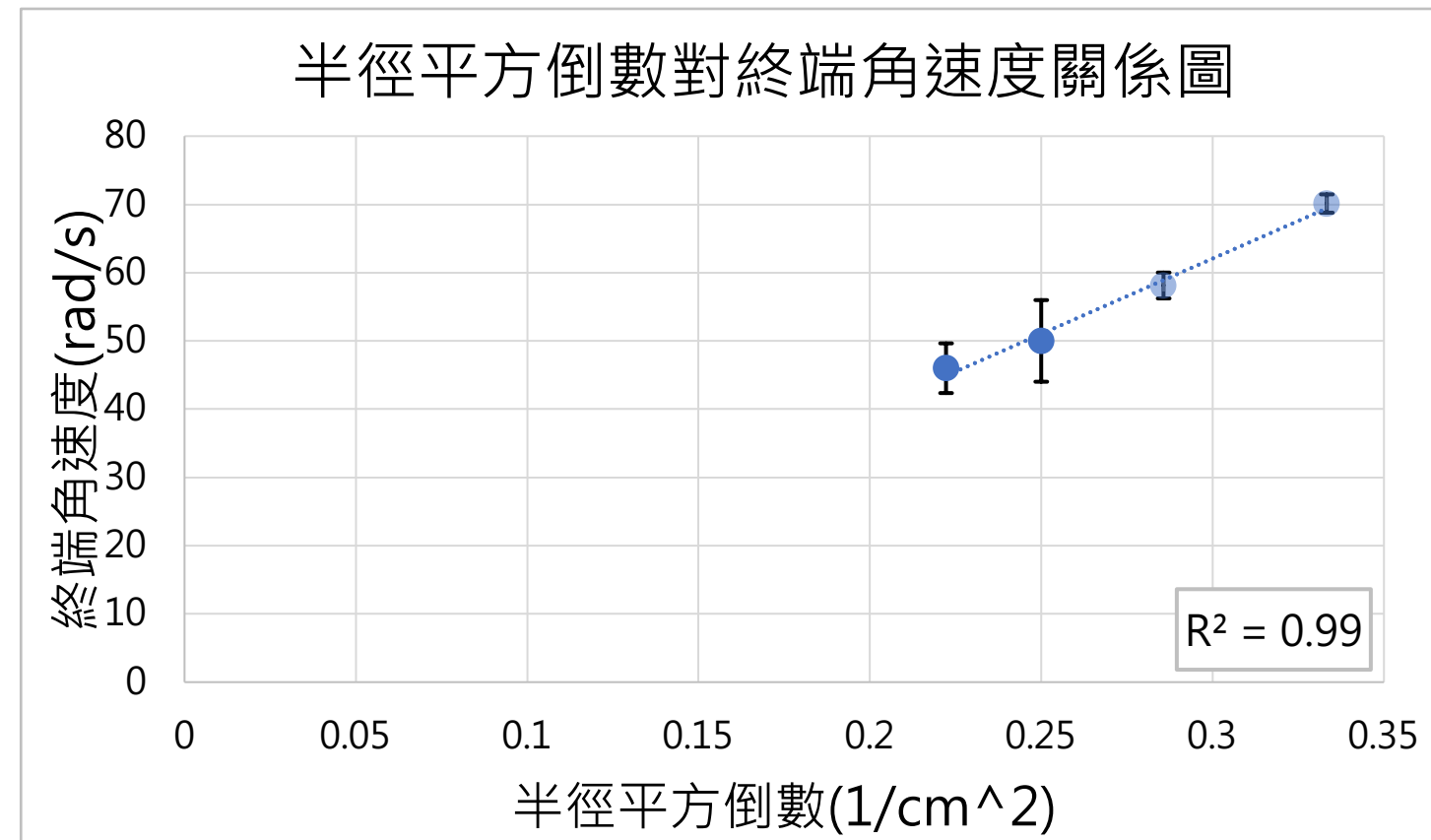
製作半徑2.5、3、3.5、4、4.5公分的風車進行實驗，並繪製結果圖表。

可看出其中四組半徑對終端角速度皆呈反比趨勢。

而半徑2.5公分組別轉速下降的原因可能為該靜電風車的半徑太小，與起電管產生交互作用。



5公分風車與起電管半徑對照圖



伍、討論

一、受力分析與統御方程式

從前述實驗結果並對受力方程式作時間對角速度之解，即將前述受力分析解受力分析方程轉換成常微分方程後進行求解，解如下。

(一)小阻力狀態

$$\omega(t)=\frac{3F}{kR^2}\left(1-e^{\left(-\frac{2kR^3}{3I}t\right)}\right)$$

可以觀察到，時間對角速度方程式在小阻力中呈自然指數式的飽和，且分析因次可以得到 ω 之因次與 $\frac{3F}{kR^2}$ 相同，而 e 的指數項為無因次量。

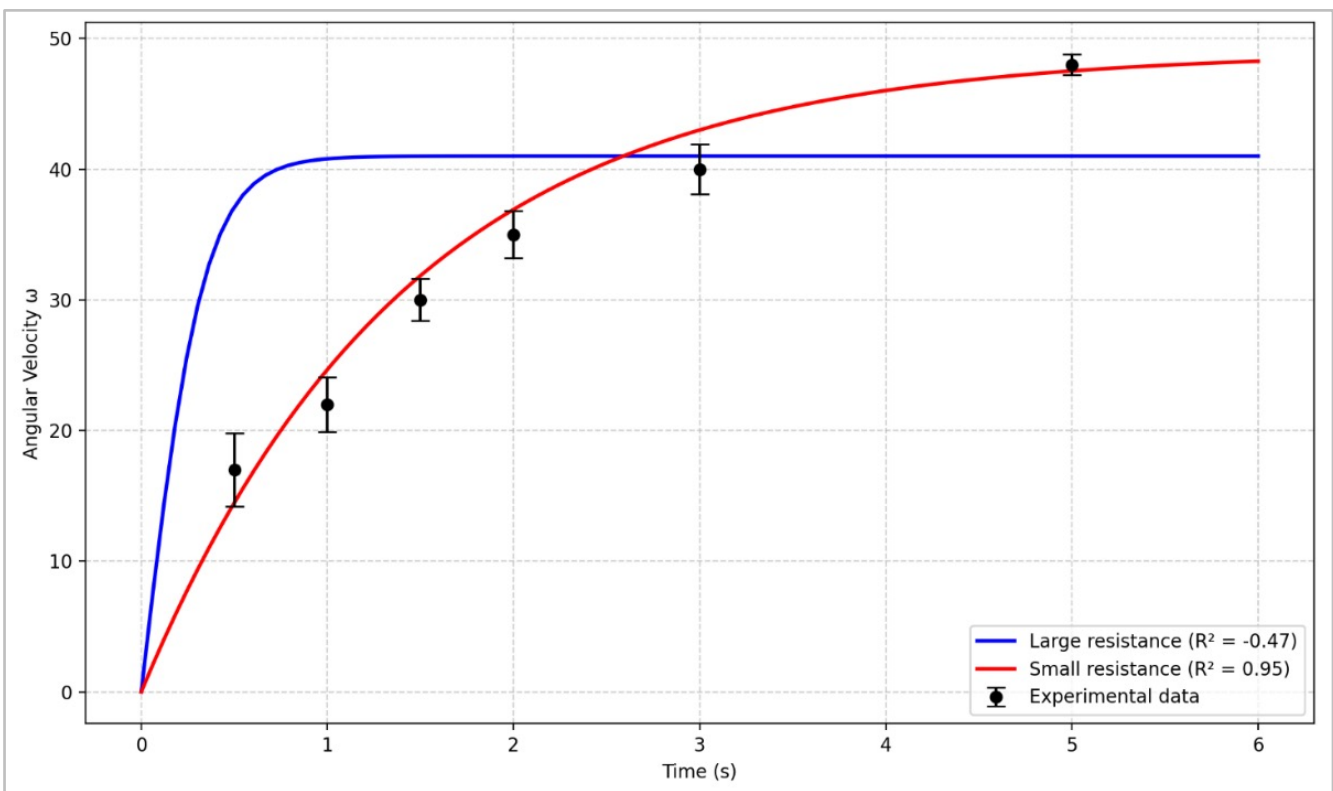
(二)大阻力狀態

$$\omega(t)=\sqrt{\frac{4F}{k'R^3}}\tanh\left(\frac{\sqrt{Fk'R^5}}{I}\right)t$$

可以觀察到，時間對角速度方程式在大阻力中呈雙曲正切函數飽和，且分析因次可以得到 ω 之因次與 $\sqrt{\frac{4F}{k'R^3}}$ 相同，其中自變數為無因次量。

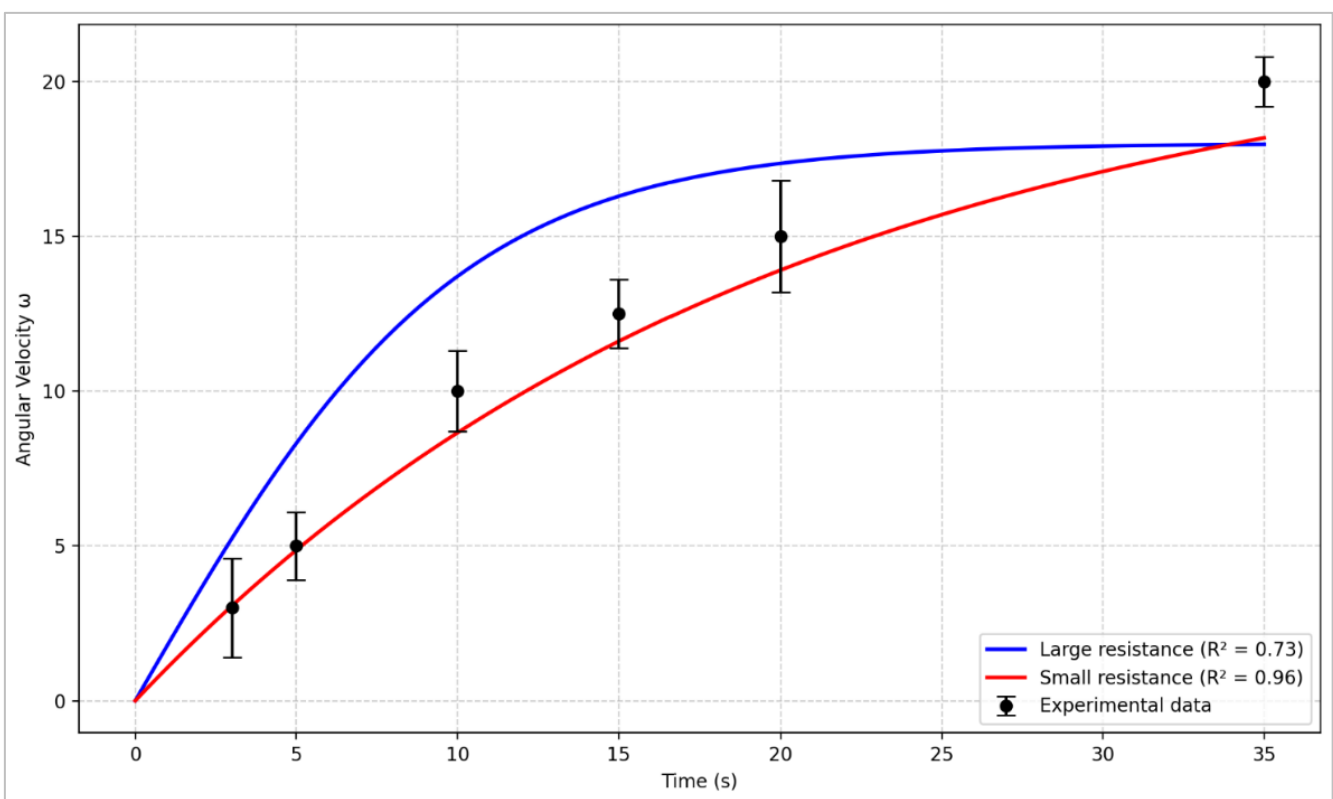
二、統御方程式之解與實驗數據對照

將每一個主實驗中皆有出現過的8公分近似模型與大小阻力模型對照，顯示在圖表中的曲線接近小阻力狀態。



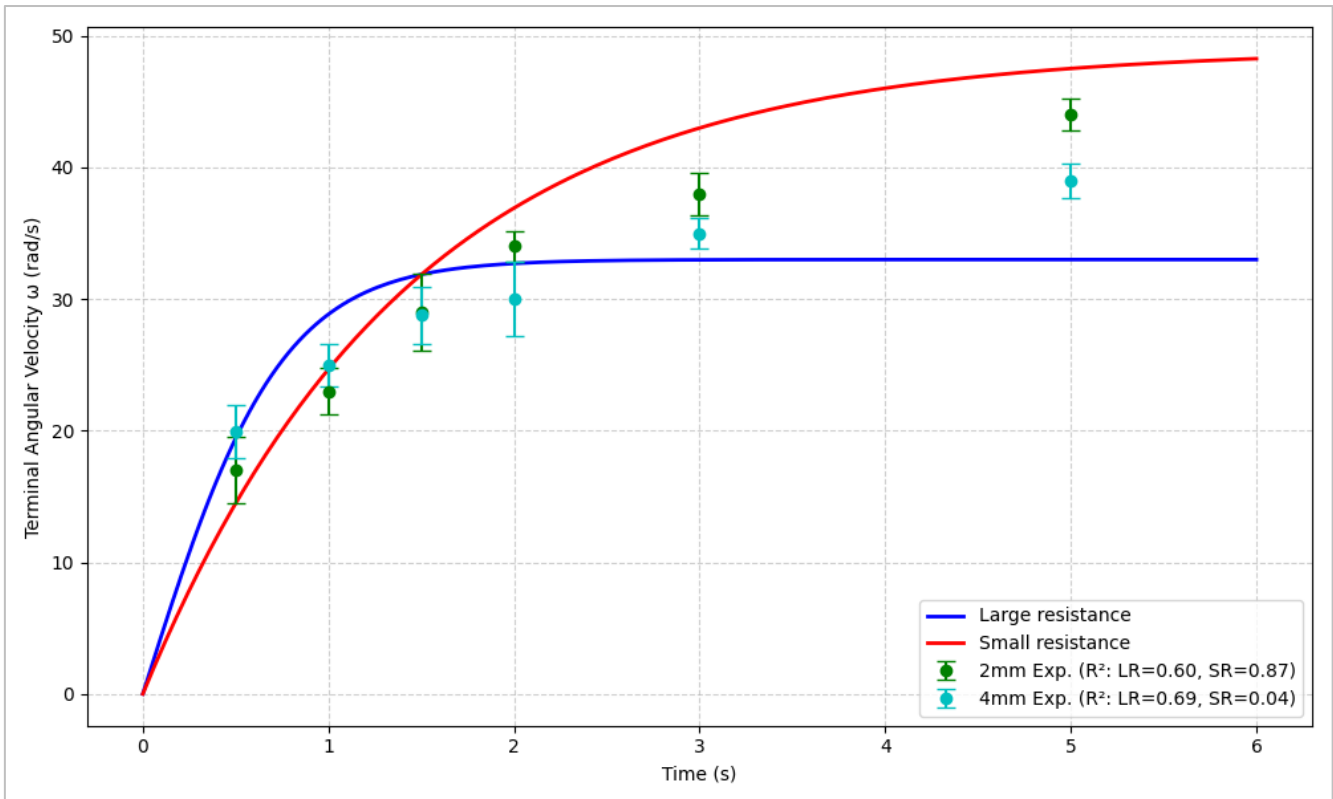
阻力理論模型與8cm模型實驗數據對照圖

將標準靜電風車與大小阻力模型做對照，發現其更接近小阻力模型，這可能是因為其迎風面之圓弧設計。



阻力理論模型與標準模型實驗數據對照圖

綠色與青色標記分別為2mm和4mm彎折模型，隨折起量增加，可觀察到阻力模型愈來愈接近大阻力模型。



阻力理論模型與彎折模型實驗數據對照圖

三、時間係數與物理意義

定義小、大阻力之特徵時間係數分別為 $\alpha = \frac{3I}{2kR^3}$

與 $\beta = \frac{I}{\sqrt{Fk'R^5}}$ 。在小阻力與大阻力模型的t分別達到 3α 與 2β 時，約能分別得到95%與96%之終端角速度。

特徵時間係數皆包含轉動慣量，將靜電風車近似為長方體，以轉動慣量公式換算如下表。

近似模型之特徵時間約為1到2秒，而標準模型卻接近13秒，顯示特徵時間大幅受轉動慣量影響。標準模型由於質量遠高於以鋁罐製成的其它模型，進而使其轉動慣量極大。

模型名稱	6公分近似	7公分近似	8公分近似	9公分近似	標準模型
轉動慣量(I)	0.925	1.25	1.625	2.05	25.12
特徵時間(s)	2.17	1.85	1.61	1.43	12.78

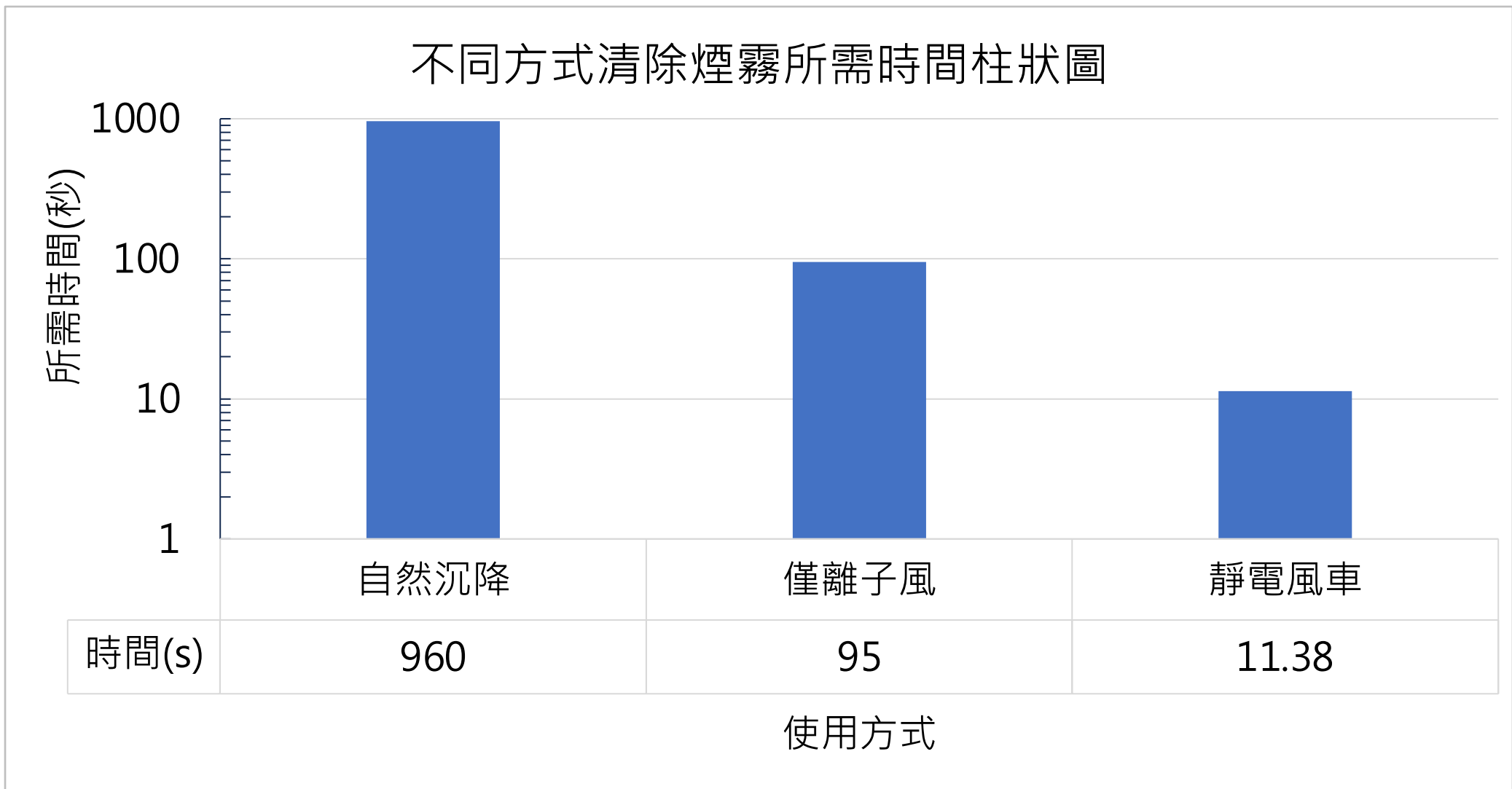
半徑對轉動慣量換算表

符號	F	R	k	k'	ω	α	Γ	I
物理意義	推力	半徑	系統阻力係數		角速度	角加速度	合力矩	轉動慣量
因次	$[MLT^{-2}]$	$[L]$	$[ML^{-1}T^{-1}]$	$[ML^{-2}]$	$[T^{-1}]$	$[T^{-2}]$	$[ML^2T^{-2}]$	$[ML^2]$

阻力模型代數意義表

四、范氏起電機驅動之靜電風車實際應用初步探討

前述提到線香能夠生成煙場，在此討論靜電風車對煙場消散的空氣淨化能力。分別在兩公升大容量燒杯中裝入煙霧，觀測燒杯另一端之標記點，起初標記點因煙霧阻擋不可見。分別以自然沉降、僅離子風（固定靜電風車）與啟動靜電風車進行簡易實驗，結果如下。



依據實驗結果，離子風本身較自然沉降具有顯著差異，而啟動靜電風車相較於另外二者，11秒左右便能清除燒杯中煙霧，顯示其具有一定的空氣清淨潛力。

陸、結論

- 一、起電強度與推力呈正相關。
- 二、尖端在30至45度有最高推力效率。
- 三、在一定範圍內，半徑平方與終端角速度呈反比。
- 四、包含大部分模擬模型與標準模型的小阻力模型為自然指數飽和，彎折模型則為雙曲正切飽和。

柒、參考文獻與來源

1. Performance of an electrohydrodynamic gas pump fitted within a nozzle. (2017). Journal of Electrostatics, 90, [頁碼未知]. Retrieved from ScienceDirect
2. Ion Thruster: Build an Ion Wind Rotor | Science Project
3. Zyga, Lisa (February 7, 2018). "What causes ionic wind?". Phys.org. Retrieved August 27, 2018.
4. Electrostatic pinwheel: Van de Graaff makes pinwheel spin - Lecture Demonstrations - UC Berkeley Physics
5. Robinson, M. (1960, June 8). Movement of Air in the Electric Wind of the Corona Discharge. (AD0262830)
6. Shiue, A., Hu, S.-C., & Tu, M.-L. (2011). Particles removal by negative ionic air purifier in cleanroom. Aerosol and Air Quality Research, 11(2), 179–186.