

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051808

反泡泡的變形之舞：拉格朗日分析看見動力系統

學校名稱：新北市立板橋高級中學

作者：	指導老師：
高二 郭又誠	楊朝源 呂昀修

關鍵詞：反泡泡、界面活性劑、拉格朗日方程式

摘要

入射界面活性劑滴第一次觸碰水面時可能直接入水，也可能不會穿透，形成水珠，但在高度較高而使其產生液柱之後再次掉落時，某些情況會產生反泡泡，本實驗將探討其發生條件。並且研究反泡泡在水中的運動情形。首先，我們設計並建立了一套穩定產生反泡泡的裝置，以確保其生成的可控性與重現性。其次，我們透過調整內部液體的密度，探討內部液體密度對反泡泡運動情形的影響。另外我們利用生成大量反泡泡使他們發生碰撞並探討其運動方程式。

壹、前言

一、研究動機：

我將實驗分成三部分：

實驗一：在執行其他實驗的過程中，我意外觀察到一個特殊的現象：當液滴從特定高度($30\text{cm} \sim 50\text{cm}$)落入水中時，並未形成普通氣泡，而是在水面上生成了反泡泡，且相較於一般方法產生的反泡泡，其尺寸更小。反泡泡的生成方式通常為在距液面小於 1cm 時入射液體。這一現象引起了我的好奇，促使我進一步探討液滴高度、界面活性劑濃度對於此方式生成之反泡泡的影響，並透過攝影記錄其形成過程，以更深入理解其生成機制。

實驗二：與一般泡泡不同，反泡泡的外層是空氣，內部則包覆著液體（內部液體），因此在水中會因浮力而迅速上升。然而，我意識到如果能夠透過調整內部液體的密度，使其與周圍液體達到平衡，或許能讓反泡泡穩定懸浮於水中，而非立即消失。

實驗三：在執行實驗一及實驗二中，有時意外會發生碰撞，發現兩顆泡泡會相撞後分開，所以我想利用拉格朗日方程式研究兩泡泡碰撞加速度、彈性係數等

這三個實驗分別使用不同的反泡泡生成方式，實驗一為液滴掉落方式，實驗二及三則是用下落液體的方式。

二、研究目的：

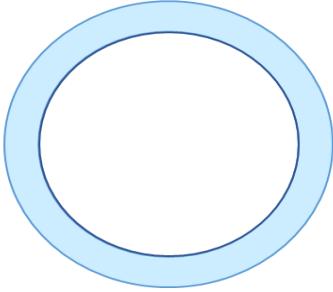
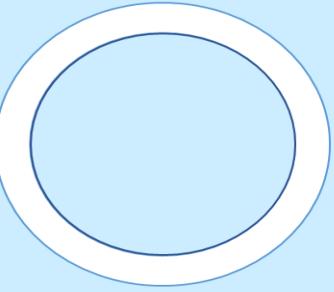
- (一) 拍攝泡泡生成過程
- (二) 探討影響泡泡生成因素
 - 1. 液滴高度與反泡泡生成關係
 - 2. 界面活性劑濃度與反泡泡生成關係
- (三) 製作穩定產生反泡泡的裝置
- (四) 不同內部液體密度使反泡泡在水中的運動軌跡及速度

(五) 探討反泡泡碰撞的運動方程式

三、文獻回顧：

台中教育大學科學教育與應用學系用吸管插入 1%的泡泡水中，並用手指蓋住吸管一端，向上提起至距水面 0.5cm 的位置並放開，使液體侵入液面形成反泡泡，反泡泡特徵為：泡泡的表面包裹一層的空氣膜，在泡泡水中會緩緩的上升到水面上。

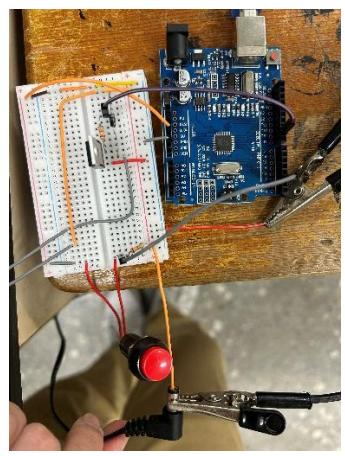
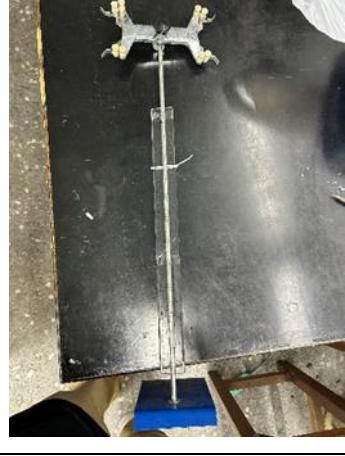
平常將泡泡吹到空氣中，泡泡水形成的泡泡膜將空氣包起來(如圖 1-3-1)。而反泡泡則是在水中的泡泡，空氣包圍著水而形成泡泡(如圖 1-3-2)。反泡泡的形成過程為:吸管滴下的泡泡水，因為重力的作用垂直往水面掉落，接著泡泡水與水面接觸時，接觸面會有一層空氣層，然後水滴繼續往下掉落，水滴沉入水中時會再吸入空氣，使空氣層持續存在，水滴沉入到某個程度時，水滴因表面張力形成球狀，而形成反泡泡。(參考文獻三)

	
圖 1-3-1： 正常泡泡：由液體包覆空氣而成 藍色部分為液體，白色部分為空氣	圖 1-3-2： 反泡泡：由空氣膜包覆液體而形成 藍色部分為液體，白色部分為空氣

※示意圖皆為作者製作

貳、研究設備及器材

一、實驗器材：

		
洗碗精	針筒及橡皮筋	電路組
		
電磁閥	連接軟管及滴頭	透明壓克力盒
		
木製架子	食鹽	滴定管架

		
滴定管	校正用木塊	燒杯
		
燈泡	微量吸量管	

※照片皆由作者拍攝

二、軟體：

- (一) Tracker
- (二) Excel
- (三) Arduino IDE

三、Arduino 程式：

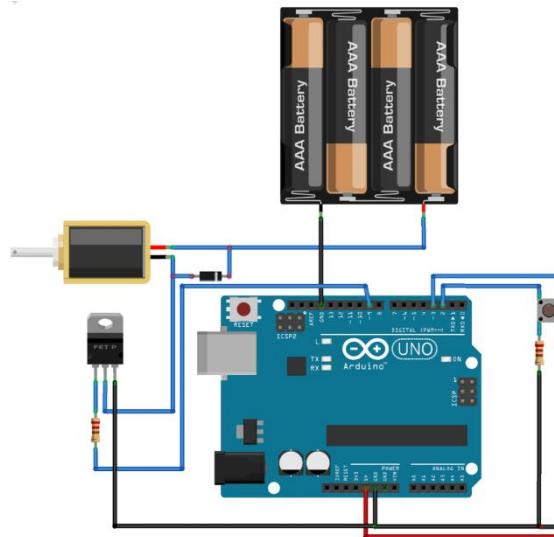
```

1 void setup() {
2   pinMode(9,OUTPUT);
3   pinMode(2,INPUT);
4 }
5
6 void loop() {
7   if(digitalRead(2)==HIGH)
8   {
9     digitalWrite(9,HIGH); //使電磁閥開啟
10    delay(100); //使電磁閥開啟時間為0.1s
11    digitalWrite(9,LOW); //使電磁閥關閉
12    delay(900); //使電磁閥關閉時間大於0.9s
13  }
14 }

```

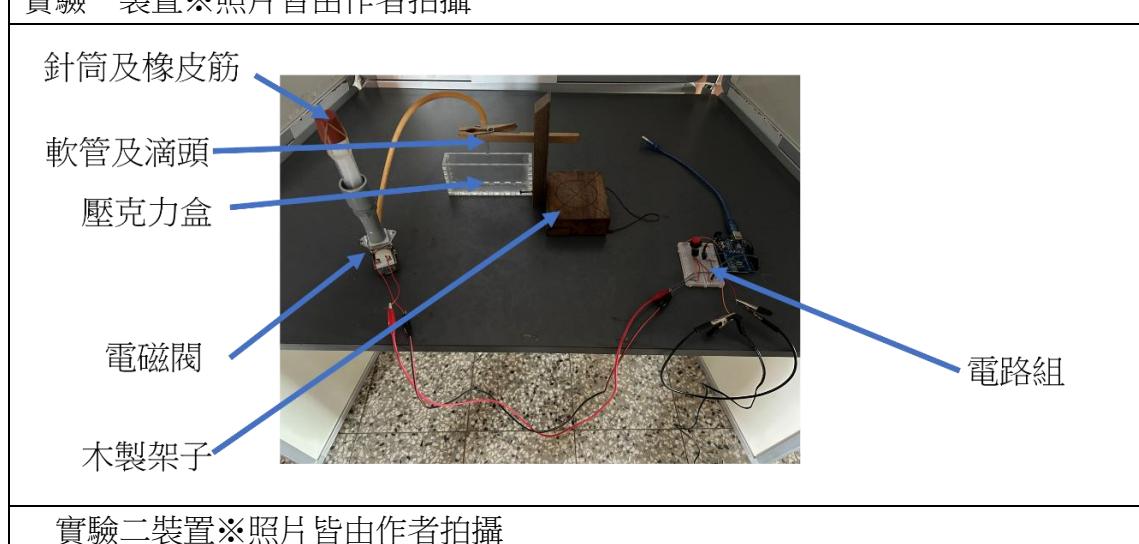
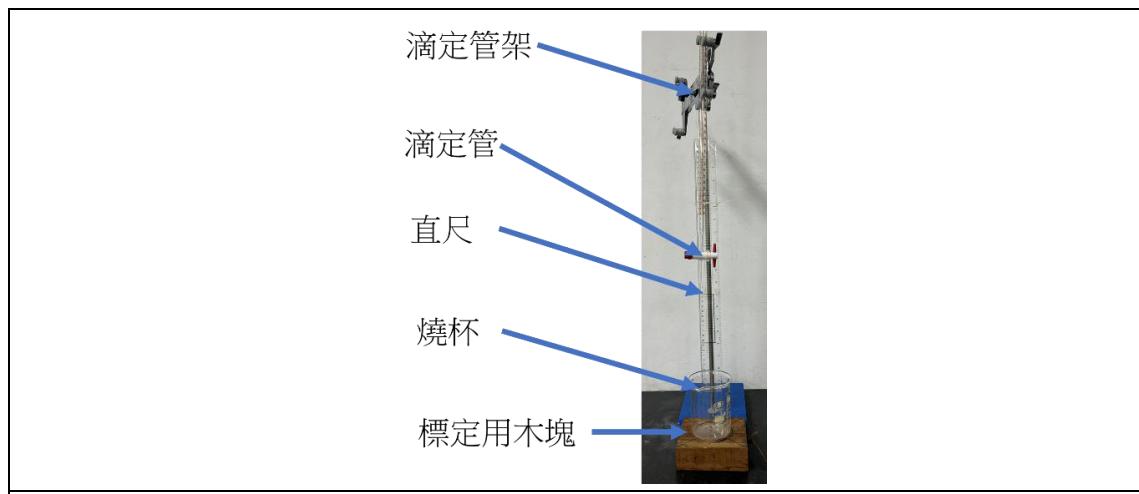
※由作者編寫並截圖

四、電路圖：



(引用 Yiboard 網站:如何使用 Arduino 開發版控制電磁閥，圖片製作者:风筝)

五、實驗裝置：



參、研究過程或方式

我將實驗分成三部分：

一、介面活性劑濃度及高度對反泡泡生成的影響：

(一) 測量界面活性劑滴的體積和質量：

利用滴定管滴出 100 滴介面活性劑滴後，計算出每顆液滴的平均體積及質量。

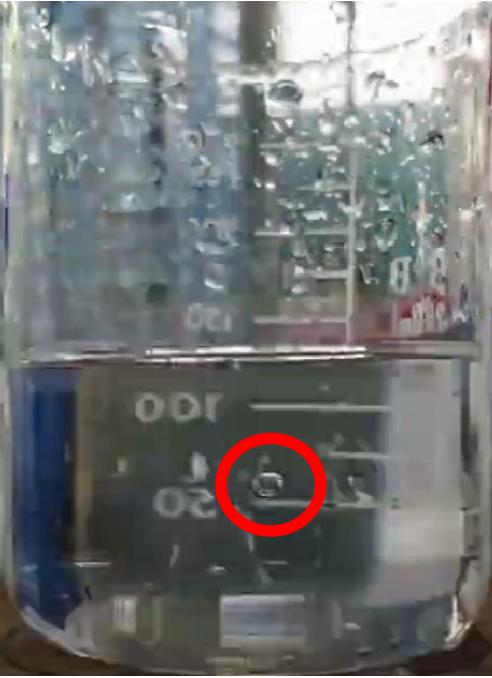
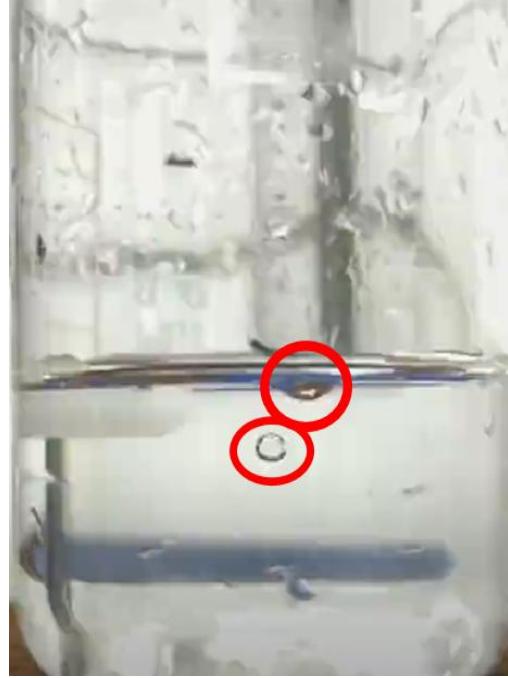
滴數	質量(g)	體積(ml)
100滴	1.33	1.35
平均1滴	0.0133	0.0135

(二) 入射點的定位：

為保證液滴入射點維持一樣，我們進行入射點定位，先在木塊上標上入射點，接著由滴定管滴出液滴，將滴入位置調至記號處，再將燒杯放置於記號處。

(三) 水滴處水時的分類：



	
3.形成反泡泡，沒有形成水珠	4.同時形成反泡泡及水珠

※照片皆由作者拍攝

(四) 實驗步驟：

1. 固定水深為 3.5cm，固定溶液重量百分濃度為 1%，分別由距水面 47.5、45、42.5、40、37.5、35、32.5、30cm 處滴液，各拍攝 50 次液滴入水，並記錄入水的結果。
2. 固定水深為 3.5cm，固定高度為 45cm，分別以重量百分濃度 5%、4%、3%、2%、1%滴液，各拍攝 50 次液滴入水，並記錄入水的結果。
3. 計算機率:每組形成反泡泡顆數除以 50 再乘以 100%。每組形成水珠顆數除以 50 再乘以 100%。

二、下落液體形成反泡泡與內部液體密度關係：

(一) 製作穩定產生反泡泡的裝置：

1. 將水裝入壓克力盒至水深 5cm
2. 用針筒將濃度 1%的介面活性劑水溶液吸起

3. 用橡皮筋綁住針筒以提供壓力
4. 將針筒與電磁閥組合
5. 將滴頭夾至架子上，離水面距離 0.5cm
6. 按壓按鈕觀察產生反泡泡的情形

(二) 改變內部液體密度使反泡泡能懸浮於水中：

1. 配置食鹽濃度 0%、1%、2%、2.5%、3%
2. 用針筒將不同濃度的界面活性劑水溶液吸起
3. 用橡皮筋綁住針筒以提供壓力
4. 將針筒與電磁閥組合
5. 將滴頭夾至架子上，離水面距離 0.5cm
6. 按壓按鈕並拍攝反泡泡在水中運動的情形
7. 用 tracker 追蹤反泡泡的行為
8. 利用 Excel 分析其上升速度、加速度等數值

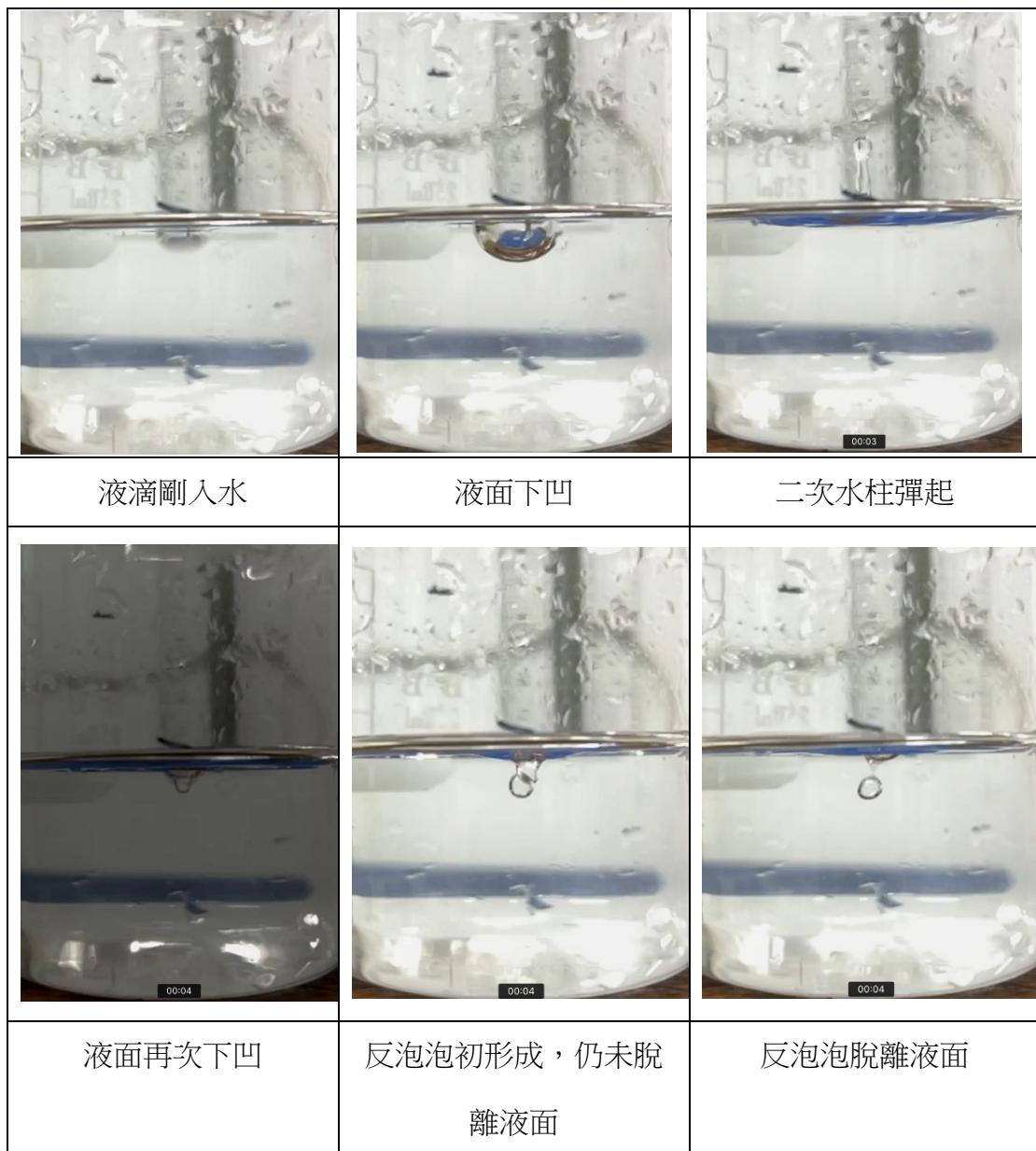
三、探討反泡泡碰撞的運動方程式

(一) 數據測量：

1. 將水裝入壓克力盒至水深 5cm
2. 用微量西量管吸取 1ml 的 1% 界面活性劑水溶液
3. 射入於長方體透明壓克力箱中已形成反泡泡
4. 拍攝記錄反泡泡碰撞情形
5. 利用 tracker 測量分析反泡泡的初始質量、位置、及速度
6. 利用拉格朗日分析其運動方程式

肆、研究結果

一、泡泡生成過程：



※照片皆由作者拍攝

二、探討影響泡泡生成因素：

(一) 液滴高度與反泡泡生成關係：

產生反泡泡的機率								
高度(cm)	30	32.5	35	37.5	40	42.5	45	47.5
機率(%)	12	32	20	16	32	32	28	36

表 4-2-1

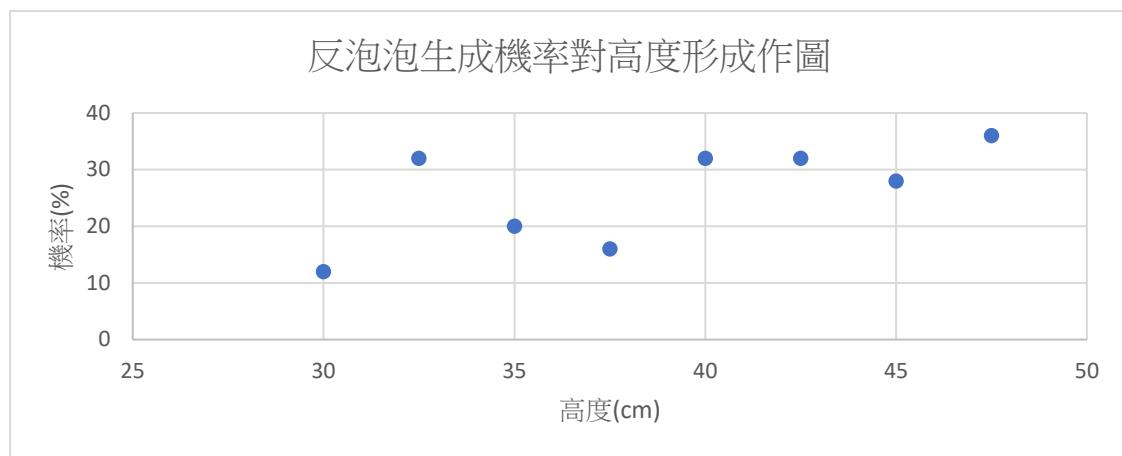


圖 4-2-1

(二) 液滴高度與水珠生成關係：

產生水珠的機率								
高度(cm)	30	32.5	35	37.5	40	42.5	45	47.5
機率(%)	96	72	88	48	80	68	96	68

表 4-2-2

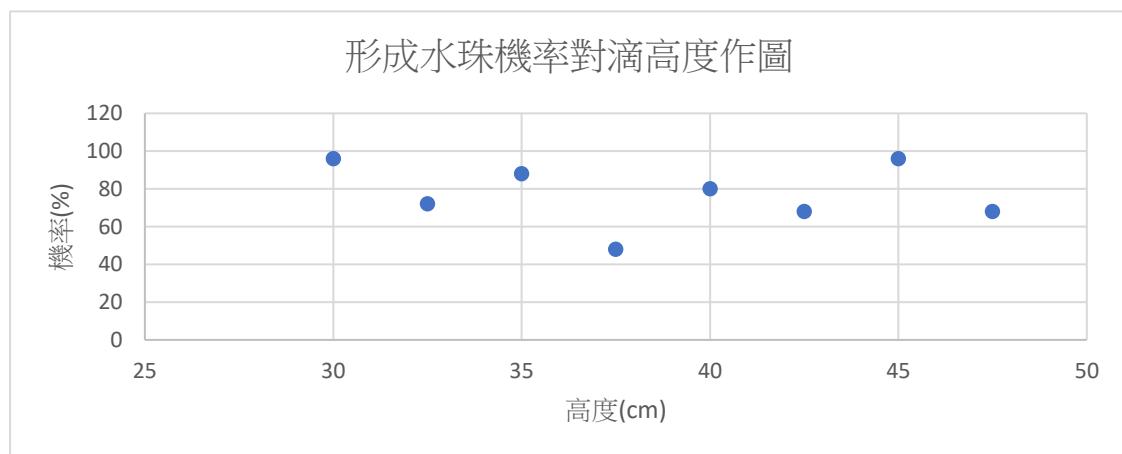


圖 4-2-2

(三) 界面活性劑濃度與反泡泡生成關係：

產生反泡泡的機率					
濃度(%)	1	2	3	4	5
機率(%)	28	36	48	70	40

表 4-2-3

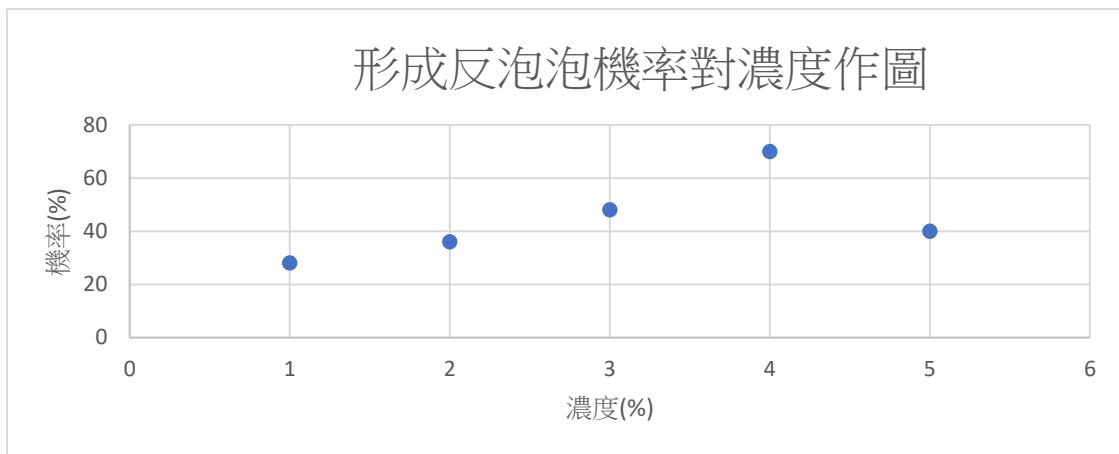


圖 4-2-3

(四) 界面活性劑濃度與水珠生成關係：

產生水珠的機率					
濃度(%)	1	2	3	4	5
機率(%)	96	36	8	6	0

表 4-2-4

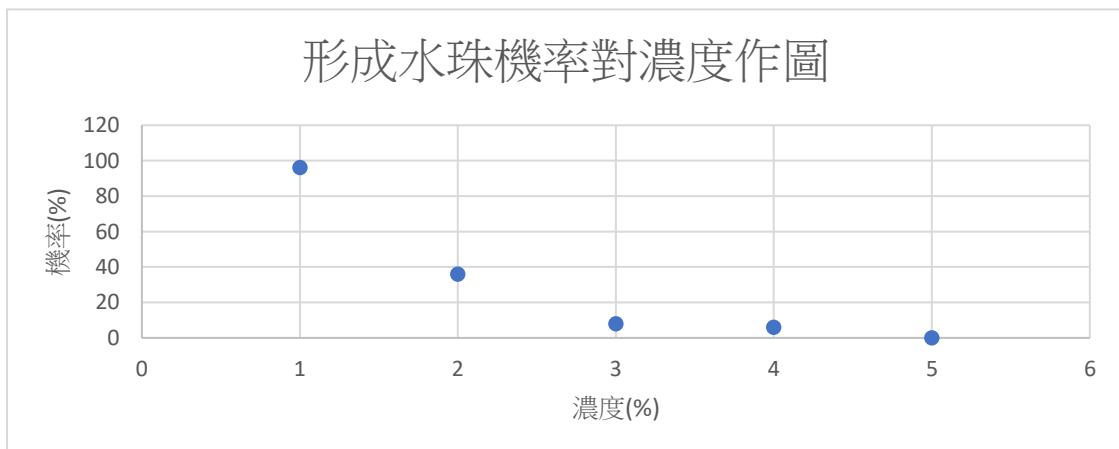


圖 4-2-4

※圖表皆由作者製作

三、不同內部液體密度的反泡泡在水中的運動情況：

(一) 0%：

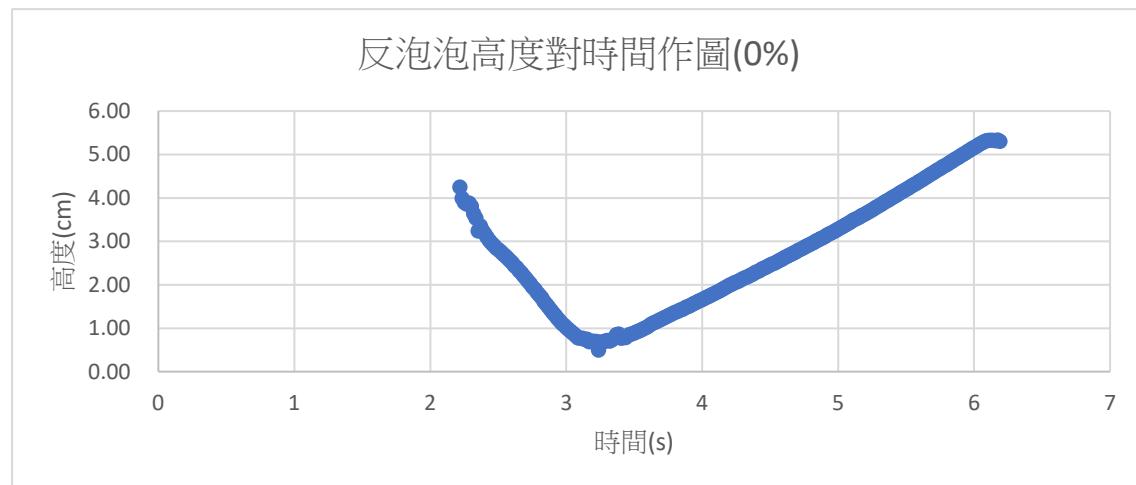


圖 4-3-1-1

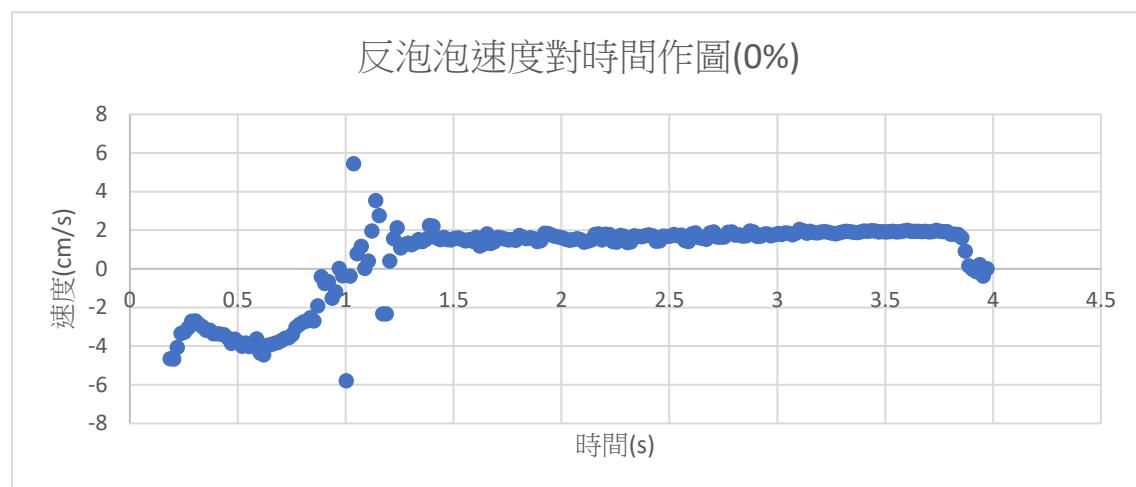


圖 4-3-1-2

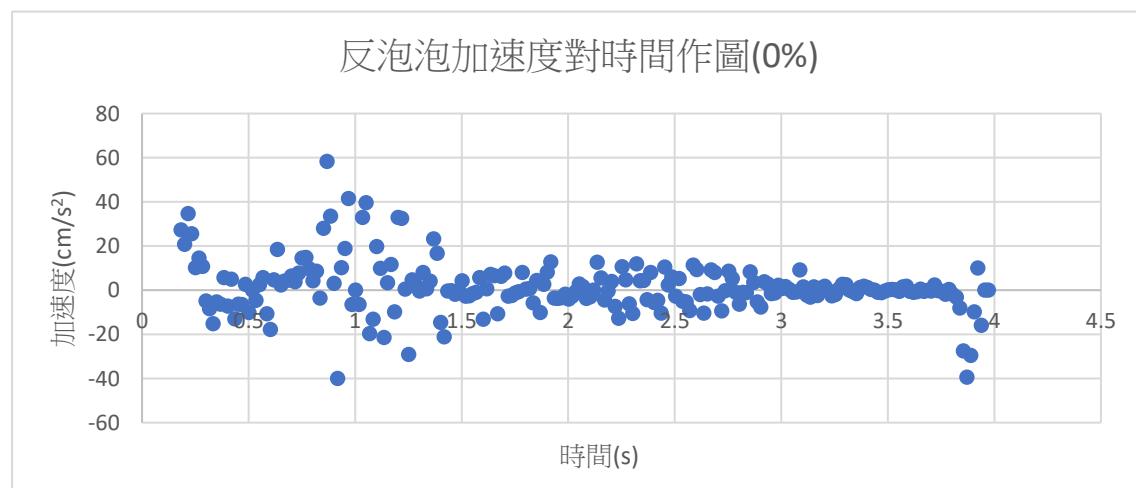


圖 4-3-1-3

(二) 1% :

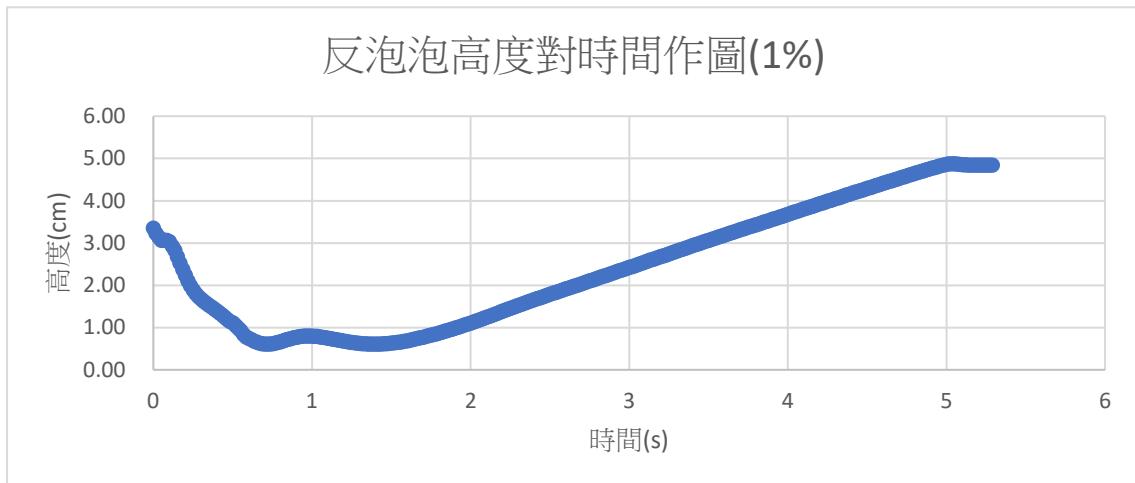


圖 4-3-2-1

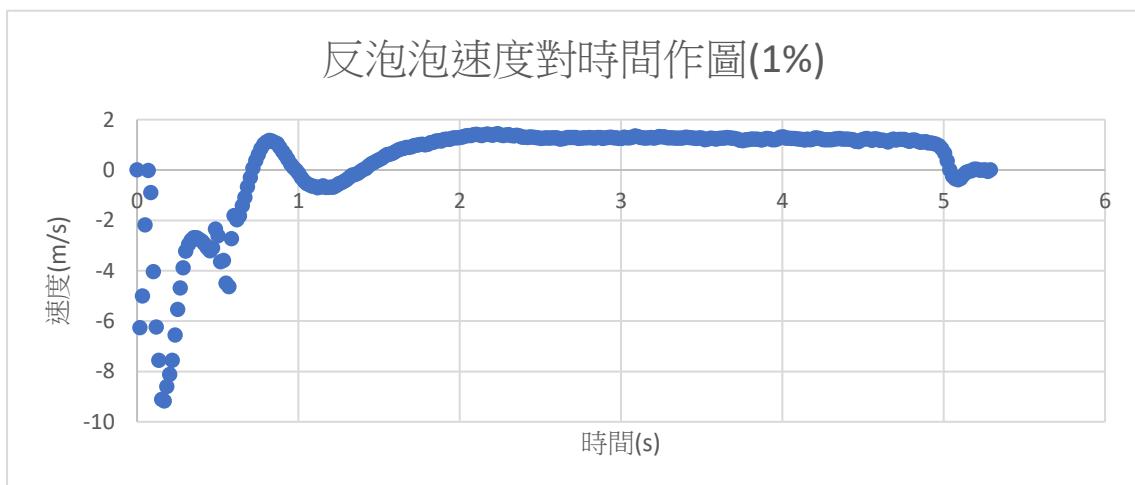


圖 4-3-2-2

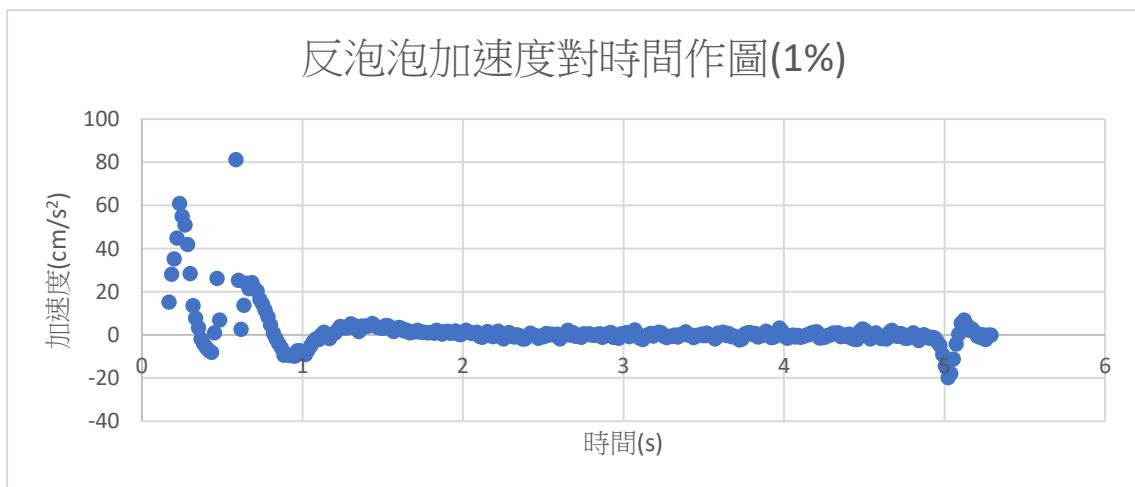


圖 4-3-2-3

(三) 2% :

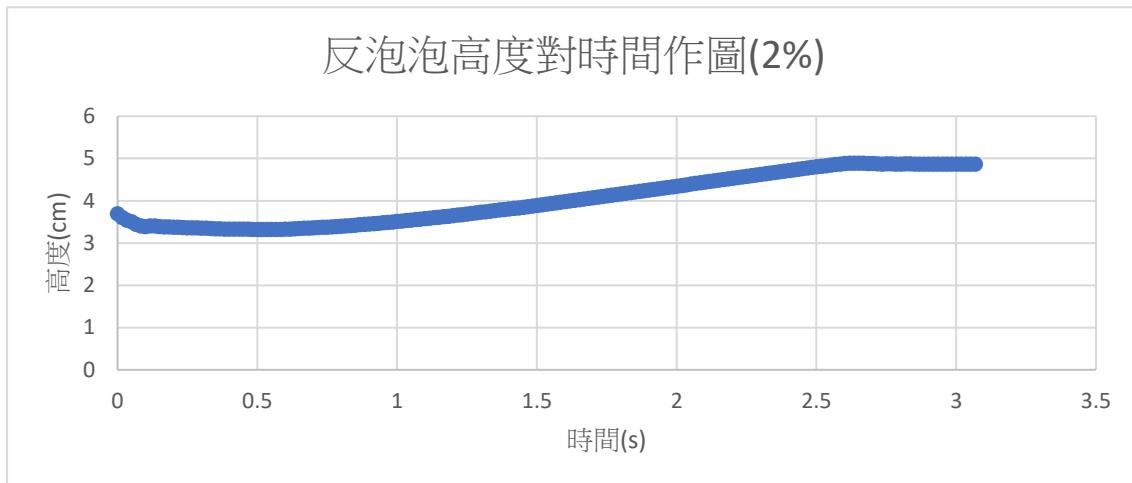


圖 4-3-3-1

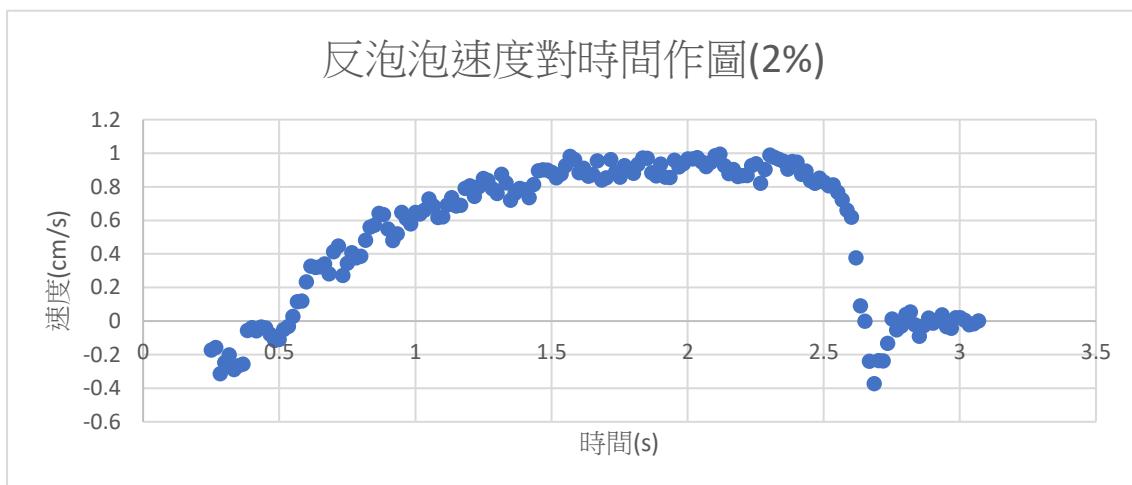


圖 4-3-3-2

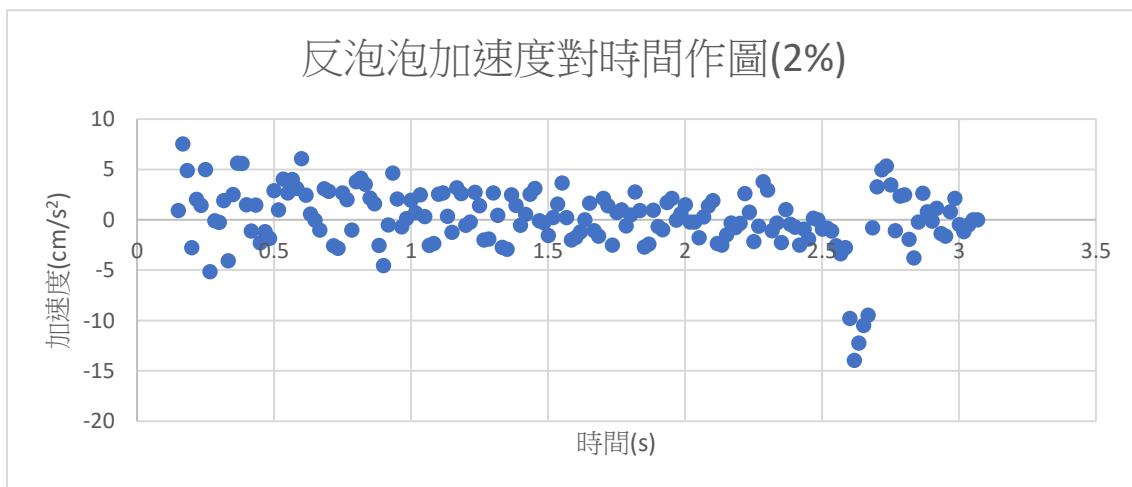


圖 4-3-3-3

(四) 2.5% :

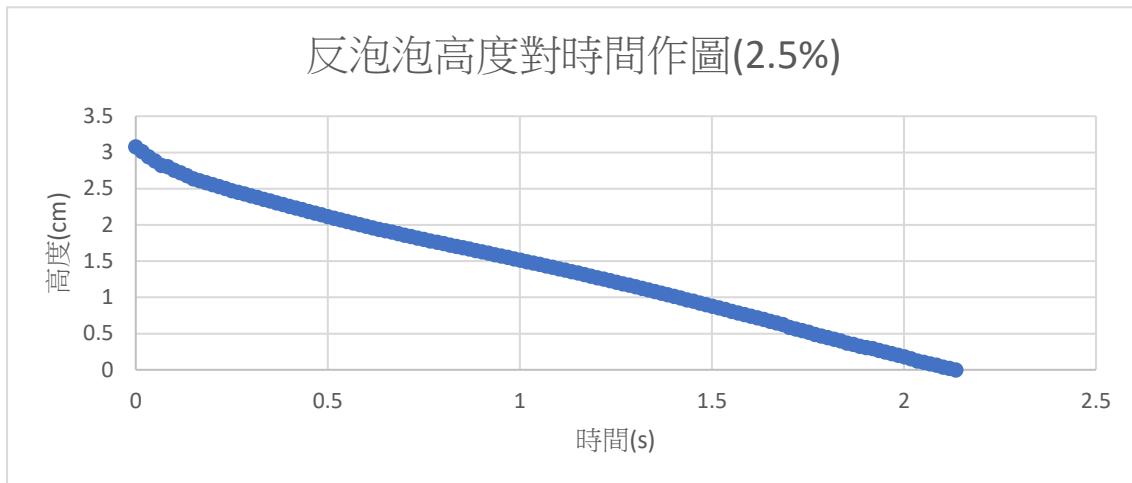


圖 4-3-4-1

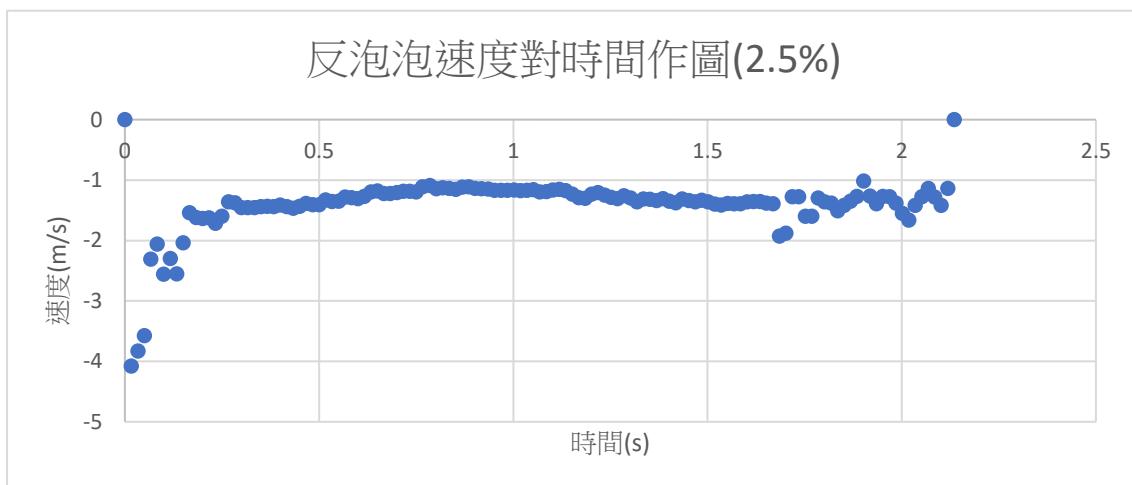


圖 4-3-4-2

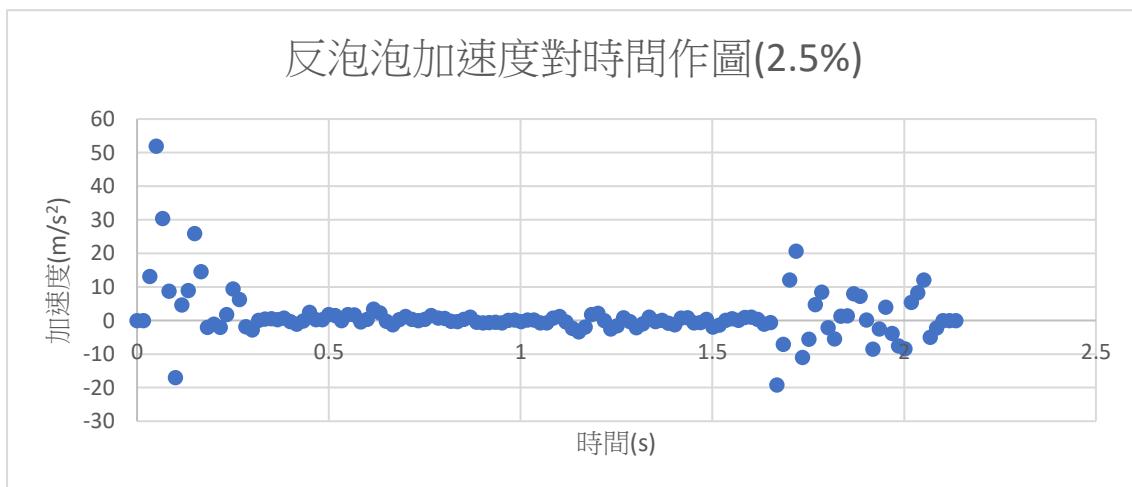


圖 4-3-4-3

(五) 3% :

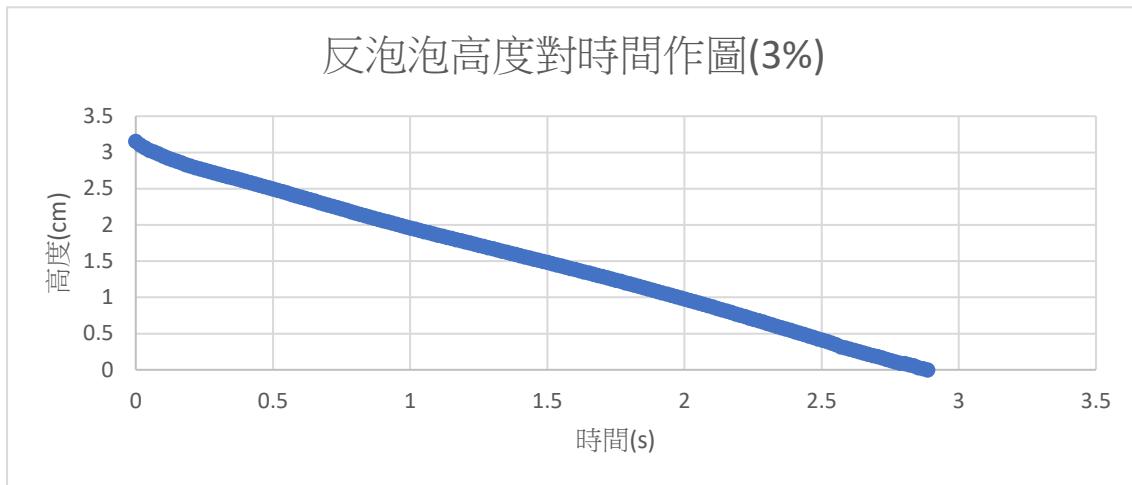


圖 4-3-5-1

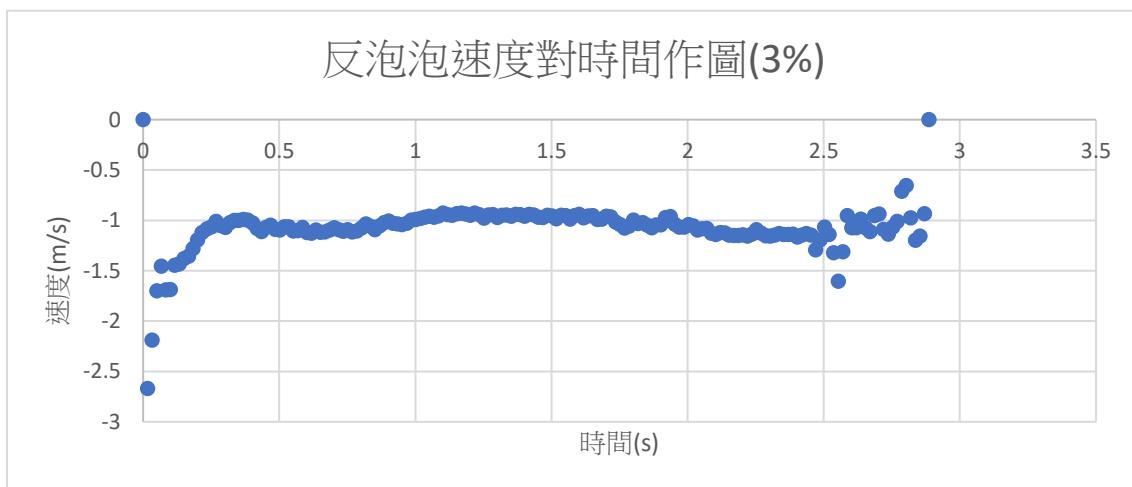


圖 4-3-5-2

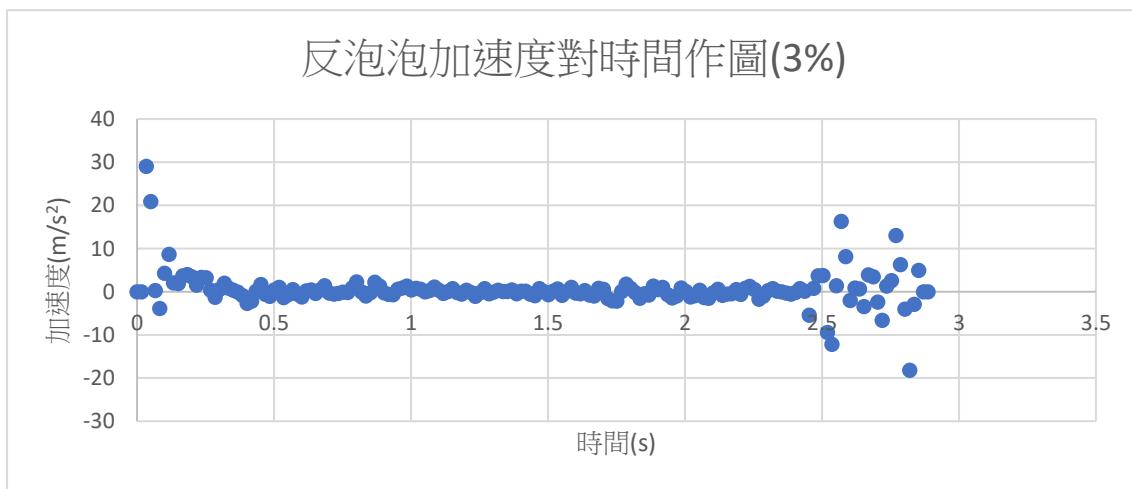


圖 4-3-5-3

※圖表皆由作者製作

四、探討反泡泡碰撞的運動方程式：

(一) 實驗原理：

1. 設相撞的反泡泡為反泡泡A及反泡泡B

2. 其質量分別為及 M_A 及 M_B

外徑為 R_A 、 R_B ，內徑為 r_A 、 r_B

所構成的球體體積為 V_{RA} 、 V_{rA} 、 V_{RB} 、 V_{rB}

初始位置向量為 \vec{r}_A (t)、 \vec{r}_B (t)

初始位置為 (X_A, Y_A, Z_A) 、 (X_B, Y_B, Z_B)

初始速度為 $\dot{\vec{r}}_A$ 、 $\dot{\vec{r}}_B$

加速度為 $\ddot{\vec{r}}_A$ 、 $\ddot{\vec{r}}_B$

重力加速度為 g

\vec{r}_A (t)、 \vec{r}_B (t) 與xy平面的夾角為 θ_A 、 θ_B

3. 其動能為 $T = \frac{1}{2} M_A \dot{\vec{r}}_A^2 + \frac{1}{2} M_B \dot{\vec{r}}_B^2$

4. 其位能為 $V = M_A \frac{V_{RA} - V_{rA}}{V_{rA}} g \sin \theta_A + M_B \frac{V_{RB} - V_{rB}}{V_{rB}} g \sin \theta_B$

5. 拉格朗日量為

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$= \left(\frac{1}{2} M_A \dot{\vec{r}}_A^2 + \frac{1}{2} M_B \dot{\vec{r}}_B^2 \right)$$

$$- \left(M_A \frac{V_{RA} - V_{rA}}{V_{rA}} g \sin \theta_A + M_B \frac{V_{RB} - V_{rB}}{V_{rB}} g \sin \theta_B \right)$$

6. 為簡化問題，我引入質心座標及相對位置

$$\text{質心: } \vec{R} = \frac{M_A \vec{r}_A + M_B \vec{r}_B}{M_A + M_B}$$

$$\text{相對位置: } \vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

將上述動能轉換為 $T = \frac{1}{2}(M_A + M_B)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$, $\mu = \frac{M_A M_B}{M_A + M_B}$

則此時拉格朗日量為

$$\frac{1}{2}(M_A + M_B)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \left(M_A \frac{V_{RA} - V_{rA}}{V_{rA}} g \sin \theta_A + M_B \frac{V_{RB} - V_{rB}}{V_{rB}} g \sin \theta_B \right)$$

7. 當兩個反泡泡接觸，及 $|\vec{r}| = R_1 + R_2$ ，此為碰撞的條件
8. 不穿透的條件下引入約束: $f(\vec{r}) = |\vec{r}|^2 - (R_A - R_B)^2 = 0$
9. 位能項簡寫: 令 $\alpha_A = \frac{V_{RA} - V_{rA}}{V_{rA}} g \sin \theta_A$, $\alpha_B = \frac{V_{RB} - V_{rB}}{V_{rB}} g \sin \theta_B$
10. 使用拉格朗日乘子法: $\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \lambda f(\vec{r})$
11. 簡化後的方程式為:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(M_A + M_B)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - (M_A\alpha_A + M_B\alpha_B) - \lambda[|\vec{r}|^2 - (R_A + R_B)^2]$$

12. 對 \dot{R} 的拉格朗日分析:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{R}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial R} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[(M_A + M_B)\dot{R} \right] = 0 \Rightarrow (M_A + M_B)\ddot{R} = 0$$

13. 對 \vec{r} 的拉格朗日分析:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{r}} \right) = \mu\ddot{r}$$

- (2) 約束項的偏導:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \{ \lambda [|\vec{r}|^2 - (R_A + R_B)^2] \} = \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = \lambda \cdot 2\vec{r}$$

- (3) 代入方程式:

$$\mu\ddot{r} + \lambda \cdot 2\vec{r} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} = -\lambda \cdot 2\vec{r}$$

$$14. \quad \lambda = -\frac{\mu \cdot (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})}{2(\vec{r} \cdot \vec{r})}$$

(二) 實驗數據:

1. $R_A = 0.086\text{cm}$, $R_B = 0.083\text{cm}$, $r_A = 0.056\text{cm}$, $r_B = 0.054\text{cm}$
2. $V_{RA} = \frac{4}{3}\pi R_A^3 = 2.66 \times 10^{-3}\text{cm}^3$, $V_{RB} = \frac{4}{3}\pi R_B^3 = 2.40 \times 10^{-3}\text{cm}^3$

$$3. \quad V_{rA} = \frac{4}{3}\pi r_A^3 = 7.36 \times 10^{-4} \text{cm}^3, \quad V_{rB} = \frac{4}{3}\pi r_B^3 = 7.00 \times 10^{-4} \text{cm}^3,$$

液體密度視為 1g/cm^3 ，則：

$$M_A = 7.36 \times 10^{-4} \text{g}, \quad M_B = 7.00 \times 10^{-4} \text{g}$$

$$4. \quad \vec{r}_A(t) = (1.615, 7.871, 2.599), \quad \vec{r}_B(t) = (1.612, 8.045, 3.032), \text{ 單位為 cm}$$

$$5. \quad \dot{\vec{r}}_A = (-0.00754, 0.113, 0.116), \quad \dot{\vec{r}}_B = (-0.137, -0.0577, -1.845), \text{ 單位為 cm/s}$$

$$6. \quad \ddot{\vec{r}}_A = (0.002775, -1.411, -0.928), \quad \ddot{\vec{r}}_B = (2.324, 2.190, 3.893)$$

$$7. \quad \vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (0.003, -0.174, -0.433) \text{cm}$$

$$8. \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A - \dot{\vec{r}}_B = (0.12946, 0.1707, 2.011) \text{cm/s}$$

$$9. \quad \lambda = -\frac{\mu \cdot (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})}{2(\vec{r} \cdot \vec{r})} = -\frac{3.477646 \times 10^{-4} \cdot 2.707178}{2 \cdot 0.217774} = -2.161555 \times 10^{-3} \text{g/s}^2$$

伍、討論

一、反泡泡生成機率與下落高度關係：

(一) 在實驗中，反泡泡生成機率與下落高度的相關係數為 0.6615，當下落高度越高時，反泡泡生成機率有越高的趨勢，推測原因是因為當高度太低時，液滴沒有足夠的動能讓液面下凹至足以產生反泡泡的程度。(如圖 5-1-1-1 及圖 5-1-1-2)



圖 5-1-1-1 足夠高度情況下能生成反泡泡※示意圖皆為作者製作



圖 5-1-1-2 高度不足情況下無法生成反泡泡※示意圖皆為作者製作

(二) 雖然沒有做過更高的高度，但我推測當高度過高時，也沒有辦法生成反泡泡，其原因為液滴動能過高，可能會使液滴直接接觸液面，與液面結合，導致反泡泡無法生成。

二、反泡泡生成機率與界面活性劑濃度關係：

在實驗中，反泡泡生成機率與界面活性劑濃度的相關係數為 0.5722。但在界面活性劑濃度為 1%~4% 這幾組數據中，其相關係數高達 0.9743 (如圖 5-2-1)，推測是因為當界面活性劑濃度越高，溶液的表面張力降低，使得液滴接觸液面時，液面更容易下凹，也就更容易生成反泡泡，不過在界面活性劑濃度超過 5% 時，表面張力過高，導致液滴在掉落的過程中更容易碎裂。

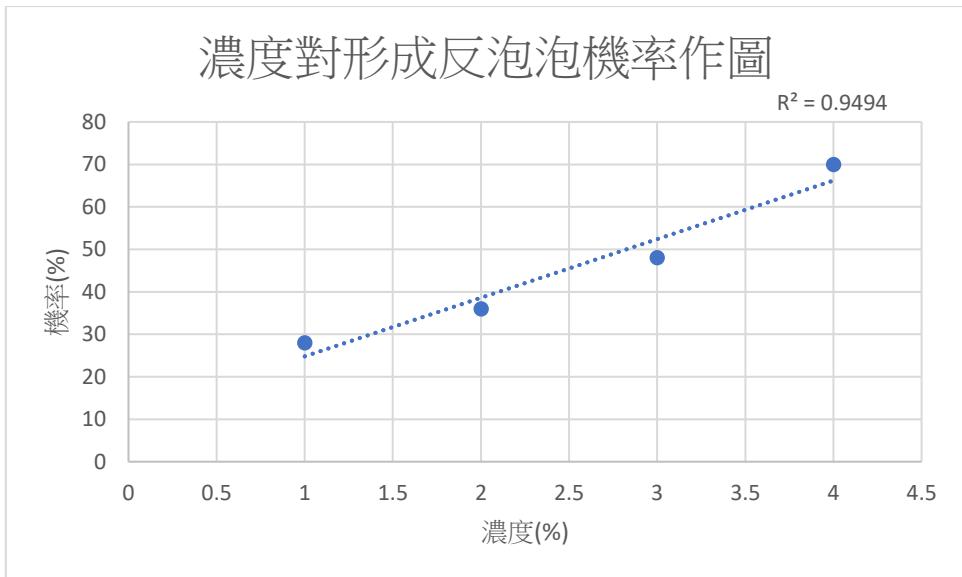


圖 5-2-1※圖表皆由作者製作

三、反泡泡與水珠的關係：

四、在實驗數據中，當反泡泡生成的機率越高時，水珠的生成機率就越低，反之亦然，我認為其中的原因是因為當液滴由於表面張力過低或動能越低等因素而無法使液面下凹至能產生反泡泡的程度時，就會讓液滴留在液面上，形成水珠，因此無法形成反泡泡的液滴大部分形成水珠，而無法形成水珠的液滴大部分形成反泡泡。

五、反泡泡受力的推算：

(一) 定反泡泡外徑為 R

(二) 內徑為 r

(三) $\rho_{\text{水}}$ 為外部液體密度

(四) $\rho_{\text{液}}$ 為內部液體密度

(五) 所受浮力 $B = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho_{\text{水}} \times g$

(六) 所受重力 $W = \frac{4}{3}\pi \times (R^3 - r^3) \times \rho_{\text{液}} \times g$

(七) 反泡泡所受到的力 $F = B - W = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho_{\text{水}} \times g - \frac{4}{3}\pi \times (R^3 - r^3) \times \rho_{\text{液}} \times g$

$$r^3) \times \rho_{\text{液}} \times g$$

六、不同內部液體密度對反泡泡運動情形的影響：

在對實驗的預期中，只會有一組數據呈等速度運動，但在實際數據中，除了一開始入射液體所造成的加速度和最後反泡泡接觸液面而減速之外，幾乎所有數據都呈等速度運動，推測是因為入射液體時有部分液體流到周圍的水中，導致密度差異變小，或空氣層隨著時間的推移吸收了周圍溶液中的溶解氣體等其他因素影響。

七、反泡泡碰撞的方程式分析：

(一) 對 \vec{R} 的拉格朗日分析：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\vec{R}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \vec{R}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} [(M_A + M_B) \dot{\vec{R}}] = 0 \Rightarrow (M_A + M_B) \ddot{\vec{R}} = 0$$

代表著質心是勻速的

(二) 從 $\mu \ddot{\vec{r}} = -\lambda \cdot 2\vec{r}$ 中可看出 $-\lambda \cdot 2\vec{r}$ 為反作用力向量 ($F_{\text{反}}$)

$$\text{又 } \lambda = -2.161555 \times \frac{10^{-3}g}{s^2}, \vec{r} = (0.003, -0.174, -0.433)$$

$$\text{計算得出 } F_{\text{反}} = (-1.30 \times 10^{-5}, 7.52 \times 10^{-4}, 1.87 \times 10^{-3})$$

可看出 Z 方向為碰撞的主要方向。

陸、結論

一、反泡泡的生成機率與下落高度關係：

- (一) 在高度為 30cm~50cm 時，反泡泡生成機率跟高度呈正相關。
- (二) 在高度為 30cm~50cm 時，水珠生成機率跟高度呈負相關。

三、反泡泡生成機率與界面活性劑濃度關係：

- (一) 在濃度為 1%~4% 時，反泡泡生成機率跟濃度呈正相關。
- (二) 在濃度為 1%~4% 時，水珠生成機率跟濃度呈負相關。

三、不同內部液體密度對反泡泡運動情形的影響：

內部液體密度越高，其上浮或下降速度就越慢，內部液體密度越低，其上浮或下降速度就越快。

四、反泡泡碰撞與拉格朗日：

在此次實驗中，兩泡泡的質心做等速運動，且其碰撞反作用力為
 $(-1.30 \times 10^{-5}, 7.52 \times 10^{-4}, 1.87 \times 10^{-3})$

柒、參考文獻資料

一、

維基百科。反泡泡

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8F%8D%E6%B3%A1%E6%B3%A1#cite_note-8

二、

李夢筑、黃晴（2006）。泡泡造反了－反泡泡之形成、存活與破滅之物理特性探討。中華民國第四十六屆中小學科學展覽（高中組物理科）。[chrome-extension://efaidnbmnnibpcajpcglclefindmkaj/https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/senior/0401/040118.pdf](https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/senior/0401/040118.pdf)

三、

NTCU-科學遊戲實驗室。科學遊戲實驗室 10.反泡泡。台中教育大學科學教育與應用學系

<https://scigame.ntcu.edu.tw/inquiry/10.html>

四、

張豈榕、范祥鈺、蒲其磊。空間穿越-油滴二次觸水的穿透現象。台灣科學教育館

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/55/pdf/040116.pdf>

五、

Zia, R., Nazir, A., Poortinga, A. T., & van Nostrum, C. F. (2022). Advances in antibubble formation and potential applications. *Advances in Colloid and Interface Science*, 305, 102688.

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001868622000902>

六、張海潮。Lagrange 乘數法 Lagrange Multiplier Method。台大數學系

https://episte.math.ntu.edu.tw/entries/en_lagrange_mul/index.html

六、張海潮。虛功原理及歐拉 - 拉格朗日方程式。數學傳播 45 卷 4 期, pp. 11-

註:本實驗圖表及照片均由作者自行拍攝及製作

【評語】051808

本作品探討反泡泡的發生條件及在水中的運動，並結合拉格朗日力學進行動力系統分析，自製實驗裝置，紀錄液體自選定高度下落進液體的運動過程，以落滴高度、濃度、密度為實驗變因，探討反泡泡的生成與運動特性，並能運用浮力、拉格朗日方程、動能位能計算進行定量分析。實驗數據豐富，統計方法得當，透過機率計算、相關係數評估、加速度曲線分析等方式，有效量化反泡泡生成與運動特性。自製電磁閥控制裝置及光學追蹤系統操作成熟，實驗環境控制得當，器材取得容易，整體具備高可行性與推廣。

作品海報

反泡泡的變形之舞：拉格朗日分析看見動力系統

摘要

入射界面活性劑滴第一次觸碰水面時可能直接入水，也可能不會穿透，形成水珠，但在高度較高而使其產生液柱之後再次掉落時，某些情況會產生反泡泡，本實驗將探討其發生條件。並且研究反泡泡在水中的運動情形。另外利用生成大量反泡泡使他們發生碰撞並探討其運動方程式。

研究動機

實驗一：在執行其他實驗的過程中，觀察到一個特殊的現象：當液滴從特定高度(30cm~50cm)落入水中時，並未形成普通氣泡，而是在水面上生成了反泡泡。因此進一步探討液滴高度、界面活性劑濃度對於此方式生成之反泡泡的影響。

實驗二：如果能夠透過調整內部液體的密度，使其與周圍液體達到平衡，或改變其運動方式

實驗三：在市賽結束後，觀察到反泡泡有時意外會發生碰撞，所以想要利用拉格朗日方程式研究兩泡泡碰撞加速度、彈性係數等

研究目的

一、拍攝泡泡生成過程

二、探討影響泡泡生成因素

(一) 液滴高度與反泡泡生成關係

(二) 界面活性劑濃度與反泡泡生成關係

三、製作穩定產生反泡泡的裝置

四、不同內部液體密度使反泡泡在水中的運動軌跡及速度

五、探討反泡泡碰撞的運動方程式

實驗設備及器材



圖1-a: 實驗一裝置圖

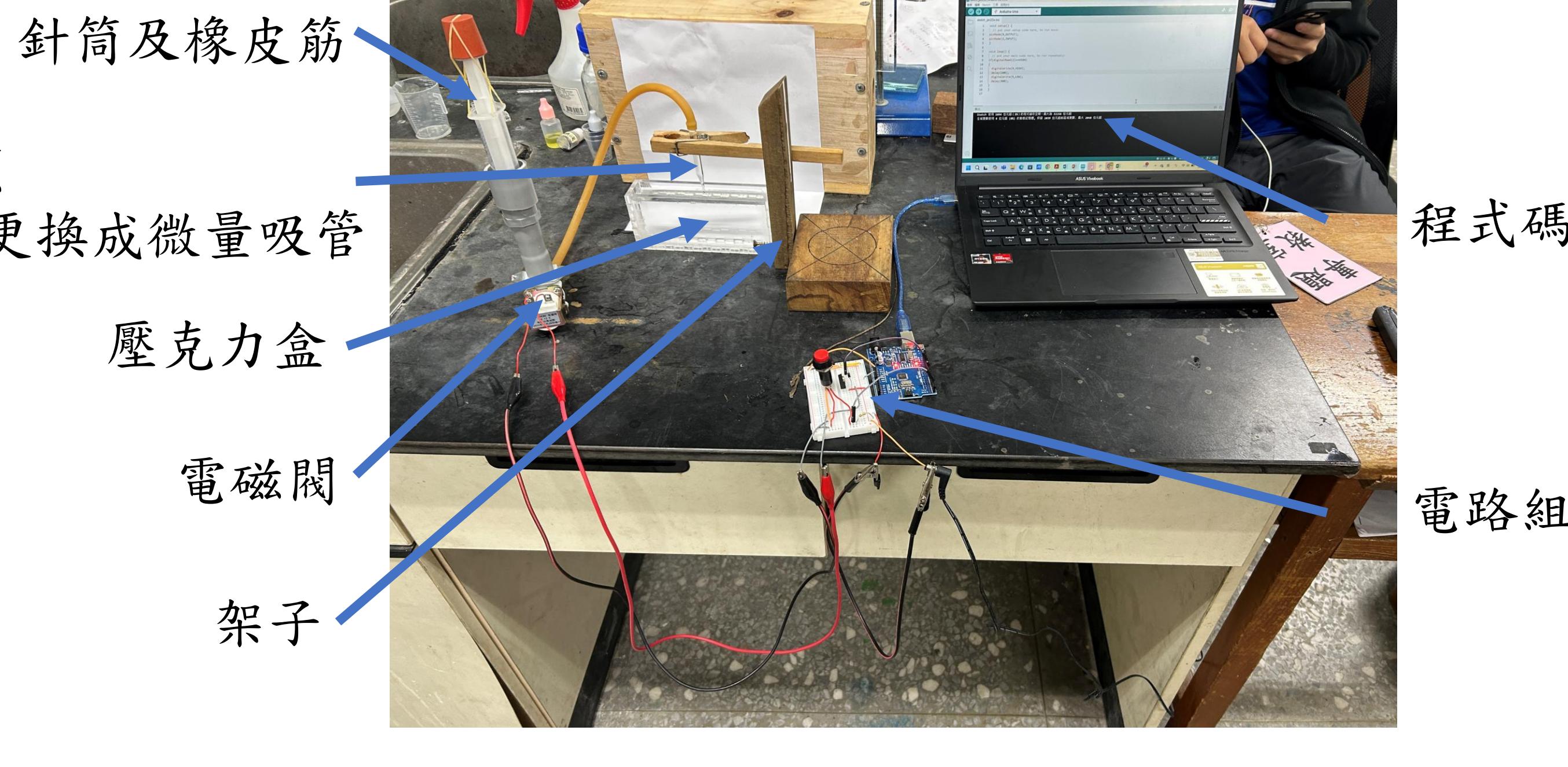


圖1-b: 實驗二、三裝置圖

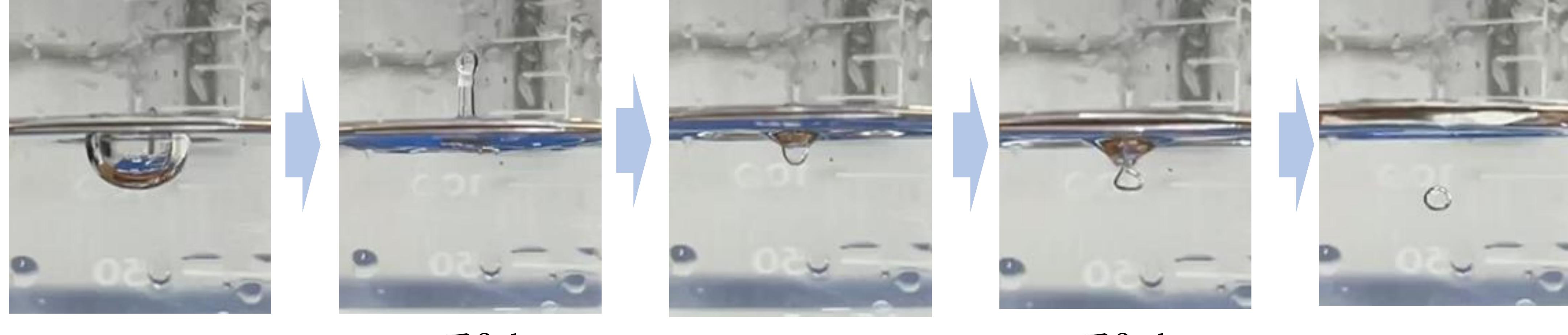


圖2-a

圖2-b

圖2-c

圖2-d

圖2-e

研究過程或方法

本實驗分成三個部分：

一、介面活性劑濃度及高度對反泡泡生成的影響：

(一) 入射點定位、固定水深為3.5cm

(二) 水滴處水時的分類：

1. 直接入水，沒有形成反泡泡或水珠
3. 形成反泡泡，沒有形成水珠

2. 形成水珠，沒有形成反泡泡
4. 同時形成反泡泡及水珠

(三) 實驗步驟：

1. 固定溶液重量百分濃度為1%，分別由距水面47.5、45、42.5、40、37.5、35、32.5、30cm處滴液，各拍攝50次液滴入水，並記錄入水的結果。
2. 固定高度為45cm，分別以重量百分濃度5%、4%、3%、2%、1%滴液，各拍攝50次液滴入水，並記錄入水的結果。

二、下落液體形成反泡泡與內部液體密度關係：

1. 配置食鹽重量百分濃度0%、1%、2%、2.5%、3%
3. 用橡皮筋綁住針筒以提供壓力
5. 將滴頭夾至架子上，離水面距離0.5cm
7. 用tracker追蹤反泡泡的行為

2. 用針筒將不同濃度的介面活性劑水溶液吸起
4. 將針筒與電磁閥組合
6. 按壓按鈕並拍攝反泡泡在水中運動的情形
8. 利用Excel分析其上升速度、加速度等數值

三、探討反泡泡碰撞的運動方程式

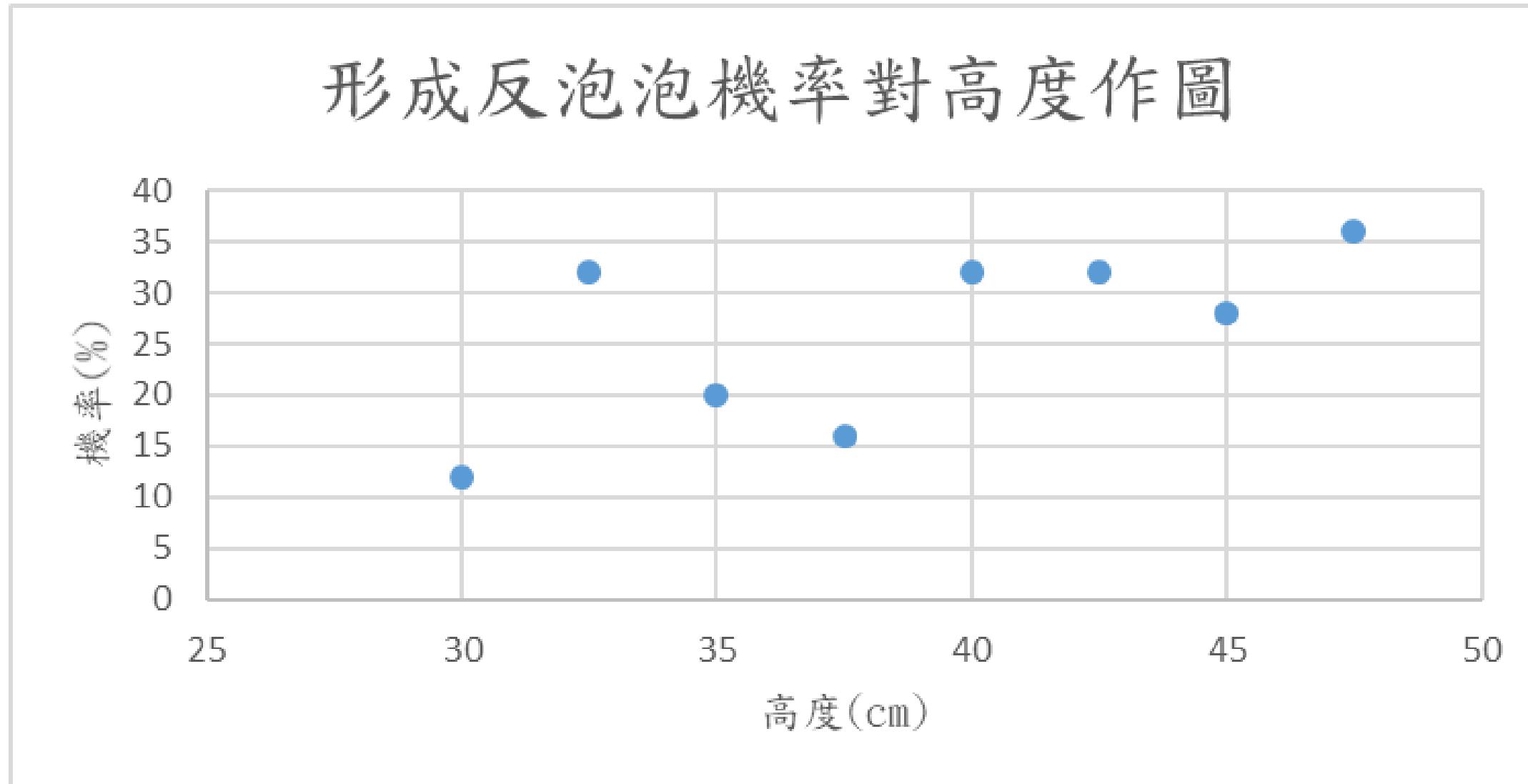
1. 將水裝入壓克力盒至水深5cm
3. 入射於長方體透明壓克力箱中已形成反泡泡
5. 利用tracker測量分析反泡泡的初始質量、位置、及速度

2. 用微量吸量管吸取1ml的1%介面活性劑水溶液
4. 拍攝記錄反泡泡碰撞情形
6. 利用拉格朗日分析其運動方程式

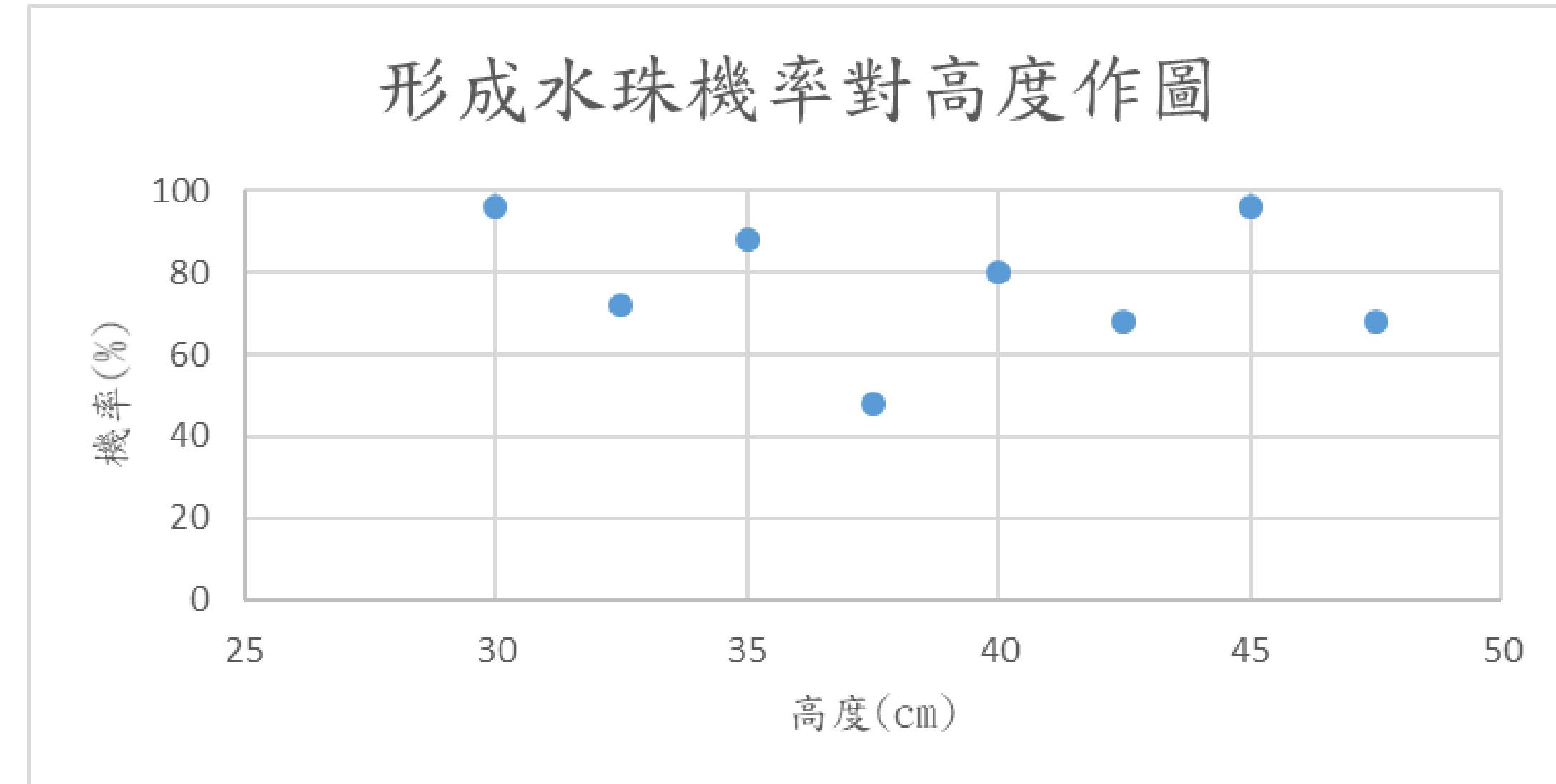
研究結果

一、探討影響泡泡生成因素

(一) 液滴高度與反泡泡、水珠生成關係

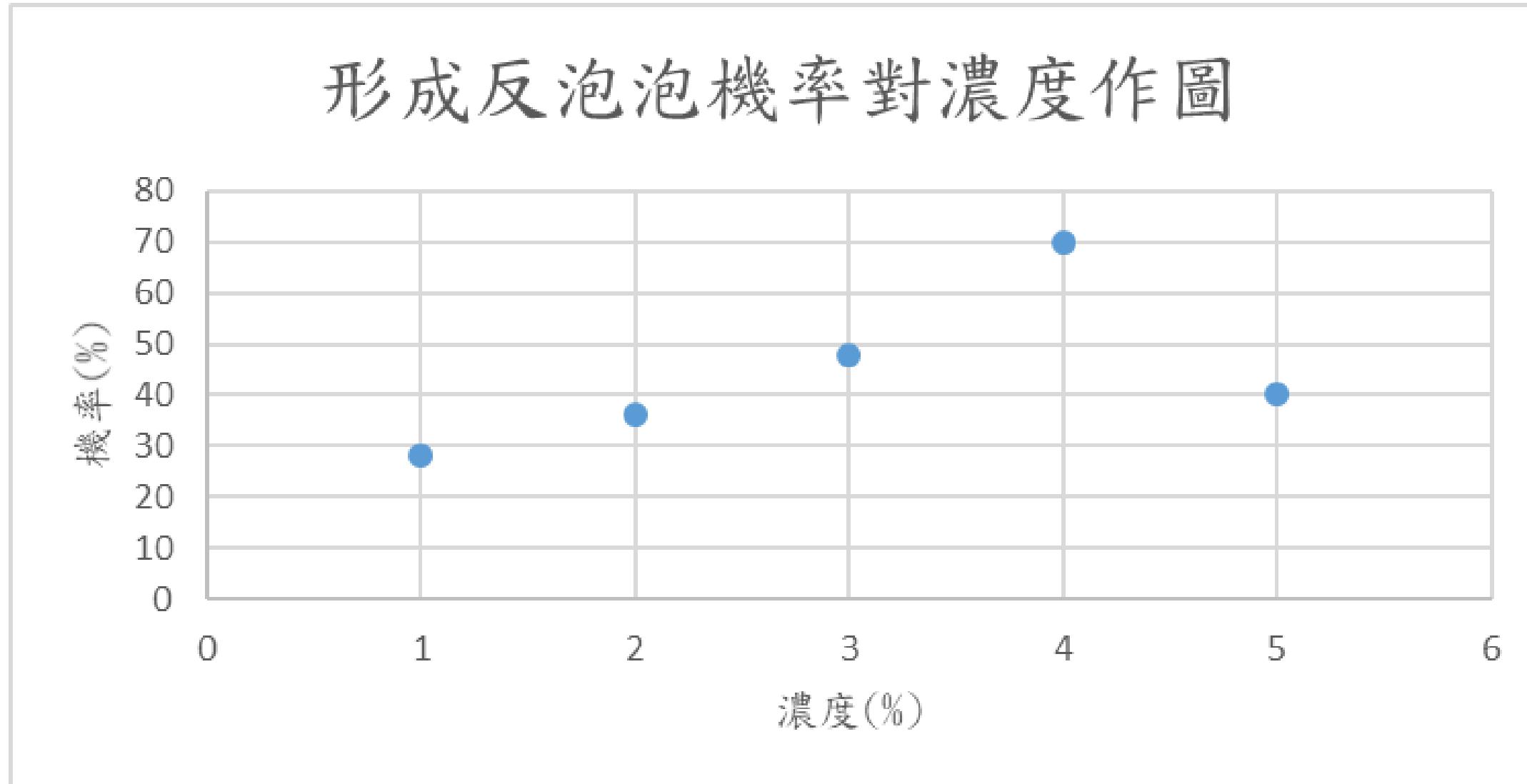


相關係數: 0.66157

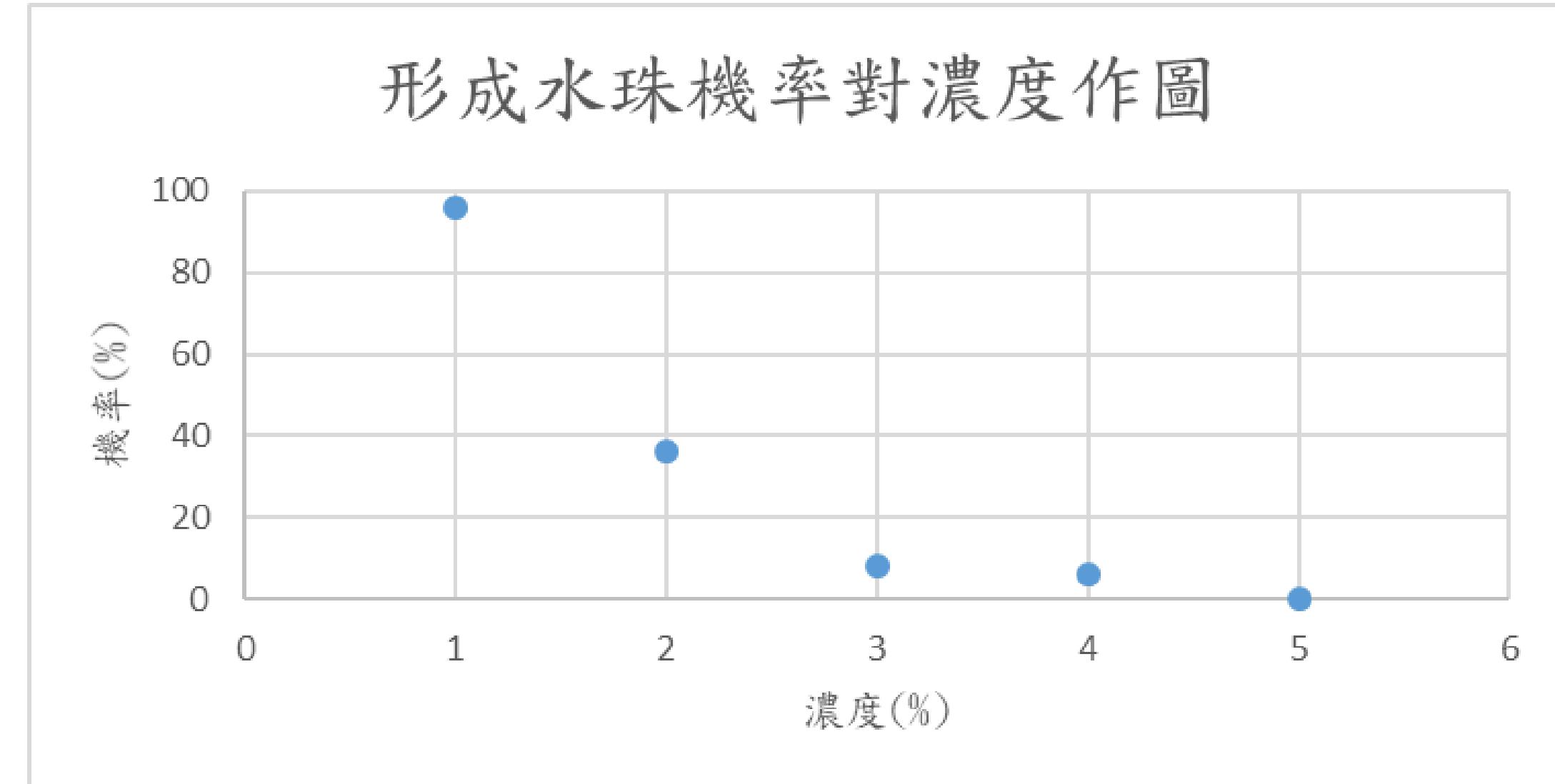


相關係數: -0.18505

(二) 界面活性劑濃度與反泡泡生成關係



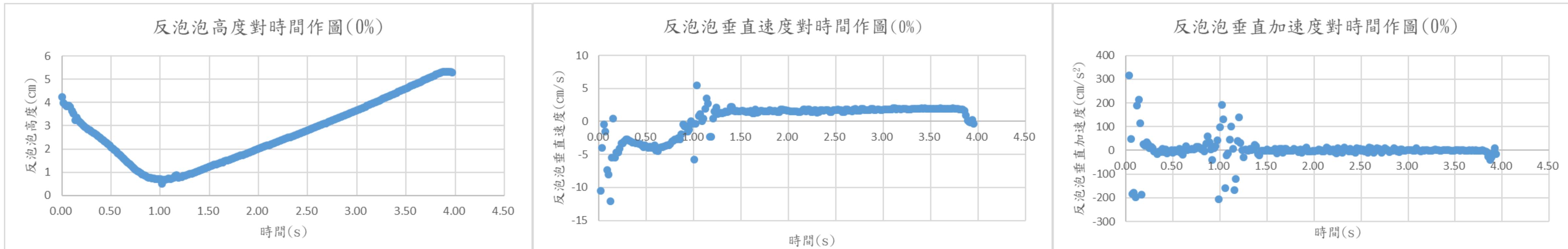
相關係數: 0.572269



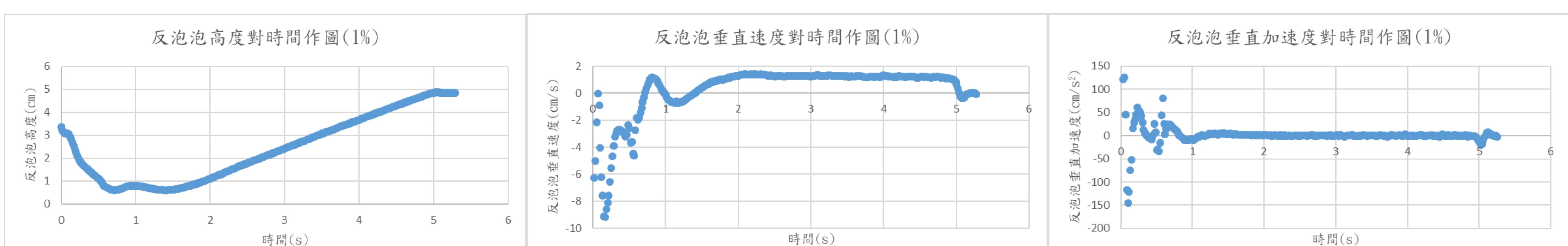
相關係數: -0.88106

二、不同內部液體密度使反泡泡在水中的運動情形

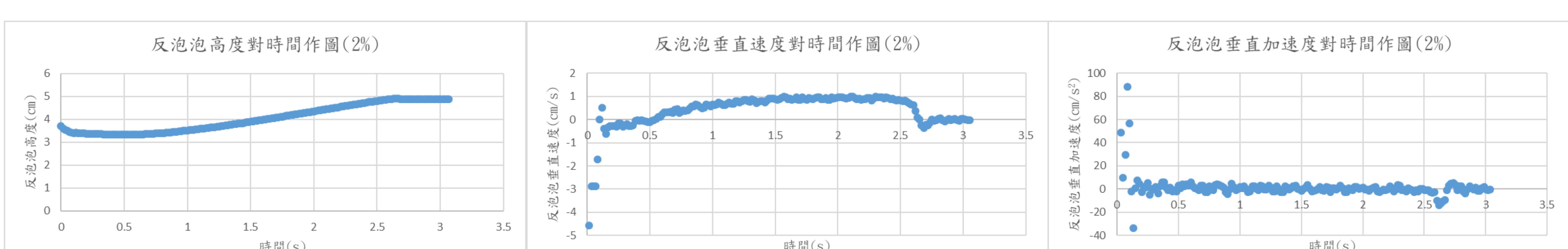
(一) 食鹽濃度0%時:



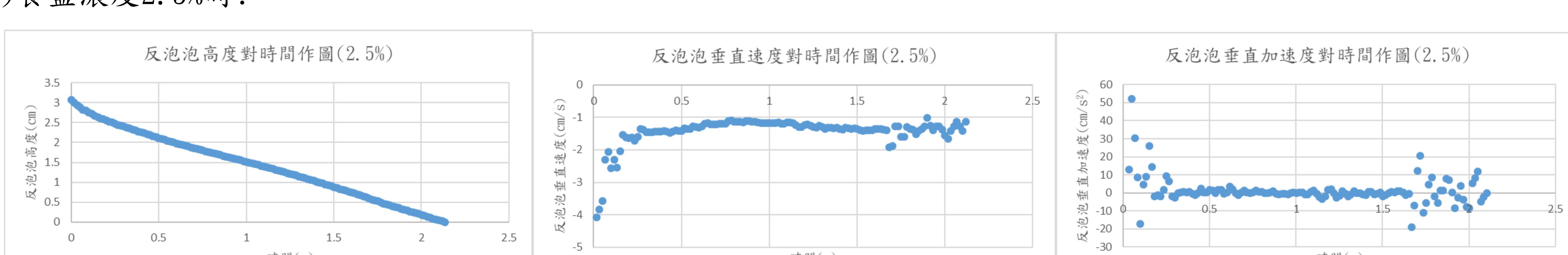
(二) 食鹽濃度1%時:



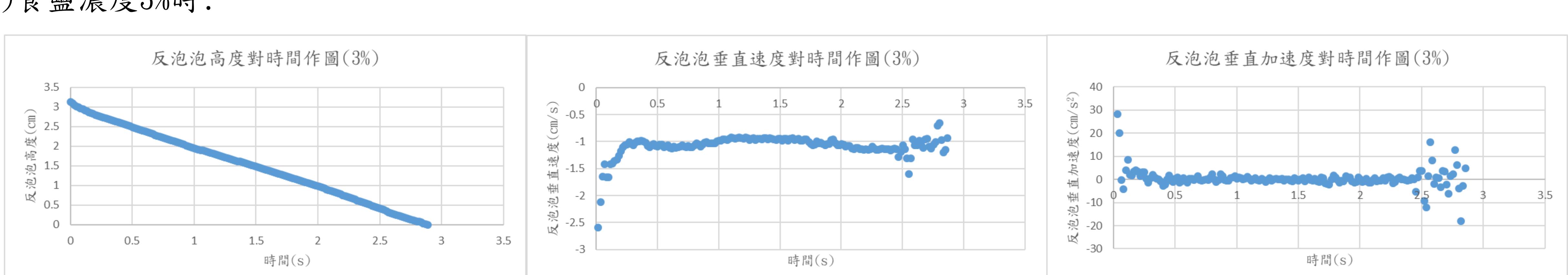
(三) 食鹽濃度2%時:



(四) 食鹽濃度2.5%時:



(五) 食鹽濃度3%時:



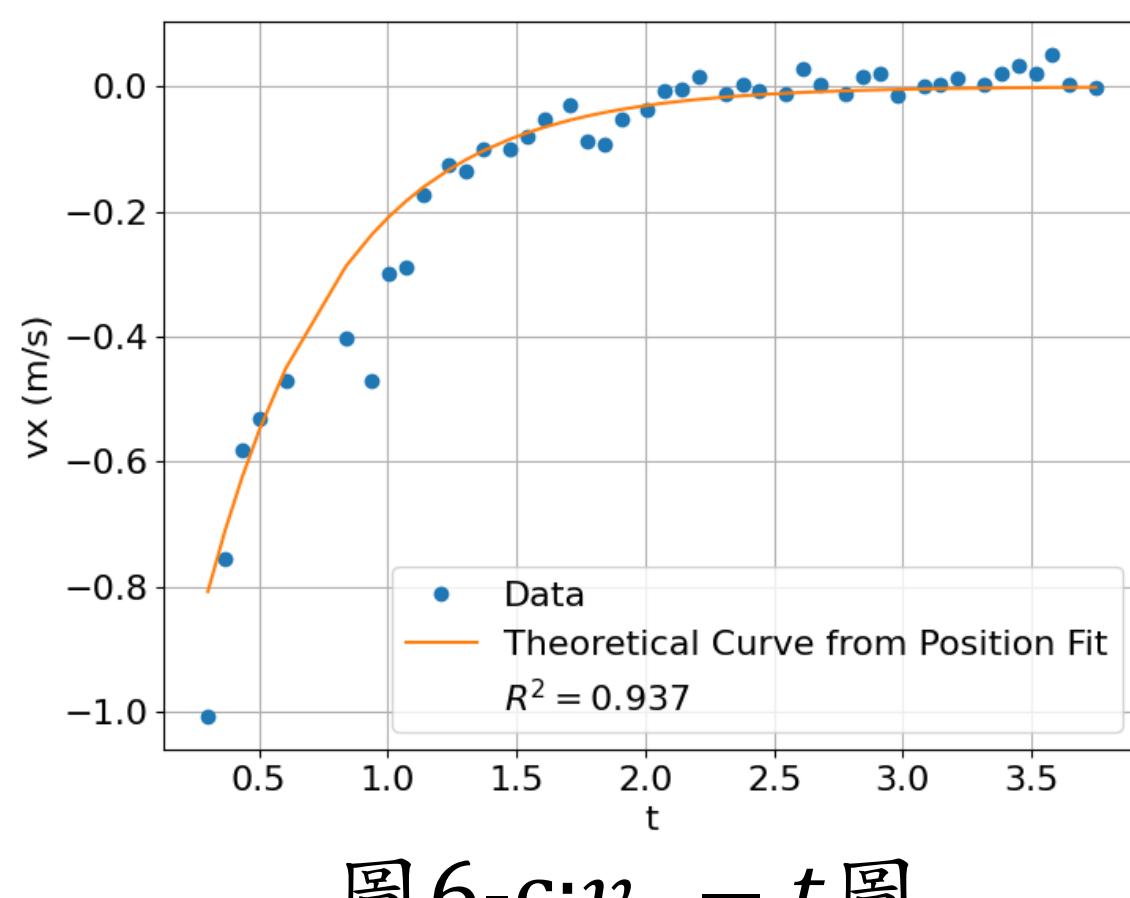


圖6-c: $v_x - t$ 圖

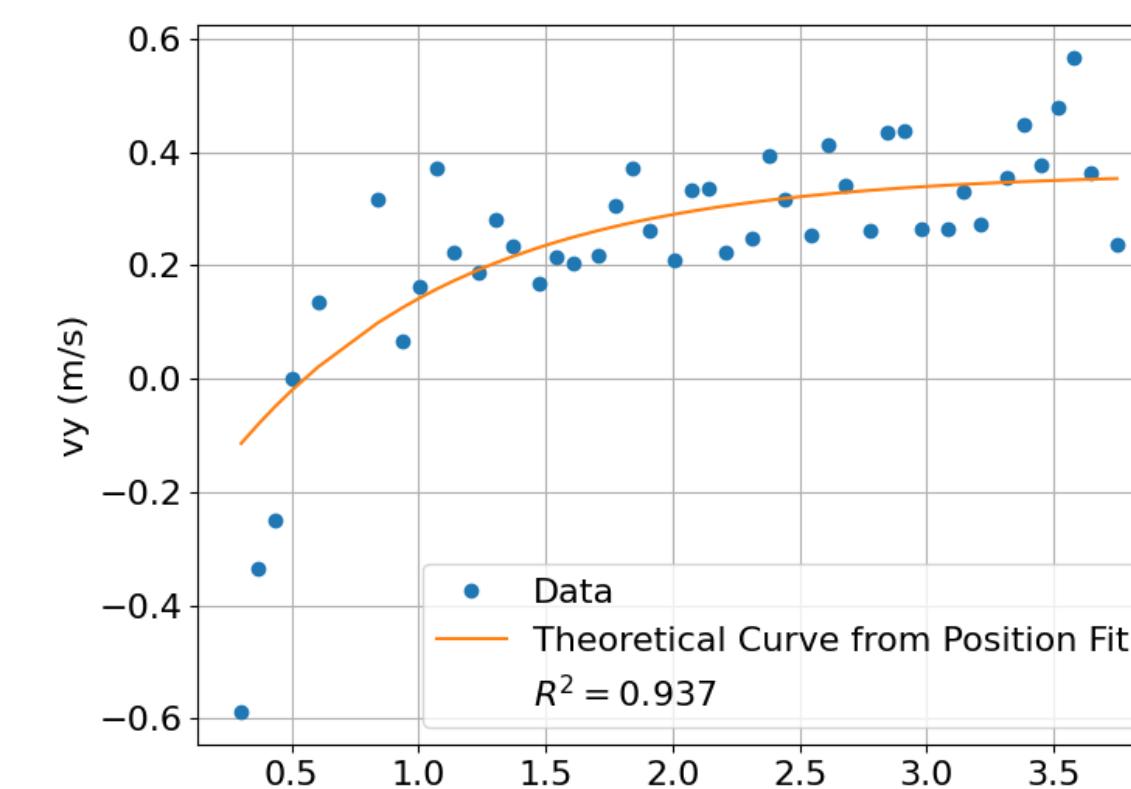


圖6-d: $v_y - t$ 圖

討論

一、反泡泡生成機率與下落高度關係：

當下落高度越高時，反泡泡生成機率有越高的趨勢，推測原因是因為當高度太低時，液滴沒有足夠的動能讓液面下凹至足以產生反泡泡的程度。

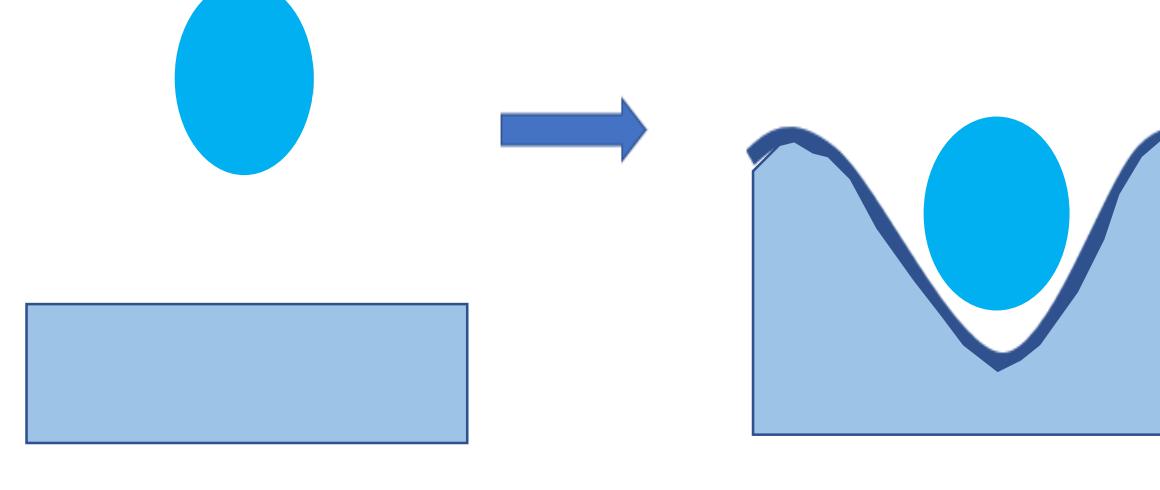


圖7-a:足夠高度情況下能生成反泡泡

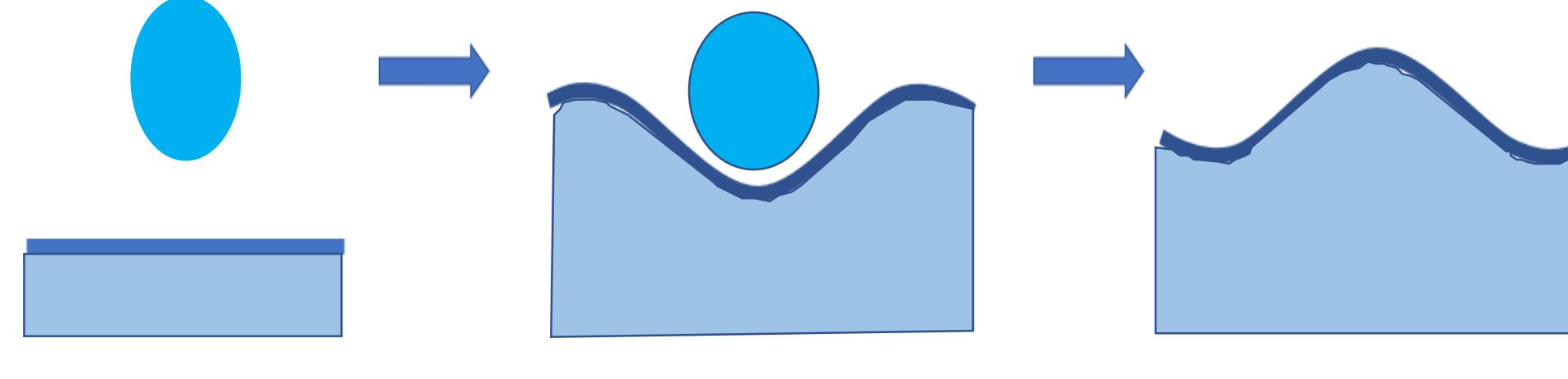


圖7-b:高度不足情況下無法生成反泡泡

二、反泡泡生成機率與界面活性劑濃度關係：

當界面活性劑濃度越高，溶液的表面張力降低，使得液滴接觸液面時，液面更容易下凹，也就更容易生成反泡泡。不過在界面活性劑濃度超過5%時，表面張力過高，導致液滴在掉落的過程中更容易碎裂。

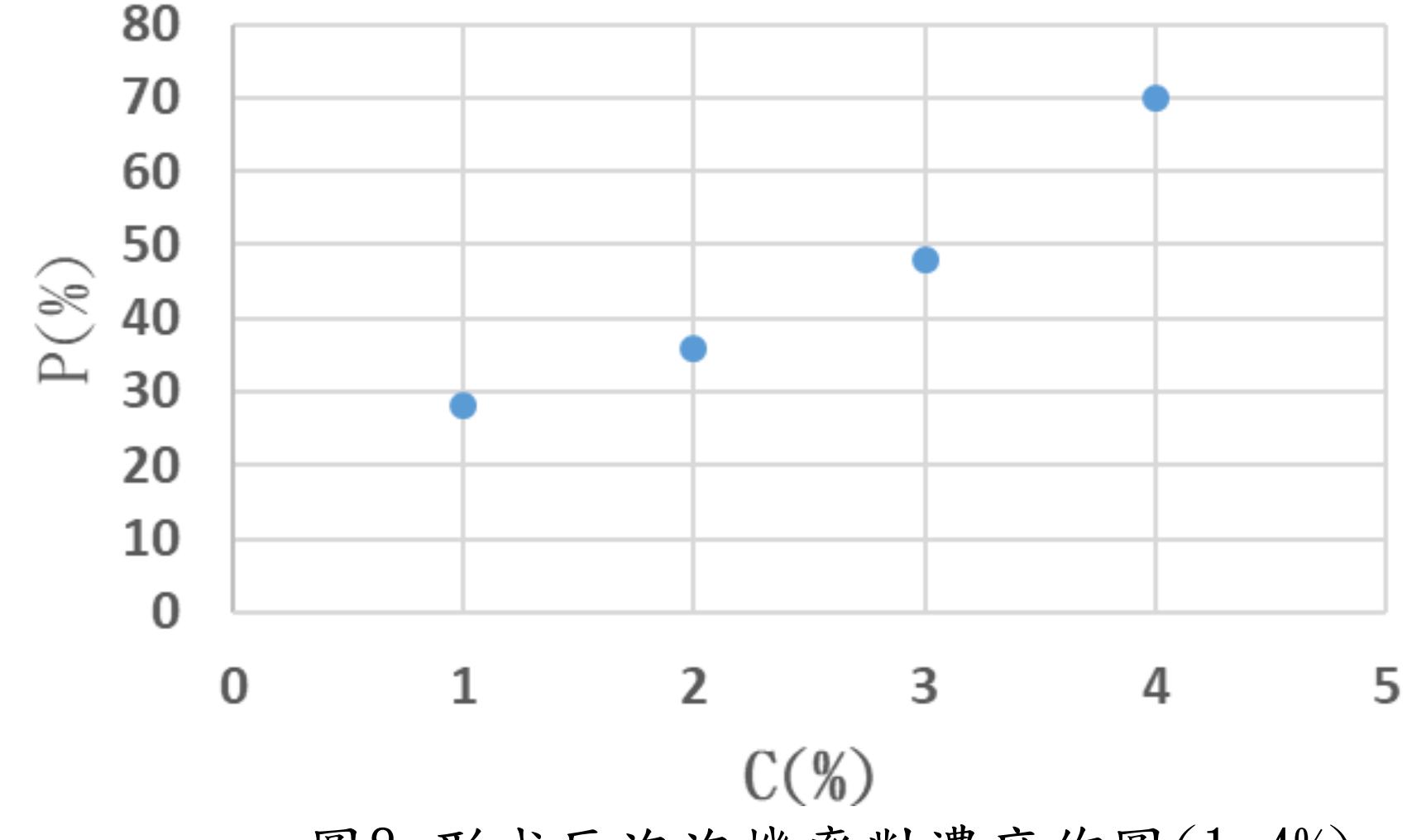


圖8:形成反泡泡機率對濃度作圖(1~4%)

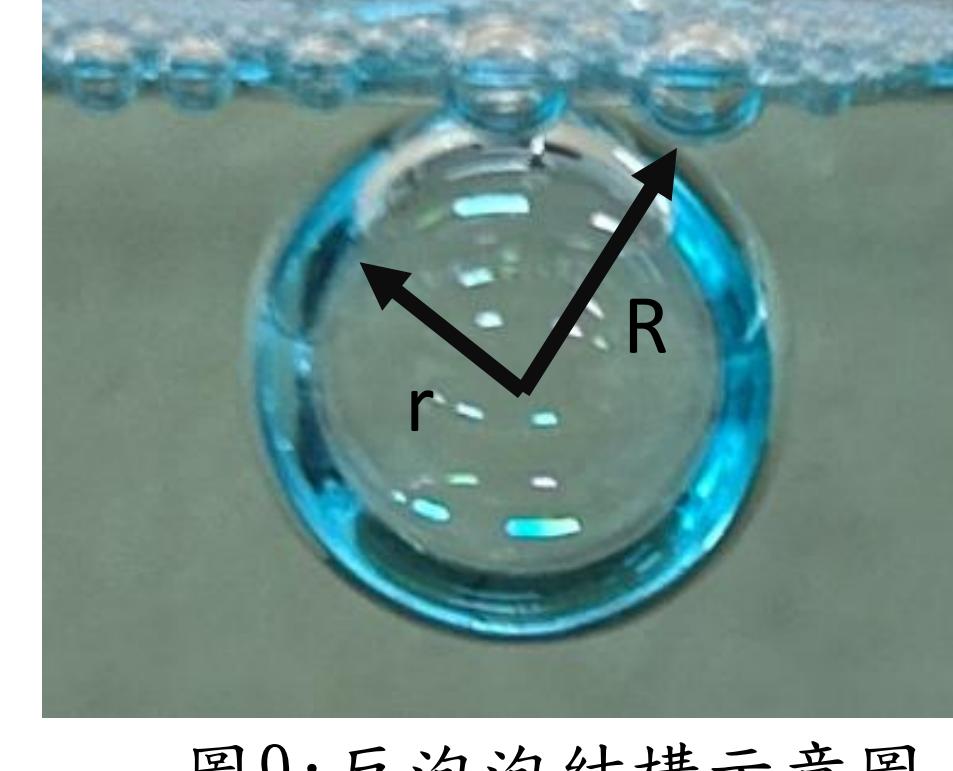


圖9:反泡泡結構示意圖

三、反泡泡受力的推算：

定反泡泡外徑為R，內徑為r， $\rho_{\text{水}}$ 為外部液體密度， $\rho_{\text{液}}$ 為內部液體密度

所受浮力 $B = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho_{\text{水}} \times g$

所受重力 $W = \frac{4}{3}\pi \times (R^3 - r^3) \times \rho_{\text{液}} \times g$

反泡泡所受到的力 $F = B - W = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho_{\text{水}} \times g - \frac{4}{3}\pi \times (R^3 - r^3) \times \rho_{\text{液}} \times g$

四、反泡泡碰撞後軌跡的理論與實際值比較：

發現實驗的誤差值極小，推測造成誤差原因有幾個：

- (一) 實驗公式的正確性，是否有漏掉幾項沒有考慮到
- (二) 壓克力盒小以至於產生嚴重影響反泡泡運動模式的水流
- (三) 實驗尺度過小導致測量誤差值較大

結論

一、反泡泡的生成機率與下落高度關係：

(一) 在高度為30cm~50cm時，反泡泡生成機率跟高度呈正相關。

二、反泡泡生成機率與界面活性劑濃度關係：

(一) 在濃度為1%~4%時，反泡泡生成機率跟濃度呈正相關。

(二) 在濃度為1%~4%時，水珠生成機率跟濃度呈負相關。

三、探討反泡泡碰撞的運動方程式

(一) 利用拉格朗日方程式推算反泡泡運動軌跡是可行的

(二) 對一個在水中的反泡泡來說，齊運動方程式為：

$$x(t) = -\frac{m}{b} v_{AX0} e^{-\frac{b}{m}t}$$

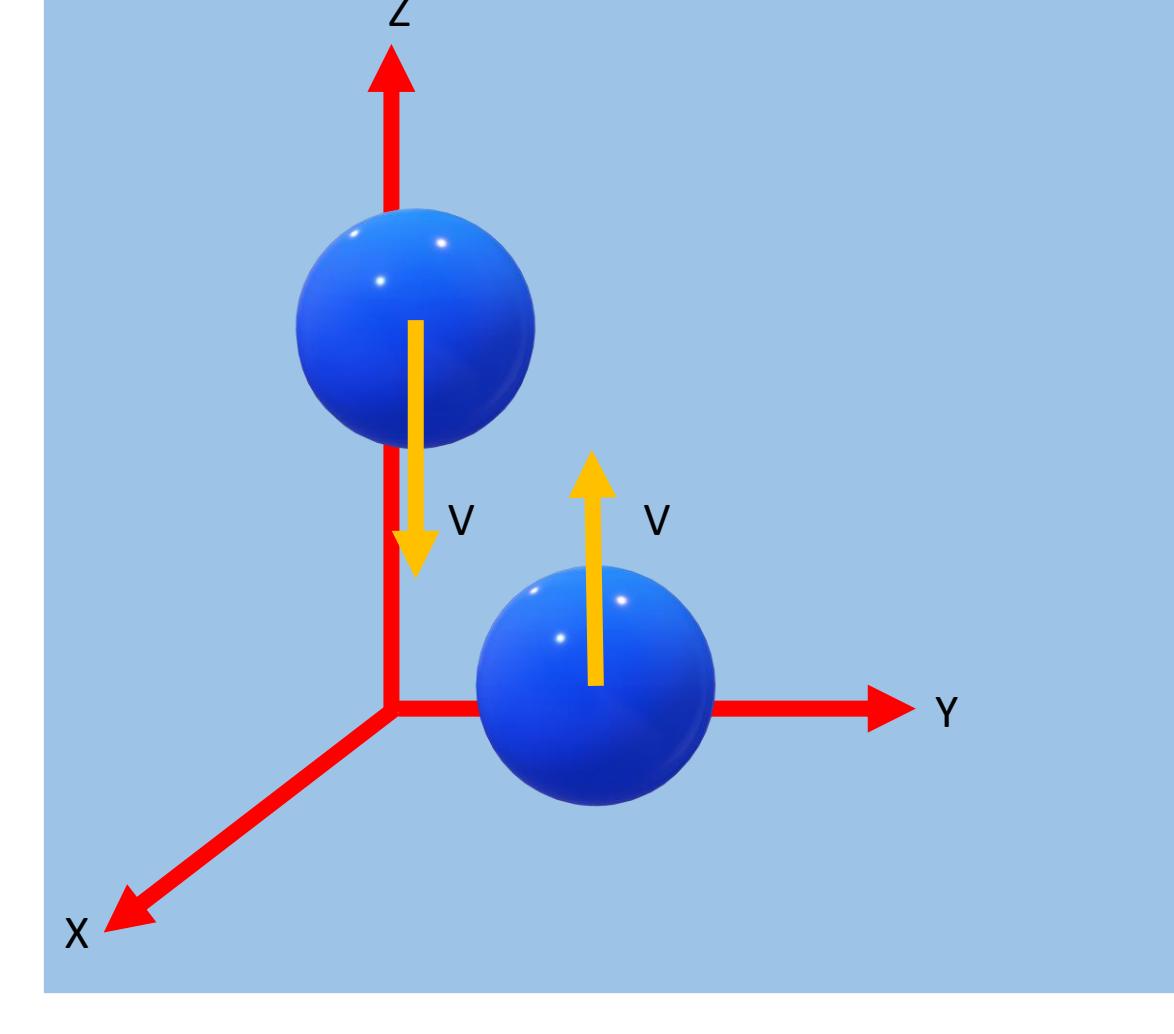
$$y(t) = \left(\frac{Bg - M_A g}{b} - v_{Ay0} \right) \frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{Bg - M_A g}{b} t - \frac{BM_A g - M_A^2 g}{b^2} + \frac{M_A}{b} v_{Ay0}$$

三、未來展望：

(一) 將公式推廣至三維運動，並試著描寫反泡泡運動全過程

(二) 將實驗尺度增大，設法觀察更大型反泡泡運動

(三) 增加數據量



圖二十八:三維下反泡泡碰撞示意圖

參考文獻

- 一、維基百科。反泡泡
- 二、李夢筑、黃晴（2006）。泡泡造反了一反泡泡之形成、存活與破滅之物理特性探討。中華民國第四十六屆中小學科學展覽（高中組物理科）
- 三、NTCU-科學遊戲實驗室。科學遊戲實驗室10. 反泡泡。台中教育大學科學教育與應用學系
- 四、張豈榕、范祥鈺、蒲其磊。空間穿越-油滴二次觸水的穿透現象。台灣科學教育館
- 五、Zia, R., Nazir, A., Poortinga, A. T., & van Nostrum, C. F. (2022). Advances in antibubble formation and potential applications. *Advances in Colloid and Interface Science*, 305, 102688.
- 六、張海潮。Lagrange 乘數法Lagrange Multiplier Method。台大數學系
- 七、張海潮。虛功原理及歐拉 - 拉格朗日方程式。數學傳播 45卷4期, pp. 11-17