

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第一名

051806

擺撞協奏曲：相位完美節奏—Lato Lato 運動機制之研究

學校名稱： 高雄市立高雄高級中學

作者：	指導老師：
高二 彭煥宸	盧政良
高二 黃暉哲	高執貴

關鍵詞： 碰撞、相位、擺盪

得獎感言

不經一番寒徹骨怎得梅花撲鼻香

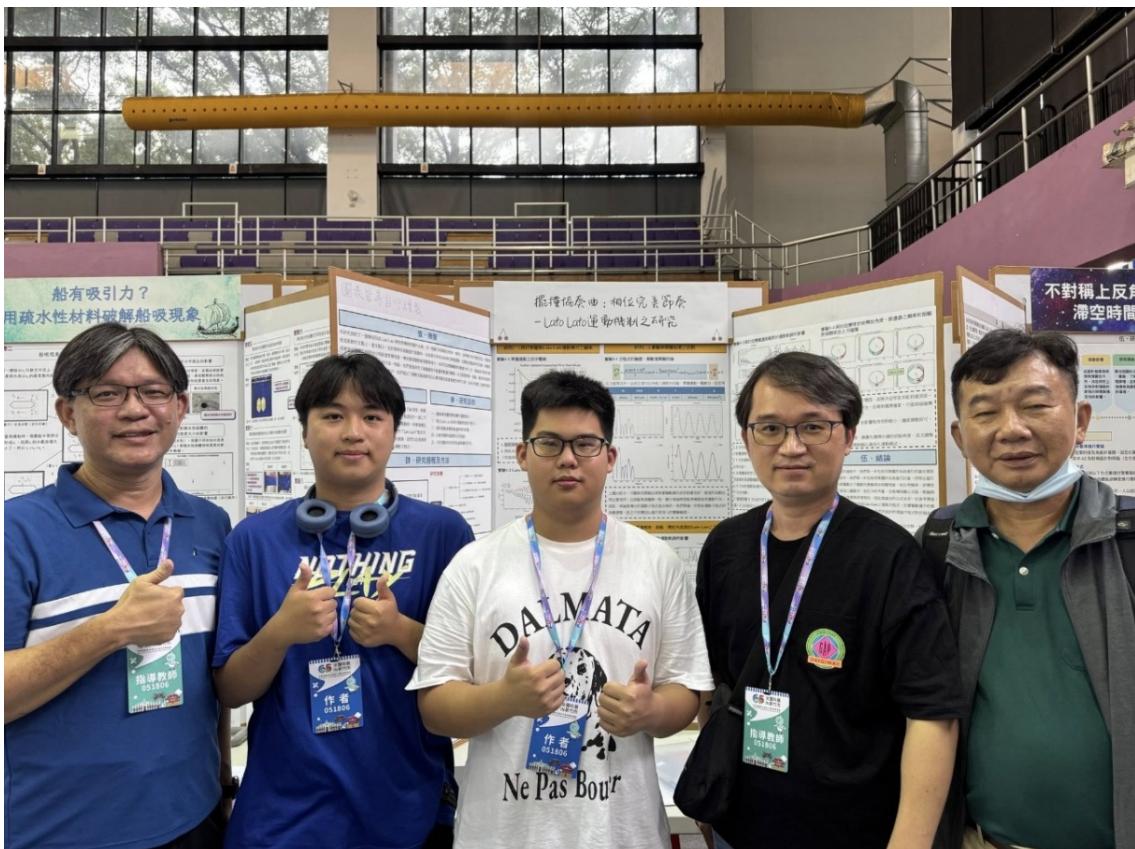
驀然回首，科展之路屬實不易。

首先，真的非常感謝評審老師們在比賽過程中給予我們許多寶貴的建議與深刻的提問。坦白說，在一開始接受審查的時候，看到教授嚴肅的表情，再加上其他組作品的精彩與創意，其實一度以為我們的科展之路會停在這裡。沒想到最後能站在這裡，不僅獲得肯定，還能拿下第一名。

但這段旅程並不輕鬆，從準備全國科展經歷了兩個月幾乎沒有好好休息的日子，雖然過程中有壓力、有疲憊，但也因為這些挑戰，讓我學會了如何在短時間內整理思緒，如何把壓力轉化為前進的動力。今天能得獎，我們要感謝一路支持我們的指導老師。比賽的結果固然重要，但更珍貴的是過程中我們對科學的熱情、對未知的探索，以及一次次被挑戰激發出的成長。希望未來我們、學弟妹們都能繼續懷抱這份熱情，勇敢追尋科學的夢想。



頒獎典禮合照



與指導老師合照

摘要

本研究探討 Lato-Lato 與物理機制相關的系統：在一根繩子的兩端各懸掛一顆球，並將繩子的中點固定在一個能夠垂直振動的支點上。當支點以一定的頻率和振幅進行振動時，系統最初表現為規律的單擺運動，但隨著振動條件的改變，球體間逐漸發生碰撞，並開始出現能量累積現象，導致整個擺動幅度顯著增大。本研究從直觀的實驗觀察和嚴謹的數據分析兩個角度入手，通過設計精密的實驗裝置和採集詳細的運動數據，深入探討這一現象背後的機理。我們著重研究了碰撞過程中能量與動量的轉換，以及振動頻率、振幅、繩長與球重等參數如何影響系統的運動狀態。最終，我們提出了調整支點振動相位以實現最佳能量傳遞效率的方案，為未來相關工程應用提供一些新的思路與參考。

壹、 實驗動機

每年過年其中一個組員都會回阿公家和家人一起過，而他的阿公因為身體原因有請外籍勞工從旁照顧其起居。有一年過年，他看到阿姨正在玩著一個兩顆球的玩具，一問之下，才知道這原來是一個叫 Lato-Lato 的玩具，在印尼當地可是很多小孩從小到大的玩具。他止不住好奇的心跟她借來玩了一下，才發現說這個玩具要玩的好真的不太容易。因此，他就跟阿姨要來一個，但他玩得沒有很好也不太會玩。隨著寒假結束，他也將這個玩具帶到實驗室和同學分享。有一次我們在實驗室無所事事的時候，組員無意間用手拿著 Lato-Lato 並且亂甩，甩的同時兩顆球竟順利的相撞起來，我們看到這個現象不禁開始好奇球跟手之間有什麼關係。針對這個問題，我們到網路上研究了一下，發現將繩子的中點固定在一個能垂直振動的支點上時，隨著支點以一定頻率與振幅進行振動，球會因此相互碰撞，最終使擺動幅度急劇增大。而我們在思考要在什麼樣的情況下，Lato-Lato 才會盪起來並且盪到最高點。我們認為若能理解球與支點上下震動之關係，就能在已知的情況下去分析球的震盪模式。然而 Lato-Lato 的運動相當複雜，因此我們將對 Lato-Lato 進行理論建構與實驗設計。並找出描述該模式之運動方程式。

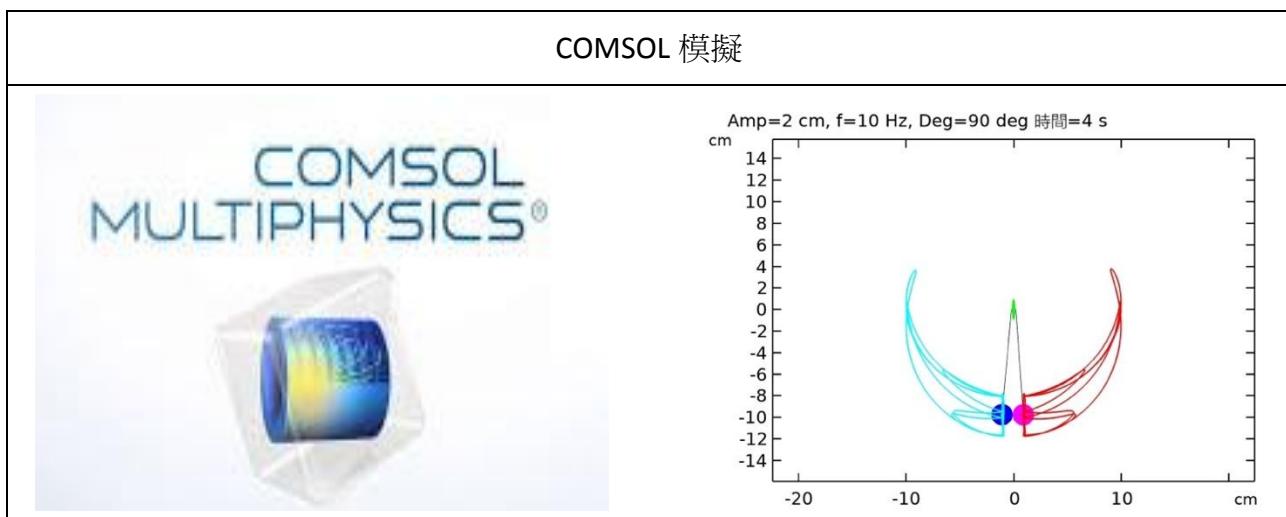
貳、 實驗目的

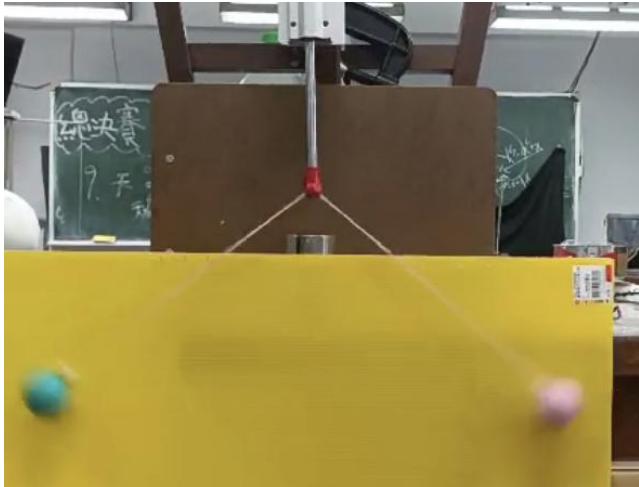
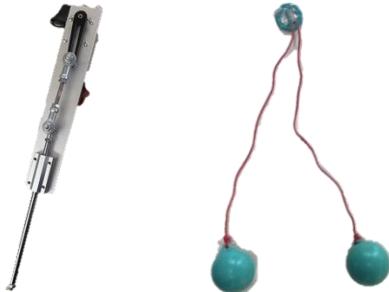
- 一、觀察單球體與雙球體的運動模式。
- 二、建立Lato-Lato系統的運動模型與方程式。
- 三、探討振動參數對能量累積的影響。
- 四、比較單擺與碰撞模式的差異。
- 五、分析運動同步性對能量傳遞的作用。

參、 研究設備及器材

1. 器材：塑膠球、尼龍繩、振盪器、擋板、紅點標籤、攝影器材支架、板子。
2. 儀器：筆電(含 EXCEL、Python、Tracker、Vscode)
手機（相機）、攝影器材。
模擬軟體 COMSOL

(以下照片為作者自行拍攝，軟體圖示擷取自應用程式)



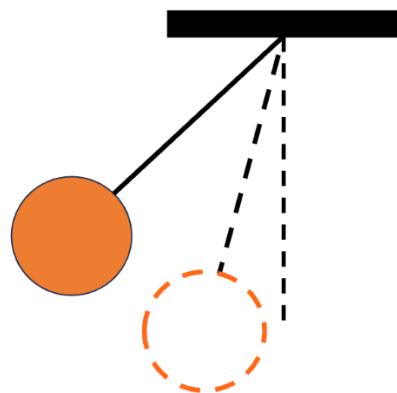
Lato-Lato 振盪器裝置圖	器材裝置圖
	
內容包含：塑膠球、尼龍繩、振盪器、紅點標籤、板子	內容包含：Lato-Lato 振盪器、攝影器材及支架

肆、 研究過程及方法

一、 理論與公式討論

(一) 簡易單擺

在討論 Lato-Lato，我們先以一般單擺進行討論，此模型可以被表示成一顆球連接著線，線的另一端固定，無外力驅動下進行運動



圖（一）簡易單擺示意圖(作者自行繪製)

於 Lato-Lato 之中，球的位置會改變，因此在這裡用能量來描述運動行為

$$E = mgL(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}mL^2\theta^2$$

同時在無外部驅動力的情況下，球的運動方程式為

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

(二) 引入驅動力

驅動力 (Driving Force) 指在一個振盪系統中額外施加於物體或系統的外力或能量來源，用來推動或維持系統的運動。它能克服系統本身的阻力或耗損，並改變原有的運動狀態。

考慮支點上下移動造成的驅動力

$$F_m = -a_0 \omega^2 \cos \omega t$$

(三) 驅動力於系統中的結合與應用

在探討完單擺的能量以及運動方程式後，為了使模型更貼近現實情況，我們希望能將驅動力加入公式，進而考慮外部力帶給 Lato-Lato 的影響。

1. 考慮驅動力後，不能只用一般單擺來表示，故在此最右項為考慮驅動力帶來的能量影響：

$$E = mgL(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}mL^2\theta^2 + \int (-ma_0\omega^2 \cos \omega t) dy$$

從左到右依序為位能、動能，而最右項即表示驅動力對系統做的功。

2. 因此可知考慮驅動力後的運動方程式即為：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{(g + \ddot{y})}{L} \sin \theta = 0$$

$$\ddot{y}_p = -A_{pivot}\omega_{pivot}^2 \cos(\omega_{pivot}t)$$

與此同時，Lato-Lato 也與自然頻率息息相關，何謂自然頻率？自然頻率為在沒有外部驅動力或阻尼的理想狀態下，系統固有的振動頻率。即使在有外部驅動的情況下，自然頻率仍然是一个非常重要的參考值：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

(四) 運動方程

經由上述對能量以及圓周運動的討論，我們可以將完整的模型建構出來，在此模型中，Lato-Lato 中球的運動方程式可以表示成：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g \cos \theta + L \dot{\theta}^2}{L} \right) \sin \theta - \frac{A_{pivot} \omega_{pivot}^2}{L} \cos(\omega_{pivot} t) \sin \theta + b \frac{d\theta}{dt} = 0$$

在上述等式中，公式左項可以分成三個部分討論：單擺運動、驅動力、阻尼項

二、研究架構



三、 實驗方法

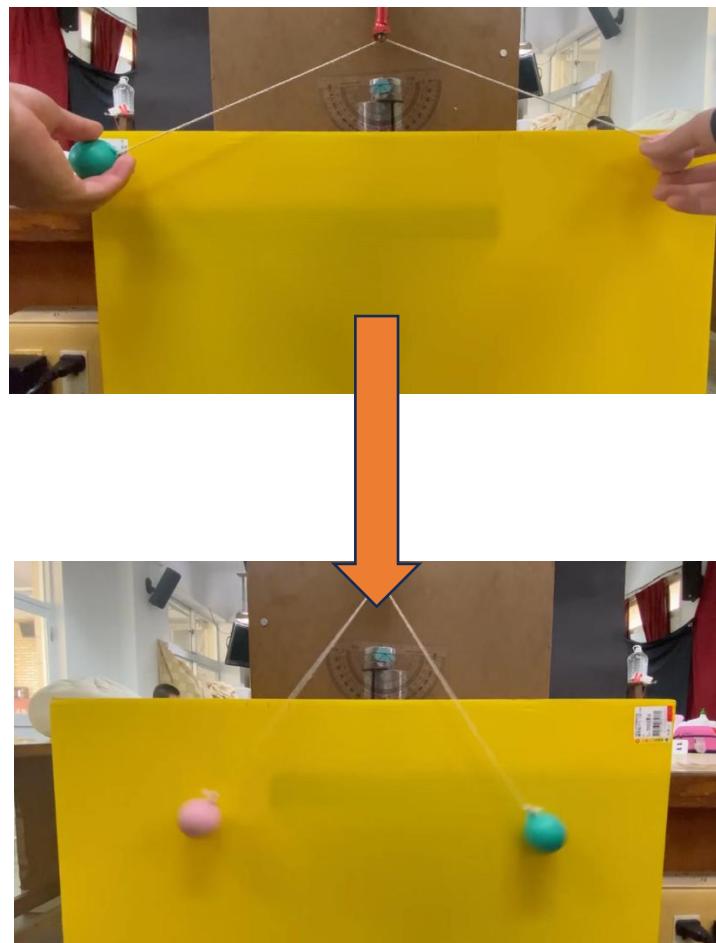
Lato-Lato 架設前置作業：

1. 準備兩顆大小重量相同的塑膠球，並用等長尼龍繩將球連接於振盪器上。
2. 將板簧對稱放置於固定器上如圖（六）所示，後面置放擋板使 Lato-Lato 能在一個平面上撞擊運動
3. 將球於同位置釋放並且互相撞擊一下後，開始啟動振盪器，固定振盪頻率與週期，觀察塑膠球的運動。



圖（二）Lato-Lato 振盪器
(作者自行拍攝)

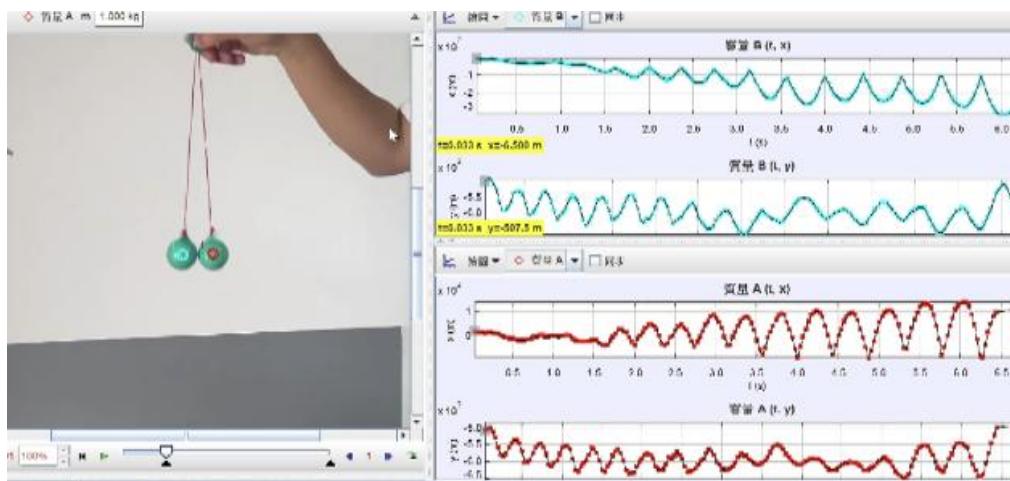
振盪器振盪操作：



圖（三）Lato-Lato 振盪器操作流程圖(作者自行拍攝)

Tracker 運動分析軟體操作說明：

1. 點擊 Tracker 軟體左上角檔案，選擇影片檔案後即能輸入實驗影片。
2. 將影片播放於軟體視窗，並確認是否流暢。
3. 點擊上方工具列中的座標，為影片建立座標系。
4. 點擊上方工具列中的質點，設立為質點 A。
5. 按住 **CTRL+Shift** 鍵，將質點移動到影片標示處。
6. 按下視窗中的開始追蹤，此時右上角的散佈圖會開始記錄數據。
7. 追蹤完畢後，選取右下角的數據並傳送至 Excel 做分析。



圖（四） Tracker 運動分析軟體介面(作者自行繪製)

Visual Studio Code 軟體之傅立葉分析與數值模擬操作與說明：

1. 安裝 Python 環境於 Visual Studio Code 軟體中。
2. 將傅立葉分析之程式碼輸入至程式窗中，並確認能否運行，如圖（八）。
3. 將 Tracker 影片分析之數據整理好並儲存成 csv. 檔。
4. 在所需檔案和程式碼檔案放置於同一個資料夾，即完成輸入檔案。
5. 按下程式運行鍵後，數據將以圖表形式輸出並紀錄實驗結果。
6. 將步驟 2 之程式碼替換成數值模擬程式碼，重複步驟 4-6 即完成數值模擬。

```

Ref: https://scipy-cookbook.readthedocs.io/items/CoupledSpringMassSystem.html

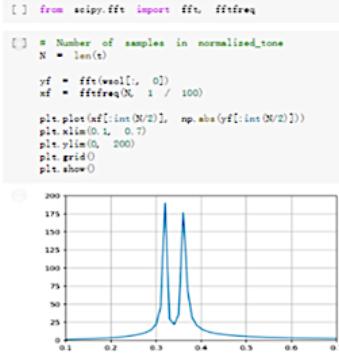
[ ] from scipy.integrate import odeint

[ ] def vectorfield(w, t, p):
    """ Defines the differential equations for the coupled spring-mass system.
        w : vector of the state variables: w = [x1, y1, x2, y2]
        t : time
        p : vector of the parameters: p = [m1, m2, k1, k2, kappa, L]
    """
    x1, y1, x2, y2 = w
    m1, m2, k1, k2, b1, b2, kappa, L = p
    f = [y1,
          (-b1 * y1 - k1 * x1 - kappa / (x2 - x1 + L)**4 + kappa / L**4) / m1,
          y2,
          (-b2 * y2 - k2 * x2 - kappa / (x2 - x1 + L)**4 - kappa / L**4) / m2]
    return f

[ ] np.sqrt(7.55/(13.86/1000))
23.339516805905347

[ ] 7.9/7.1*2
0.15453078390141328

```



圖（五）數值模擬與傅立葉轉換程式碼(作者自行繪製)

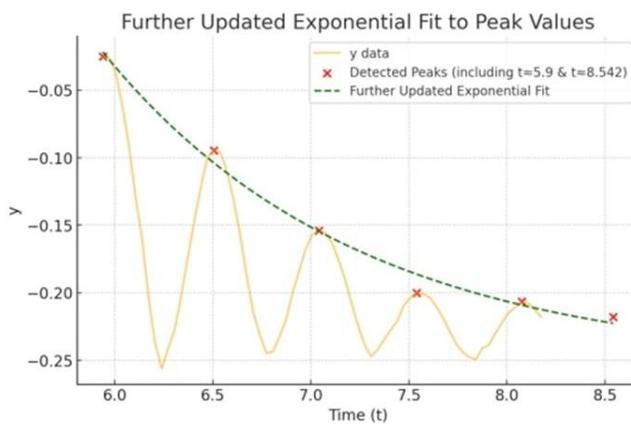
研究(一) 探討單擺與 Lato-Lato 運動模式之關係

實驗 1-1 單擺運動之初步觀察

步驟

- (1) 用手固定兩顆球的釋放位置
- (2) 釋放球的同時開始錄影，兩顆球會相撞並且皆會慢慢停下
- (3) 將完整運動影片錄影後輸入至 Tracker 軟體，進行運動軌跡分析。
- (4) 運動分析完後將數據輸入至 Excel 軟體進行數據整理。
- (5) 將 Excel 檔案輸入 Visual Studio Code 軟體中。
- (6) 將分析結果以圖表形式輸出，完成實驗紀錄。

結果與討論



圖（六）無外部驅動力下球的 Y 方向位置與時間作圖(作者自行繪製)

$$x(t) = A^{-0.771t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\gamma = \frac{b}{2} = \frac{0.771}{2}$$

$$b = 1.542 \text{ (1/s)}$$

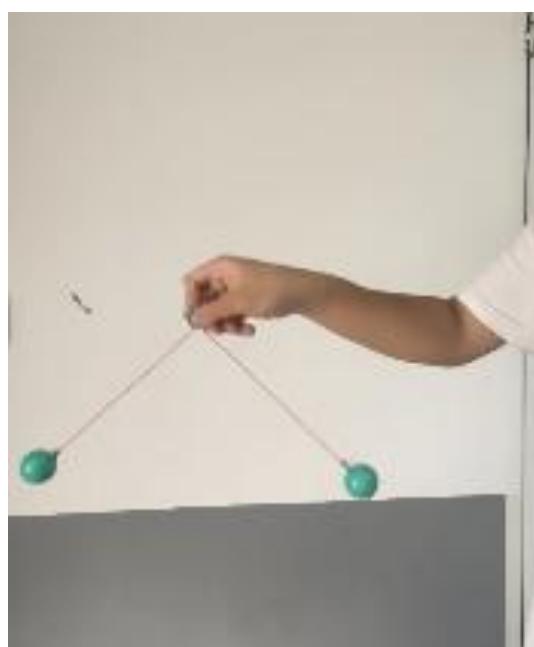
而在圖表中我們可以得知：

- (1) 阻尼常數 $b = 1.542 \text{ (1/s)}$
- (2) 與此系統碰撞之中，兩顆塑膠球的碰撞為非彈性碰撞（恢復係數為 0.294），相關模擬需考慮此條件。

實驗 1-2 Lato-Lato 運動之初步觀察

步驟

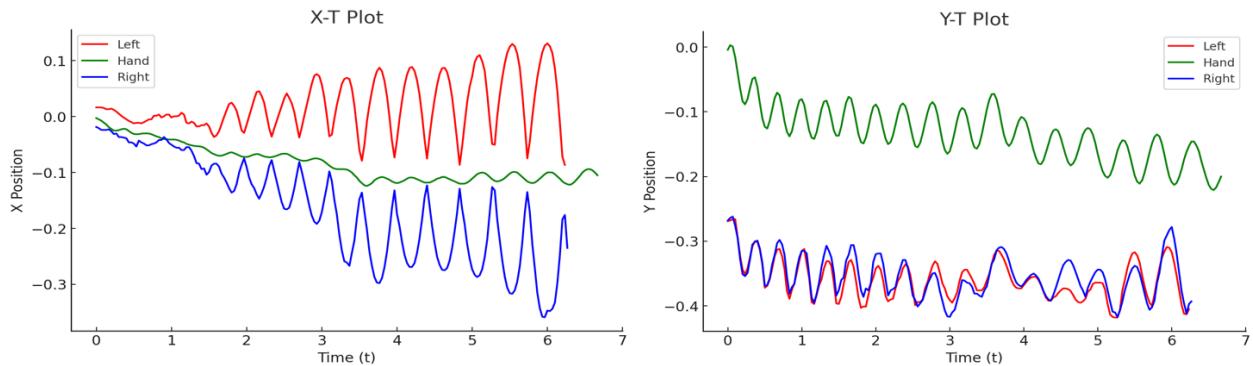
- (1) 用手來控制支點的上下移動。
- (2) 架設攝影器材並平行於實驗器材以進行錄影。
- (3) 將完整運動影片錄影後輸入至 Tracker 軟體，進行運動軌跡分析。
- (4) 運動分析完後將數據輸入至 Excel 軟體進行數據整理。
- (5) 將 Excel 檔案輸入 Visual Studio Code 軟體中。
- (6) 將分析結果以圖表形式輸出，完成實驗紀錄。



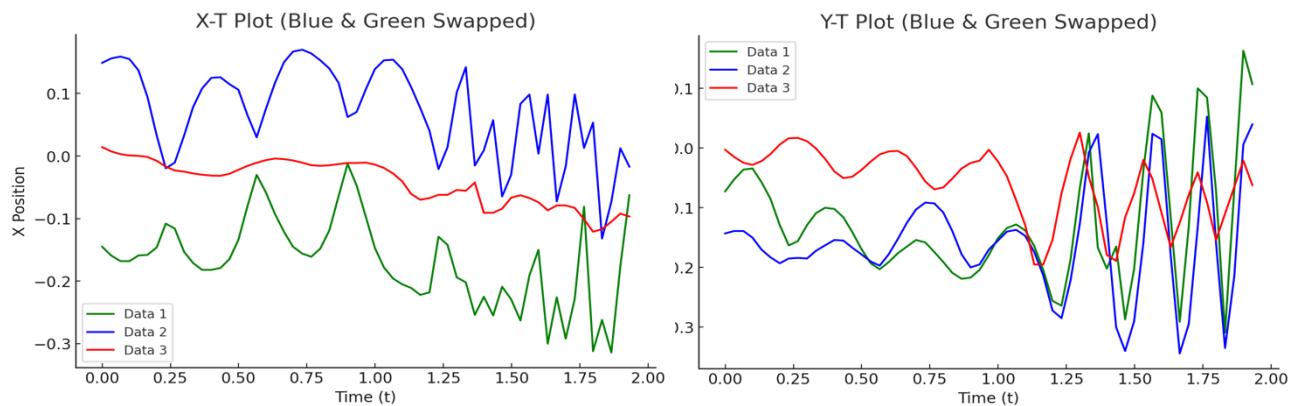
圖（七）用手進行簡易 Lato-Lato 操作(作者自行拍攝)

結果與討論

從數據中取 X 方向與 Y 方向位移對時間 t 作圖，如圖（十）所示：



圖（八）、（九）初始碰撞之 X 方向位置、Y 方向位置對時間作圖



圖（十）、（十一）於手上方開始碰撞之 X 方向位置、Y 方向位置對時間作圖

(以上之圖皆為作者自行繪製)

而在圖表中我們可以發現：

- (1) 當球開始穩定撞擊後（1.5 秒之後），兩顆球的 X 方向位置變化會有相反的趨勢。從手開始移動到持續穩定上下移動的過程中，Y 方向位置變化則有相同的軌跡。
- (2) 從結果來看兩顆球的振幅（X 方向位移）會隨著時間推進而越來越大，開始發生能量堆積，導致振幅越來越大。而兩顆球的 Y 方向位移與手的 Y 方向位移互為相反方向，當球向下相撞時，手恰好往上拉。
- (3) 當手以振幅 10 cm 以及頻率 4 Hz 震蕩時，球將超過手的位置，並於上方互相撞擊。可從圖（十一）可見 Y 方向位移的明顯變化

實驗 1-3 自然頻率與共振

經自然頻率之公式我們可以得知 Lato-Lato 之自然頻率：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.8}{0.1}} = 1.575(\text{Hz})$$

當頻率為 2 倍自然頻率時，會發生共振：

$$2f_0 = 3.151(\text{Hz})$$

研究(二) 實驗與模擬結果之比較

實驗 2 運動方程式的驗證：藉數值模擬討論

在理論推導中我們將完整的模型建構出來，運動方程式如下列所示：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g \cos \theta + L\dot{\theta}^2}{L}\right) \sin \theta - \frac{A_{pivot} \omega_{pivot}^2}{L} \cos(\omega_{pivot} t) \sin \theta + b \frac{d\theta}{dt} = 0$$

在上述等式中，公式右項可以分成三個部分討論：單擺運動、驅動力、阻尼項

為了將運動方程式用於後續的研究進程，我們需要確認這個方程式中變因的正確性，因此我們將這個公式寫進 COMSOL 中進行數值模擬。

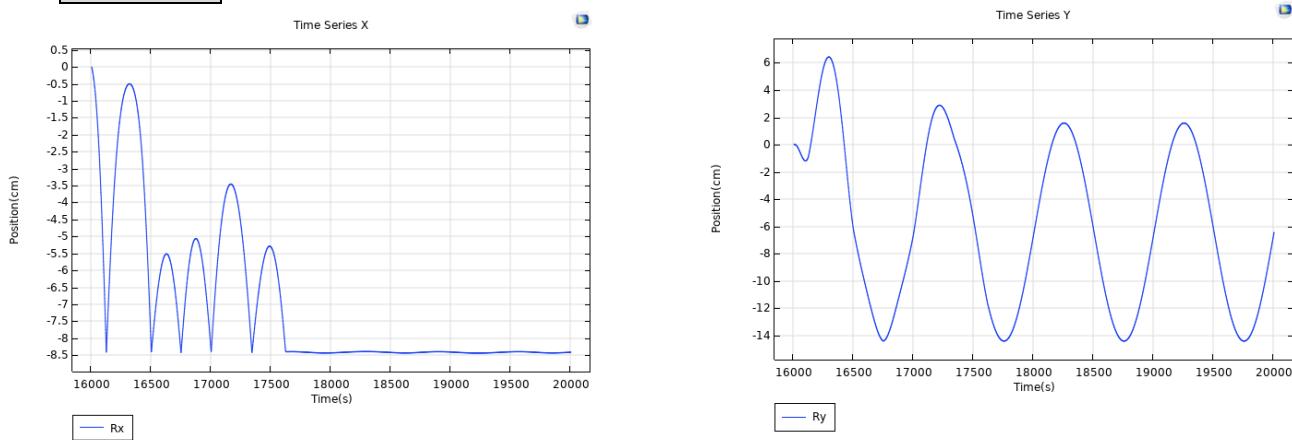
步驟

- (1) 將數值模擬之程式碼編寫於 COMSOL 軟體的程式窗，程式碼如附錄中所示。
- (2) 代入先前研究及觀察之參數與裝置參數，如下表（二）所示：
- (3) 將程式運算之結果輸出成 X 位移對時間作圖，作為理論圖形。
- (4) 將先前之實驗數據與理論圖形進行比對與擬合。

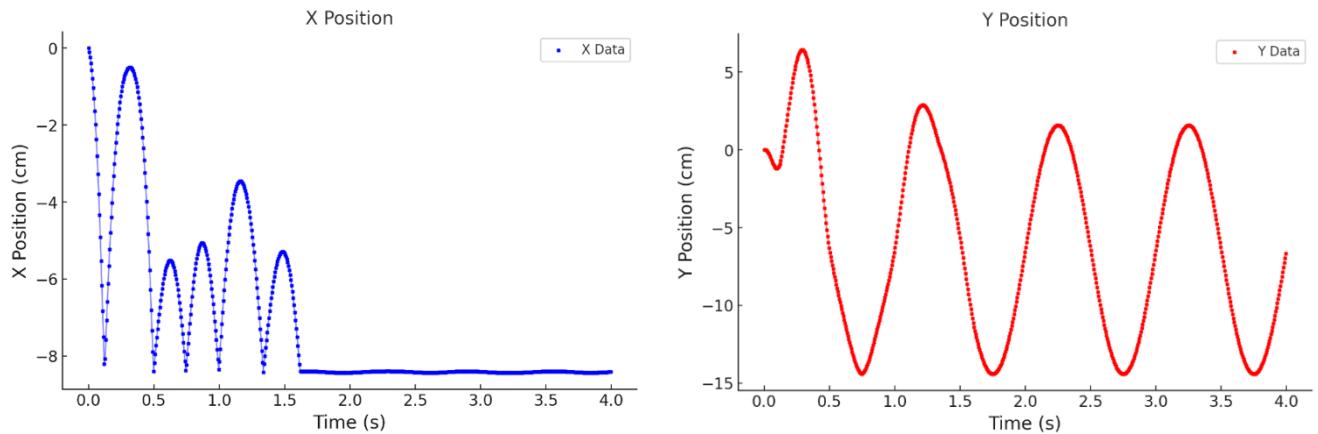
表（一） 上述實驗所得參數整理

	m	Amp	b	f	l	g
數值	56.0 g	8.0 (cm)	1.542 (1/s)	3 (Hz)	10 (cm)	9.8 (m/s ²)

結果與討論



圖（十二）、（十三）理論推論出之運動軌跡圖(藉由 COMSOL 繪製)



圖（十四）、（十五）實驗之運動軌跡圖(作者自行繪製)

在上圖的比較中，我們可以觀察到模擬結果與實驗數據的波形對應良好，兩者的波動出現位置相同，且振幅與衰減趨勢一致，顯示理論模型能夠準確描述系統的運動行為。由此可確定，理論推導出的運動方程式是合理的，並且能夠準確描述系統的運動行為。因此，我們將進一步針對該運動方程式的係數進行調整，設立不同變因以進行更深入的實驗驗證。

研究(三) 針對震盪頻率、振幅、釋放角度探討 Lato-Lato 之可行性

在研究(二)中我們以 COMSOL 數值模擬發現推導之運動方程式可以準確符合 Lato-Lato 之實驗數據，因此在研究（三）中，我們將針對運動方程式中所牽涉之變因進行實驗設計。

實驗 3-1 探討改變震盪頻率對於運動軌跡的影響

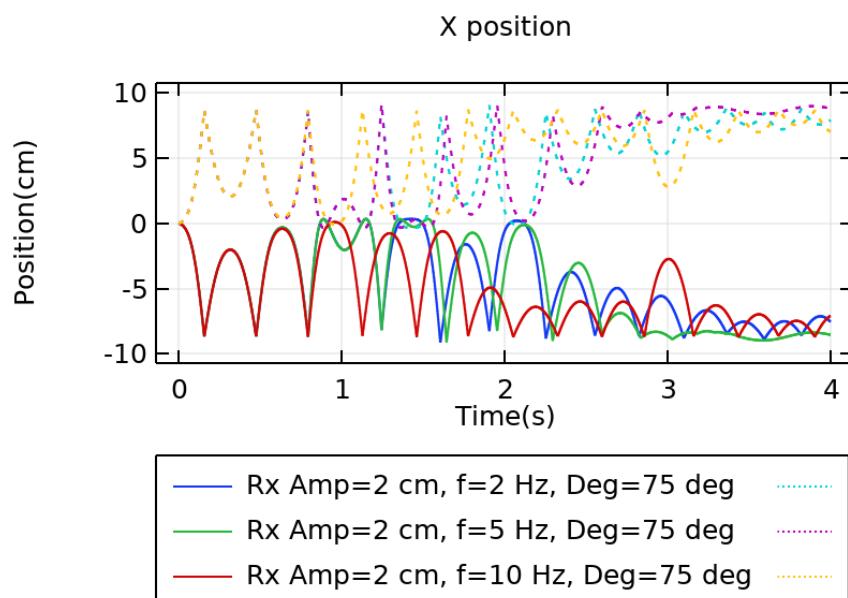
我們發現在公式左項之單擺運動中，有一變因為支點頻率 f ，而我們將以改變震盪器頻率來改變支點頻率 f ，並針對結果加以分析及討論。

步驟

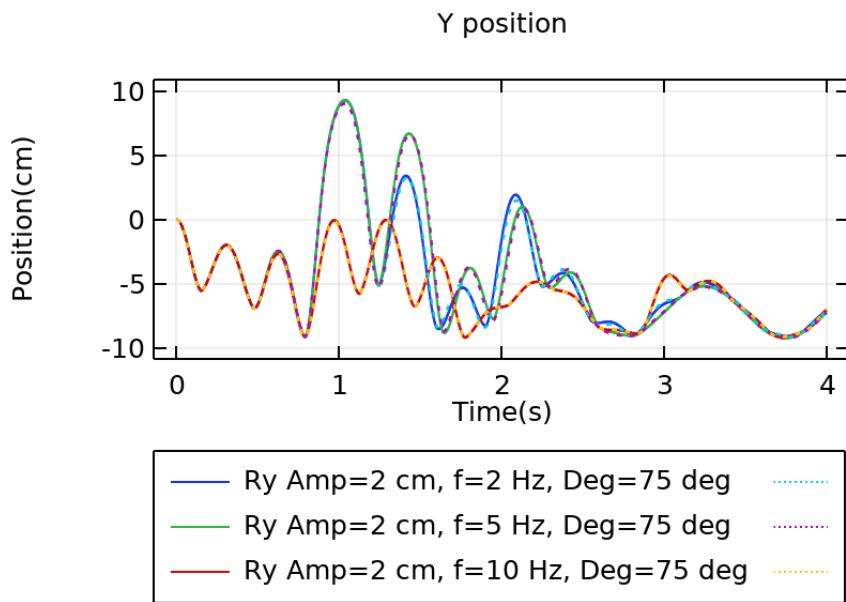
- (1) 將 Lato-Lato 放置於震盪器上，並將震盪器調至最低點。
- (2) 每改變一個頻率時確定兩球高度和離板距離相同，以確保每筆數據固定。
- (3) 架設好後改變震盪器頻率依序為 0.57, 1.66, 2.5, 2.7, 3, 4 Hz。
- (4) 啟動震盪器並使其上下震盪至少 20 秒，並以相機記錄完整運動影片。
- (5) 將完整運動影片錄影後輸入至 Tracker 軟體，進行運動軌跡分析。
- (6) 運動分析完後將數據輸入至 Excel 軟體進行數據整理。
- (7) 將分析結果輸出成圖表後與模擬結果一起比較。

結果與討論

下圖依序為 2 Hz, 5 Hz, 10 Hz。下兩顆球之位移對時間作圖：

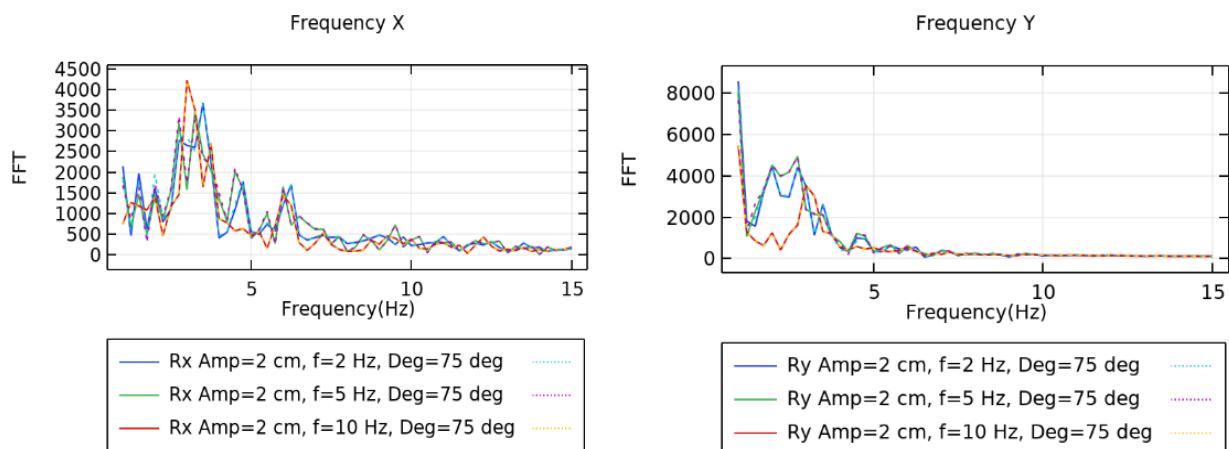


圖（十六）不同震盪器頻率之 X-位移對時間作圖(作者自行繪製)



圖（十七）不同震盪器頻率之 Y-位移對時間作圖(作者自行繪製)

而將上列數據進行傅立葉分析作圖如下：

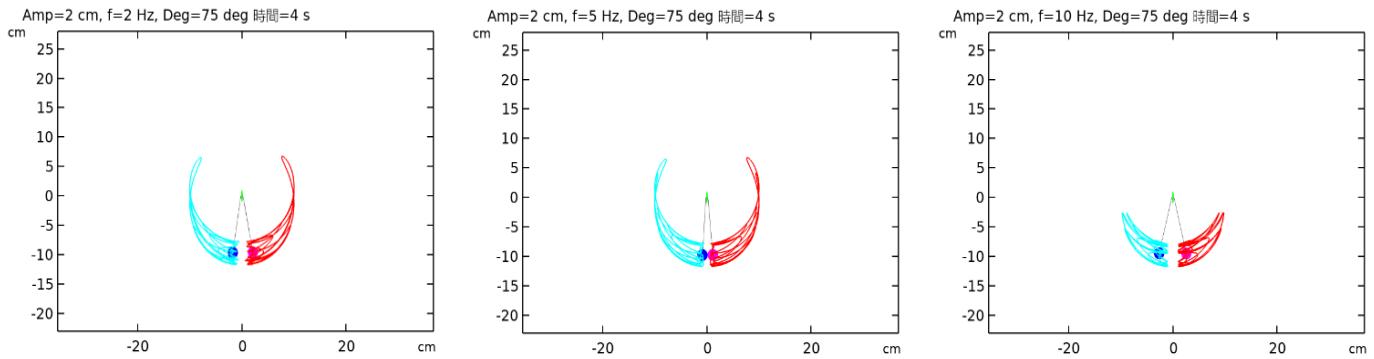


圖（十八）不同震盪器頻率之 X-位移之傅立葉分析圖

圖（十九）不同震盪器頻率之 Y-位移之傅立葉分析圖

(以上之圖皆為作者自行繪製)

所有變因的運動軌跡圖如下：



圖（二十）不同震盪器頻率之運動軌跡圖(作者自行繪製)

在三種不同結果圖中我們可以發現：

- (1) X 方向對頻率變化較敏感：當震盪頻率增加時，X 方向的運動變得更加混亂，顯示強迫震盪可能導致非線性耦合效應。
- (2) (2 Hz) 運動較規律，中頻 (5 Hz) 開始出現調制，高頻 (10 Hz) 呈現非線性行為。
- (3) FFT 分析顯示主要頻率範圍約為 3~6 Hz，5 Hz 條件下的 FFT 峰值較高，顯示此頻率可能接近系統的自然頻率(3.18 Hz)。
- (4) 高頻 (10 Hz) 下 FFT 峰值較弱，可能是因為此頻率超過系統共振頻率，無法有效激發共振。

實驗 3-2 探討改變震盪振幅對於運動軌跡的影響

我們發現在公式左項之單擺運動中，有一變因為支點振幅 Amp 。在實驗 3-2 中我們將改變此變因並進行討論。

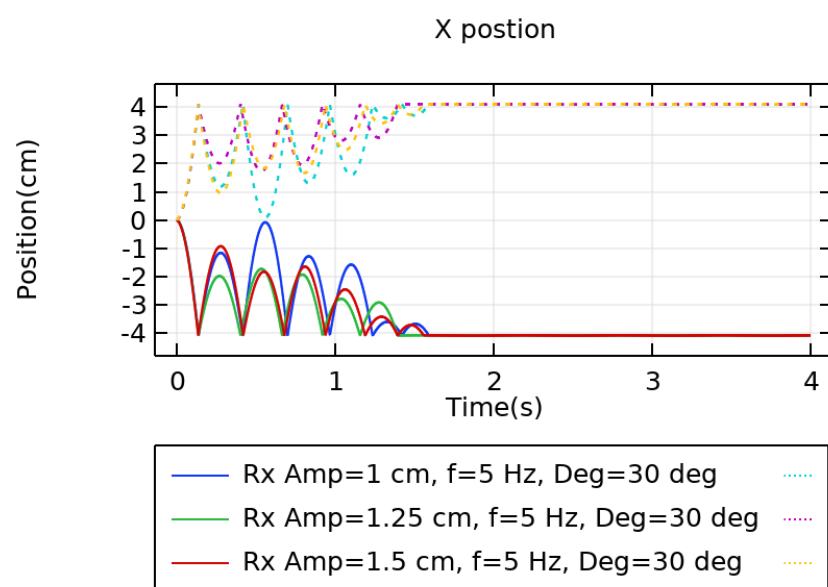
步驟

- (1) 將 Lato-Lato 放置於震盪器上，並將震盪器調至最低點。
- (2) 每改變一個頻率時確定兩球高度和離板距離相同，以確保每筆數據固定。
- (3) 架設好後改變振蕩器的振幅：1 cm, 1.25 cm, 1.5 cm。
- (4) 固定震盪頻率、初始釋放角度以及繩長。

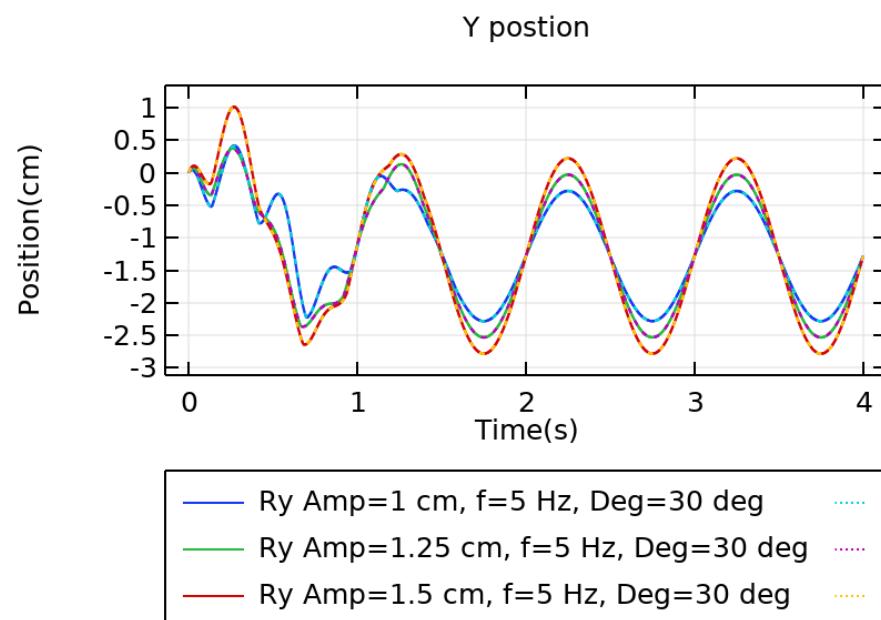
- (5) 啟動震盪器並使其上下震盪至少 20 秒，並以相機記錄完整運動影片。
- (6) 將完整運動影片錄影後輸入至 Tracker 軟體，進行運動軌跡分析。
- (7) 運動分析完後將數據輸入至 Excel 軟體進行數據整理。
- (8) 將分析結果輸出成圖表後與模擬結果一起比較。

結果與討論

下圖依序為初始角度 30, 45, 60, 75, 90°的位移對時間作圖：

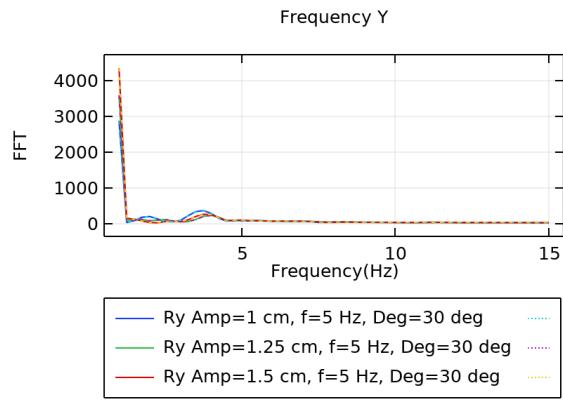
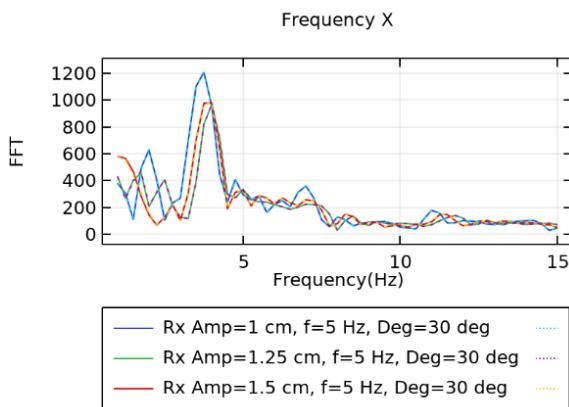


圖（二十一）不同震盪振幅之 X-位移對時間作圖(作者自行繪製)



圖（二十二）不同震盪振幅之 Y-位移對時間作圖(作者自行繪製)

將上列數據進行傅立葉分析作圖如下：

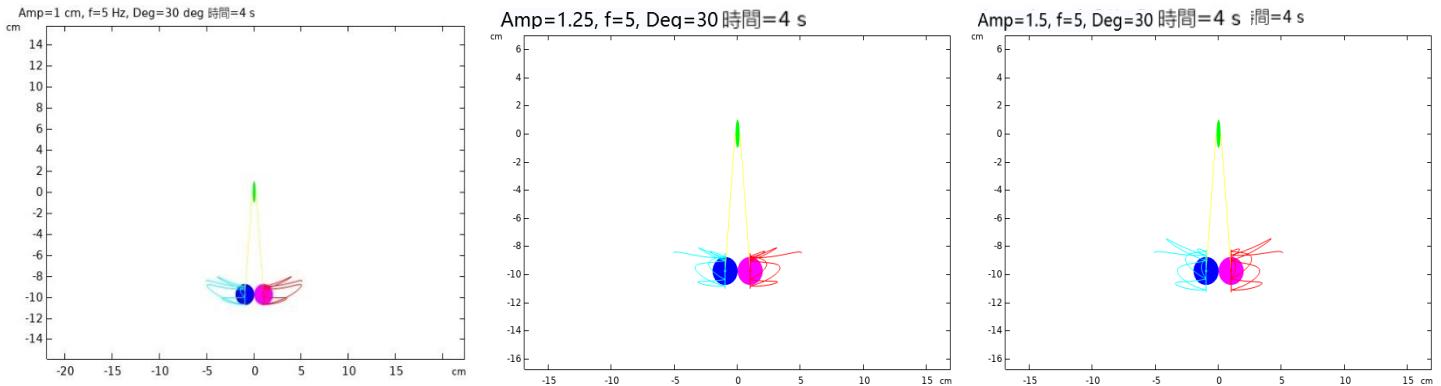


圖（二十三）不同震盪器振幅之 X-位移之傅立葉分析圖

圖（二十四）不同震盪器振幅之 Y-位移之傅立葉分析圖

(以上之圖皆為作者自行繪製)

所有變因的運動軌跡圖如下：



(以上之圖皆為作者自行繪製)

在上圖中我們可以發現：

- (1) X 方向運動衰減快速，震幅變化主要影響初始擺幅，但不影響運動模式。
- (2) Y 方向運動較為穩定，不受震幅影響，擺盪模式由系統本身決定。
- (3) 若要讓兩球在上方碰撞，單純調整震幅可能效果有限，更重要的是調整驅動條件或初始擺放位置。
- (4) X 方向的運動能量快速衰減，可能與阻尼或能量轉移到 Y 方向有關。
- (5) 震幅影響 X 方向的 FFT 能量分佈，但不影響主要頻率範圍，Y 方向則完全不受影響。

實驗 3-3 探討改變球初始釋放角度對於運動軌跡的影響

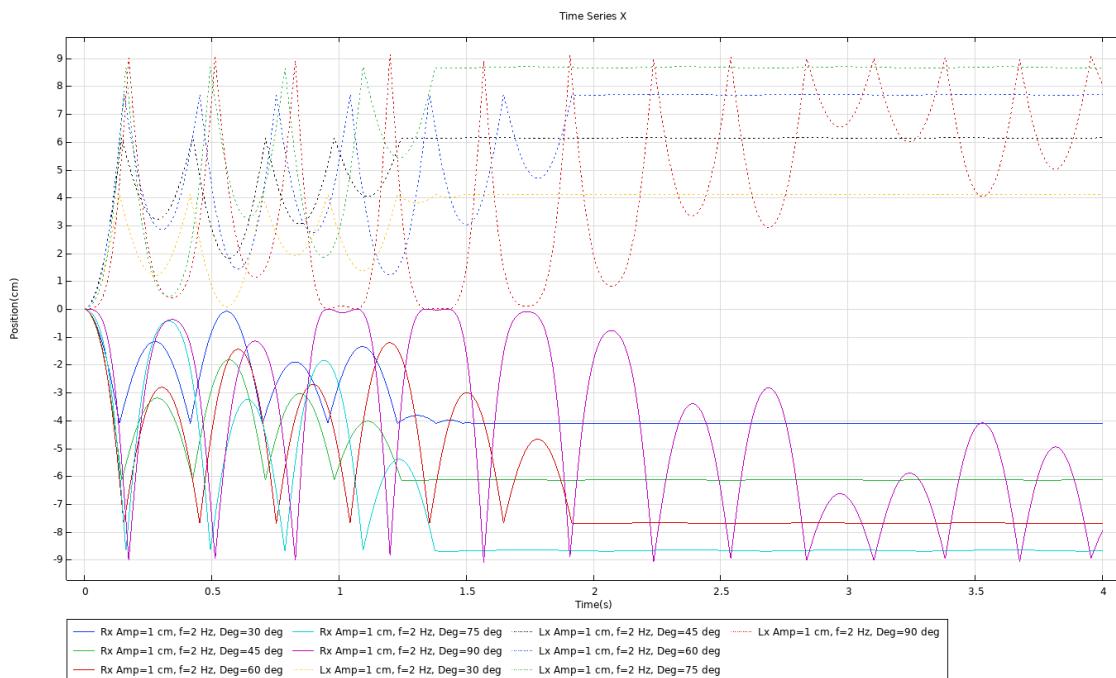
我們還發現公式中發現：兩球初始釋放角度(兩球初始能量)對於運動軌跡有影響，因此在此實驗我會針對此變因並進行討論。

步驟

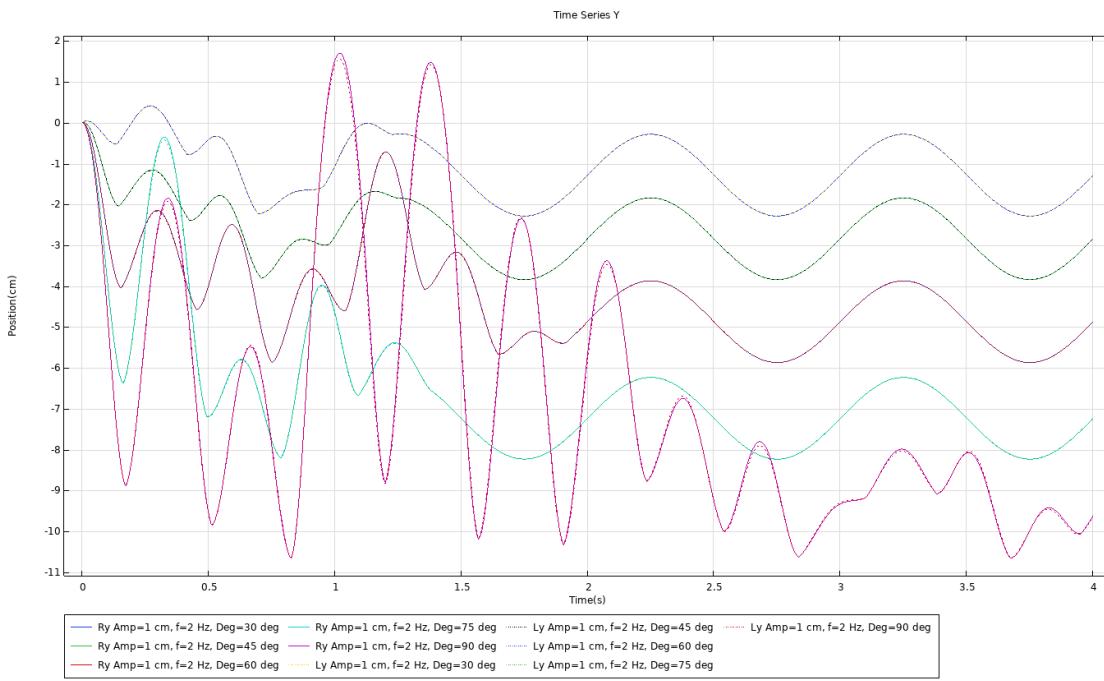
- (1) 將 Lato-Lato 放置於震盪器上，並將震盪器調至最低點。
- (2) 每改變一個頻率時確定兩球高度和離板距離相同，以確保每筆數據固定。
- (3) 架設好後改變球初始釋放角度依序為 $30, 45, 60, 75, 90^\circ$ 。
- (4) 啟動震盪器並使其上下震盪至少 20 秒，並以相機記錄完整運動影片。
- (5) 將完整運動影片錄影後輸入至 Tracker 軟體，進行運動軌跡分析。
- (6) 運動分析完後將數據輸入至 Excel 軟體進行數據整理。
- (7) 將分析結果輸出成圖表後與模擬結果一起比較。

結果與討論

下圖依序為初始角度 $30, 45, 60, 75, 90^\circ$ 的位移對時間作圖：

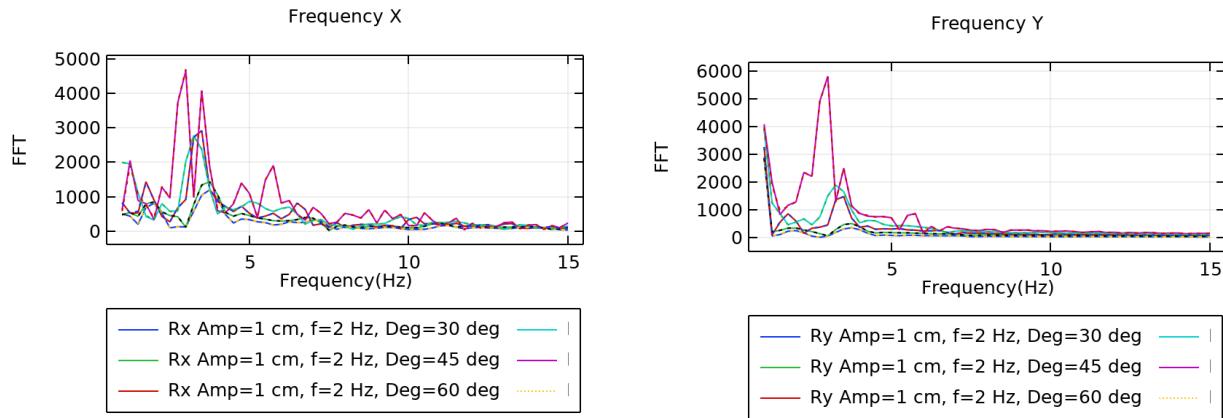


圖（二十五）不同初始角度之 X-位移對時間作圖(作者自行繪製)



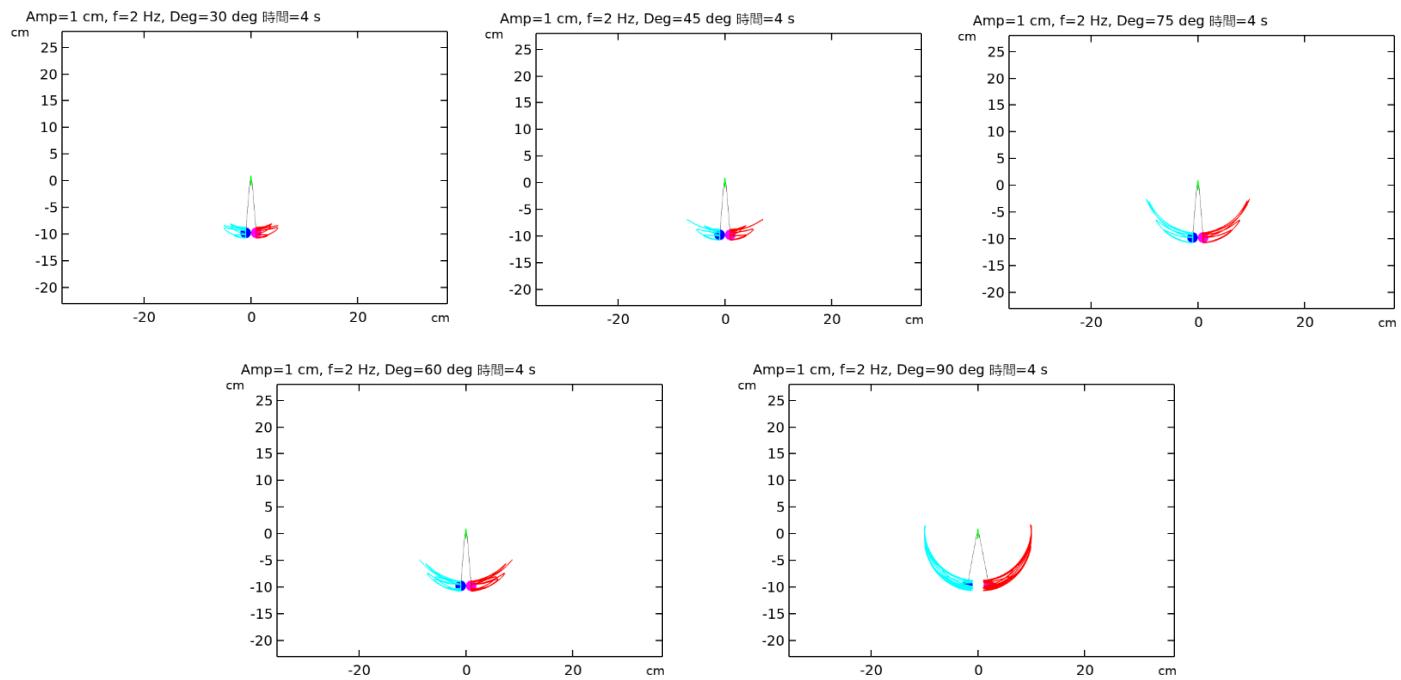
圖（二十六）不同初始角度之 Y-位移對時間作圖(作者自行繪製)

而將上列數據進行傅立葉分析作圖如下：



圖（二十七）、（二十八）不同初始角度之 X-位移、Y-位移之傅立葉分析圖(作者自行繪製)

所有變因的運動軌跡圖如下(以下皆為作者自行繪製)：



在圖中我們發現下列幾點：

- (1) X 方向運動對初始角度影響較大，初始角度增加會導致運動幅度增加，並可能產生更複雜的運動模式。
- (2) Y 方向運動較為穩定，受初始角度影響較小，主要影響擺幅大小但不影響運動頻率。
- (3) FFT 分析顯示，X 方向運動的能量分佈會隨初始角度改變，但主要頻率仍然維持在 3~6 Hz。
- (4) Y 方向的運動頻率幾乎不受初始角度影響，主要維持在 2~3 Hz，顯示其受擺盪機制主導。

實驗 3-4 探討改變球初始釋放角度、振盪器之頻率和振幅使兩顆球在上方碰撞

先前有提到當 Lato-Lato 處於特地情況下會在上方碰撞，我們希望藉由找尋於上方碰撞時之特定情況，分析何變因對運動軌跡之影響最甚。

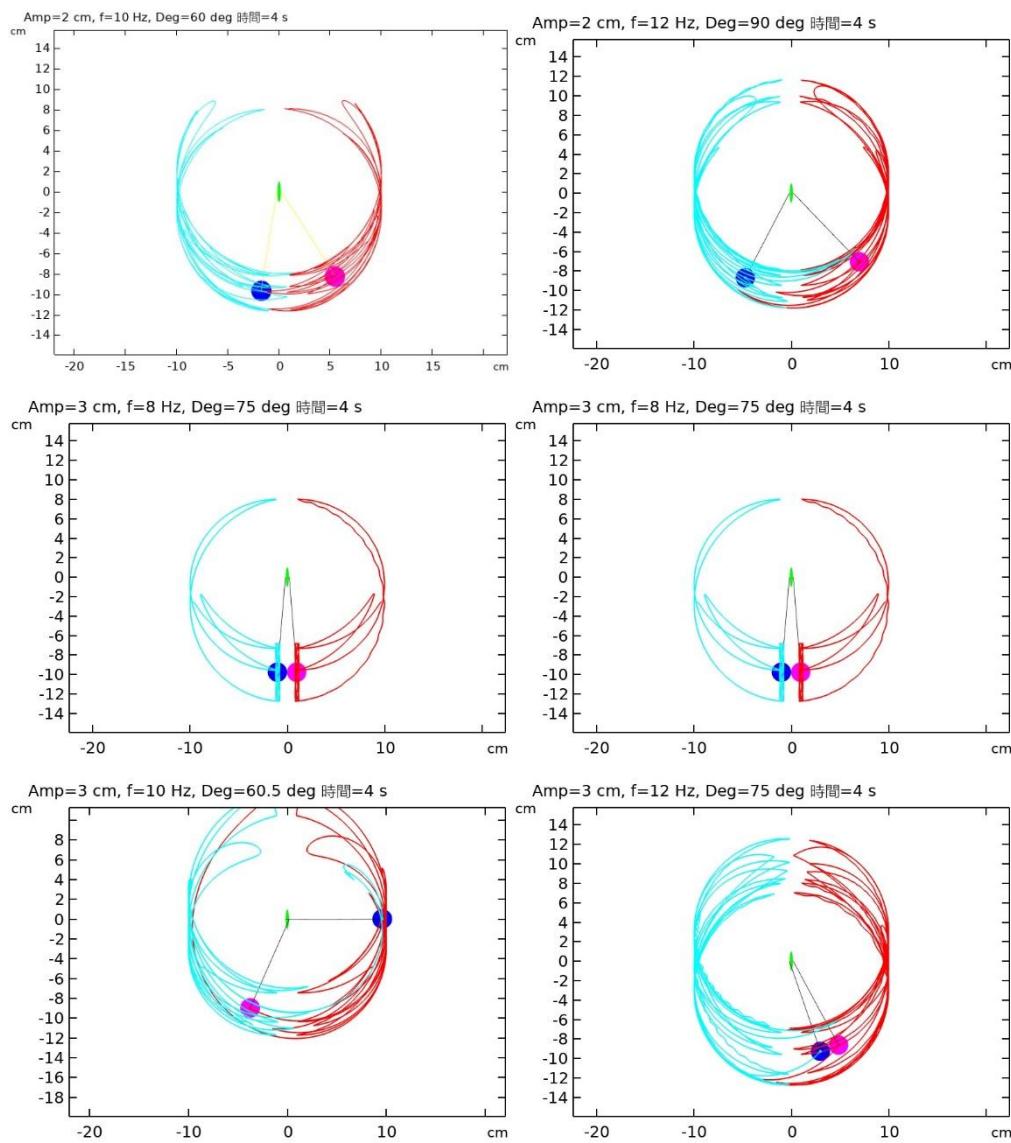
步驟

- (1) 將 Lato-Lato 放置於震盪器上，並將震盪器調至最低點。
- (2) 每改變一個頻率時確定兩球高度和離板距離相同，以確保每筆數據固定。
- (3) 架設好後改變球初始釋放角度依序為 30, 45, 60, 75, 90°。

- (4) 啟動震盪器並使其上下震盪至少 20 秒，並以相機記錄完整運動影片。
- (5) 將完整運動影片錄影後輸入至 Tracker 軟體，進行運動軌跡分析。
- (6) 運動分析完後將數據輸入至 Excel 軟體進行數據整理。
- (7) 將分析結果輸出成圖表後與模擬結果一起比較。

結果與討論

下圖為初特定的球初始釋放角度、振盪器之頻率和振幅之運動軌跡圖：



(以上之圖皆為作者自行繪製)

在圖中我們發現下列幾點：

- (1) 初始角度是影響最大的變因，直接決定球是否能夠到達頂部。

(2) 震盪頻率影響球的同步性，若頻率選擇適當，可提高碰撞機率。

(3) 振幅影響擺動範圍，但影響程度相對較小，適當調整即可。

→ 若要促進頂部碰撞，應優先選擇合適的初始角度，其次調整震盪頻率，最後微調振幅以最佳化運動模式。

伍、 討論

研究(一) 探討單擺與 Lato-Lato 運動模式之關係

一、實驗 1-1 中，與此系統碰撞之中，兩顆塑膠球的碰撞為非彈性碰撞（恢復係數為 0.294），相關模擬需考慮此條件。

二、從實驗 1-2 可知當球開始穩定撞擊後，兩顆球的 X 方向位置變化會有相反的趨勢。從手開始移動到持續穩定上下移動的過程中，Y 方向位置變化則有相同的軌跡。

三、從結果來看兩顆球的振幅（X 方向位移）會隨著時間推進而越來越大，開始發生能量堆積，導致振幅越來越大。而兩顆球的 Y 方向位移與手的 Y 方向位移互為相反方向，當球向下相撞時，手恰好往上拉。當手以振幅 10 cm 以及頻率 4 Hz 震蕩時，球將超過手的位置，並於上方互相撞擊。

研究(二) 實驗與模擬結果之比較

一、在上圖的比較中，我們可以觀察到模擬結果與實驗數據的波形對應良好，兩者的波動出現位置相同，且振幅與衰減趨勢一致，顯示理論模型能夠準確描述系統的運動行為。

二、由此可確定，理論推導出的運動方程式是合理的，並且能夠準確描述系統的運動行為。因此，我們將進一步針對該運動方程式的係數進行調整，設立不同變因以進行更深入的實驗驗證。

研究(三) 針對震盪頻率、振幅、釋放角度探討 Lato-Lato 之可行性

一、從實驗 3-1 可知，X 方向對頻率變化較敏感，(2 Hz) 運動較規律，中頻 (5 Hz) 開始出現調制，高頻 (10 Hz) 呈現非線性行為。FFT 分析顯示主要頻率範圍約為 3~6 Hz，5 Hz 條

件下的 FFT 峰值較高，顯示此頻率可能接近系統的自然頻率(3.18 Hz)，高頻 (10 Hz) 下 FFT 峰值較弱，可能是因為此頻率超過系統共振頻率，無法有效激發共振。

二、從實驗 3-2 可知，X 方向運動衰減快速，震幅變化主要影響初始擺幅，但不影響運動模式。Y 方向運動較為穩定，不受震幅影響，擺盪模式由系統本身決定。X 方向的運動能量快速衰減，可能與阻尼或能量轉移到 Y 方向有關。震幅影響 X 方向的 FFT 能量分佈，但不影響主要頻率範圍，Y 方向則完全不受影響。

三、從實驗 3-3 可知，X 方向運動對初始角度影響較大，初始角度增加會導致運動幅度增加，並可能產生更複雜的運動模式。Y 方向運動較為穩定，受初始角度影響較小，主要影響擺幅大小但不影響運動頻率。FFT 分析顯示，X 方向運動的能量分佈會隨初始角度改變，但主要頻率仍然維持在 3~6 Hz。Y 方向的運動頻率幾乎不受初始角度影響，主要維持在 2~3 Hz，顯示其受擺盪機制主導。

四、我們發現，當驅動頻率接近 Lato-Lato 系統的 2 倍自然頻率時，運動幅度顯著增加，並產生穩定的運動模式。然而，當驅動頻率超過系統的共振頻率時，運動變得不穩定，擺動軌跡呈現無規則變化，顯示系統進入非線性區域。

五、值得注意的是，在高頻驅動的情況下（如 10 Hz），實驗數據顯示振盪運動開始呈現非線性行為，並且運動模式趨於混亂，而此現象在模擬結果中也有出現，顯示我們的理論模型在一定範圍內可以描述非線性運動特性

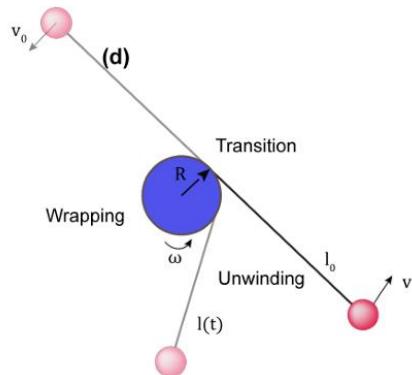
六、透過改變初始釋放角度，我們發現 X 方向運動對初始角度的變化較為敏感，而 Y 方向運動相對穩定。當初始角度過大時，兩球在上方碰撞的機率增加，但同時運動模式變得較難預測。此外，傅立葉分析顯示，X 方向的主要頻率分佈隨初始角度改變而變化，而 Y 方向則幾乎不受影響，這與我們的理論推導結果一致。

陸、 結論

- 一、在建設理論的過程中，我們第一步先採用單擺的系統進行討論在建設理論的過程中，我們第一步先採用單擺的系統進行討論，同時也進行了在無外部驅動力下擺動的實驗得知相關現象，如自然頻率、非彈性碰撞。之後加入驅動力、阻尼力的考量，在推導相關公式後，模擬與實驗數值擬合後發現非常相似，因此推論出的公式具有一定參考價值。我們推廣並建立了能描述 Lato-Lato 之運動方程式，於實驗數據中的整合也發現其極高的擬合度，因此我們所設計的理論方程式對於描述該 Lato-Lato 運動模式是很有高的參考價值。
- 二、在初步觀察 Lato-Lato 運動情形時，我們發現了 X 方向位移、Y 方向，在理論推導中得知，兩顆球的振幅（X 方向位移）會隨著時間推進而越來越大，開始發生能量堆積，導致振幅越來越大。而兩顆球的 Y 方向位移與手的 Y 方向位移互為相反方向，當球向下相撞時，手恰好往上拉。
- 三、在針對推廣之運動方程式討論影響參數時，我們發現振盪器的震盪頻率、振幅都會影響球的運動軌跡，在研究（三）的實驗中發現，改變球的初始釋放角度間接導致能量的變化，因此影響運動軌跡最大
- 四、在研究（三）中我們也做了改變震盪頻率、震盪振幅的相關實驗，在傅立葉分析圖中可以得知，於特定的頻率範圍之中，改變震盪頻率的 FFT 峰值較弱，可能是因為此頻率超過系統共振頻率，無法有效激發共振。改變震幅影響 X 方向的 FFT 能量分佈，但不影響主要頻率範圍，Y 方向則完全不受影響。X 方向運動的能量分佈會隨初始角度改變，但主要頻率仍然維持在 3~6 Hz，同時與兩倍自然頻率吻合。
- 五、在進行與實際數值之比較中我們發現，由理論推出之理論值與實驗值之誤差為 2.3%，更增加了運動方程式對於預測 Lato-Lato 運動軌跡之可能性。

柒、 展望

- 一、在研究（一）和研究（二）中，我們設計了一個能精確描述 Lato-Lato 運動模式的運動方程式，在數值模擬後也於研究（三）完成了剩餘變因之實驗討論。然而在實驗 3-4 中，雖找出了不同變因影響的程度，但卻無法將其量化，因此我們希望能在未來實驗能夠將其量化，並討論其他相關的參數與變因，使我們設計之運動方程式能夠更加完善。
- 二、在實驗動機中我們提到了鐘擺式的真動方法(支點上下擺動使兩球高度漸增)。未來希望可以嘗試新的方法改變兩球的運動模式，並找出其運動方程式。
- 三、Lato-Lato 基於能量吸收與非線性振動控制的原理，我們可以設計一種隔震平台，減少外界震動對高精密儀器的干擾。這項技術可應用於激光干涉儀、光學望遠鏡、質譜儀、原子鐘及微位移傳感器等對震動敏感的設備中，有助於提升測量穩定性與精度。



圖(二十九) 一種名為「Tornado」的遊戲方式

(此圖取自 Playing lato-lato is difficult and this is why 文獻中)

捌、 參考資料

- (1) Cross, R. (2023). Newton's Cradle with Two Balls. *The Physics Teacher*, 61(4), 260–262.
<https://doi.org/10.1119/5.0082363>
- (2) Fitrianingrum, A. M., & Kamaruddin, K. (2023). Analisis Konsep Momentum dan Tumbukan pada Permainan Lato-Lato. *Jurnal FisTa : Fisika Dan Terapannya*, 4(1), 1–4.
<https://doi.org/10.53682/fista.v4i1.235>
- (3) Funata, F. C., & Abidin, Z. (2024a). Playing lato-lato is difficult and this is why. *European Journal of Physics*, 45(4), 045007. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ad523a>
- (4) Funata, F. C., & Abidin, Z. (2024b). Playing lato-lato is difficult and this is why. *European Journal of Physics*, 45(4), 045007. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ad523a>
- (5) Glendinning, P. (2011). Two-ball Newton's cradle. *Physical Review E*, 84(6).
<https://doi.org/10.1103/physreve.84.067201>
- (6) Hessel, R., Perinotto, A. C., Alfaro, M., & Freschi, A. A. (2006). Force-versus-time curves during collisions between two identical steel balls. *American Journal of Physics*, 74(3), 176–179. <https://doi.org/10.1119/1.2173276>
- (7) Wibowo, E. (2023). Determine g using Lato Lato. *Physics Education*, 58(4), 045009.
<https://doi.org/10.1088/1361-6552/acdb39>
- (8) Wibowo, E., Nailly Ulya, & Putut Marwoto. (2024). Demonstration of conservation of momentum using Lato Lato 2.0. *Physics Education*, 59(2), 025025–025025.
<https://doi.org/10.1088/1361-6552/ad240c>
- (9) Wibowo, E., Nailly Ulya, Putut Marwoto, None Suwandi, & None Suproyogi. (2024). The dynamics of Lato Lato ball collisions. *Physics Education*, 59(5), 055002–055002.
<https://doi.org/10.1088/1361-6552/ad5780>

附錄

Visual Studio Code 傳立葉分析與數值模擬程式碼：

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

# Load the Excel file
file_path = "/content/lato_frequency (2).xlsx"    # 確保這是你的實際檔案路徑
df = pd.read_excel(file_path, sheet_name="2.5")
# 重新命名欄位
df.columns = ["t", "X_R"]
df = df.iloc[1:].astype(float)      # 移除標題行並轉換數據類型

# 繪製圖表
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(df["t"], df["X_R"], label=r"$X_R$", alpha=0.8)
# 設定 x 軸範圍
plt.xlim(4.835, 11.138)

plt.xlabel("Time (s)", fontsize=14)
plt.ylabel("Amplitude (m)", fontsize=14)
plt.title("4 Hz Sheet Over Time", fontsize=16)
plt.legend()
plt.grid(True)
# **去除格線**
plt.grid(False)    # 或者刪除此行
plt.show()
```

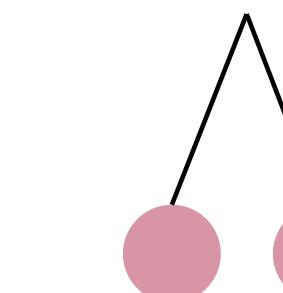
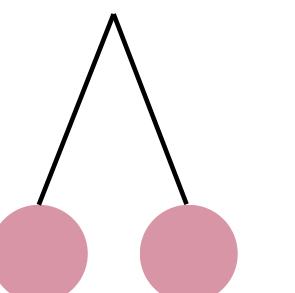
【評語】051806

題材新穎且貼近生活，成功將日常觀察轉化為嚴謹的物理研究主題，展現學生極佳的問題意識。自製簡易彈射裝置，紀錄兩端球的運動軌跡，能達實驗功效，以振幅擺長、振動頻率為實驗參數，能以實驗量測配合運動模擬，探討模擬參數的合適性，內容已完整，分析詳實。作品系統性探討頻率、振幅、初始角度等變因，配合 Tracker 與 Python 進行資料擷取與傅立葉分析，圖表豐富且清晰，實驗方法與分析工具運用純熟。清楚說明模型擬合的準確性與誤差（2.3%），顯示對理論與實測間關係的科學態度與求真精神。提出將 Lato-Lato 運動原理應用於隔震平台等高精密儀器的防震裝置，展現跨領域思考與工程想像，為學生科展的亮點，臨場表現佳，解說詳盡誠懇。

作品海報

摺疊協助奏由：相位完美節奏

Lafolafol運動機制之研究



壹、摘要

本研究探討了一個傳統玩具 Lato-Lato 與物理機制相關的系統：在一根繩子的兩端各懸掛一顆球，並將繩子的中點固定在一個能夠垂直振動的支點上。當支點以一定的頻率和振幅進行振動時，系統最初表現為規律的單擺運動，但隨著振動條件的改變，球體間逐漸發生碰撞，並開始出現能量累積現象，導致整個擺動幅度顯著增大。本研究從實驗觀察和數據分析入手，通過設計精密的實驗裝置和採集的運動數據，探討這一現象。我們著重研究了碰撞過程中能量與動量的轉換，以及振動頻率、振幅、繩長與球重等參數如何影響系統的運動狀態。最終，我們提出了調整支點振動相位以實現最佳能量傳遞效率的方案，為未來相關工程應用提供一些新的思路與參考。

貳、研究動機

某次組員無意間發現Lato-Lato這個玩具，當隨手亂甩時，兩顆球竟能成功碰撞。查詢後得知，若將繩子中點固定於一個上下振動的支點上，當支點以特定頻率與振幅震動時，球會碰撞且擺幅增大。這使他們開始思考在何種條件下Lato-Lato才能成功盪起並達到最大擺幅。由於其運動極為複雜，我們決定透過理論與實驗來深入研究，並找出描述其運動方程式。

參、研究目的

- 一、觀察單球體與雙球體的運動模式。
- 二、建立Lato-Lato系統的運動模型與方程式。
- 三、探討振動參數對能量累積的影響。
- 四、比較單擺與碰撞模式的差異。
- 五、分析運動同步性對能量傳遞的作用。

肆、研究過程及方法

理論與公式討論

(一) 簡易單擺

於Lato-Lato之中，球的位置會改變，因此在這裡用能量來描述運動行為：

$$E = mgL(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}mL^2\theta^2$$

同時在無外部驅動力的情況下，球的運動方程式為：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

(二) 引入驅動力

考慮支點上下移動造成的驅動力：

$$F_m = -a_0\omega^2 \cos \omega t$$

(三) 驅動力於系統中的結合與應用

1. 考慮驅動力後，不能只用一般單擺來表示，故在此最右項為考慮驅動力帶來的能量影響：

$$E = mgL(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}mL^2\theta^2 + \int (-ma_0\omega^2 \cos \omega t) dy$$

2. 因此可知考慮驅動力後的運動方程式即為：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{(g + \ddot{y})}{L}\sin\theta = 0$$

$$\ddot{y}_p = -A_{pivot}\omega_{pivot}^2 \cos(\omega_{pivot}t)$$

(四) 自然頻率

自然頻率為在沒有外部驅動力或阻尼的理想狀態下，系統固有的振動頻率：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

(五) 運動方程

經由對能量以及圓周運動的討論，我們將完整的模型建構出來。此模型中，球的運動方程式可以表示成：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g \cos \theta + L\dot{\theta}^2}{L}\right) \sin \theta - \frac{A_{pivot}\omega_{pivot}^2}{L} \cos(\omega_{pivot}t) \sin \theta + b \frac{d\theta}{dt} = 0$$

在上述等式中，公式左項可以分成三個部分討論：單擺運動、驅動力、阻尼項

研究架構

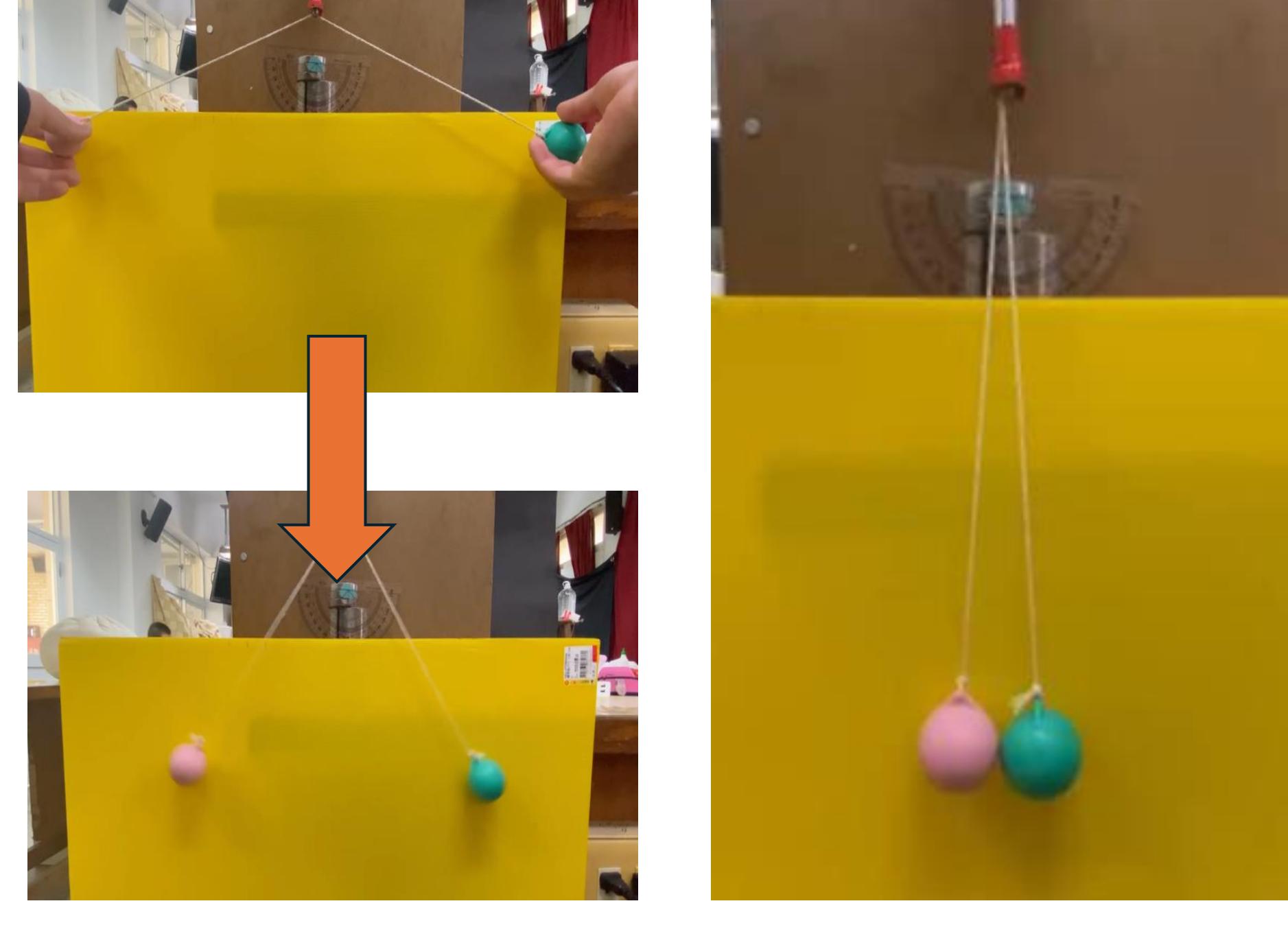


實驗方法

(一) Lato-Lato 裝置說明

1. 準備兩顆大小重量相同的塑膠球，並用等長尼龍繩將球連接於振盪器上。
2. 將板簧對稱放置於固定器上如下右圖所示，後面置放擋板使Lato-Lato能在一個平面上撞擊運動。
3. 將球於同位置釋放並且互相撞擊一下後，開始啟動振蕩器，固定振蕩頻率與週期，觀察塑膠球的運動。

振盪器振盪操作：



(二) 分析軟體與工具

1. Tracker：

設定座標系：點選工具列「座標」，建立坐標系

建立質點：點選「質點」→ 設立為質點 A

標記追蹤點：按住 Ctrl + Shift，將質點對準影片目標

輸出分析：完成後選取右下角數據，匯出至 Excel 進行分析

2. Visual Studio Code 軟體之傅立葉分析：

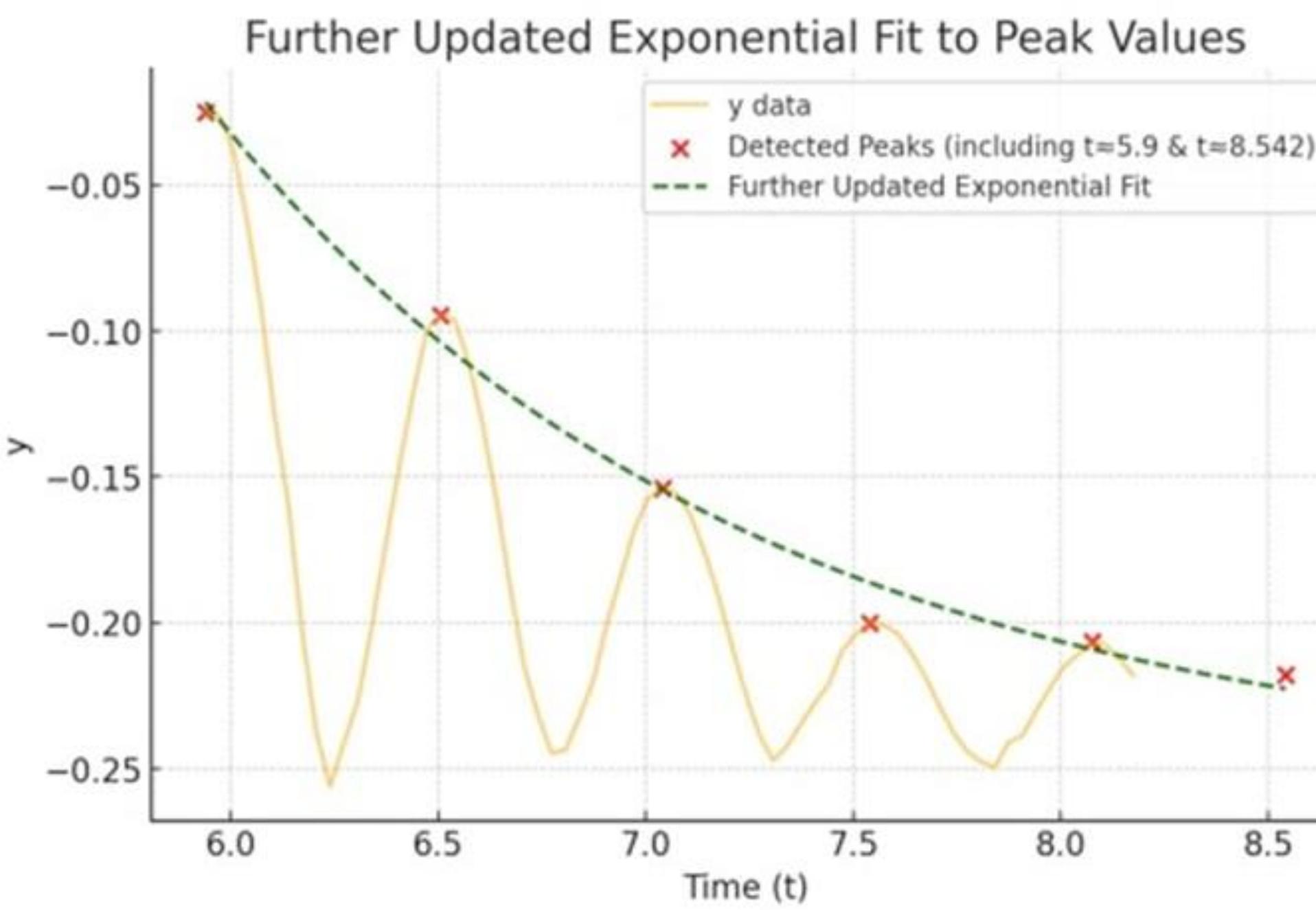
將Tracker影片分析之數據整理好並儲存成csv.檔

檔案和程式碼檔案放於同一個資料夾，即完成輸入檔案

按下程式運行鍵後，數據將以圖表形式輸出並紀錄實驗結果

研究(一) 探討單擺與Lato-Lato運動模式之關係

實驗1-1 單擺運動之初步觀察

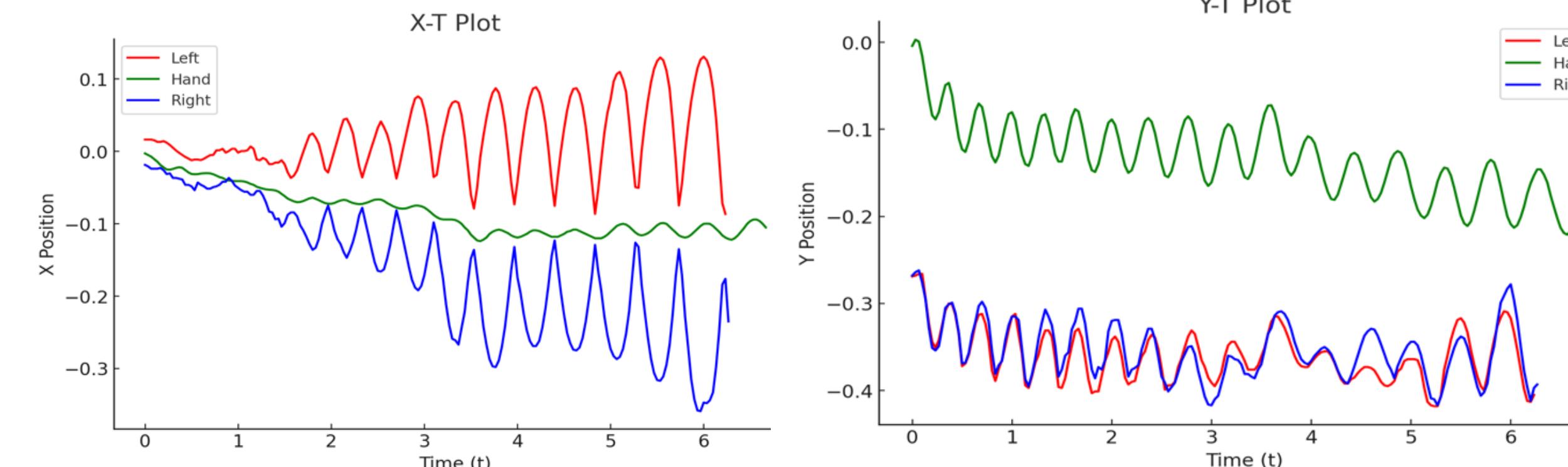


$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \quad \gamma = \frac{b}{2} = 0.771$$

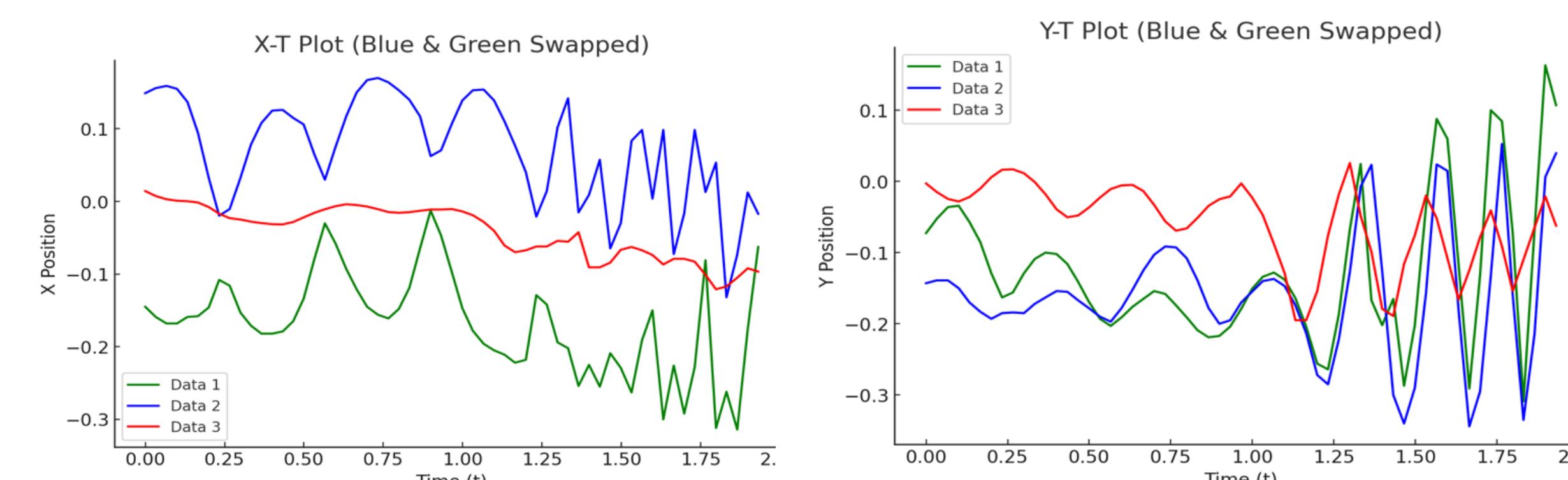
$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \quad b = 1.542 (1/s)$$

- 阻尼常數 $b = 1.542 (1/s)$
- 與此系統碰撞之中，兩顆塑膠球的碰撞為非彈性碰撞（恢復係數為0.294），相關模擬需考慮此條件。

實驗1-2 Lato-Lato運動之初步觀察



初始碰撞之X方向位置、Y方向位置對時間作圖



於手上方開始碰撞之X方向位置、Y方向位置對時間作圖

- 當球開始穩定撞擊後（1.5秒之後），兩顆球的X方向位置變化會有相反的趨勢。從手開始移動到持續穩定上下移動的過程中，Y方向位置變化則有相同的軌跡。
- 從結果來看兩顆球的振幅（X方向位移）會隨著時間推進而越來越大，開始發生能量堆積，導致振幅越來越大。而兩顆球的Y方向位移與手的Y方向位移互為相反方向，當球向下相撞時，手恰好往上拉。
- 當手以振幅10 cm以及頻率4 Hz震盪時，球將超過手的位置，並於上方互相撞擊。可從圖（十一）可見Y方向位移的明顯變化。

實驗1-3 自然頻率與共振

- 經自然頻率之公式我們可以得知Lato-Lato 之自然頻率：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.8}{0.1}} = 1.575(Hz)$$

- 當頻率為2倍自然頻率時，會發生共振：

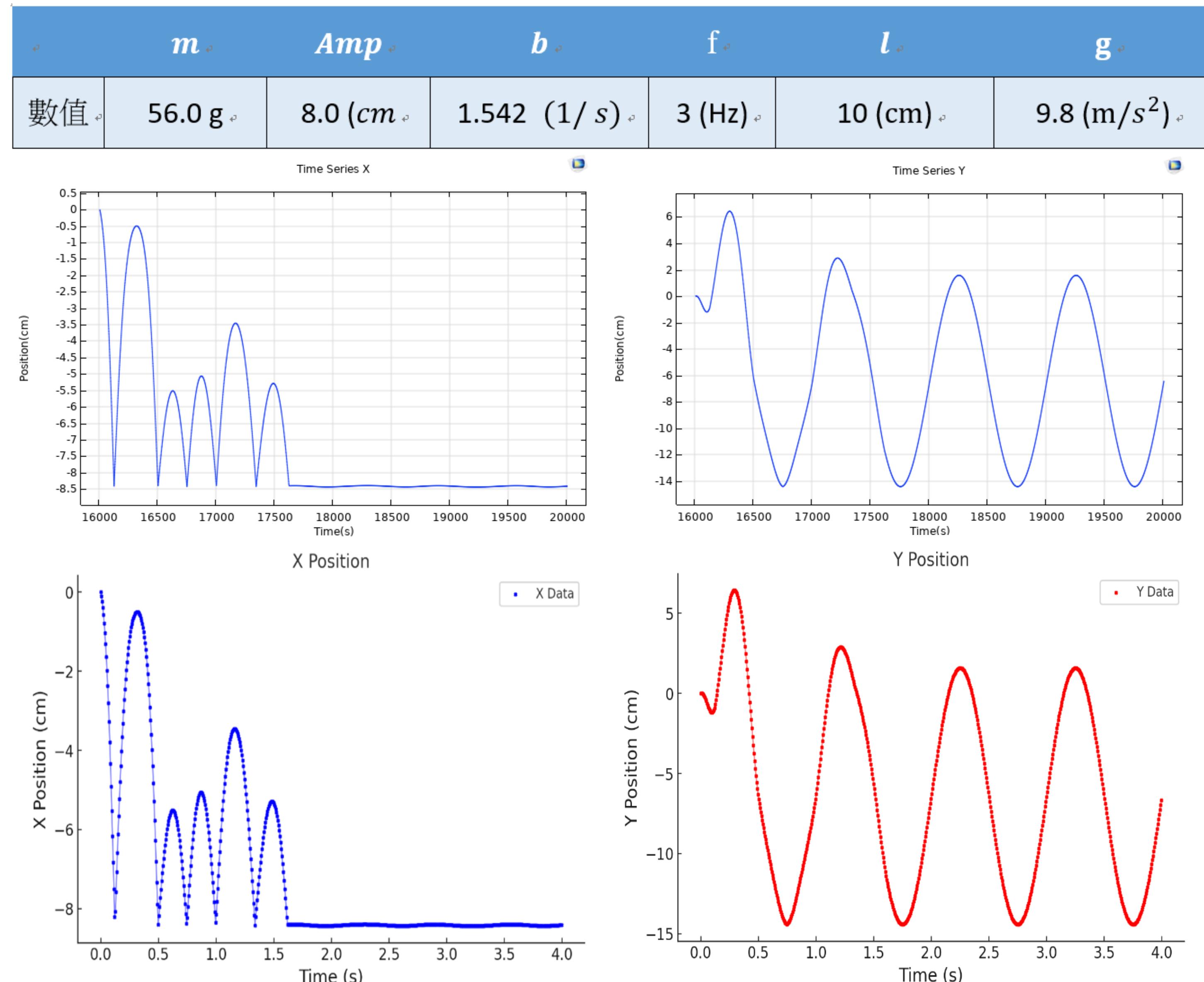
$$2f_0 = 3.151(Hz)$$

研究(二) 實驗與模擬結果之比較

實驗2-1 方程式的驗證：藉數值模擬討論

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g \cos \theta + L \dot{\theta}^2}{L} \right) \sin \theta - \frac{A_{pivot} \omega_{pivot}^2}{L} \cos(\omega_{pivot} t) \sin \theta + b \frac{d\theta}{dt} = 0$$

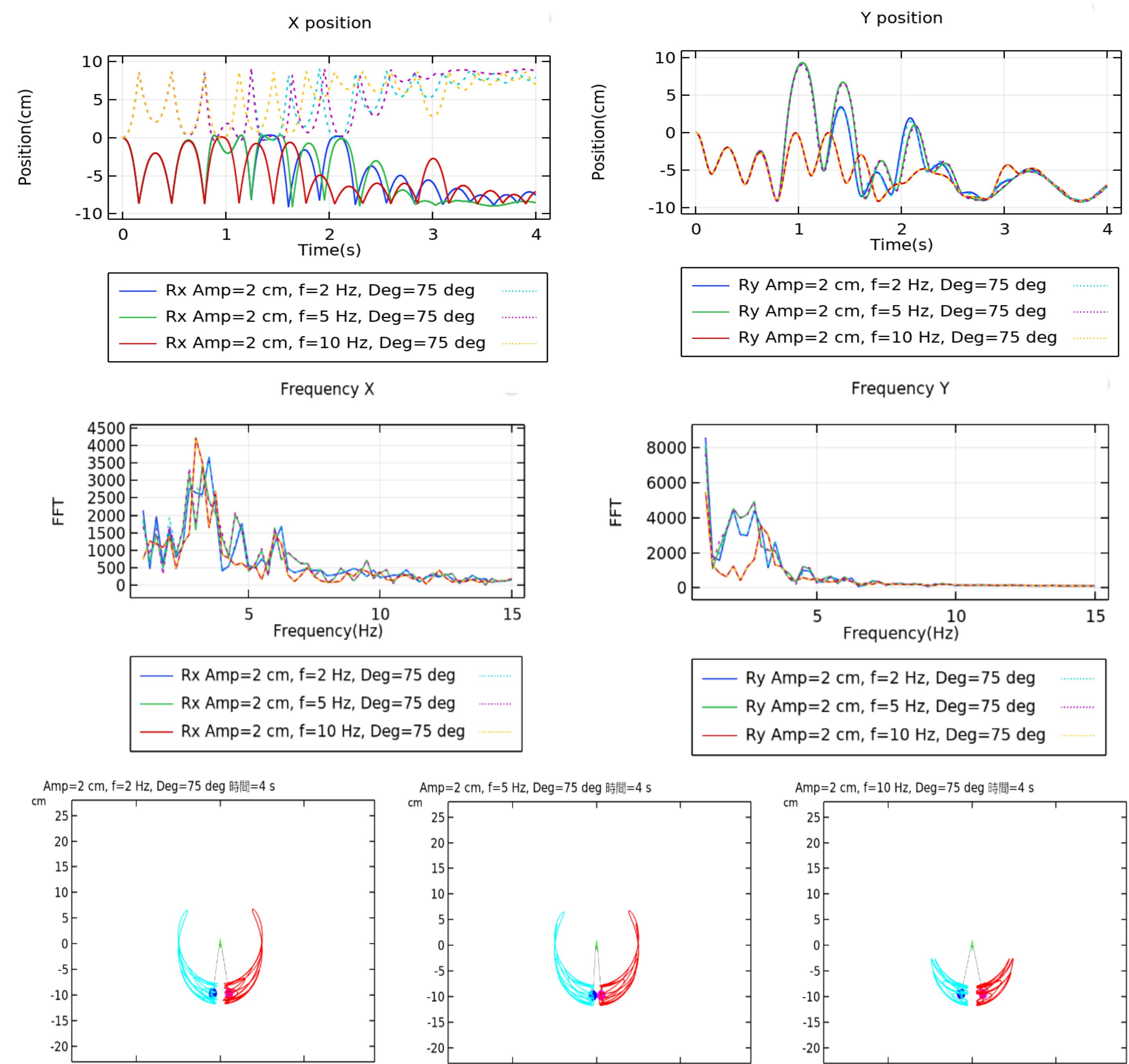
在上述等式中，公式右項可以分成三個部分討論：單擺運動、驅動力、阻尼項



上圖比較中，可觀察到模擬結果與實驗數據的波形對應良好，兩者的波動出現位置相同，且振幅衰減趨勢一致，顯示理論模型能準確描述其運動行為。因此，理論推導出的運動方程式是合理的。我們將進一步對該運動方程式的係數調整，設立不同變因以進行更深入的實驗驗證。

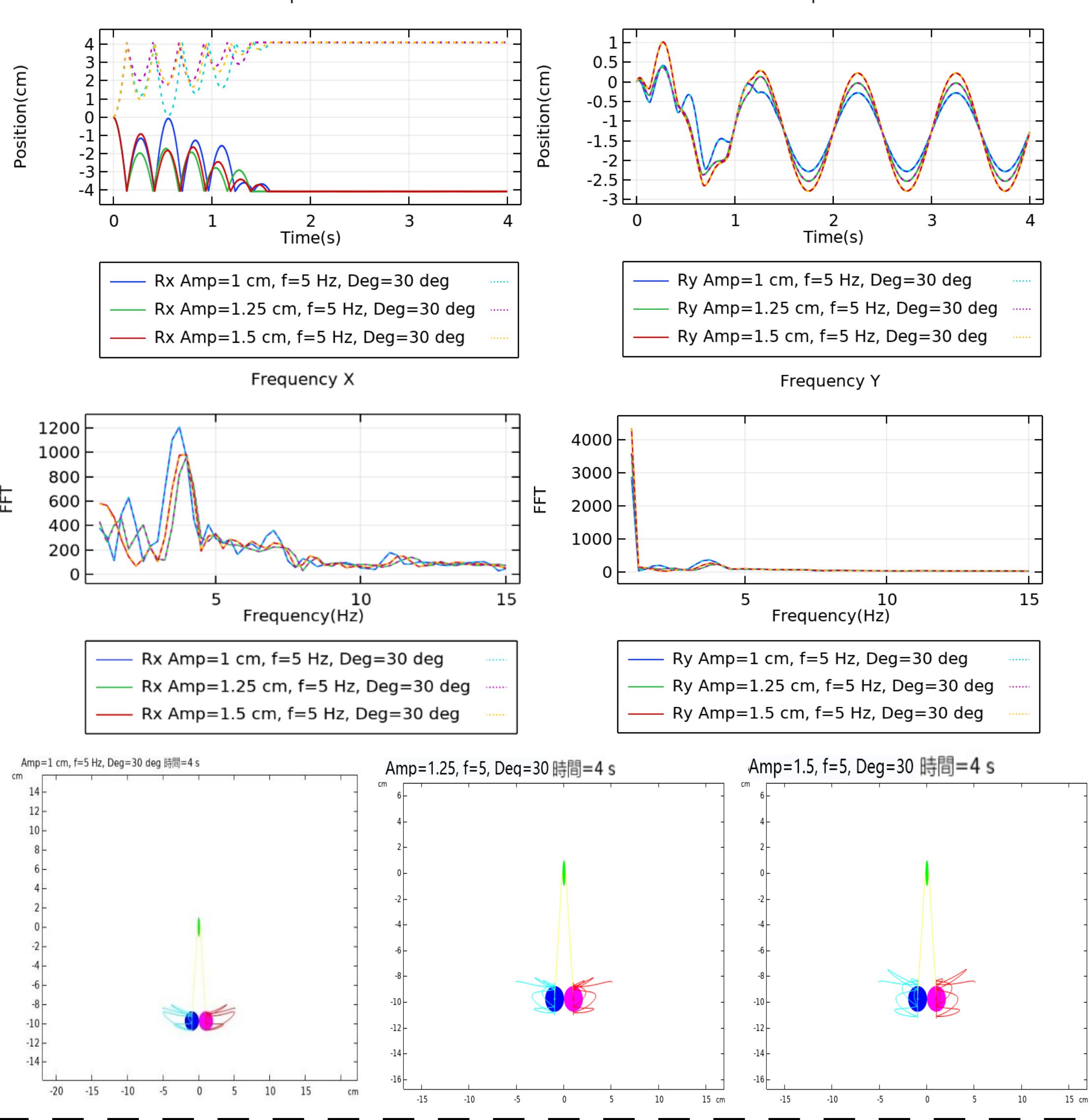
研究(三) 針對震盪頻率、振幅、釋放角度探討Lato-Lato之可行性

實驗3-1 探討改變震盪頻率對於運動軌跡的影響



- X方向對頻率變化較敏感：當震盪頻率增加時，X方向的運動變得更加混亂，顯示強迫震盪可能導致非線性耦合效應。
- (2 Hz) 運動較規律，中頻(5 Hz)開始出現調制，高頻(10 Hz)呈現非線性行為。
- FFT 分析顯示主要頻率範圍約為 3~6 Hz，5 Hz 條件下的 FFT 峰值較高，顯示此頻率可能接近系統的自然頻率(3.18 Hz)。
- 高頻(10 Hz)下 FFT 峰值較弱，可能是因為此頻率超過系統共振頻率，無法有效激發共振。

實驗3-2 探討改變震盪振幅對於運動軌跡的影響



1. X 方向運動衰減快速，震幅變化主要影響初始擺幅，但不影響運動模式。

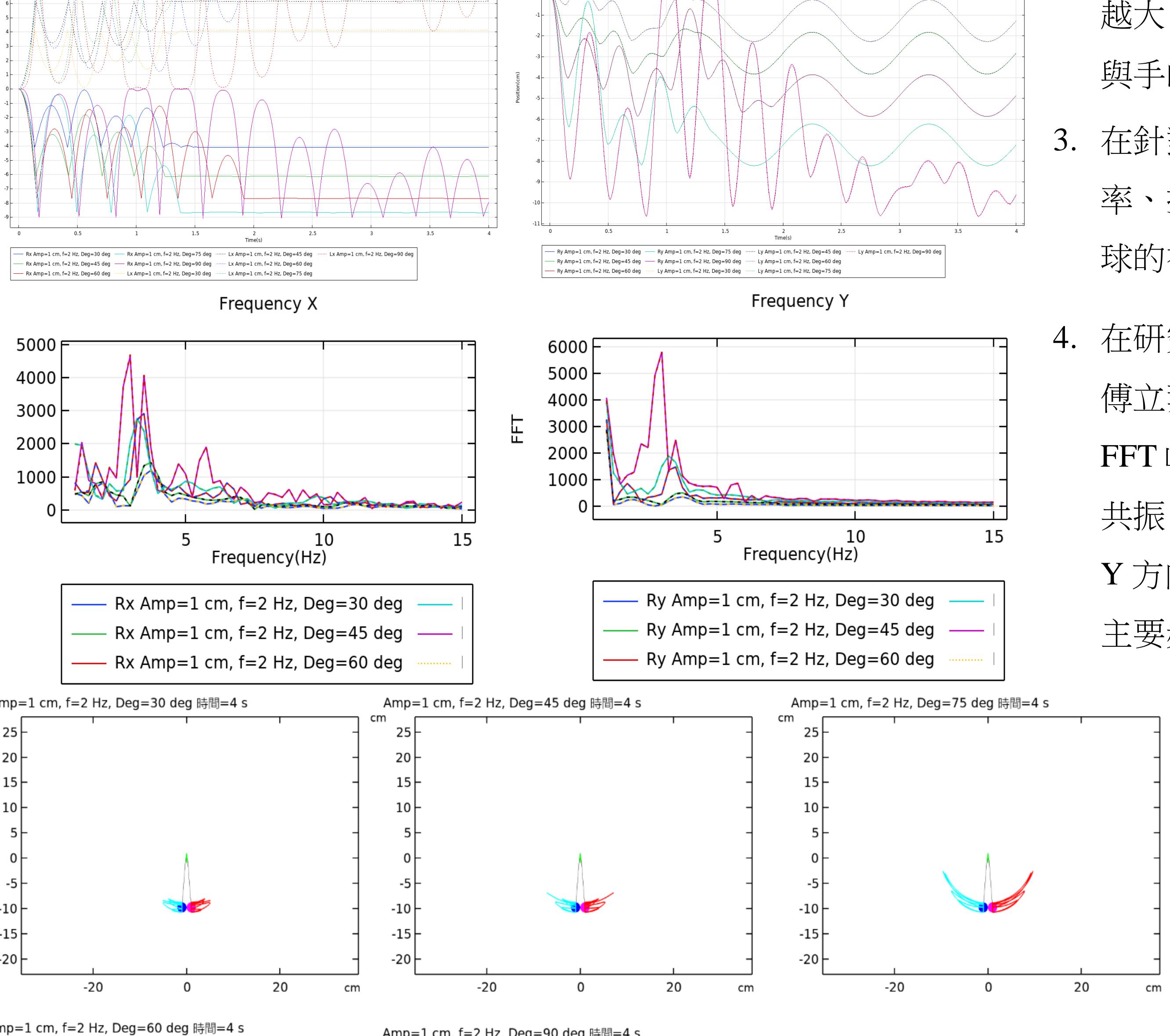
2. Y 方向運動較為穩定，不受震幅影響，擺盪模式由系統本身決定。

3. 若要讓兩球在上方碰撞，單純調整震幅可能效果有限，更重要的是調整驅動條件或初始擺放位置。

4. X 方向的運動能量快速衰減，可能與阻尼或能量轉移到 Y 方向有關。

5. 震幅影響 X 方向的 FFT 能量分佈，但不影響主要頻率範圍，Y 方向則完全不受影響。

實驗3-3 探討改變球初始釋放角度對於運動軌跡的影響



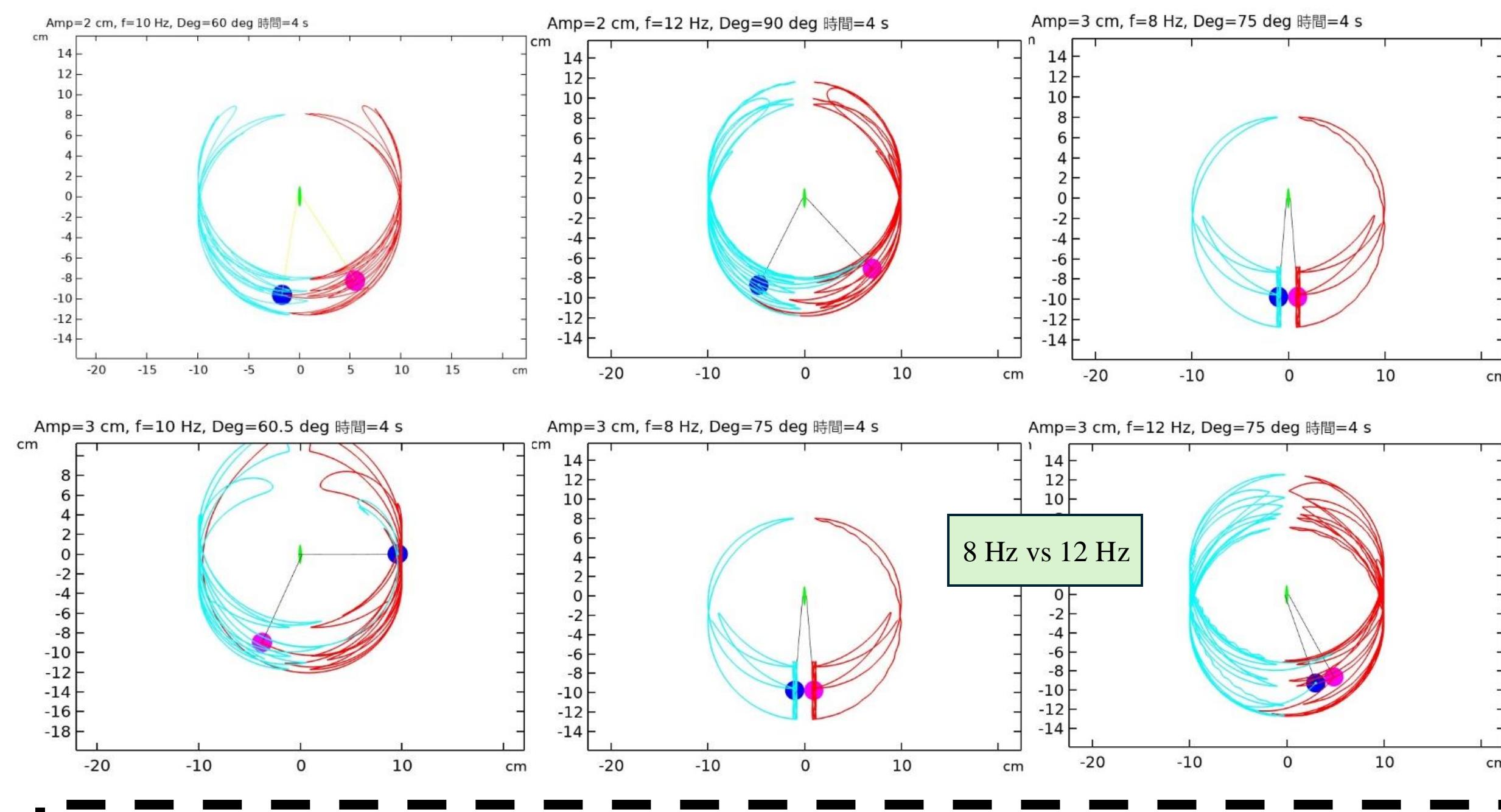
1. X 方向運動對初始角度影響較大，初始角度增加會導致運動幅度增加，並可能產生更複雜的運動模式。

2. Y 方向運動較為穩定，受初始角度影響較小，主要影響擺幅大小但不影響運動頻率。

4. FFT 分析顯示，X 方向運動的能量分佈會隨初始角度改變，但主要頻率仍然維持在 3~6 Hz。

5. Y 方向的運動頻率幾乎不受初始角度影響，主要維持在 2~3 Hz，顯示其受擺盪機制主導。

實驗3-4 探討改變球初始釋放角度、振盪器之頻率和振幅使兩顆球在上方碰撞



1. 初始角度是影響最大的變因，直接決定球是否能到達頂部。

2. 震盪頻率影響球的同步性，若頻率選擇適當，可提高碰撞機率。

3. 振幅影響擺動範圍，但影響程度相對較小，適當調整即可。

→ 若要促進頂部碰撞，應優先選擇合適的初始角度，其次調整震盪頻率，最後微調振幅以最佳化運動模式。

伍、結論

- 在建設理論的過程中，我們第一步先採用單擺的系統進行討論在建設理論的過程中，我們第一步先採用單擺的系統進行討論，同時也進行了在無外部驅動力下擺動的實驗得知相關現象，如自然頻率、非彈性碰撞。之後加入驅動力、阻尼力的考量，在推導相關公式後，模擬與實驗數值擬合後發現非常相似，因此推論出的公式具有一定參考價值。我們推廣並建立了能描述Lato-Lato之運動方程式，於實驗數據中的整合也發現其極高的擬合度，因此我們所設計的理論方程式對於描述該Lato-Lato運動模式是有很高的參考價值。
- 在初步觀察Lato-Lato運動情形時，我們發現了X方向位移、Y方向，在理論推導中得知，兩顆球的振幅（X方向位移）會隨著時間推進而越來越大，開始發生能量堆積，導致振幅越來越大。而兩顆球的Y方向位移與手的Y方向位移互為相反方向，當球向下相撞時，手恰好往上拉。
- 在針對推廣之運動方程式討論影響參數時，我們發現振盪器的震盪頻率、振幅都會影響球的運動軌跡，在研究（三）的實驗中發現，改變球的初始釋放角度間接導致能量的變化，因此影響運動軌跡最大。
- 在研究（三）中我們也做了改變震盪頻率、震盪振幅的相關實驗，在傅立葉分析圖中可以得知，於特定的頻率範圍之中，改變震盪頻率的FFT峰值較弱，可能是因為此頻率超過系統共振頻率，無法有效激發共振。改變震幅影響X方向的FFT能量分佈，但不影響主要頻率範圍，Y方向則完全不受影響。X方向運動的能量分佈會隨初始角度改變，但主要頻率仍然維持在3~6 Hz，同時與兩倍自然頻率吻合。

- 在進行與實際數值之比較中我們發現，由理論推出之理論值與實驗值之誤差為2.3%，更增加了運動方程式對於預測Lato-Lato運動軌跡之可能性。

陸、引用資料

- Cross, R. (2023). Newton's Cradle with Two Balls. *The Physics Teacher*, 61(4), 260–262. <https://doi.org/10.1119/5.0082363>
- Fitrianingrum, A. M., & Kamaruddin, K. (2023). Analisis Konsep Momentum dan Tumbukan pada Permainan Lato-Lato. *Jurnal FisTa : Fisika Dan Terapannya*, 4(1), 1–4. <https://doi.org/10.53682/fista.v4i1.235>
- Funata, F. C., & Abidin, Z. (2024a). Playing lato-lato is difficult and this is why. *European Journal of Physics*, 45(4), 045007. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ad523a>
- Funata, F. C., & Abidin, Z. (2024b). Playing lato-lato is difficult and this is why. *European Journal of Physics*, 45(4), 045007. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/ad523a>
- Glendinning, P. (2011). Two-ball Newton's cradle. *Physical Review E*, 84(6). <https://doi.org/10.1103/physreve.84.067201>
- Hessel, R., Perinotto, A. C., Alfaro, M., & Freschi, A. A. (2006). Force-versus-time curves during collisions between two identical steel balls. *American Journal of Physics*, 74(3), 176–179. <https://doi.org/10.1119/1.2173276>
- Wibowo, E. (2023). Determine g using Lato Lato. *Physics Education*, 58(4), 045009. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/acdb39>
- Wibowo, E., Nailly Ulya, & Putut Marwoto. (2024). Demonstration of conservation of momentum using Lato Lato 2.0. *Physics Education*, 59(2), 025025–025025. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/ad240c>
- Wibowo, E., Nailly Ulya, Putut Marwoto, None Suwandi, & None Suproyogi. (2024). The dynamics of Lato Lato ball collisions. *Physics Education*, 59(5), 055002–055002. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/ad5780>